III ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Página 282

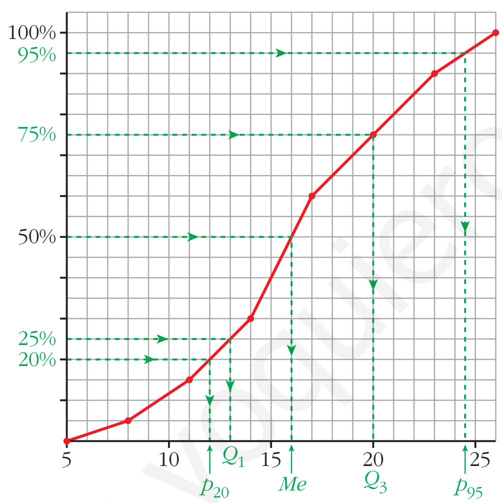
1 **La gráfica es el polígono de porcentajes acumulados correspondiente a la distribución de las edades, en meses, de los niños de una guardería (repartidos en 7 intervalos de 3 en 3 meses).**

a) Trabajando sobre el gráfico, asigna, aproximadamente, los valores de Q_1, Me, Q_3, p_{20}, p_{95}.

b) ¿Qué percentil tiene un bebé de 8 meses? ¿Y uno de 18?

Resolución

a)



Q_1 = 13 meses

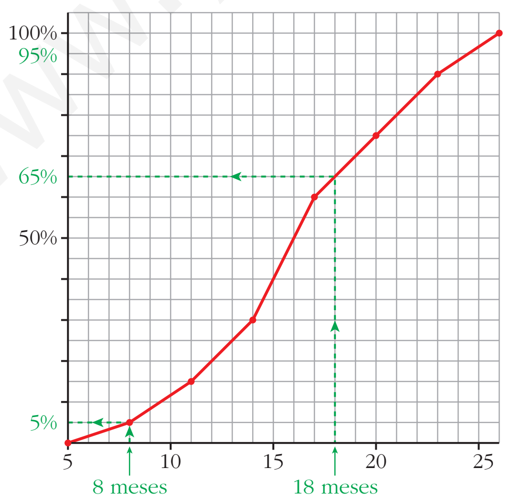
Me = 16 meses

Q_3 = 20 meses

p_{20} = 12 meses

p_{95} = 24,5 meses

b)



El percentil de un bebé de 8 meses es p_5.

El percentil de un bebé de 18 meses es p_{65}.

2 **Considera la siguiente tabla de frecuencias:**

INTERVALOS	(6, 8]	(8, 10]	(10, 12]	(12, 14]	(14, 16]	(16, 18]	(18, 20]
FRECUENCIAS	8	10	17	25	18	12	10

a) Halla: $\bar{x}$, σ, y C.V.

b) Halla: p_{90}, p_{15} y *Me*.

Resolución

a)

INTERVALOS	MARCA DE CLASE x_i	FRECUENCIA f_i
(6, 8]	7	8
(8, 10]	9	10
(10, 12]	11	17
(12, 14]	13	25
(14, 16]	15	18
(16, 18]	17	12
(18, 20]	19	10
		100

$\sum f_i = 100$

$\sum f_i x_i = 1\,322$

$\sum f_i x_i^2 = 18\,612$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1\,322}{100} = 13{,}22$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{100} - 13{,}22^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{18\,612}{100} - 13{,}22^2} = 3{,}37$$

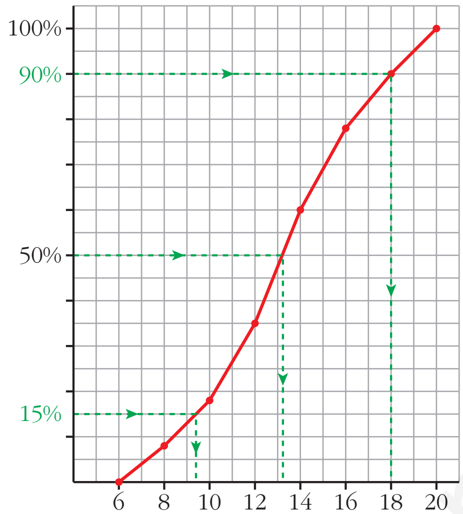
$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0{,}255 = 25{,}5\%$$

b) Para el cálculo de las medidas de posición, es necesario obtener las frecuencias (o porcentajes) acumuladas.

VALORES	FRECUENCIAS	FREC. ACUMULADAS
6 – 8	8	8
8 – 10	10	18
10 – 12	17	35
12 – 14	25	60
14 – 16	18	78
16 – 18	12	90
18 – 20	10	100

Como hay 100 individuos (n = 100), los porcentajes acumulados coinciden con las frecuencias acumuladas.

La obtención gráfica de las medidas de posición es solo aproximada:



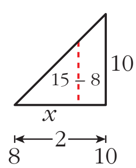
$p_{90} = 18$

$p_{15} \approx 9{,}4$

$Me \approx 13{,}2$

Obtención numérica:

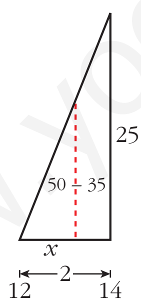
- $p_{90} = 18$ es exacto, pues se alcanza el 90% en el extremo superior del intervalo (16, 18].
- p_{15}



$$\frac{x}{7} = \frac{2}{10} \rightarrow x = 1{,}4$$

$$p_{15} = 8 + 1{,}4 = 9{,}4$$

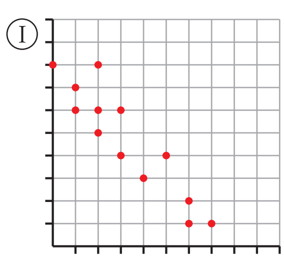
- Me

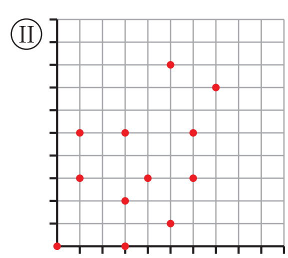


$$\frac{x}{15} = \frac{2}{25} \rightarrow x = 1{,}2$$

$$Me = 12 + 1{,}2 = 13{,}2$$

3 **Observa estas dos distribuciones bidimensionales:**





Asigna a cada una un coeficiente de correlación tomándolo de entre los siguientes valores:

$$0{,}11;\ -0{,}11;\ 0{,}46;\ -0{,}46;\ 0{,}92;\ -0{,}92;\ 1;\ -1$$

Responde razonadamente (observa que no se te pide que hagas operaciones, sino que razones a partir de las nubes de puntos).

Resolución

La correlación de I es fuerte y negativa. El único valor razonable de los que se muestran es –0,92 (–0,46 es demasiado débil y –1 solo sería si todos los puntos estuvieran alineados).

La correlación de II es positiva pero débil. Su valor es 0,46.

4 **A 10 alumnos de una clase se les toman las siguientes medidas:**

***x* = número de faltas de asistencia a clase en 1 mes.**

***y* = nota en matemáticas.**

x	0	2	3	3	4	5	5	6	7	9
y	9	6	4	9	6	1	8	3	5	1

a) Representa la distribución mediante una nube de puntos y calcula: $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x, σ_y, σ_{xy}.

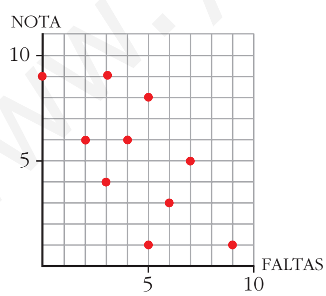
b) Halla el coeficiente de correlación.

c) Halla la recta de regresión de Y sobre X.

d) Otro alumno de la misma clase que haya faltado 1 vez, ¿qué nota en matemáticas estimas que tendrá? ¿Crees que es una buena estimación?

Resolución

a)



$\bar{x} = 4{,}4$, $\bar{y} = 5{,}2$

$\sigma_x = 2{,}46$, $\sigma_y = 2{,}82$, $\sigma_{xy} = -4{,}68$

b) $r = \dfrac{-4{,}68}{2{,}46 \cdot 2{,}82} = -0{,}68$

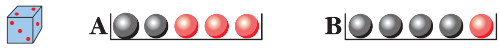
c) $m_{yx} = \dfrac{-4{,}68}{2{,}46^2} = -0{,}77$

Recta de regresión de Y sobre X:

$y = 5{,}2 - 0{,}77(x - 4{,}4) \rightarrow y = -0{,}77x + 8{,}59$

d) $\hat{y}(1) = -0{,}77 \cdot 1 + 8{,}61 = 7{,}82$

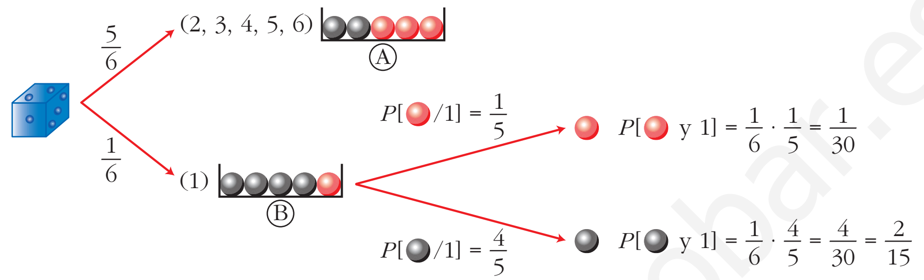
Se estima una nota de 7 u 8 puntos. Pero la estimación es mala, porque la correlación es demasiado baja como para hacer estimaciones muy fiables.

5 

Si en el dado sale 1, sacamos bola de B. Si sale otra puntuación, la sacamos de A. Calcula:

***P*[🔴/1] *P*[🔴 y 1] *P*[⚫/1] *P*[⚫ y 1]**

Resolución



Las probabilidades *P*[🔴/1] y *P*[⚫/1] son, ambas, suponiendo que sale un 1. Por tanto, se calculan en la urna B:

- *P*[🔴/1] es la probabilidad de obtener rojo en la urna B.
- Análogamente, *P*[⚫/1].

La probabilidad *P*[🔴 y 1] exige las dos cosas: que salga 1 y que se obtenga bola roja. Es una probabilidad compuesta:

- $P[1 \text{ y } 🔴] = P[1] \cdot P[🔴/1] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{16}{30}$

Análogamente, $P[1 \text{ y } ⚫] = P[1] \cdot P[⚫/1] = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

6 **En una distribución *N*(0, 1) calcula:**

a) *P*[0,25 < *z* < 1,45] b) *P*[–0,25 < *z* ≤ 1,45]

c) Calcula *k* para que: *P*[–*k* < *z* < *k*] = 0,90

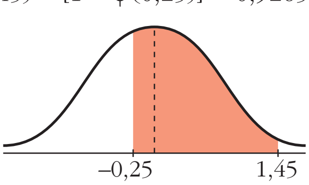
Resolución

z es *N*(0, 1).

a) $P[0{,}25 < z < 1{,}45] = P[z < 1{,}45] - P[z < 0{,}25] = \phi(1{,}45) - \phi(0{,}25) =$

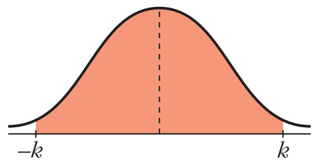
$= 0{,}9265 - 0{,}5987 = 0{,}3278$

b) $P[-0{,}25 < z \le 1{,}45] = \phi(1{,}45) - [1 - \phi(0{,}25)] = 0{,}9265 + 0{,}5987 - 1 = 0{,}5252$



c) $P[-k < z < k] = 2 \cdot P[0 < z < k] = 2 \cdot [P[z < k] - 0{,}5] = 2[\phi(k) - 0{,}5] = 2\phi(k) - 1$

$$2\phi(k) - 1 = 0{,}90 \;\rightarrow\; \phi(k) = \frac{0{,}90 + 1}{2} = 0{,}95 \;\rightarrow\; k \approx 1{,}64$$



7 **En una distribución $N(20, 4)$ calcula:**

a) $P[x = 21]$

b) $P[x < 21]$

c) $P[19 \le x \le 21]$

Resolución

x es $N(20, 4) \;\rightarrow\; z = \dfrac{x - 20}{4}$ es $N(0, 1)$

a) $P[x = 21] = 0$, ya que las probabilidades puntuales son cero en las distribuciones de variable continua.

b) $P[x < 21] = P\left[z < \dfrac{21 - 20}{4}\right] = P[z < 0{,}25] = \phi(0{,}25) = 0{,}5987$

c) $P[19 \le x \le 21] = P\left[\dfrac{19 - 20}{4} \le z \le \dfrac{21 - 20}{4}\right] = P[-0{,}25 \le z \le 0{,}25] =$

$= \phi(0{,}25) - (1 - \phi(0{,}25)) =$

$= 2\phi(0{,}25) - 1 = 2 \cdot 0{,}5987 - 1 = 0{,}1974$

8 **En una distribución $B(10; 0{,}4)$ calcula:**

a) $P[x = 0]$, $P[x = 1]$, $P[x > 1]$

b) Los parámetros μ y σ.

Resolución

$B(10; 0{,}4) \;\rightarrow\; n = 10;\; p = 0{,}4;\; q = 0{,}6$

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) } P[x = 0] = \binom{10}{0} 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^{10} = 0{,}6^{10} = 0{,}0060 \\ &P[x = 1] = \binom{10}{1} 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^9 = 10 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^9 = 0{,}0403 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow P[x = 0 \text{ ó } x = 1] = \\ &= 0{,}0463 \\ &\rightarrow P[x > 1] = 1 - 0{,}0463 = \\ &= 0{,}9537 \end{aligned}$$

b) $\mu = np = 10 \cdot 0{,}4 = 4$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{2{,}4} = 1{,}55$

9 **La proporción de personas nacidas un 29 de febrero es 1/1 461. Justifica por qué. ¿Cuál es la probabilidad de que en una localidad de 20 000 habitantes haya menos de 8 personas nacidas un 29 de febrero?**

Resolución

- "29 de febrero" hay uno cada cuatro años. ¿Cuántos días son?:

  $365 \cdot 3 + 366 = 1\,461$

  Así, $P[29 \text{ de febrero}] = \dfrac{1}{1\,461}$.

- Es una distribución binomial con $n = 20\,000$ y $p = \dfrac{1}{1\,461}$.

  En una $B\left(20\,000, \dfrac{1}{1\,461}\right)$, $\mu = 20\,000 \cdot \dfrac{1}{1\,461} = 13{,}69$

$$\sigma = \sqrt{20\,000 \cdot \frac{1}{1\,461} \cdot \frac{1\,460}{1\,461}} = 3{,}70$$

Podemos calcular las probabilidades a partir de la normal $N(13{,}69;\ 3{,}70)$.

$$x \text{ es } B\left(20\,000, \frac{1}{1\,461}\right) \to x' \text{ es } N(13{,}69;\ 3{,}70) \to$$

$$\to z \text{ es } N(0, 1) \text{ con } z = \frac{x' - 13{,}69}{3{,}70}$$

$$P[x < 8] = P[x \le 7] = P[x' \le 7{,}5] = P\left[z \le \frac{7{,}5 - 13{,}69}{3{,}70}\right] = P[z \le -1{,}67] =$$

$$= 1 - \phi(1{,}67) = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$$

Es poco probable que haya menos de 8 personas nacidas un día tan singular.

10 **a) Calcula k para que la siguiente tabla corresponda a una distribución de probabilidad:**

x_i	11	12	13	14	15	16
p_i	0,15	0,1	0,12	0,17	k	k

b) Halla $P[13 \le x_i \le 15]$.

c) Calcula los parámetros μ y σ.

Resolución

a) $0{,}15 + 0{,}10 + 0{,}12 + 0{,}17 + k + k = 1 \to 0{,}54 + 2k = 1 \to k = 0{,}23$

x_i	11	12	13	14	15	16
p_i	0,15	0,1	0,12	0,17	0,23	0,23

b) $P[13 \le x_i \le 15] = P[13] + P[14] + P[15] = 0{,}12 + 0{,}17 + 0{,}23 = 0{,}52$

c) $\mu = \Sigma p_i x_i = 13{,}92$; $\sigma = \sqrt{\Sigma p_i x_i^2 - \mu^2} = 1{,}73$