Examen de Matemáticas Ciencias Sociales I – 1º de Bachillerato

1. Simplifica las siguientes operaciones con potencias: **(1 punto)**

a) $\dfrac{\left(3a^2b^3\right)^4}{54a^6b^{10}}$ **b)** $\dfrac{\left(4x^3\left(y^5\right)^3\right)^3}{\left(2x^2\right)^4 y^6}$

2. Simplifica las siguientes expresiones con radicales: **(1 punto)**

a) $\sqrt{4\cdot\sqrt[3]{8\cdot\sqrt[4]{256}}}$ **b)** $\sqrt{24}+7\sqrt{6}-2\sqrt{486}$

3. Racionaliza y simplifica: **(1 punto)**

a) $\dfrac{a}{\sqrt[9]{a^5}}$ **b)** $\dfrac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{7\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

4. Aplica las propiedades de los logaritmos para simplificar las siguientes expresiones (el resultado de cada una de ellas debe ser un número real): **(1 punto)**

a) $\log_2 8\sqrt{8}$ **b)** $\log\left(\dfrac{0,01}{10^{-4}}\right)^3$

5. Realiza las siguientes divisiones utilizando la regla de Ruffini: **(2 puntos)**

a) $\left(-3x^4-12x^3-x-1\right):\left(x+4\right)$ **b)** $\left(2x^3-x^2+1\right):\left(2x-3\right)$

6. Factoriza los siguientes polinomios: **(2 puntos)**

a) $x^4-9x^2-4x+12$ **b)** $8x^3+14x^2-7x-6$

7. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Calcula el valor de k para que el polinomio $P\left(x\right)=2x^3-kx^2+6$ sea divisible por $x+1$. **(1 punto)**

b) Determinar el polinomio $P\left(x\right)=x^2+ax+b$, sabiendo que tiene por raíces $x=3$ y $x=5$. **(1 punto)**

Ejercicio para contestar voluntariamente:

8. Halla a y b para que el polinomio $A\left(x\right)=x^3+ax+b$ tenga como raíz doble $x=1$. **(2 puntos)**

① a) $\dfrac{(3a^2b^3)^4}{54a^6b^{10}} = \dfrac{3^4\cdot a^8\cdot b^{12}}{2\cdot 3^3\cdot a^6\cdot b^{10}} = \underline{\underline{\dfrac{3a^2b^2}{2}}}$.

b) $\dfrac{\left(4x^3(y^5)^3\right)^3}{(2x^2)^4y^6} = \dfrac{\left(2^2x^3y^{15}\right)^3}{2^4\cdot x^8y^6} = \dfrac{2^6x^9y^{45}}{2^4x^8y^6} = \underline{\underline{2^2xy^{39}}}$

② a) $\sqrt{4\cdot\sqrt[3]{8\cdot\sqrt[4]{256}}} = \sqrt{2^2\cdot\sqrt[3]{2^3\cdot\sqrt[4]{2^8}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^6\cdot 2^3\sqrt[4]{2^8}}} =$

$= \sqrt{\sqrt[3]{2^9\cdot\sqrt[4]{2^8}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{36}\cdot 2^8}}} = \sqrt[24]{2^{44}} = 2\sqrt[24]{2^{20}} = \underline{\underline{2\cdot\sqrt[6]{2^5}}}$

b) $\sqrt{24}+7\sqrt{6}-2\sqrt{486} = \sqrt{2^3\cdot 3}+7\sqrt{6}-2\sqrt{2\cdot 3^5} =$

$= 2\sqrt{6}+7\sqrt{6}-18\sqrt{6} = \underline{\underline{-9\sqrt{6}}}$

③ a) $\dfrac{a}{\sqrt[9]{a^5}} = \dfrac{a\sqrt[9]{a^4}}{\sqrt[9]{a^5}\sqrt[9]{a^4}} = \dfrac{a\sqrt[9]{a^4}}{\sqrt[9]{a^9}} = \dfrac{a\sqrt[9]{a^4}}{a} = \underline{\underline{\sqrt[9]{a^4}}}$

b) $\dfrac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{7\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = \dfrac{(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})(7\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(7\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+2\sqrt{3})} =$

$= \dfrac{21\sqrt{6}+18-28-4\sqrt{6}}{98-12} = \underline{\underline{\dfrac{17\sqrt{6}-10}{86}}}$

④ a) $\log_2 8\sqrt{8} = \log_2 2^3\cdot\sqrt{2^3} = \log_2 2^3\cdot 2^{3/2} = \log_2 2^{9/2} =$

$= \dfrac{9}{2}\log_2 2 = \underline{\underline{\dfrac{9}{2}}}$.

b) $\log\left(\dfrac{0'01}{10^{-4}}\right)^3 = \log\left(\dfrac{10^{-2}}{10^{-4}}\right)^3 = \log(10^2)^3 = \log 10^6 =$

$= 6\log 10 = \underline{\underline{6}}$

⑤ a)

	-3	-12	0	-1	-1
-4		12	0	0	4
	-3	0	0	-1	$\boxed{3}$

Cociente: $C(x) = -3x^3-1$
Resto: $R = 3$ $\Rightarrow$
$-3x^4-12x^3-x-1 = (x+4)(-3x^3-1)+3$

b) Supongamos que $C(x)$ es el cociente y R es el resto. Entonces:

$2x^3-x^2+1 = (2x-3)C(x)+R \Rightarrow x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2} = (x-\frac{3}{2})C(x)+\frac{R}{2}$

	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
	1	1	$\frac{3}{2}$	$\boxed{\frac{11}{4}}$

Cociente: $C(x) = x^2+x+\frac{3}{2}$
Resto: $R = 2\cdot\frac{11}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$ $\Rightarrow$
$2x^3-x^2+1 = (2x-3)\left(x^2+x+\frac{3}{2}\right)+\frac{11}{2}$

(6) a) $x=1$ es raíz pues $1^4-9\cdot 1^2-4\cdot 1+12=1-9-4+12=0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -9 & -4 & 12 \\ 1 & & 1 & 1 & -8 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -8 & -12 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow x^4-9x^2-4x+12=(x-1)(x^3+x^2-8x-12)$$

$x=1$ no vuelve a ser raíz pues $1^3+1^2-8\cdot 1-12=1+1-8-12\neq 0$

Pero sí lo es $x=3$ ya que $3^3+3^2-8\cdot 3-12=27+9-24-12=0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -8 & -12 \\ 3 & & 3 & 12 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow x^4-9x^2-4x+12=(x-1)(x^3+x^2-8x-12)=$$
$$=(x-1)(x-3)(x^2+4x+4)$$

Resolvamos por último la ecuación $x^2+4x+4=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\dfrac{-4\pm 0}{2}=-2$ (raíz doble). Veámoslo:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 4 & 4 \\ -2 & & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & \end{array} \Rightarrow x^4-9x^2-4x+12=(x-1)(x^3+x^2-8x-12)=$$
$$=(x-1)(x-3)(x^2+4x+4)=\underline{\underline{(x-1)(x-3)(x+2)^2}}$$

b) $x=-2$ es raíz:

$$\begin{array}{c|cccc} & 8 & 14 & -7 & -6 \\ -2 & & -16 & 4 & 6 \\ \hline & 8 & -2 & -3 & \boxed{0} \\ \frac{3}{4} & & 6 & 3 & \\ \hline & 8 & 4 & \boxed{0} & \\ -\frac{1}{2} & & -4 & & \\ \hline & 8 & \boxed{0} & & \end{array} \Rightarrow 8x^3+14x^2-7x-6=(x+2)(8x^2-2x-3)$$

Resolvamos la ecuación $8x^2-2x-3=0$

$$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-(-96)}}{16}=\frac{2\pm 10}{16}=\begin{cases}\frac{12}{16}=\frac{3}{4}\\ -\frac{8}{16}=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Por tanto: $8x^3+14x^2-7x-6=(x+2)(8x^2-2x-3)=$
$$=\underline{\underline{8(x+2)\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}}=\underline{\underline{(x+2)(4x-3)(2x+1)}}$$

(7) a) $P(-1)=0 \Rightarrow 2(-1)^3-k(-1)^2+6=0 \Rightarrow -2-k+6=0$
$\Rightarrow -k+4=0 \Rightarrow \underline{\underline{k=4}}$

b) $\left.\begin{array}{l} P(3)=0 \Rightarrow 9+3a+b=0 \\ P(5)=0 \Rightarrow 25+5a+b=0 \end{array}\right\}$. Resolviendo el sistema

se tiene $a=-8$ y $b=15 \Rightarrow \underline{\underline{P(x)=x^2-8x+15}}$

---

(8) Por un lado $A(1)=0 \Rightarrow \underbrace{1+a+b=0}_{(*)}$; o lo que es lo mismo

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & a & b \\ 1 & & 1 & 1 & a+1 \\ \hline & 1 & 1 & a+1 & \boxed{a+1+b=0}\ (*) \end{array} \Rightarrow x^3+ax+b=(x-1)(x^2+x+a+1)$$

Como $x=1$ es raíz doble, debe de ser raíz, por otro lado, de $x^2+x+a+1$ $\quad 1^2+1+a+1=0 \Rightarrow a+3=0$; o lo que es igual

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & a+1 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{a+3=0} \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{a=-3}}$$

Sustituyendo en (*)
$-3+1+b=0 \Rightarrow -2+b=0$
$\Rightarrow \underline{\underline{b=2}}$