

1. Dada la función  $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 6x - 5 & \text{si } x \leq -1 \\ x + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) Estudia la continuidad de la función. En el punto o en los puntos en los que no sea continua explica el tipo de discontinuidad existente. **(1,5 puntos)**
- b) Representala gráficamente. **(1,5 puntos)**

www.yoquieroaprobar.es

2. Calcular los siguientes límites: (3 puntos)

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^4 - 3x + 1}}{3x^2 + 6x - 5} =$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x - 1}) =$

c)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{x^2 - 8x + 7} =$

3. Dada la función  $f(x) = \begin{cases} |x+3| & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{3x}{2x-k} & \text{si } -2 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- a) Halla el valor de  $k$  para que la función sea continua en el punto  $x = -2$ . **(1 punto)**
- b) Para el valor de  $k$  hallado en el apartado anterior, estudia la continuidad de la función en el punto  $x = 1$ . **(1 punto)**
- c) Representa la función utilizando como valor de  $k$  el hallado en el apartado a). **(2 puntos)**

www.yoquieroaprobar.es

$$1. \text{ Dada la función } f(x) = \begin{cases} -x^2 - 6x - 5 & \text{si } x \leq -1 \\ x+1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función. En el punto o en los puntos en los que no sea continua explica el tipo de discontinuidad existente. **(1,5 puntos)**

b) Representala gráficamente. **(1,5 puntos)**

a)  $f$  es continua en todo su dominio ( $\mathbb{R}$ ) salvo, de momento, en  $x = -1$  y  $x = 1$ . Pasamos a estudiar la continuidad en estos puntos:

\*  $\boxed{x = -1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (-x^2 - 6x - 5) = 0 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$$

Además  $f(-1) = 0$ . Entonces, como  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 = f(-1)$ ,

$f$  es continua en  $x = -1$

\*  $\boxed{x = 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} = 2$$

Por otro lado  $f(1) = 3$ . Como  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \neq f(1) = 3$

entonces  $f$  no es continua en  $x = 1$ . Hay una

discontinuidad evitable.

2. Calcular los siguientes límites: (3 puntos)

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^4 - 3x + 1}}{3x^2 + 6x - 5} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^4 - 3x + 1}}{3x^2 + 6x - 5} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^4 - 3x + 1}{x^4}}}{\frac{3x^2 + 6x - 5}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^4}{x^4} - \frac{3x}{x^4} + \frac{1}{x^4}}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{6x}{x^2} - \frac{5}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}}}{3 + \frac{6}{x} - \frac{5}{x^2}} = \frac{\sqrt{9 - 0 + 0}}{3 + 0 - 0} = \frac{\sqrt{9}}{3} = \frac{3}{3} = \underline{\underline{1}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - (x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{x^2 - 8x + 7} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt{x-3} - 2)(\sqrt{x-3} + 2)}{(x^2 - 8x + 7)(\sqrt{x-3} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 3 - 4}{(x^2 - 8x + 7)(\sqrt{x-3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{(x^2 - 8x + 7)(\sqrt{x-3} + 2)}$$

$$= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{(x - 7)(x - 1)(\sqrt{x-3} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{(x - 1)(\sqrt{x-3} + 2)} = \frac{1}{6 \cdot (2 + 2)} = \underline{\underline{\frac{1}{24}}}$$

3. Dada la función  $f(x) = \begin{cases} |x+3| & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{3x}{2x-k} & \text{si } -2 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Halla el valor de  $k$  para que la función sea continua en el punto  $x = -2$ . (1 punto)

b) Para el valor de  $k$  hallado en el apartado anterior, estudia la continuidad de la función en el punto  $x = 1$ . (1 punto)

c) Representa la función utilizando como valor de  $k$  el hallado en el apartado a) (2 puntos)

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} |x+3| = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x}{2x-k} = \frac{-6}{-4-k} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)} \right\} \text{Para que exista el límite}$$

$$1 = \frac{-6}{-4-k} \Rightarrow -4-k = -6 \Rightarrow -k = -2 \Rightarrow \underline{\underline{k=2}}$$

Para  $k=2$  tenemos pues:  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1 = f(-2)$  y

por tanto  $f$  es continua en  $x = -2$ .

b) Si  $k=2$  la función es  $f(x) = \begin{cases} |x+3| & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{3x}{2x-2} & \text{si } -2 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

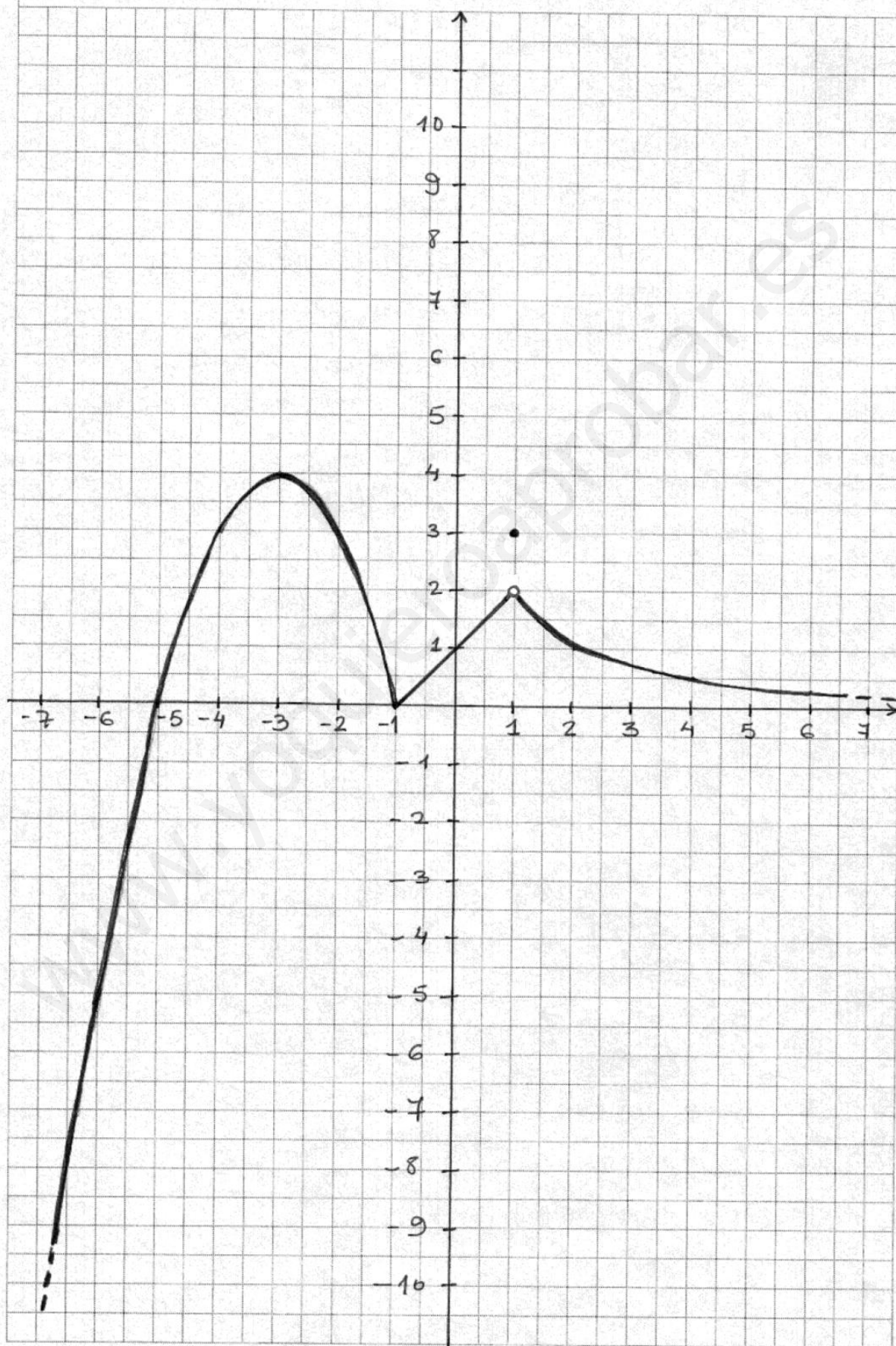
Entonces, en el punto  $x=1$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x}{2x-2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 2x) = -1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)} \right\} \Rightarrow \text{como no coinciden}$$

los límites laterales,  $f$  no es continua en  $x=1$ .

Hay una DISCONTINUIDAD DE SALTO INFINITO.

Representación gráfica correspondiente al ejercicio 1



Representación gráfica correspondiente al ejercicio 3

