

1. Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ en los puntos $x = -2$, $x = 1$ y $x = 3$. Donde no sea continua decir el tipo de discontinuidad. Si alguna de las discontinuidades es de salto indicar la longitud del mismo. (3 puntos: 1 por el estudio de la continuidad en cada uno de los puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x-1} & \text{si } x < -2 \\ -2x-3 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ x^2 + x - 7 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \frac{5x+1}{3x-5} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

2. Calcula los siguientes límites. En los apartados a) y b) explica razonadamente por qué el resultado es el que has obtenido. (2 puntos; 0,5 los apartados a) y b) y 1 punto el apartado c)).

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3 + 6x^2 - 2x + 1}{-2x^2 + x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - x^2 - 4x^3 + 1}{2x^2 + 2x^3 - 3x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x^3 - 3x^2 - 4}{2x^2 + x - 6}$

3. Halla las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas. Si alguna de las funciones no tuviera asíntotas horizontales sitúa la curva cuando x tienda a $+\infty$ y a $-\infty$ (3 puntos; 1,5 por apartado)

a) $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x - 6}$

b) $g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

4. Dada la función $f(x) = \frac{-x^2 + 4}{x^2 + 2x - 3}$, hallar: (2 puntos: 0,5 puntos por apartado)

- Asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales.
- Puntos de corte con los ejes.
- Representación gráfica aproximada.

① $x = -2$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{-3}{-3} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (-2x-3) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1. \text{ Además}$$

$f(-2) = 1$. Entonces $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) \Rightarrow f$ es continua en

$x = -2$.

$x = 1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x-3) = -5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+x-7) = -5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -5.$$

Sin embargo $f(1) = 3$. Entonces $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$. Por tanto

hay una discontinuidad evitable en $x = 1$.

$x = 3$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2+x-7) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5x+1}{3x-5} = \frac{16}{4} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{no existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

porque los límites laterales son distintos. Discontinuidad de salto finito en $x = 3$. Longitud del salto: $L = |l_1 - l_2| = |5 - 4| = \underline{1}$.

② a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3 + 6x^2 - 2x + 1}{-2x^2 + x - 1} = -\infty$ (porque grado del numerador es mayor que el grado del denominador; luego se estudia el signo de los monomios de mayor grado).

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - x^2 - 4x^3 + 1}{2x^2 + 2x^3 - 3x + 2} = -2$ (porque cuando los grados del numerador y denominador son iguales se dividen los coeficientes líderes).

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x^3 - 3x^2 - 4}{2x^2 + x - 6} = \left[\frac{0}{0} \right] = (\text{RUFFINI}) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(-2x^2+x-2)}{(x+2)(2x-3)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x^2+x-2}{2x-3} = \frac{-12}{-7} = \underline{\underline{\frac{12}{7}}}$

③ a) $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-x-6}$

VERTICALES: $x^2-x-6=0 \begin{cases} x=-2 \\ x=3 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2-1}{x^2-x-6} = \left[\frac{7}{0} \right] = \infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow -2^- \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow -2^+ \end{cases}$ $x=-2$ Asíntota vertical

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2-1}{x^2-x-6} = \left[\frac{17}{0} \right] = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 3^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 3^+ \end{cases}$ $x=3$ Asíntota vertical

HORIZONTALES

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2-1}{x^2-x-6} = 2 \Rightarrow \underline{y=2}$ Asíntota horizontal

b) $g(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

VERTICALES: $x^2-4=0 \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3}{x^2-4} = \left[\frac{-8}{0} \right] = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -2^+ \end{cases}$

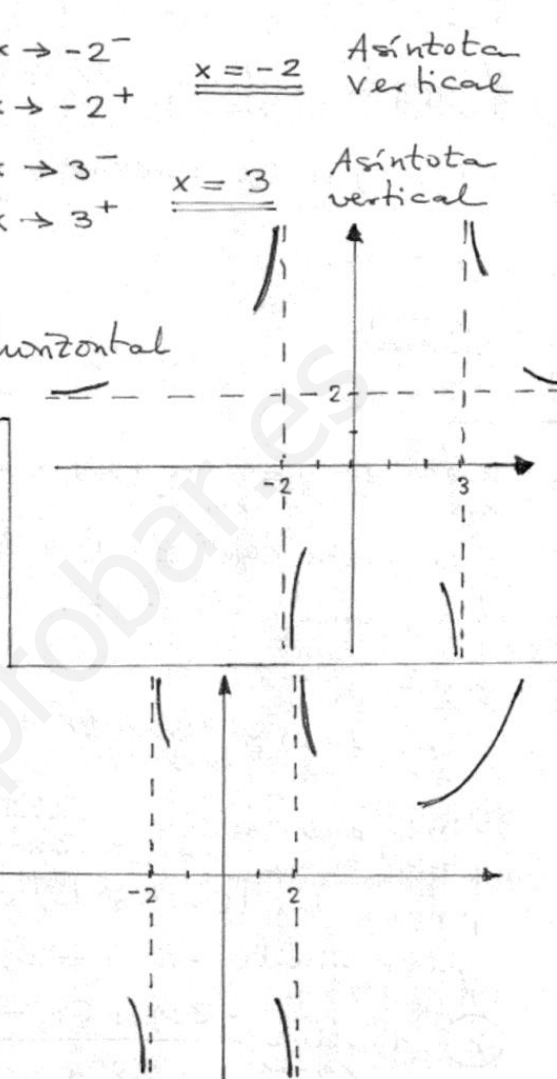
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x^2-4} = \left[\frac{8}{0} \right] = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 2^+ \end{cases}$

Por tanto $x=-2$ y $x=2$ son asíntotas verticales.

HORIZONTALES

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2-4} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$

Por tanto no tiene asíntotas horizontales.



④ VERTICALES:

$x^2+2x-3=0 \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \end{cases}$ Asíntotas verticales

$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-x^2+4}{x^2+2x-3} = \left[\frac{-5}{0} \right] = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -3^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -3^+ \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2+4}{x^2+2x-3} = \left[\frac{3}{0} \right] = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 1^+ \end{cases}$

HORIZONTALES

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2+4}{x^2+2x-3} = -1 \Rightarrow y=-1$ Asíntota horizontal

PUNTOS DE CORTE

* Eje Y: $x=0 \Rightarrow y = -\frac{4}{3} : (0, -\frac{4}{3})$

* Eje X: $y=0 \Rightarrow \frac{-x^2+4}{x^2+2x-3} = 0 \Rightarrow -x^2+4=0$

$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 : (2, 0), (-2, 0)$

