

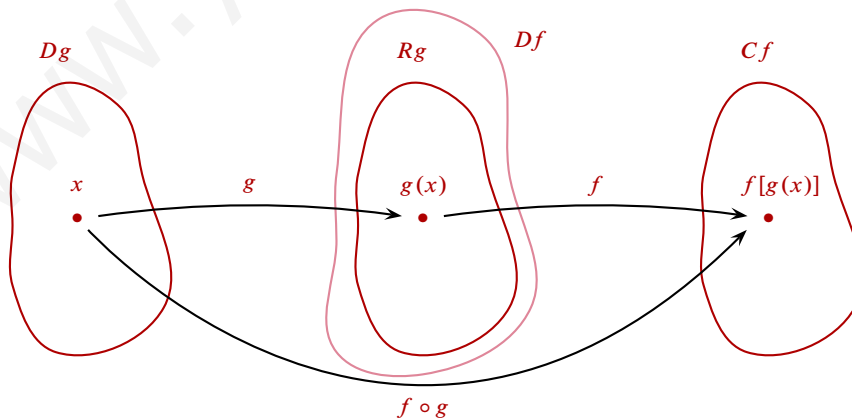
Funciones

Composición de funciones

Definiremos otra nueva función, la composición de g seguida de f , denotada por $f \circ g$. El dominio de $f \circ g$ es un subconjunto del dominio de g y se expresa como $D_{f \circ g}$. El contradominio de $f \circ g$ es el contradominio de f . A cualquier elemento $x \in D_{f \circ g}$ la función $f \circ g$ le hace corresponder $f[g(x)]$. Así:

$$(f \circ g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f[g(x)].$$

La función $f \circ g$ se denomina también como g compuesta con f .



El dominio de esta función es

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{ x \in \mathbb{R} \mid (f \circ g)(x) \in \mathbb{R} \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid f[g(x)] \in \mathbb{R} \} = \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R} \ \& \ f[g(x)] \in \mathbb{R} \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \in D_g \ \& \ g(x) \in D_f \} = \\ &= \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.1 Dadas las funciones

$$f(u) = \sqrt{25-u}, \quad g(t) = t^2 + 9 \quad \& \quad h(y) = \sqrt{y-5}.$$

1. Obtener los dominios de f , g & h .
2. Obtener $(h \circ g)(x)$ y el dominio de $h \circ g$.
3. Obtener $(g \circ h)(x)$ y el dominio de $g \circ h$.
4. Obtener $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.
5. Obtener $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.
6. Obtener $(h \circ f)(x)$ y el dominio de $h \circ f$.
7. Obtener $(f \circ h)(x)$ y el dominio de $f \circ h$.



1.
$$D_f = \{ u \in \mathbb{R} \mid f(u) \in \mathbb{R} \} = \{ u \in \mathbb{R} \mid \sqrt{25-u} \in \mathbb{R} \} =$$
$$= \{ u \in \mathbb{R} \mid 25-u \geq 0 \} = \{ u \in \mathbb{R} \mid u \leq 25 \} = (-\infty, 25];$$
$$D_g = \{ t \in \mathbb{R} \mid g(t) \in \mathbb{R} \} = \{ t \in \mathbb{R} \mid (t^2 + 9) \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R};$$
$$D_h = \{ y \in \mathbb{R} \mid h(y) \in \mathbb{R} \} = \{ y \in \mathbb{R} \mid \sqrt{y-5} \in \mathbb{R} \} =$$
$$= \{ y \in \mathbb{R} \mid y-5 \geq 0 \} = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 5 \} = [5, +\infty).$$

2.
$$(h \circ g)(x) = h[g(x)] = h(x^2 + 9) = \sqrt{(x^2 + 9) - 5} = \sqrt{x^2 + 4}.$$

Vemos que $g(x) \in D_h \Rightarrow g(x) \in [5, +\infty) \Rightarrow x^2 + 9 \geq 5$.

$$D_{h \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_h \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 9 \geq 5 \} =$$
$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq -4 \} = \mathbb{R}.$$

3.
$$(g \circ h)(x) = g[h(x)] = g(\sqrt{x-5}) = (\sqrt{x-5})^2 + 9 = x - 5 + 9 = x + 4;$$
$$D_{g \circ h} = \{ x \in D_h \mid h(x) \in D_g \} = \{ x \geq 5 \mid \sqrt{x-5} \in \mathbb{R} \} =$$
$$= \{ x \geq 5 \mid x \geq 5 \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5 \} = [5, +\infty).$$

Como se puede apreciar la composición de funciones no es conmutativa. Esto es, en general

$$(g \circ h)(x) \neq (h \circ g)(x).$$

4.
$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{25-x}) = (\sqrt{25-x})^2 + 9 = 25 - x + 9 = 34 - x;$$
$$D_{g \circ f} = \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \} = \{ x \leq 25 \mid \sqrt{25-x} \in \mathbb{R} \} =$$
$$= \{ x \leq 25 \mid 25-x \geq 0 \} = \{ x \leq 25 \mid 25 \geq x \} =$$
$$= \{ x \leq 25 \mid x \leq 25 \} = (-\infty, 25].$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad (f \circ g)(x) &= f[g(x)] = f(x^2 + 9) = \sqrt{25 - (x^2 + 9)} = \sqrt{25 - x^2 - 9} = \sqrt{16 - x^2}; \\
 D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 9 \leq 25\} = \\
 &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 16\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2} \leq \sqrt{16}\} = \\
 &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 4\} = [-4, 4].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad (h \circ f)(x) &= h[f(x)] = h(\sqrt{25 - x}) = \sqrt{\sqrt{25 - x} - 5}; \\
 D_{h \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_h\} = \{x \leq 25 \mid \sqrt{25 - x} \in [5, +\infty)\} = \\
 &= \{x \leq 25 \mid \sqrt{25 - x} \geq 5\} = \{x \leq 25 \mid 25 - x \geq 25\} = \\
 &= \{x \leq 25 \mid -x \geq 0\} = \{x \leq 25 \mid x \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} = \\
 &= (-\infty, 0].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad (f \circ h)(x) &= f[h(x)] = f(\sqrt{x - 5}) = \sqrt{25 - \sqrt{x - 5}}; \\
 D_{f \circ h} &= \{x \in D_h \mid h(x) \in D_f\} = \{x \geq 5 \mid \sqrt{x - 5} \leq 25\} = \\
 &= \{x \geq 5 \mid x - 5 \leq 625\} = \{x \geq 5 \mid x \leq 630\} = [5, 630].
 \end{aligned}$$

□

Ejercicios 2.4.1

1. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{7 - x}$ & $g(x) = |5 - 8x|$, obtener el dominio de f , $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.
2. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{9 - 2x}$, $g(x) = |3x - 4|$ & $h(x) = x^2 - 5$, obtener $\left(\frac{f}{h}\right)(x)$ y $(f \circ g)(x)$, así como los dominios de las funciones $\frac{f}{h}$ & $f \circ g$.
3. Sean las funciones $f(x) = \sqrt{x + 3}$ & $g(x) = \frac{1}{x^2 - 5}$. Calcular, obtener o determinar, según proceda:
 - a. Dominios de f , g , $f + g$ & fg .
 - b. $f[g(-3)]$, $g[f(6)]$ y el dominio de $g[f(x)]$.
4. Si $f(x) = x^3 + 2$ & $g(x) = \frac{2}{x - 1}$:
 - a. Encuentre los dominios de f y de g .

b. Dé las reglas de correspondencia así como los dominios de las siguientes funciones:

$$\frac{g}{f}; \quad g \circ f \ \& \ f \circ g.$$

5. Si $f(x) = \sqrt{4-x}$ & $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$, obtener, reduciendo a su mínima expresión: $(f \cdot g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$.

En cada caso proporcionar el dominio de la función.

6. Sean: $f(x) = \sqrt{x+1}$ & $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

a. Obtenga los dominios de f y de g .

b. Obtenga reglas de correspondencia y dominios de las funciones $f+g$, f/g , $f \circ g$, $g \circ f$.

7. Si $f(x) = \sqrt{|3-4x|-4}$, $g(x) = \sqrt{3-2x}$ & $h(x) = \frac{4}{x^2-4}$; encontrar:

a. El dominio de f .

b. Los dominios de g y de h .

c. $(h \circ g)(x)$ y el dominio de $h \circ g$.

8. Dadas las funciones $f(t) = \sqrt{t+3}$, $g(z) = z^2 - 1$ & $h(w) = \sqrt{5-w}$, obtener:

$$\left(\frac{f+h}{g}\right)(x), (g \circ h)(x) \ \& \ (f \circ g)(x),$$

así como los dominios de las respectivas funciones.

9. Sean $f(v) = v^2 - 2v - 3$ & $g(u) = \sqrt{3-u}$, determine:

a. Los dominios de f & g .

b. $(f \circ g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$, indicando el dominio de cada una de las funciones.

10. Sean $f(x) = \sqrt{x-1}$ & $g(x) = |3x+2|$, determine:

a. Los dominios de f & g .

b. $(f \circ g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$ indicando el dominio de cada función.

11. Dadas las funciones $f(t) = \sqrt{t-11}$ & $g(u) = |2u-1|$, obtenga: $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ y los dominios de las funciones $f \circ g$ & $g \circ f$.

12. Si $f(x) = x^2 + 2x + 2$, encuentre dos funciones g para las cuales $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$.

Ejercicios 2.4.1 Composición de funciones, página 3

1. $D_f : (-\infty, 7];$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{7 - |5 - 8x|};$$

$$D_{f \circ g} = \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right].$$

2. $\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{\sqrt{9-2x}}{x^2-5};$

$$D_{\frac{f}{h}} = \left(-\infty, \frac{9}{2}\right) - \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\};$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{9-2|3x-4|};$$

$$D_{(f \circ g)} = \left[-\frac{1}{6}, \frac{17}{6}\right].$$

3. $D_f = (-3, +\infty];$

$$D_g = \mathbb{R} - \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\};$$

$$D_{f+g} = [-3, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty);$$

$$D_{fg} = [-3 - \sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty);$$

$$f[g(-3)] = \frac{\sqrt{13}}{2};$$

$$g[f(6)] = \frac{1}{4};$$

$$D_{g \circ f} = [-3, 2) \cup (2, +\infty).$$

4. $D_f = \mathbb{R}$ y $D_g = \mathbb{R} - \{1\};$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{2}{(x-1)(x^3+2)};$$

$$D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} - \left\{1, \sqrt[3]{-2}\right\};$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{2}{x^3+1};$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\} = \mathbb{R} - \{-1\};$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x + 6}{(x-1)^3};$$

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{1\}.$$

5. $D_f = (-\infty, 4];$

$$D_g = \mathbb{R} - \{-1, +1\};$$

$$(f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2-1};$$

$$D_{f \cdot g} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 4];$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{3-x};$$

$$D_{g \circ f} = (-\infty, 4] - \{3\}.$$

6. $D_f = [-1, +\infty); D_g = \mathbb{R};$

$$(f+g)(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2+1}; D_{f+g} = [-1, +\infty);$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = (x^2+1)\sqrt{x+1}; D_{\frac{f}{g}} = [-1, +\infty);$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}}; D_{f \circ g} = \mathbb{R};$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x+2}; D_{g \circ f} = [-1, +\infty).$$

7. $D_f = \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{7}{4}, +\infty\right);$

$$D_g = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]; D_h = \mathbb{R} - \{-2, 2\};$$

$$(h \circ g)(x) = -\frac{4}{2x+1};$$

$$D_{h \circ g} = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] - \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

8. $\left(\frac{f+h}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}}{x^2-1};$

$$D_{\frac{f+h}{g}} = [-3, 5] - \{\pm 1\};$$

$$(g \circ h)(x) = 4-x; D_{g \circ h} = (-\infty, 5];$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2+2}; D_{f \circ g} = \mathbb{R}.$$

9. $D_f = \mathbb{R}; D_g = (-\infty, 3];$

$$(f \circ g)(x) = -x - 2\sqrt{3-x}; D_{f \circ g} = (-\infty, 3];$$

$$\frac{(g \circ f)(x)}{\sqrt{-x^2+2x+6}} = \frac{\sqrt{3-x^2+2x+3}}{\sqrt{-x^2+2x+6}} =$$

$$D_{g \circ f} = [1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}].$$

10. $D_f = [1, +\infty)$; $D_g = \mathbb{R}$;

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{|3x + 2| - 1};$$

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left(-1, -\frac{1}{3}\right);$$

$$(g \circ f)(x) = |3\sqrt{x-1} + 2|; \quad D_{g \circ f} = [1, +\infty).$$

11. $(f \circ g)(x) = \sqrt{|2x - 1| - 11}$; $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - (-5, 6)$;

$$(g \circ f)(x) = \left|2\sqrt{x-11} - 1\right|; \quad D_{g \circ f} = [11, +\infty).$$

12. $g_1(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geq 2; \\ -x + 1 & \text{si } x < 2. \end{cases}$

$$g_2(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \geq 2; \\ x - 3 & \text{si } x < 2. \end{cases}$$