-Teoría y Problemas resueltos de Programación Lineal

Objetivos:

- Entender la idea de la Programación lineal y sus aplicaciones a problemas prácticos.
- Plantear problemas de programación lineal en dos variables.
- Conocer los pasos a seguir para resolver problemas de programación lineal en dos variables.
- Discutir la solución óptima de un problema de programación lineal.

En 1947, G. B. Dantzig formula, en términos matemáticos muy precisos, el enunciado estándar al que cabe reducir todo problema de programación lineal. Dantzig, junto con una serie de investigadores del United States Departament of Air Force, formarían el grupo que dio en denominarse *SCOOP* (Scientific Computation of Optimum Programs).

Respecto al método simplex, que estudiaremos después, señalaremos que su estudio comenzó en 1951 y fue desarrollado por Dantzig en el United States Bureau of Standards SEAC COMPUTER, ayudándose de varios modelos de ordenador de la firma International Business Machines (IBM).

Los fundamentos matemáticos de la programación lineal se deben al matemático norteamericano de origen húngaro John (Janos) Von Neumann (1903-1957), quien en 1928 publicó su famoso trabajo *Teoría de juegos.* En 1947 conjetura la equivalencia de los problemas de programación lineal y la teoría de matrices desarrollada en sus trabajos. La influencia de este respetado matemático, discípulo de Dávid Hilbert en Gotinga y, desde 1 930, catedrático de la Universidad de Princeton de Estados Unidos, hace que otros investigadores se interesaran paulatinamente por el desarrollo riguroso de esta disciplina**.**

EN ESTE TEMA TRATAREMOS LOS SIGUIENTES CONTENIDOS:

YA SE HAN TRABAJADO EN CLASE LOS SIGUIENTES CONCEPTOS NECESARIOS PARA ENTENDER LA PROGRAMACIÓN LINEAL:

1.) Desigualdades.

2.) Inecuaciones lineales con una incógnita y sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita.

3.) Inecuaciones lineales con dos incógnitas y sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.

AHORA SE INTRODUCIRÁN LOS SIGUIENTES CONCEPTOS:

4.) Puntos óptimos de funciones lineales en conjuntos convexos.

5.) Problemas de programación lineal con dos variables.

3. ***Inecuaciones lineales con dos incógnitas y sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.***

Una inecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de alguna de las formas siguientes:

$$ax + by + c < 0$$
$$ax + by + c > 0$$
$$ax + by + c \leq 0$$
$$ax + by + c \geq 0$$

Las inecuaciones lineales con dos incógnitas se resuelven gráficamente ya que las soluciones son los puntos del semiplano en el que queda dividido el plano por la recta que corresponde a la inecuación considerado como igualdad. Esta recta o borde del semiplano no pertenecerá o sí a la solución según la desigualdad sea estricta o no respectivamente. **Para saber cuál de los dos semiplanos es el que da la solución bastará tomar el origen de coordenadas (si la recta no pasa por él) o cualquier otro punto de coordenadas sencillas y comprobar si satisface o no la desigualdad, si lo hace, el semiplano que contiene al punto de prueba es el correcto (lo indicaremos con una flecha señalando hacia él), en caso contrario es el otro.**

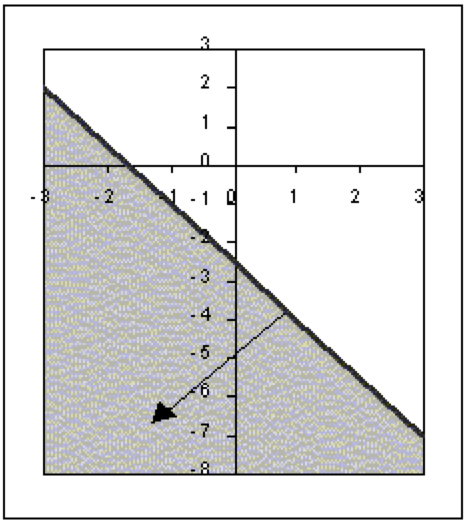
Ejemplo:

Resuelve la inecuación 3x+2y+5<0

Dibujamos la recta 3x+2y+5=0 sobre unos ejes de coordenadas y comprobamos el punto O(0,0), que da:

$$3\cdot 0 + 2\cdot 0 + 5 < 0 \Rightarrow 5 < 0 \quad \textit{falso}$$

Luego la solución es la zona sombreada de la figura adjunta.



Se llama **sistema de n inecuaciones lineales con dos incógnitas** al conjunto formado por n de estas inecuaciones, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 < 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 > 0 \\ \ldots\ldots \\ a_nx + b_ny + c_n \leq 0 \end{array}\right\}$$ o cualquier otro signo de desigualdad.

Obtener la solución de un sistema de este tipo supone obtener el semiplano solución de cada una de las inecuaciones que lo forman y averiguar la intersección de todos ellos.

La solución de un sistema de n inecuaciones lineales con dos incógnitas es siempre un conjunto convexo.

Se llama conjunto convexo a una región del plano tal que para dos puntos cualesquiera de la misma, el segmento que los une está íntegramente contenido en dicha región. Como casos particulares, un conjunto convexo puede quedar reducido a una recta, a una semirrecta, a un segmento, a un punto o al conjunto vacío.

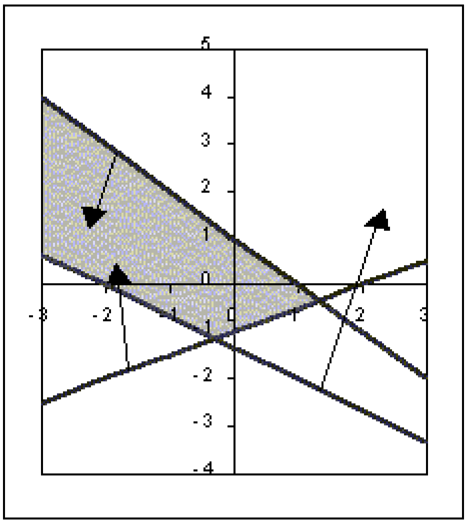
Los segmentos que delimitan un conjunto convexo se llaman bordes o lados y, la intersección de ellos, vértices. Los vértices y puntos de los lados que pertenezcan a la solución del sistema de inecuaciones se denominan puntos extremos. Un conjunto convexo puede ser cerrado o abierto respecto a cada lado o vértice según se incluya éste o no en la solución. Puede ser acotado o no acotado según su área sea o no finita.

Ejemplo:

Resolver el sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-1\leq 0 \\ 2x+3y+4>0 \\ x-2y-2<0 \end{array}\right\}$$

Si representamos en los mismos ejes de coordenadas cada una de las rectas que salen al considerar las anteriores desigualdades como ecuaciones e indicamos mediante una flecha el semiplano solución de cada una de ellas por separado, la solución será la región del plano sombreada en la figura que es la intersección de los semiplanos solución de cada inecuación. Para la representación rápida de las rectas, basta con encontrar los puntos donde cortan a los ejes de coordenadas y unirlos entres sí.



La recta:

x+y-1=0 corta al eje X (hacemos y=0) en (1, 0) y al eje Y (hacemos x=0) en (0, 1)

La recta :

2x+3y+4=0 corta a X en (-2, 0) y a Y en $\left(0,-\frac{4}{3}\right)$

La recta:

x-2y-2=0 corta a X en (2, 0) y a Y en (0, -1).

4. ***Puntos óptimos de funciones en conjuntos convexos.***

Se define una función lineal con dos variables como una expresión de la forma f(x, y) = ax + by.

Ha de observarse que para cada valor de "c", el lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas (x, y) verifican f(x, y) = c es la recta de ecuación ax+by=c. Al variar "c", se obtiene rectas paralelas tales que todas tiene la misma pendiente -a/b y cortan al eje Y en el punto (0, c/b).

Si los valores de x e y no están acotados, tampoco lo estará f(x, y), en cambio, si están restringidos a un cierto conjunto C, la función no podrá tomar cualquier valor. Se puede entonces hablar de valores máximo o mínimo (valores óptimos) de f(x, y) en C.

Se cumple el siguiente teorema: **"Si una función lineal f(x, y)=ax+by tiene máximo o mínimo en un conjunto C convexo, toma este valor óptimo en un punto extremo".**

En efecto, si el valor c fuera óptimo y correspondiera a un punto (x, y) interior al conjunto convexo C, siempre se podrían encontrar dos recta paralelas a ax+by+c=0, en las cuales f(x, y) tomaría valores mayores o menores que c y no podría ser c máximo o mínimo. Luego estos valores sólo pueden presentarse en los puntos extremos.

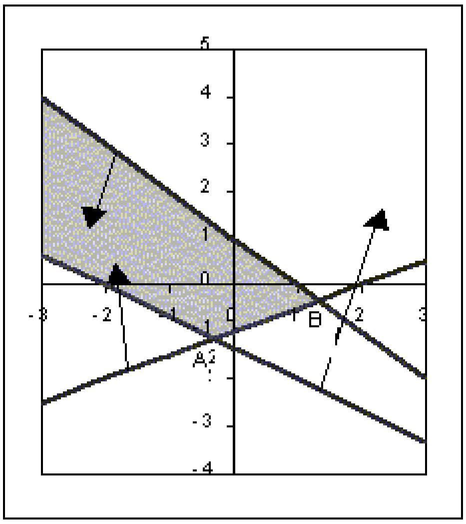
Usando este teorema, para encontrar los puntos óptimos de f(x, y) en el conjunto convexo C podemos procederemos de la siguiente forma:

Estudiar los valores de la función en los vértices (si su número es reducido) y decidir en cuál de ellos hay máximo o mínimo. Tengamos en cuenta que si la función toma el mismo valor en dos vértices consecutivos, también toma ese valor en todos los puntos del segmento que une esos dos vértices.

Ejemplo:

Hallar el máximo y mínimo de la función f(x, y) = x-y en el recinto convexo solución del sistema de inecuaciones del último ejemplo.

Dado que la gráfica ya la tenemos (la reproducimos aquí poniendo nombre a los vértices del recinto que sólo son dos A y B pues el conjunto solución es abierto y no acotado):



El punto A es la solución del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=-4 \\ x-2y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=-4 \\ 2x-4y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7y=-8 \Rightarrow y=-\frac{8}{7} \Rightarrow x=2-\frac{16}{7}=-\frac{2}{7}$$

luego $A\left(-\frac{2}{7},-\frac{8}{7}\right)$

El punto B es la solución de:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-2y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

siendo, pues $B\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$

Los valores de la función en ambos vértices son:

$$f(A)=-\frac{2}{7}+\frac{8}{7}=\frac{6}{7} \qquad f(B)=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{3} \qquad luego \quad f(A)<f(B)$$

La función presenta un máximo en el punto B pero no hay ningún valor mínimo al no ser el recinto acotado (luego veremos la discusión de estos problemas).

Cabe preguntarse ahora**: ¿Siempre hay punto máximo o mínimo de una función lineal en dos variables en un recinto convexo?**

La respuesta es que la solución puede ser única. Infinitas o ninguna. Veamos los casos que pueden darse:

- Si el recinto es cerrado existe una solución única para el máximo y otra para el mínimo en alguno de los vértices si en todos ellos la función toma valores distintos.
- Si es cerrado pero hay dos vértices consecutivos en los que la función toma el mismo valor (y ese valor es por ejemplo máximo), entonces toma el mismo valor en todos los puntos del segmento que une ambos vértices, luego la función infinitos máximos y un mínimo. Al contrario sucedería si el valor común de los dos vértices fuese mínimo, habiendo entonces infinitos mínimos y un máximo.
- Si el recinto convexo no está acotado superiormente, no existe máximo aunque sí mínimo.
- Si el recinto convexo no está acotado inferiormente, no existe mínimo aunque sí máximo.

5. Problemas de programación lineal con dos variables.

Un problema de programación lineal con dos variables tiene por finalidad optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal:

$$f(x,y)=ax+by$$

llamada **función objetivo**, sujeta a una serie de **restricciones** presentadas en forma de sistema de inecuaciones con dos incógnitas de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y \le c_1 \\ a_2 x + b_2 y \le c_2 \\ \ldots\ldots \\ a_n x + b_n y \le c_n \end{array}\right\}$$

cada desigualdad del sistema de restricciones determina un semiplano. El conjunto intersección de todos esos semiplanos recibe el nombre de zona de **soluciones factibles**. El conjunto de los vértices del recinto se denomina conjunto de **soluciones factibles básicas** y el vértice donde se presenta la solución óptima se llama **solución máxima** (o mínima según el caso). El valor que toma la función objetivo en el vértice de solución óptima se llama **valor del programa lineal.**

El procedimiento a seguir para resolver un problema de programación lineal en dos variables será, pues:

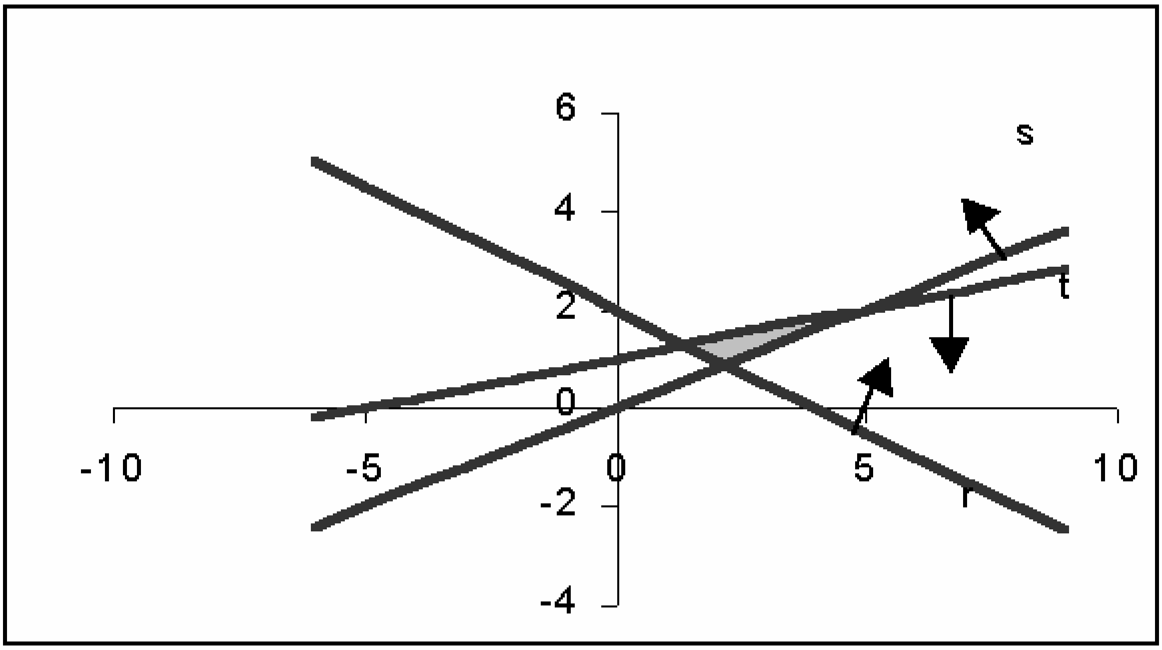
1. Elegir las incógnitas.
2. Escribir la función objetivo en función de los datos del problema.
3. Escribir las restricciones en forma de sistema de inecuaciones.
4. Averiguar el conjunto de soluciones factibles representando gráficamente las restricciones.
5. Calcular las coordenadas de los vértices del recinto de soluciones factibles (si son pocos).
6. Calcular el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices para ver en cuál de ellos presenta el valor máximo o mínimo según nos pida el problema (hay que tener en cuenta aquí la posible no existencia de solución si el recinto no es acotado).

Veamos a continuación una colección de ejemplos resueltos:

PROBLEMA #1 Minimizar la función f(x, y)=2x+8y sometida a las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 2x + 4y \ge 8 \\ 2x - 5y \le 0 \\ -x + 5y \le 5 \end{array}\right\}$$

Llamando, respectivamente r, s y t a las rectas expresadas en las tres últimas restricciones, la zona de soluciones factibles sería:



Siendo los vértices:

A intersección de r y t:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+4y=8 \\ -x+5y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow A\left(\frac{10}{7},\frac{9}{7}\right)$$

B intersección de s y t:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5y=0 \\ -x+5y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow B(5,2)$$

C intersección de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+4y=8 \\ 3x-5y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow C\left(\frac{20}{9},\frac{8}{9}\right)$$

Siendo los valores de la función objetivo en ellos:

$$f(A)=2\cdot\frac{10}{7}+8\cdot\frac{9}{7}=\frac{92}{7}\approx 13{,}1$$
$$f(B)=2\cdot 5+8\cdot 2=26$$
$$f(C)=2\cdot\frac{20}{9}+8\cdot\frac{8}{9}=\frac{104}{9}\approx 11{,}5 \qquad \text{mínimo}$$

Alcanzándose el mínimo en el punto C.

PROBLEMA #2 Un herrero con 80 kgs. de acero y 120 kgs. de aluminio quiere hacer bicicletas de paseo y de montaña que quiere vender, respectivamente a 20.000 y 15.000 Bolívares cada una para sacar el máximo beneficio. Para la de paseo empleará 1 kg. De acero y 3 kgs de aluminio, y para la de montaña 2 kgs. de ambos metales. ¿Cuántas bicicletas de paseo y de montaña venderá?

Sean las variables de decisión:

x= n: de bicicletas de paseo vendidas.

y= n: de bicicletas de montaña vendidas.

Tabla de material empleado:

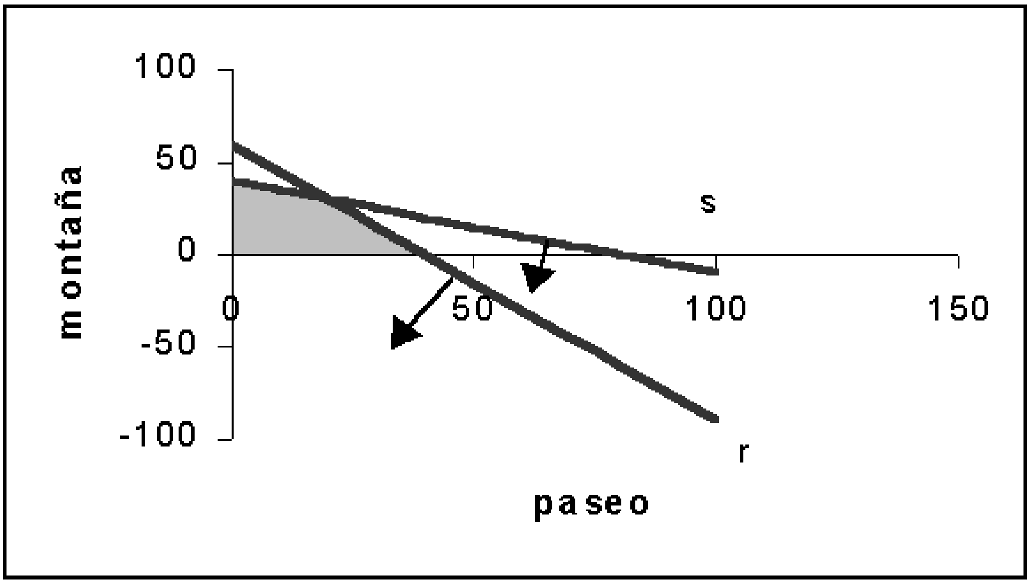
	Acero	Aluminio
Paseo	1	3
Montaña	2	2

Función objetivo:

f(x, y)= 20.000x+15.000y máxima.

Restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ r \equiv 3x + 2y \leq 120 \\ s \equiv x + 2y \leq 80 \end{array}\right\}$$



Zona de soluciones factibles:

Vértices del recinto (soluciones básicas):

A(0, 40)

B intersección de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 120 \\ x + 2y = 80 \end{array}\right\} \Rightarrow B(20,30)$$

C(40,0)

Valores de la función objetivo en los vértices:

$$\begin{array}{ll} f(A) = 15000 \cdot 40 = 600000 & \\ f(B) = 20000 \cdot 20 + 15 \cdot 30 = 850000 & \text{máx}\,imo \\ f(C) = 20000 \cdot 40 = 800000 & \end{array}$$

Ha de vender 20 bicicletas de paseo y 30 de montaña para obtener un beneficio máximo de 850.000 Bolívares.

PROBLEMA #3 Un autobús Caracas-Maracaibo ofrece plazas para fumadores al precio de 10.000 Bolívares y a no fumadores al precio de 6.000 Bolívares. Al no fumador se le deja llevar 50 kgs. de peso y al fumador 20 kgs. Si el autobús tiene 90 plazas y admite un equipaje de hasta 3.000 kg. ¿Cuál ha de ser la oferta de plazas de la compañía para cada tipo de pasajeros, con la finalidad de optimizara el beneficio?

Sean las variables de decisión:

x= n: de plazas de fumadores.

y= n: de plazas de no fumadores.

La Función objetivo:

f(x, y)=10.000x+6.000y máxima

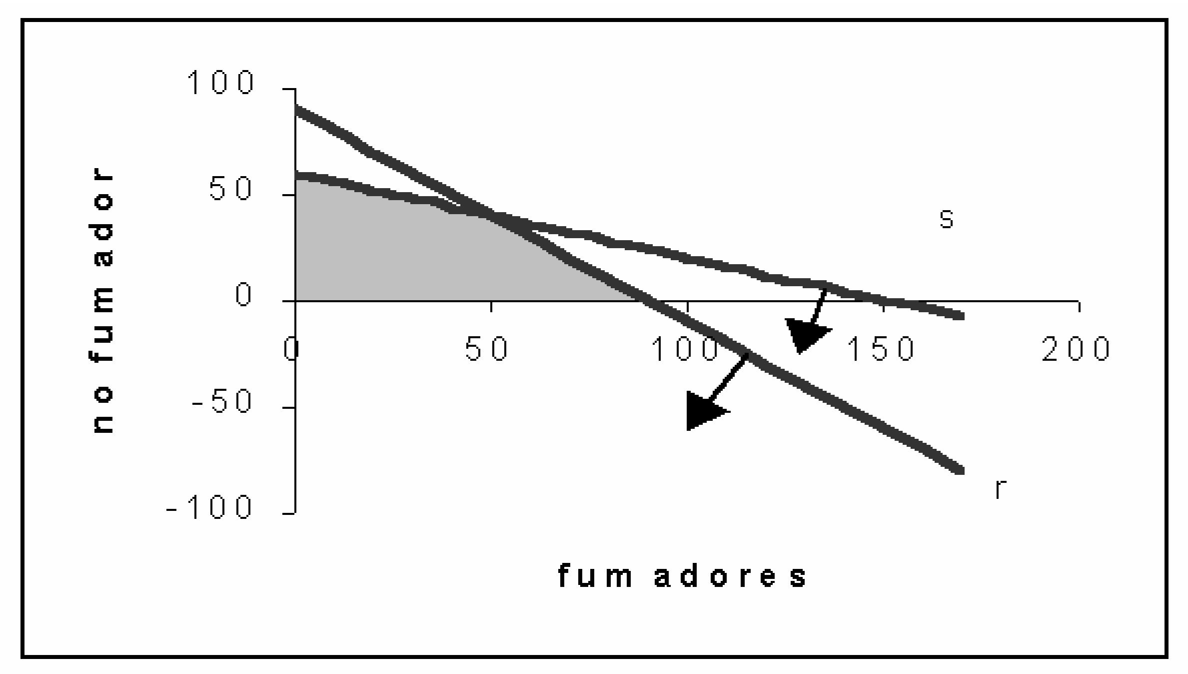
Restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ r \equiv x + y \leq 90 \\ s \equiv 20x + 50y \leq 3000 \Rightarrow 2x + 5y \leq 300 \end{array}\right\}$$

Zona de soluciones factibles:

Vértices:

A(0, 60)



B intersección de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=90 \\ 2x+5y=300 \end{array}\right\} \Rightarrow B(50,40)$$

C(90, 0)

Valores de la función objetivo:

$$f(A)=6000\cdot 60=360000$$
$$f(B)=10000\cdot 50+6000\cdot 40=740000$$
$$f(C)=10000\cdot 90=900000 \quad \text{máx}\,imo$$

Ha de vender 90 plazas para fumadores y ninguna para no fumadores y así obtener un beneficio máximo de 900.000 bolívares.

PROBLEMA #4 A una persona le tocan 10 millones de bolívares en una lotería y le aconsejan que las invierta en dos tipos de acciones, A y B. Las de tipo A tienen más riesgo pero producen un beneficio del 10 %. Las de tipo B son más seguras, pero producen sólo el 7% anual. Después de varias deliberaciones decide invertir como máximo 6 millones en la compra de acciones A y por lo menos, 2 millones en la compra de acciones B. Además, decide que lo invertido en A sea, por lo menos, igual a lo invertido en B. ¿Cómo deberá invertir 10 millones para que le beneficio anual sea máximo?

Sean las variables de decisión:

x= cantidad invertida en acciones A

y= cantidad invertida en acciones B

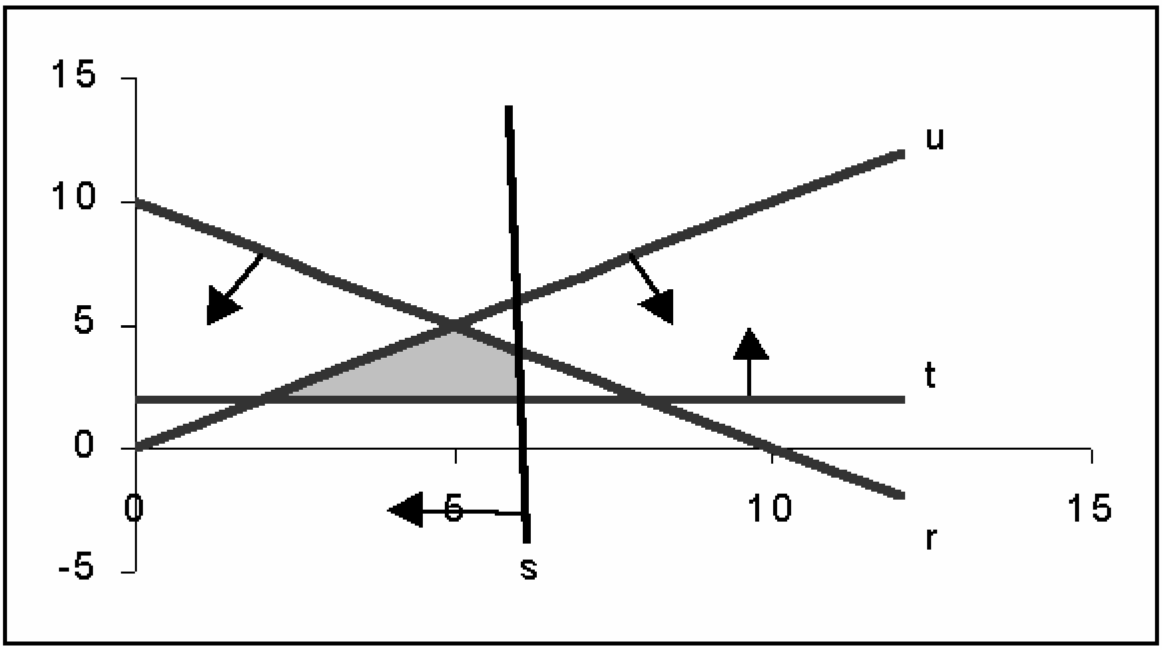
<u>La función objetivo es:</u>

$$f(x,y) = \frac{10x}{100} + \frac{7y}{100}$$

<u>Y las restricciones son:</u>

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \qquad y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \\ x \leq 6 \\ y \geq 2 \\ x \geq y \end{array}\right\}$$

La zona de soluciones factibles es:



Siendo los vértices del recinto:

A intersección de u,t:

$$\left.\begin{array}{l} x = y \\ y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow A(2,2)$$

B intersección de r,u:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 10 \\ x = y \end{array}\right\} \Rightarrow B(5,5)$$

C intersección de r,s:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=10 \\ x=6 \end{array}\right\} \Rightarrow C(6,4)$$

D intersección de s,t:

La función objetivo toma en ellos los valores:

$$f(A)=\frac{20}{100}+\frac{14}{100}=\frac{34}{100}=0{,}34 \quad \textit{millones}$$
$$f(B)=\frac{50}{100}+\frac{35}{100}=\frac{85}{100}=0{,}85 \quad \textit{millones}$$
$$f(C)=\frac{60}{100}+\frac{28}{100}=\frac{88}{100}=0{,}88 \quad \textit{millones} \quad \text{máx}\,\textit{imo}$$
$$f(D)=\frac{60}{100}+\frac{14}{100}=\frac{74}{100}=0{,}74 \quad \textit{millones}$$

Siendo la solución óptima invertir 6 millones de bolívares en acciones tipo A y 4 millones en acciones tipo B

PROBLEMA #5 Un estudiante dedica parte de su tiempo al reparto de propaganda publicitaria. La empresa A le paga 5 Bs.. por cada impreso repartido y la empresa B, con folletos más grandes, le paga 7 Bs. por impreso. El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos A, en la que caben 120 y otra para los impresos B, en la que caben 100. Ha calculado que cada día es capaz de repartir 150 impresos como máximo. Lo que se pregunta el estudiante es: ¿Cuántos impresos habrá que repartir de cada clase para que su beneficio diario sea máximo?

Sean las variables de decisión:

x= n: de impresos diarios tipo A repartidos.

y= n: de impresos diarios tipo B repartidos.

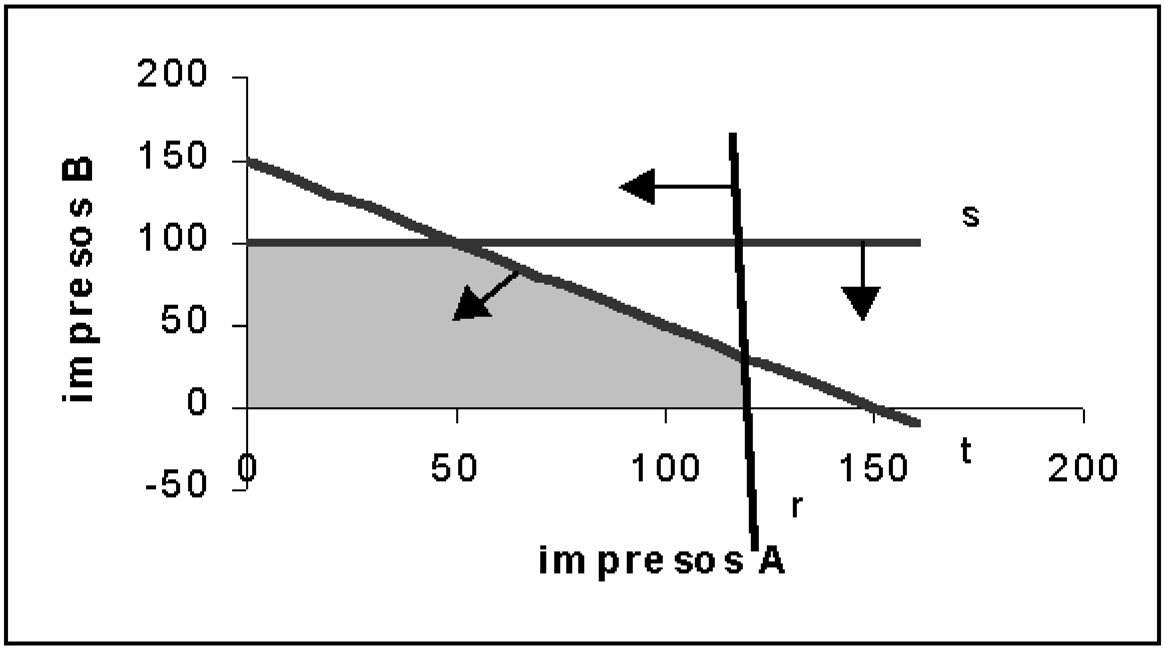
La función objetivo es:

f(x, y)=5x+7y

Las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ r \equiv x \leq 120 \\ s \equiv y \leq 100 \\ t \equiv x + y \leq 150 \end{array}\right\}$$

La zona de soluciones factibles es:



Vértices:

A(0, 100)

B intersección de s,t:

$$\left.\begin{array}{l} y = 100 \\ x + y = 150 \end{array}\right\} \Rightarrow B(50,100)$$

C intersección de r,t:

$$\left.\begin{array}{l} x = 120 \\ x + y = 150 \end{array}\right\} \Rightarrow C(120,30)$$

D (120, 0)

Siendo los valores de la función objetivo:

$$
\begin{aligned}
f(A) &= 7\cdot 100 = 700 \\
f(B) &= 5\cdot 50 + 7\cdot 100 = 950 \qquad \text{máx}\,imo \\
f(C) &= 5\cdot 120 + 7\cdot 30 = 810 \\
f(D) &= 5\cdot 120 = 600
\end{aligned}
$$

Debe repartir 50 impresos tipo A y 100 tipo B para una ganancia máxima diaria de 950 bolívares.

PROBLEMA #6 Un comerciante acude al mercado popular a comprar naranjas con 50.000 Bs. Le ofrecen dos tipos de naranjas: las de tipo A a 50 Bs el kg. y las de tipo B a 80 Bs. el kg. Sabiendo que sólo dispone de su camioneta con espacio para transportar 700 kg. de naranjas como máximo y que piensa vender el kg. de naranjas tipo A a 58 ptas. y el kg. de tipo B a 90 ptas., contestar justificando las respuestas:

a. ¿Cuántos kg. de naranjas de cada tipo deberá comprar para obtener máximo beneficio?
b. ¿Cuál será ese beneficio máximo?

Sean las variables de decisión:

x= kg. de naranjas tipo A comprados.

y= kg. de naranjas tipo B comprados.

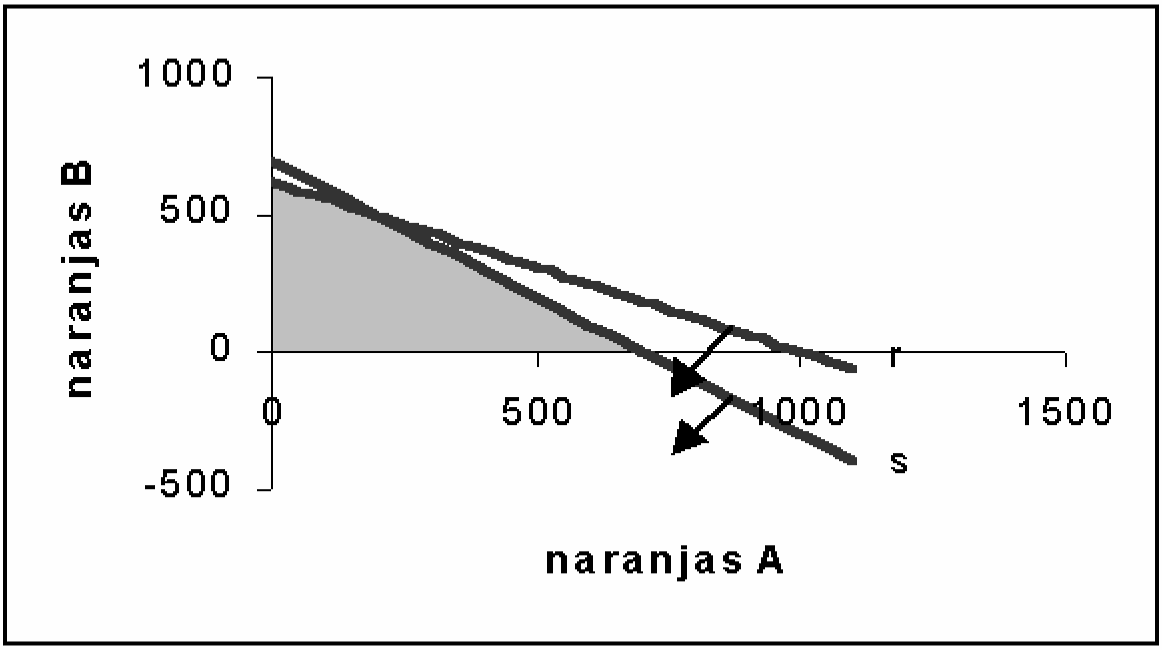
La función objetivo que da el beneficio es:

$$f(x,y) = (58-50)x + (90-80)y = 8x + 10y$$

Y las restricciones:

$$
\left.
\begin{aligned}
&x \geq 0 \\
&y \geq 0 \\
&r \equiv 50x + 80y \leq 50000 \Rightarrow 5x + 8 \leq 5000 \\
&s \equiv x + y \leq 700
\end{aligned}
\right\}
$$

La zona de soluciones factibles es:



Y los vértices:

A(0, 625)

B intersección de r,s:

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 8y = 5000 \\ x + y = 700 \end{array}\right\} \Rightarrow B(200{,}500)$$

C(700, 0)

Y en ellos la función objetivo toma los valores:

$$\begin{aligned} f(A) &= 10 \cdot 625 = 6250 \\ f(B) &= 8 \cdot 200 + 10 \cdot 500 = 6600 \qquad \text{máx}\,imo \\ f(C) &= 8 \cdot 700 = 5600 \end{aligned}$$

Ha de comprar 200 kgs. de naranjas A y 500 kgs. de naranjas B para obtener un beneficio máximo de 6.600 bolívares

PROBLEMA #7 Un sastre tiene 80 m^2 de tela de algodón y 120 m^2 de tela de lana. Un traje requiere 1 m^2 de algodón y 3 m^2 de lana, y un vestido de mujer requiere 2 m^2 de cada una de las dos telas. Calcular el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios si un traje y un vestido se venden al mismo precio.

1. Sean las variables de decisión:

   x= número de trajes.

y= número de vestidos

a= precio común del traje y el vestido.

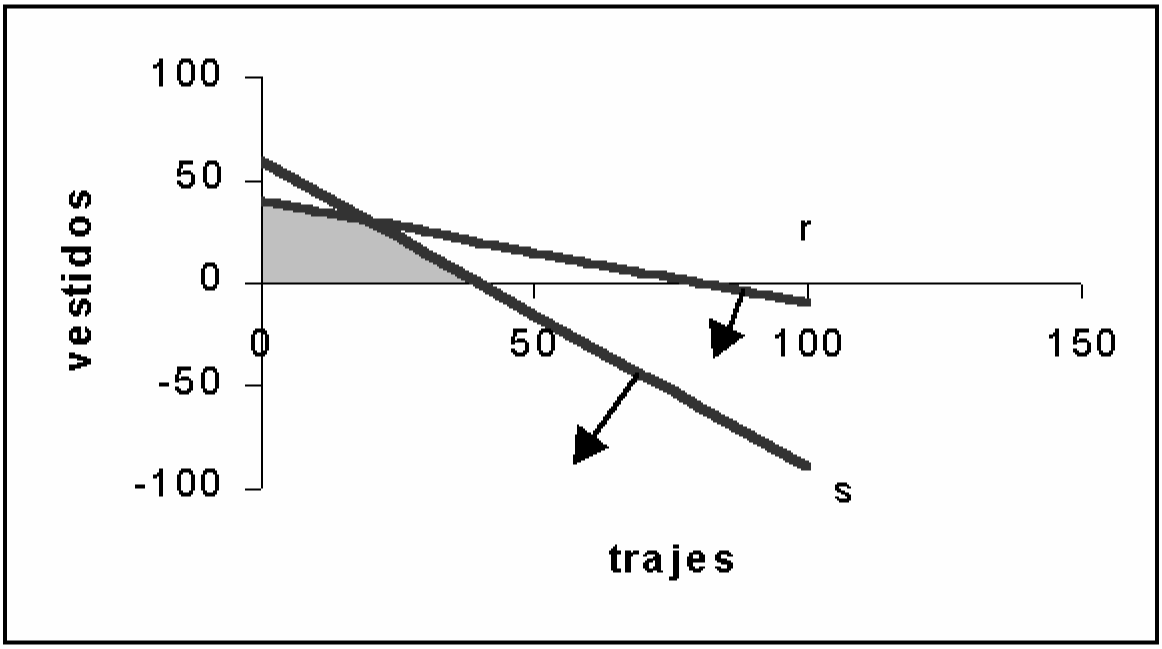
<u>Función objetivo:</u>

$$f(x,y) = ax + ay$$

<u>Restricciones:</u>

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \qquad y \geq 0 \\ r \equiv x + 2y \leq 80 \\ s \equiv 3x + 2y \leq 120 \end{array}\right\}$$

Zona de soluciones factibles:



Vértices:

A(0, 40)

B intersección de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 80 \\ 3x + 2y = 120 \end{array}\right\} \Rightarrow B(20,30)$$

C(40, 0)

Los valores de la función objetivo son:

$$f(A) = 40a$$
$$f(B) = 20a + 30a = 50a \qquad \text{máx}\, imo$$
$$f(C) = 40a$$

El máximo beneficio lo obtendrá fabricando 20 trajes y 30 vestidos.

PROBLEMA #8 Un constructor va a edificar dos tipos de viviendas A y B. Dispone de 600 millones de bolívares y el coste de una casa de tipo A es de 13 millones y 8 millones una de tipo B. El número de casas de tipo A ha de ser, al menos, del 40 % del total y el de tipo B, el 20 % por lo menos. Si cada casa de tipo A se vende a 16 millones y cada una de tipo B en 9. ¿Cuántas casas de cada tipo debe construir para obtener el beneficio máximo?

Sean las variables de decisión:

x= n: de viviendas construidas tipo A

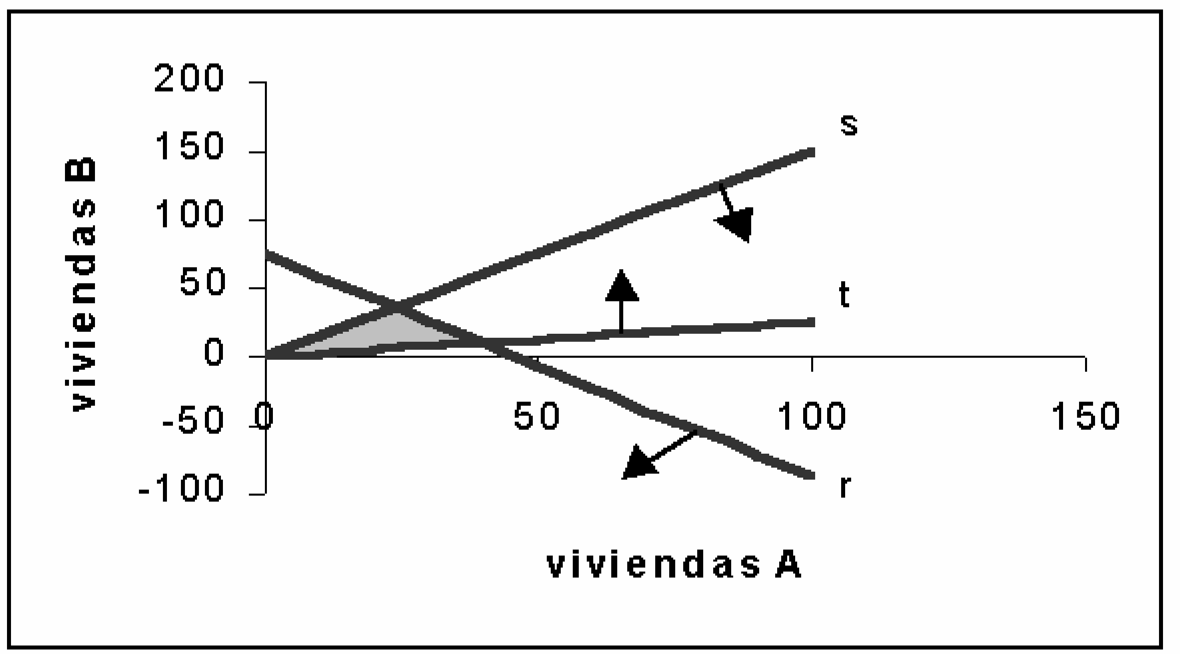
y= n: de viviendas construidas tipo B.

La función objetivo es:

$$f(x, y) = (16 - 13)x + (9 - 8)y = 3x + y$$

Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \qquad y \geq 0 \\ r \equiv 13x + 8y \leq 600 \\ s \equiv x \geq \dfrac{(x+y)\cdot 40}{100} \Rightarrow 3x - 2y \geq 0 \\ t \equiv y \geq \dfrac{(x+y)\cdot 20}{100} \Rightarrow x - 4y \leq 0 \end{array}\right\}$$



La zona de soluciones factibles queda, pues:

Siendo los vértices:

A intersección de r,s:

$$\left.\begin{array}{l} 13x + 8y = 600 \\ 3x - 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(24,36)$$

B intersección de r,t:

$$\left.\begin{array}{l} 13x + 8y = 600 \\ x - 4y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B(40,10)$$

C (0, 0)

Y la función objetivo toma los valores:

$$f(A) = 3 \cdot 24 + 36 = 108$$
$$f(B) = 3 \cdot 40 + 10 = 130$$

Teniendo que vender 40 viviendas tipo A y 10 tipo B para obtener un beneficio máximo de 130 millones de bolívares.

PROBLEMA #9 Cierta persona dispone de 10 millones como máximo para repartir entre dos tipos de inversión (A y B). En la opción A desea invertir entre 2 y 7 millones. Además, quiere destinar a esa opción, como mínimo, tanta cantidad de dinero como a la B.

a. ¿Qué cantidades debe invertir en cada una de las dos opciones? Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.
b. Sabiendo que el rendimiento de la inversión será del 9 % en la opción A y del 12 % en la B, ¿Qué cantidad debe invertir en cada una para optimizar el rendimiento global? ?A cuánto ascenderá

a) Sean las <u>variables de decisión:</u>

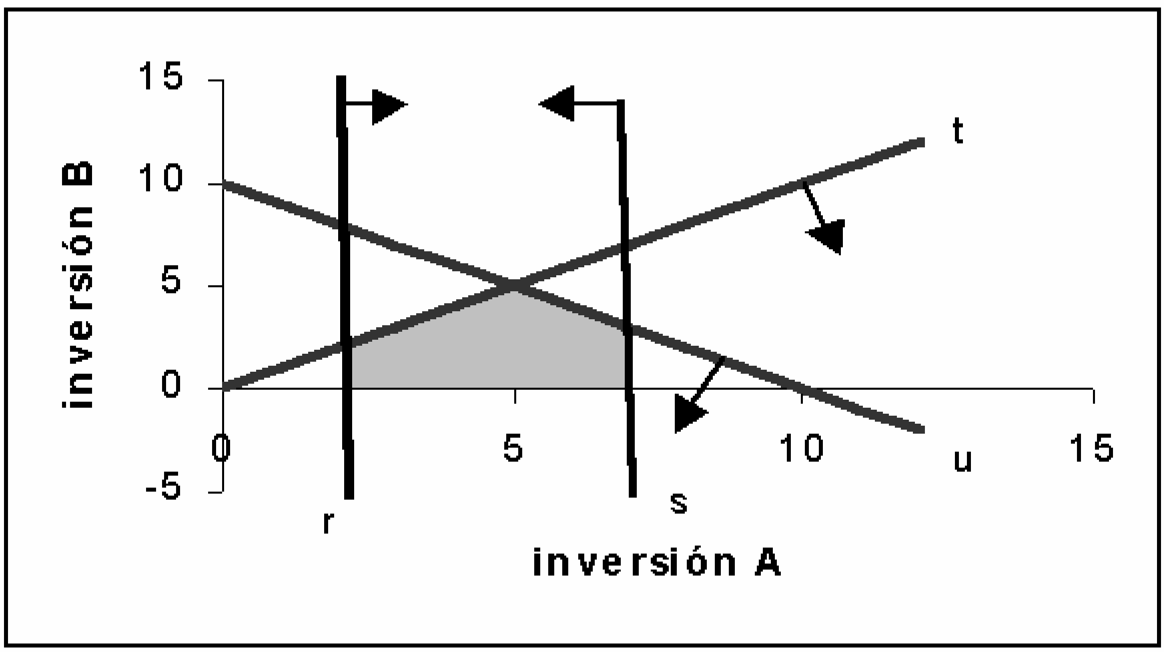
x= cantidad invertida en acciones tipo A

y= cantidad invertida en acciones tipo B

<u>Las restricciones son:</u>

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv x \geq 2 \\ s \equiv x \leq 7 \\ t \equiv x \geq y \\ u \equiv x + y \leq 10 \end{array}\right\}$$

Puede invertir en cada una de las dos opciones las cantidades correspondientes a cada uno de los puntos de la zona sombreada de la siguiente gráfica:



b) La función de beneficios es:

$$f(x,y) = \frac{9x}{100} + \frac{12x}{100}$$

Y los vértices de la zona sombreada son:

A intersección de r,t:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ x = y \end{array}\right\} \Rightarrow A(2,2)$$

B intersección de t,u:

$$\left.\begin{array}{l} x = y \\ x + y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow B(5,5)$$

C intersección de s,u, o sea C(7, 3)

D(7, 0)

E(2, 0)

Los valores de f en esos puntos son:

$$f(A) = \frac{2 \cdot 9}{100} + \frac{2 \cdot 12}{100} = \frac{42}{100} = 0{,}48$$
$$f(B) = \frac{5 \cdot 9}{100} + \frac{5 \cdot 12}{100} = \frac{105}{100} = 1{,}05 \qquad \text{máx}\,imo$$
$$f(C) = \frac{7 \cdot 9}{100} + \frac{3 \cdot 12}{100} = \frac{99}{100} = 0{,}99$$
$$f(D) = \frac{7 \cdot 9}{100} = 0{,}63$$
$$f(D) = \frac{2 \cdot 9}{100} = 0{,}18$$

Ha de invertir, pues 5 millones de bolívares en A y 5 millones en B para obtener un beneficio máximo de 1,05 millones, o sea 1.050.000 bolívares.

PROBLEMA #10 Una refinería de petróleo tiene dos fuentes de petróleo crudo: crudo ligero, que cuesta 35 dólares por barril y crudo pesado a 30 dólares el barril. Con cada barril de crudo ligero, la refinería produce 0,3 barriles de gasolina (G), 0,2 barriles de combustible para calefacción (C) y 0,3 barriles de combustible para turbinas (T), mientras que con cada barril de crudo pesado produce 0,3 barriles de G, 0,4 barriles de C y 0,2 barriles de T. La refinería ha contratado el suministro de 900000 barriles de G, 800000 barriles de C y 500000 barriles de T. Hallar las cantidades de crudo ligero y pesado que debe comprar para poder cubrir sus necesidades al costo mínimo.

Sean las variables de decisión:

X= número de barriles comprados de crudo ligero.

Y= número de barriles comprados de crudo pesado.

La tabla de producción de cada producto con arreglo al tipo de crudo es:

	G	**C**	**T**
Ligero	**0,3**	**0,2**	**0,3**
Pesado	**0,3**	**0,4**	**0,2**

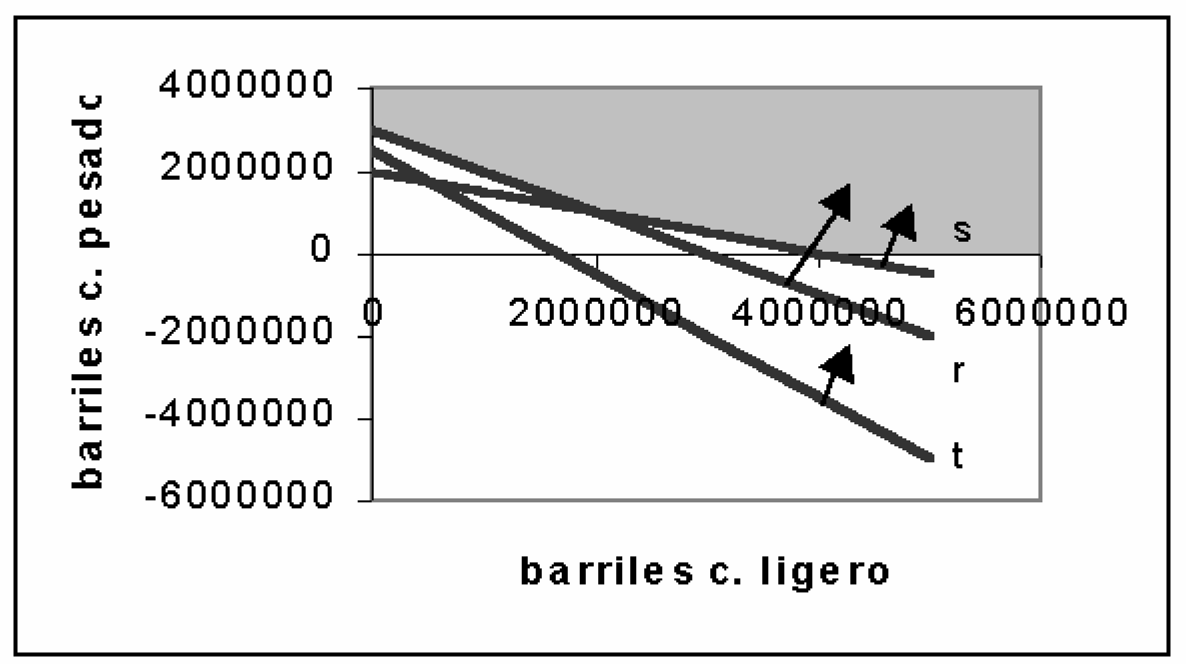
La función objetivo que hay que minimizar es:

f(x, y)=35x+30y

Las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \qquad y \geq 0 \\ r \equiv 0{,}3x + 0{,}3y \geq 900000 \Rightarrow x + y \geq 3000000 \\ s \equiv 0{,}2x + 0{,}4y \geq 800000 \Rightarrow x + 2y \geq 4000000 \\ t \equiv 0{,}3x + 0{,}2y \geq 500000 \Rightarrow 3x + 2y \geq 5000000 \end{array}\right\}$$

Y la zona de soluciones factibles:



Los vértices son:

A(0, 3000000)

B intersección de r,s:

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 3000000 \\ x+2y &= 4000000 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B(2000000{,}1000000)$$

C(4000000, 0)

Y en ellos la función objetivo presenta los valores:

$$\begin{aligned} f(A) &= 30 \cdot 3000000 = 90000000 \qquad \text{mín } imo \\ f(B) &= 35 \cdot 2000000 + 30 \cdot 1000000 = 100000000 \\ f(C) &= 35 \cdot 4000000 = 140000000 \end{aligned}$$

Siendo la solución de mínimo coste la compra de 3.000.000 de barriles de crudo ligero y ninguno de crudo pesado para un coste de 90.000.000 dólares.

PROBLEMA #11 La fábrica LA MUNDIAL S.A., construye mesas y sillas de madera. El precio de venta al público de una mesa es de 2.700 Bs. y el de una silla 2.100Bs. LA MUNDIAL S.A. estima que fabricar una mesa supone un gasto de 1.000 Bs. de materias primas y de 1.400 Bs. de costos laborales. Fabricar una silla exige 900 Bs. de materias primas y 1.000 Bs de costos laborales. La construcción de ambos tipos de muebles requiere un trabajo previo de carpintería y un proceso final de acabado (pintura, revisión de las piezas fabricadas, empaquetado, etc.). Para fabricar una mesa se necesita 1 hora de carpintería y 2 horas de proceso final de acabado. Una silla necesita 1 hora de carpintería y 1 hora para el proceso de acabado. LA MUNDIAL S.A. no tiene problemas de abastecimiento de materias primas, pero sólo puede contar semanalmente con un máximo de 80 horas de carpintería y un máximo de 100 horas para los trabajos de acabado. Por exigencias del marcado, LA MUNDIAL S.A. fabrica, como máximo, 40 mesas a la semana. No ocurre así con las sillas, para los que no hay ningún tipo de restricción en cuanto al número de unidades fabricadas.

Determinar el número de mesas y de sillas que semanalmente deberá fabricar la empresa para maximizar sus beneficios.

Sean las variables de decisión:

x= n: de soldados fabricados semanalmente.

y= n: de trenes fabricados semanalmente.

La función a maximizar es:

$$f(x,y) = (2700 - 1000 - 1400)x + (2100 - 900 - 1000)y = 300x + 200y$$

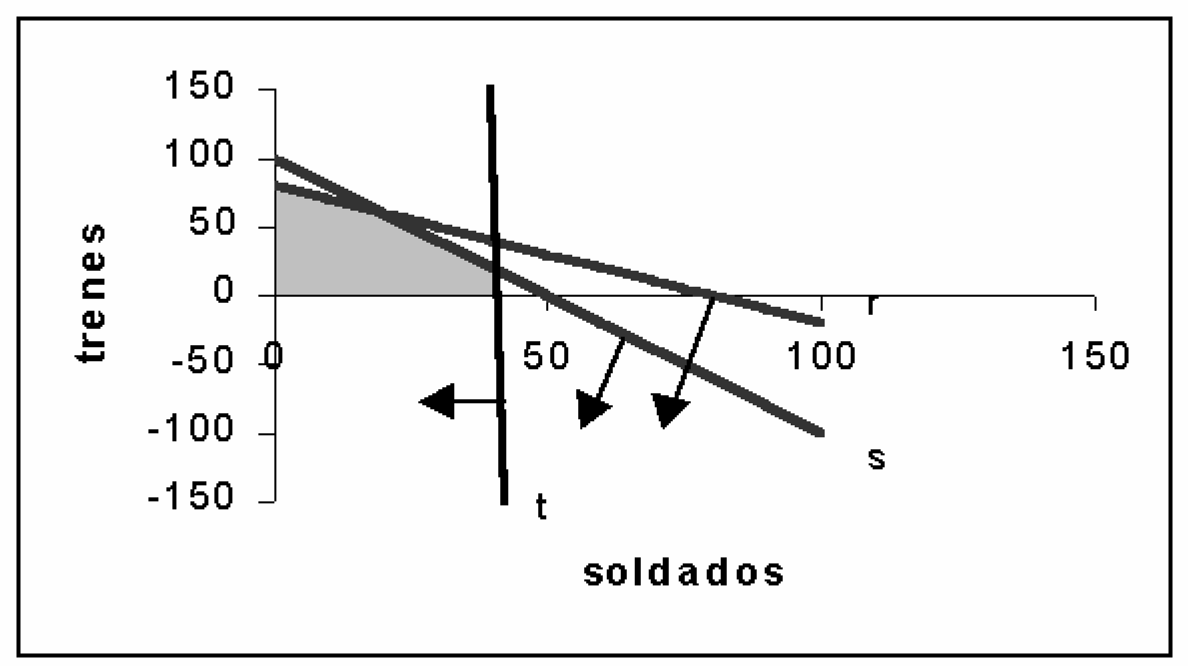
La tabla de horas de trabajo:

	Carpintería	**Acabado**

Soldados	1	2
Trenes	1	1

Las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \qquad y \geq 0 \\ r \equiv x + y \leq 80 \\ s \equiv 2x + y \leq 100 \\ t \equiv x \leq 40 \end{array}\right\}$$



La zona de soluciones factibles es:

Siendo los vértices:

A(0, 80)

B intersección de r,s:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 80 \\ 2x + y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow B(20,60)$$

C intersección de s,t:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 100 \\ x = 40 \end{array}\right\} \Rightarrow C(40,20)$$

D(40, 0).

En los que la función objetivo vale:

$$f(A) = 200 \cdot 80 = 16000$$
$$f(B) = 300 \cdot 20 + 200 \cdot 60 = 18000 \qquad \text{máx } imo$$
$$f(C) = 300 \cdot 40 + 200 \cdot 20 = 16000$$
$$f(D) = 40 \cdot 300 = 12000$$

Debiendo fabricar 20 mesas y 60 sillas para un beneficio máximo de 18.000 Bs.

PROBLEMA #12 Una campaña para promocionar una marca de productos lácteos se basa en el reparto gratuito de yogures con sabor a limón o a fresa. Se decide repartir al menos 30.000 yogures. Cada yogurt de limón necesita para su elaboración 0,5 gr. de un producto de fermentación y cada yogurt de fresa necesita 0,2 gr. de ese mismo producto. Se dispone de 9 kgs. de ese producto para fermentación. El coste de producción de un yogurt de fresa es es doble que el de un yogurt de limón. ¿Cuántos yogures de cada tipo se deben producir para que el costo de la campaña sea mínimo?

Sean las variables de decisión:

x= número de yogures de limón producidos.

y= número de yogures de fresa producidos.

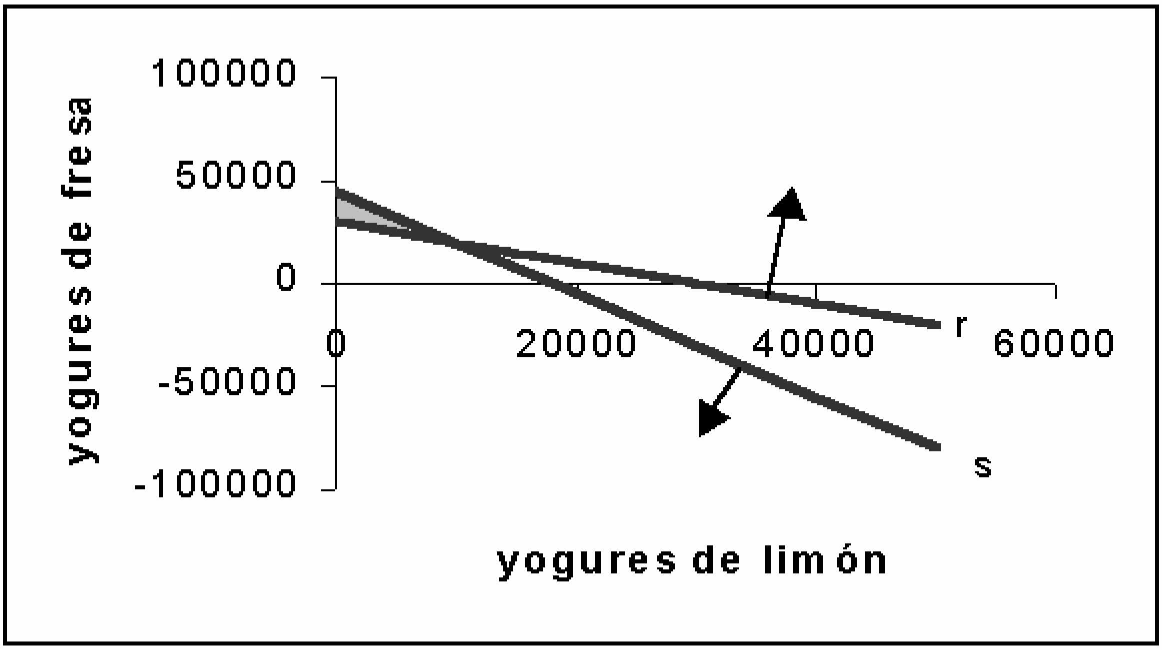
a= coste de producción de un yogurt de limón.

La función a minimizar es:

f(x, y)=ax+2ay

Y las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \qquad y \geq 0 \\ r \equiv x + y \geq 30000 \\ s \equiv 0{,}5x + 0{,}2y \leq 9000 \Rightarrow 5x + 2y \leq 90000 \end{array}\right\}$$



La zona de soluciones factibles es:

Siendo los vértices:

A(0, 45000)

B(0, 30000)

C intersección de r y s:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 30000 \\ 5x + 2y &= 90000 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C(10000{,}20000)$$

En los que la función objetivo toma los valores:

$$\begin{aligned} f(A) &= 2a \cdot 45000 = 90000a \\ f(B) &= 2a \cdot 30000 = 60000a \\ f(C) &= a \cdot 10000 + 2a \cdot 20000 = 50000a \qquad \text{mín } imo \end{aligned}$$

Hay que fabricar, pues, 10.000 yogures de limón y 20.000 yogures de fresa para un costo mínimo de 50.000a bolívares.

PROBLEMA #13 Una fábrica de carrocerías de automóviles y camiones tiene 2 naves. En la nave A, para hacer la carrocería de un camión, se invierten 7 días-operario, para fabricar la de un auto se precisan 2 días-operario. En la nave B se invierten 3 días-operario tanto en carrocerías de camión como de auto. Por limitaciones de mano de obra y maquinaria, la nave A dispone de 300 días-operario, y la nave B de 270 días-operario. Si los beneficios que se obtienen por cada camión son de 6 millones de Bs. .y de 3 millones por cada auto.

¿Cuántas unidades de cada clase se deben producir para maximizar las ganancias?

Sean las <u>variables de decisión:</u>

x= número de camiones fabricados.

y= número de autos fabricados.

<u>La función a maximizar es:</u>

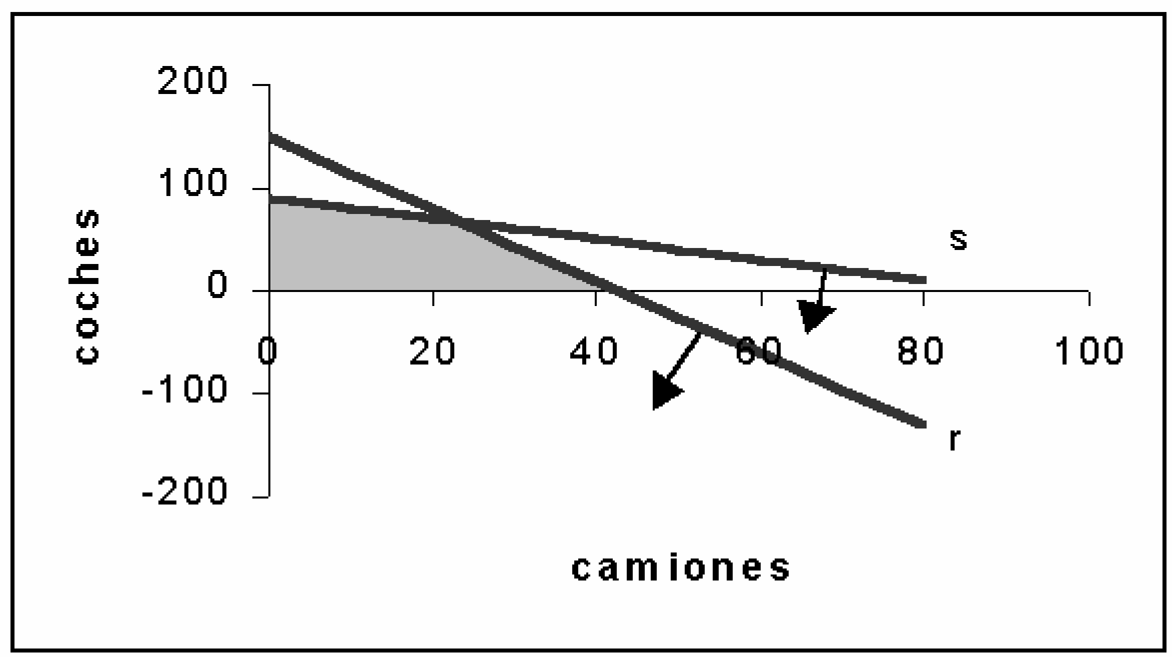
f(x, y)=6x+3y

La tabla de días-operario para cada nave es:

	Días-operario (camión)	Días-operario (auto)
Nave A	7	2
Nave B	3	3

<u>Las restricciones:</u>

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ r \equiv 7x + 2y \leq 300 \\ s \equiv 3x + 3y \leq 270 \Rightarrow x + y \leq 90 \end{array}\right\}$$



La zona de soluciones factibles es:

Siendo los vértices:

A(0, 90)

B intersección de r,s:

$$\left.\begin{array}{l} 7x+2y=300 \\ x+y=90 \end{array}\right\} \Rightarrow B(24,66)$$

$$C\left(\frac{300}{7},0\right)$$

En los que la función objetivo toma los valores:

$$f(A)=3\cdot 90=270$$
$$f(B)=6\cdot 24+3\cdot 66=342 \qquad \text{máx}\,imo$$
$$f(C)=6\cdot\frac{300}{7}=257{,}1$$

Hay que fabricar 24 camiones y 66 automoviles para un beneficio máximo de 342 millones de bolívares.

PROBLEMA #14 Un pastelero fabrica dos tipos de tartas T_1 y T_2, para lo que usa tres ingredientes A, B y C. Dispone de 150 kgs. de A, 90 kgs. de B y 150 kgs. de C. Para fabricar una tarta T_1 debe mezclar 1 kgs. de A, 1 kgs. de B y 2 kgs. de C, mientras que para hacer una tarta T_2 se necesitan 5 kgs. de A, 2 kgs. de B y 1 kgs. de C.

a. Si se venden las tartas T_1 a 1.000 bolívares la unidad y las T_2 a 2.300 bolívares. ¿Qué cantidad debe fabricar de cada clase para maximizar sus ingresos?
b. Si se fija el precio de una tarta del tipo T_1 en 1.500 Bs. ¿Cuál será el precio de una tarta del tipo T_2 si una solución óptima es fabricar 60 tartas del tipo T_1 y 15 del tipo T_2?

a) Sean las variables de decisión:

x= número de tartas T_1

y= número de tartas T_2

La función objetivo es:

f(x, y)=1000x+2300y

La tabla de contingencia es:

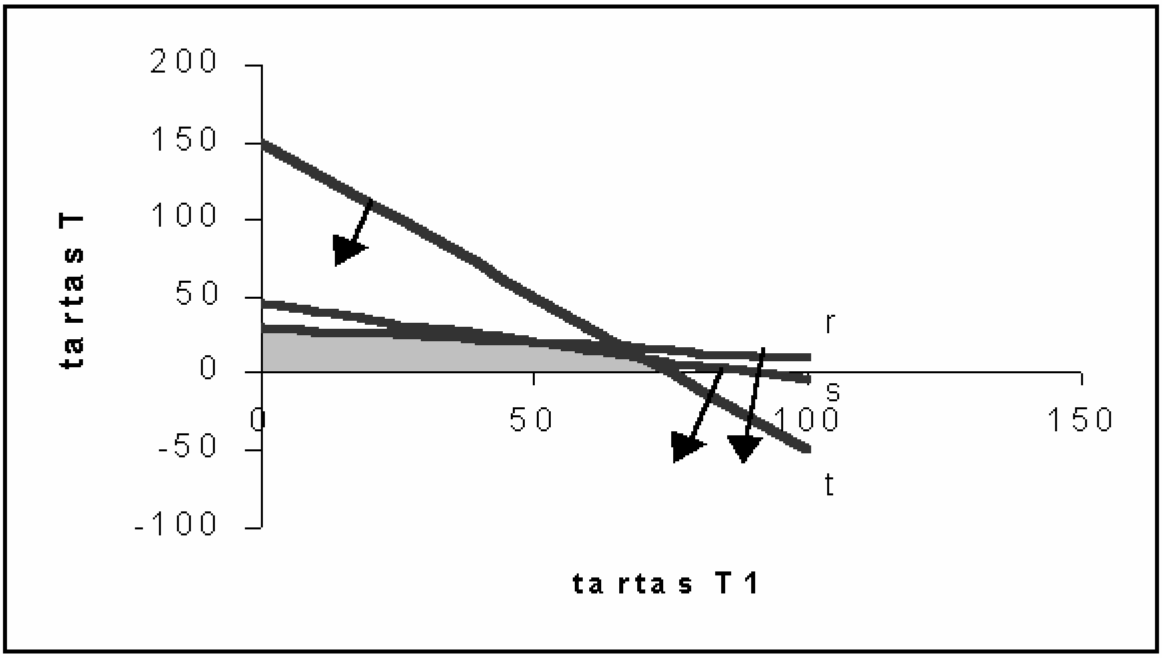
	Ingrediente A	**Ingrediente B**	**Ingrediente C**
Tarta T_1	**1**	**1**	**2**

Tarta T_2	**5**	**2**	**1**

<u>Restricciones:</u>

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \qquad y \geq 0 \\ r \equiv x + 5y \leq 150 \\ s \equiv x + 2y \leq 90 \\ t \equiv 2x + y \leq 150 \end{array}\right\}$$

Zona de soluciones factibles:



Vértices:

A(0, 30)

B intersección de r.s:

$$\left.\begin{array}{l} x + 5y = 150 \\ x + 2y = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow B(50,20)$$

C intersección de s,t:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 90 \\ 2x + y = 150 \end{array}\right\} \Rightarrow C(70,10)$$

D (75, 0)

Valores de la función objetivo:

$$f(A) = 2300 \cdot 30 = 69000$$
$$f(B) = 1000 \cdot 50 + 2300 \cdot 20 = 96000 \quad \text{máx}\,imo$$
$$f(C) = 1000 \cdot 70 + 2300 \cdot 10 = 93000$$
$$f(D) = 1000 \cdot 75 = 75000$$

Hay que fabricar 50 tartas T_1 y 20 tartas T_2 para un beneficio máximo de 96.000 Bs.

b) Llamemos ahora p al nuevo precio de la tarta T_2. La función objetivo es entonces:

f(x, y)=1500x+py

Siendo iguales las restricciones.

Si una solución óptima consiste en fabricar 60 tartas T_1 y 15 T_2, se tendrá que:

f(60, 15)=f(p)=1500.60+15p es máximo $\Rightarrow 90000 + 15p \quad \text{máx}\,imo$

Para los puntos **A**, **B**, **C** y **D** anteriores:

$$f(A) = 30p$$
$$f(B) = 1500 \cdot 50 + 20p = 75000 + 20p$$
$$f(C) = 1500 \cdot 70 + 10p = 105000 + 10p$$
$$f(D) = 1500 \cdot 75 = 112500$$

Se ha de cumplir, el el punto (60, 15) ha de ser máximo que:

$$90000 + 15p \geq 105000 + 10p \Rightarrow 5p \geq 15000 \Rightarrow p \geq 3000$$

El menor valor que cumple esta condición es p=3000 Bs. y con él el beneficio sería:

$90000 + 15 \cdot 3000 = 135000$ Bolívares

PROBLEMA #15 Una fábrica produce chaquetas y pantalones. Tres máquinas (de cortar, coser y teñir) se emplean en la producción. Fabricar una chaqueta representa emplear la máquina de cortar una hora, la de coser tres horas y la de teñir una hora; fabricar unos pantalones representa usar la máquina de cortar una hora, la de coser una hora y la de teñir ninguna. La máquina de teñir se puede usara durante tres horas, la de coser doce y la de cortar 7. Todo lo que se fabrica es vendido y se obtiene un beneficio de ocho euros por cada chaqueta y de cinco por cada pantalón. ?Cómo emplearíamos las máquinas para conseguir el beneficio máximo?

Sean las Variables de decisión:

x= número de chaquetas fabricadas.

y= número de pantalones fabricados.

Función objetivo:

$$f(x,y) = 8x + 5y$$

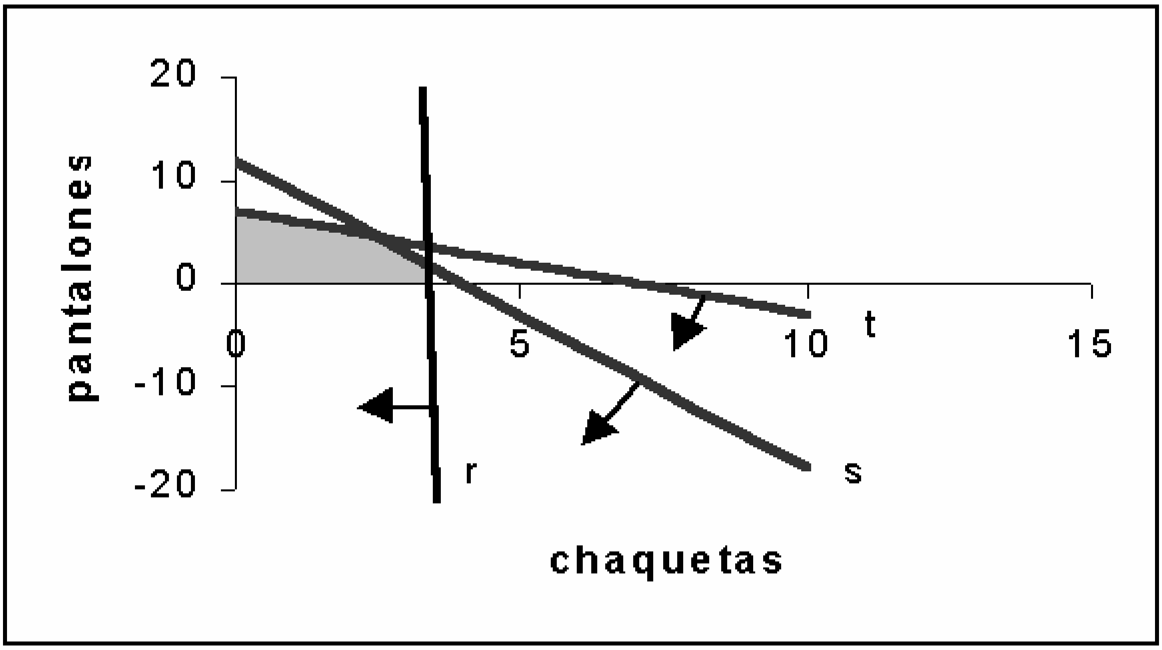
Tabla de uso de las máquinas:

	Cortar	Coser	Teñir
Chaqueta	**1**	**3**	**1**
Pantalón	**1**	**1**	**-**

Restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \quad\quad y \geq 0 \\ r \equiv x \leq 3 \\ s \equiv 3x + y \leq 12 \\ t \equiv x + y \leq 7 \end{array}\right\}$$

Zona de soluciones factibles:



Vértices:

A(0, 7)

B intersección de s,t:

$$\left.\begin{array}{l}3x+y=12\\ x+y=7\end{array}\right\}\Rightarrow B\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$$

C intersección de r,s:

$$\left.\begin{array}{l}x=3\\ 3x+y=12\end{array}\right\}\Rightarrow C(3,3)$$

D (3,0)

Valores de la función objetivo:

$$f(A)=5\cdot 7=35$$
$$f(B)=8\cdot\frac{5}{2}+5\cdot\frac{9}{2}=\frac{95}{2}\qquad \text{máx}\,imo$$
$$f(C)=8\cdot 3+5\cdot 3=39$$
$$f(D)=8\cdot 3=24$$

Como el máximo se alcanza para valores no enteros y no se puede fabricar un número no entero de chaquetas ni pantalones tomamos como solución aproximada 2 chaquetas y 5 pantalones lo cual sería exacto cambiando la restricción s por $3x+y\leq 11$ y obteniendo con ello un beneficio de 41 euros.

PROBLEMA #16 Un supermercado quiere promocionar una marca desconocida D de aceites utilizando una marca conocida C. Para ello hace la siguiente oferta: "Pague sólo a 250 Bs. el litro de aceite C y a 125 Bs. el litro de aceite D siempre y cuando: 1) Compre en total 6 litros o más, y 2) La cantidad comprada de aceite C esté comprendida entre la mitad y el doble de la cantidad comprada de aceite D". Si disponemos de un máximo de 3.125 Bolívares, se pide:

a. Representa gráficamente los modos de acogerse a la oferta.
b. Acogiéndonos a la oferta, ¿Cuál el la mínima cantidad de aceite D que podemos comprar? ¿Cuál es la máxima de C?

a) Sean las variables de decisión:

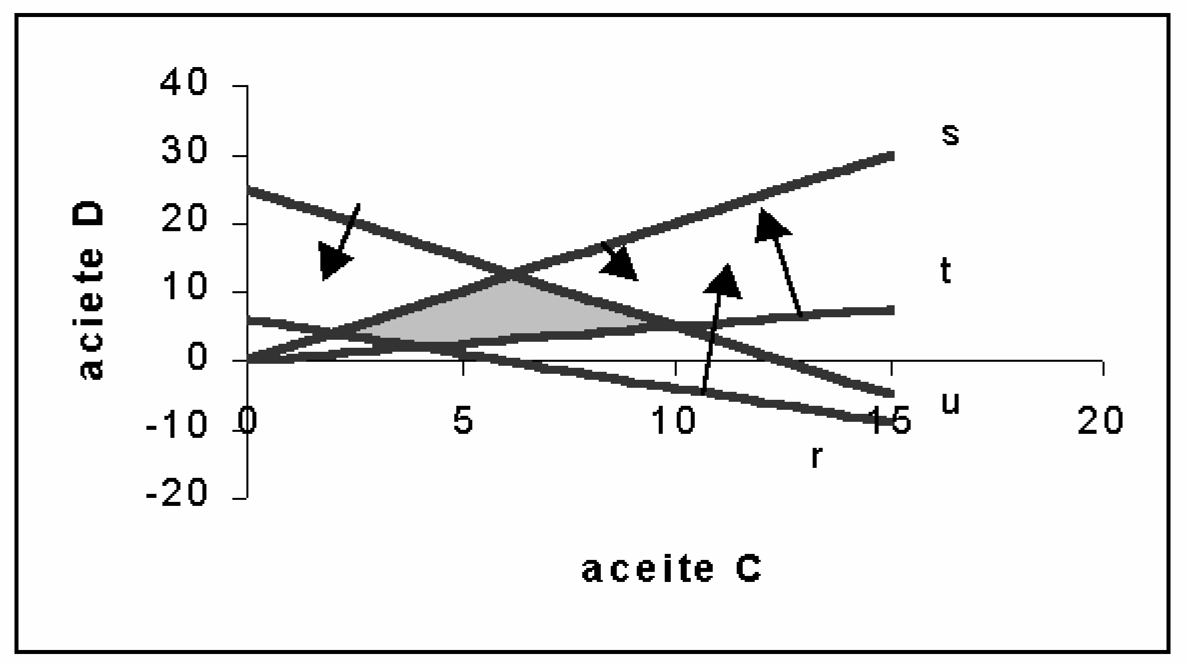
x= litros comprados de aceite C

y= litros comprados de aceite D

Las restricciones del problema son:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \quad\quad y \geq 0 \\ r \equiv x + y \geq 6 \\ s \equiv \frac{y}{2} \leq x \Rightarrow y \leq 2x \\ t \equiv x \leq 2y \\ u \equiv 250x + 125y \leq 3125 \Rightarrow 2x + y \leq 25 \end{array}\right\}$$

Y la zona mediante la cual podemos acogernos a la oferta es la representada por cada uno de los puntos de la parte sombreada en la siguiente gráfica.



b) La mínima cantidad de aceite D que debemos comprar acogiéndonos a la oferta (punto más bajo de la zona) es el punto intersección de las rectas r,t:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 6 \\ x = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow minD(4,2)$$

La máxima cantidad de aceite C para acogernos a la oferta (punto más a la derecha de la zona) es la intersección de las rectas t,u:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 25 \\ x = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow \text{máx}\, C(10,5)$$

Conclusión, la mínima cantidad de D es 2 litros y la máxima de C 10 litros.

PROBLEMA #17 La empresa FORD lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo A a un precio de 1,5 millones de bolívares, y el modelo B en 2 millones. La oferta está limitada por las existencias, que son 20 autos del modelo A y 10 del B, queriendo vender, al menos, tantas unidades de

A como de B. Por otra parte, para cubrir gastos de esa campaña, los ingresos obtenidos en ella deben ser, al menos de 6 millones de bolívares ¿Cuántos automóviles de cada modelo deberá vender para maximizar sus ingresos?

Sean las <u>variables de decisión:</u>

x= autos vendidos del modelo A

y= autos vendidos del modelo B

<u>Función objetivo:</u>

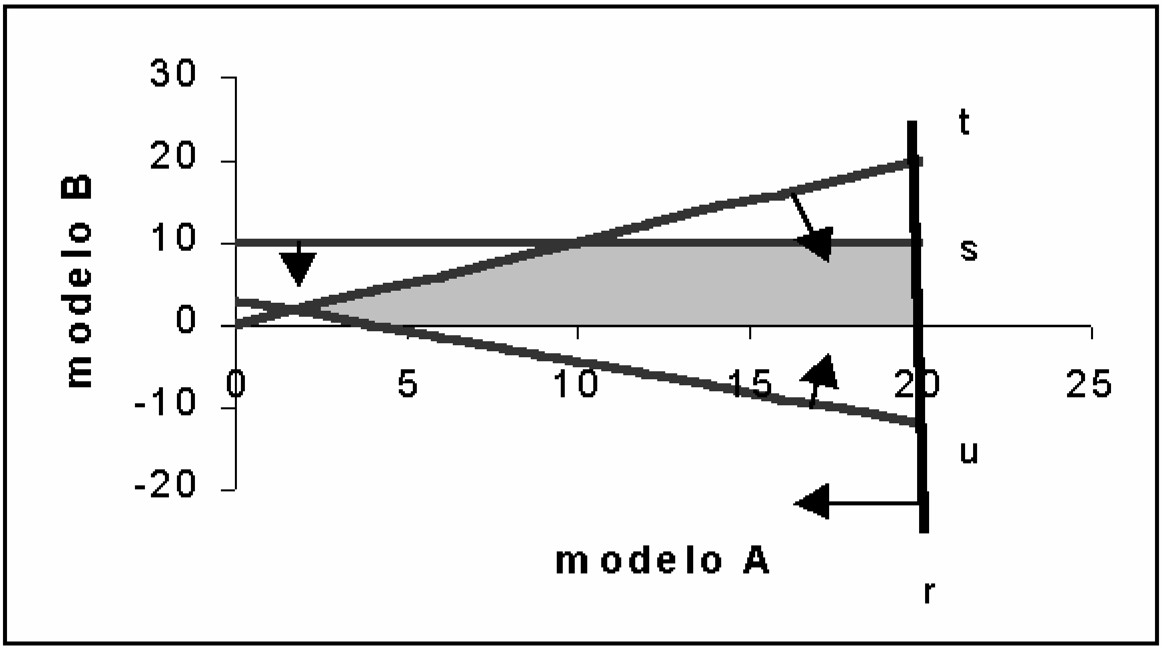
$$f(x,y) = 1{,}5x + 2y$$

<u>Restricciones:</u>

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \qquad y \geq 0 \\ r \equiv x \leq 20 \\ s \equiv y \leq 10 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} t \equiv x \geq y \\ u \equiv 1{,}5x + 2y \geq 6 \end{array}\right\}$$

Zona de soluciones factibles:



Vértices:

A intersección de s,t:

$$\left.\begin{array}{l} y = 10 \\ x = y \end{array}\right\} \Rightarrow A(10,10)$$

B Intersección de r,s:

$$\left.\begin{array}{l} x = 20 \\ y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow B(20,10)$$

C(20, 0)

D(4, 0)

Valores de la función:

$$\begin{array}{ll} f(A) = 1{,}5 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 35 & \\ f(B) = 1{,}5 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 50 & \text{máx}\,imo \\ f(C) = 1{,}5 \cdot 20 = 30 & \\ f(D) = 1{,}5 \cdot 4 = 6 & \end{array}$$

Por lo cual se han de vender 20 autos modelo A y 10 autos modelo B para un beneficio máximo de 50 millones de bolívares.

PROBLEMA #18 En una explotación agrícola de 25 Ha pueden establecerse dos cultivos A y B. El beneficio de una Ha de A es de 20000 ptas. y el de una Ha de B de 30000 ptas. Las disponibilidades de trabajo de explotación son de 80 jornadas, una Ha de A precisa 4 jornadas, mientras que una de B precisa sólo 2 jornadas. La subvención de la Unión Europea es de 5 euros por Ha. de A y de 10 euros por Ha. de B, siendo la subvención máxima por explotación agrícola de 200 euros.

a. Representar el conjunto factible.
b. Calcular el beneficio máximo.

a) las variables de decisión son:

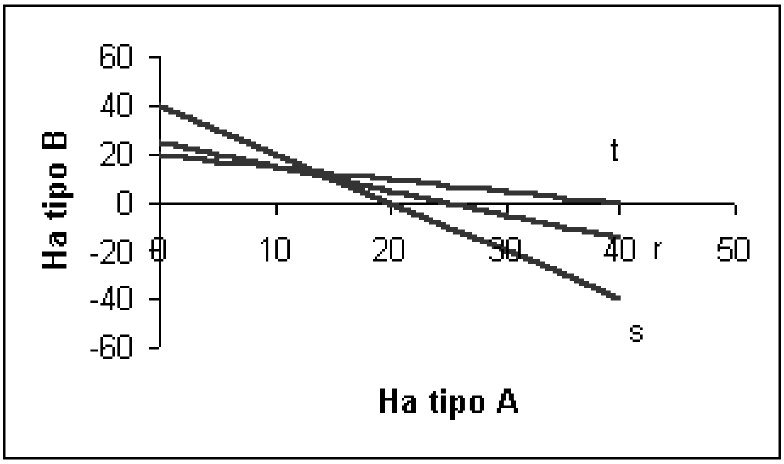
x = número de hectáreas del cultivo A

y = número de hectáreas del cultivo B

La función objetivo es:

$$f(x, y) = 20000x + 30000y$$

Siendo:



<u>Las restricciones son:</u>

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \qquad y \geq 0 \\ r \equiv x + y = 25 \\ s \equiv 4x + 2y \leq 80 \Rightarrow 2x + y \leq 40 \\ t \equiv 5x + 10y \leq 200 \Rightarrow x + 2y \leq 40 \end{array}\right\}$$

Y el conjunto factible es:

Siendo dicho conjunto el segmento de la recta r comprendido entre los puntos **A** (intersección de r,s) y **B**(intersección de r,t)

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 25 \\ 2x + y = 40 \end{array}\right\} \Rightarrow A(15{,}10)$$

Valores de la función objetivo en **A** y **B**:

$$f(A) = 20000 \cdot 15 + 30000 \cdot 10 = 600000$$
$$f(B) = 20000 \cdot 10 + 30000 \cdot 15 = 650000 \qquad \text{máx}\,imo$$

Obteniendo el máximo beneficio para 10 Ha de tipo A y 15 de tipo B, siendo entonces el beneficio de 650.000 euros.

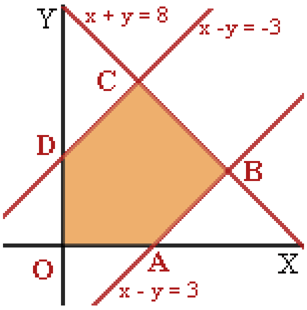
PROBLEMA #19 Se considera la región del plano determinada por las inecuaciones: $x + 3 \geq y$; $8 \geq x + y$; $y \geq x - 3$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
a) Dibujar la región del plano que definen, y calcular sus vértices.
b) Hallar el punto de esa región en el que la función F(x,y) = $6x + 4y$ alcanza el valor máximo y calcular dicho valor.

a) Hay que dibujar la región factible correspondiente. Para ello vamos a representar las rectas:

$x - y = -3$; $x + y = 8$; $x - y = 3$

La región factible es la determinada por los vértices O, A, B, C y D.

Las coordenadas de los vértices son: A(3,0) ; B(5.5, 2.5) ; C(2.5, 5.5) ; D(0,3) y O(0,0)



b) Para determinar dónde la función objetivo $F(x,y) = 6x + 4y$ alcanza su máximo, calculamos los valores que toma en los vértices:

F(A) = 18 ; F(B) = 43 ; F(C) = 37 ; F(D) = 12 ; F(O) = 0.

Luego la función alcanza su máximo en el vértice B y su valor es 43.

PROBLEMA #20 Las restricciones pesqueras impuestas por la CEE obligan a cierta empresa a pescar como máximo 2.000 toneladas de merluza y 2.000 toneladas de rape, además, en total, las capturas de estas dos especies no pueden pasar de las 3.000 toneladas. Si el precio de la merluza es de 1.000 Bs/kg y el precio del rape es de 1.500 Bs/kg, ¿qué cantidades debe pescar para obtener el máximo beneficio?

Sean las variables de decisión:

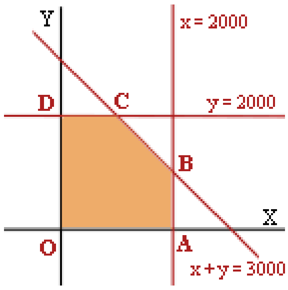
x = número de toneladas de merluza
y = número de toneladas de rape

Del enunciado deducimos las restricciones:

- *Como máximo 2000 toneladas de merluza:* $x \leq 2000$
- *Como máximo 2000 toneladas de rape:* $y \leq 2000$
- *Las capturas de estas dos especies no pueden pasar de las 3000 toneladas:* $x + y \leq 3000$

La función objetivo que da el beneficio en miles de pesetas y que hay que maximizar viene dada por:
$f(x,y) = 1000x + 1500y$

Representando las rectas: $x = 2000$, $y = 2000$, $x + y = 3000$ correspondientes a las fronteras de las restricciones obtenemos la región factible:



Donde los vértices obtenidos son:
A(2000,0) ; B(2000, 1000) ; C(1000, 2000) , D(0,2000) y O(0,0)

Al sustituir sus coordenadas en la función objetivo f resulta :

f(A) = 2000 millones de ptas. ; f(B) = 3500 millones de pesetas; f(C) = 4000 millones de pesetas ; f(D) = 3000 millones de pesetas y f(O)= 0 ptas.

La función objetivo alcanza su máximo en el vértice C, por lo que las cantidades a pescar son 1000 toneladas de merluza y 2000 toneladas de rape.

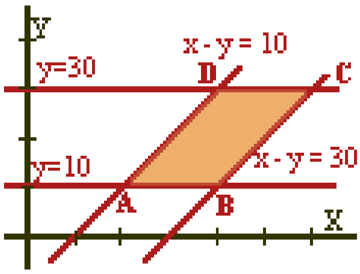
PROBLEMA #21 Dos pinturas A y B tienen ambas dos tipos de pigmentos p y q; A está compuesto de un 30% de p y un 40% de q, B está compuesto de un 50% de p y un 20% de q, siendo el resto incoloro. Se mezclan A y B con las siguientes restricciones:
La cantidad de A es mayor que la de B. Su diferencia no es menor que 10 gramos y no supera los 30 gramos. B no puede superar los 30 gramos ni ser inferior a 10 gramos.

a. ¿Qué mezcla contiene la mayor cantidad del pigmento p?
b. ¿Qué mezcla hace q mínimo?

Sean *x* e *y*, respectivamente, los gramos de las pinturas A y B que aparecen en la mezcla. Traduzcamos a inecuaciones las restricciones a las que se han de someter esas cantidades.

- *La cantidad de A es mayor que la de B*: $x > y$
- *Su diferencia no es menor que 10 gramos y no supera los 30 gramos*: $30 \geq x - y \geq 10$
- *B no puede superar los 30 gramos ni ser inferior a 10 gramos*: $30 \geq y \geq 10$

Además sabemos que : $x \geq 0$, $y \geq 0$.



Veamos las cantidades de pigmento de cada tipo:

Cantidad de pigmento de tipo p: $F_p(x, y) = 0.3x + 0.5y$
Cantidad de pigmento de tipo q: $F_q(x, y) = 0.4x + 0.2y$

La región factible es la que aparece en la imagen del margen.

Sus vértices son A(20,10) , B(40,10), C(60,30) y D(40,30)

a) La mayor cantidad de pigmento p, se produce para 60 gramos de la pintura A y 30 de la B:
F_p (40,30) = 0.3·40 + 0.5·30 = 27 ; F_p (20,10) = 11 ; F_p (40, 10) = 17; F_p (60, 30) = 33

b) La menor cantidad de pigmento q, se produce para 20 gramos de la pintura A y 10 de la B:
F_q (40, 30) = 0.4·40 + 0.2·30 = 22; F_q (20, 10) = 10 ; F_q (40, 10) = 18 ; F_q (60, 30) = 30

PROBLEMA #22 Problema de la dieta

En una granja de pollos se da una dieta "para engordar" con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B. En el mercado sólo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo X con una composición de una unidad de A y cinco de B, y el tipo Y, con una composición de cinco unidades de A y una de B. El precio del tipo X es de 1000 pesetas y el del tipo Y es de 3000 pesetas. Se pregunta:
¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un coste mínimo ?

El problema se llama así porque en sus orígenes consistió únicamente en determinar la dieta humana más económica.

En su forma industrial más corriente, el problema consiste en saber cómo mezclar de la forma más económica posible las materias primas que constituyen un producto de fórmula química conocida.

Podemos organizar la información mediante una tabla:

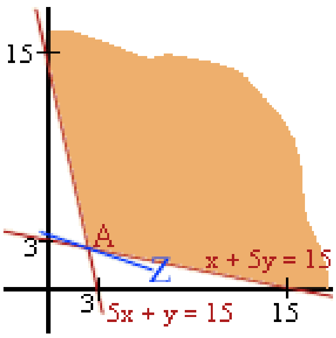
	Unidades	Sustancia A	Sustancia B	Costo
Compuesto X	*x*	*x*	5*x*	1000*x*
Compuesto Y	*y*	5*y*	*y*	3000*y*
Total		≥15	≥15	1000*x* + 3000*y*

La función objetivo del costo total, f, si se emplean *x* kg del compuesto X e *y* kg del compuesto Y, es :

$$Z = f(x,y) = 1000x + 3000y$$

El conjunto de restricciones es: $x \geq 0$, $y \geq 0$; $x + 5y \geq 15$; $5x + y \geq 15$.

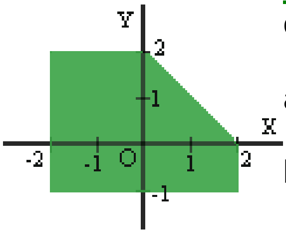
Con estos datos representamos la región factible y las rectas de nivel de la función objetivo.



De todas las rectas de nivel que tocan a la región factible, hace que el costo Z sea mínimo la que pasa por el vértice A(2.5,2.5).

La solución óptima se obtiene comprando 2.5 unidades de X y 2.5 unidades de Y.

El costo total es : Z = f(2.5,2.5) = 1000·2.5 + 3000·2.5 = 10.000 bolívares



PROBLEMA #23 Considera el recinto de la figura en el que están incluidos todos los lados y todos los vértices.

a) Escribe la inecuaciones que lo definen

b) Maximiza la función Z = $x + y$

a)

- Hallamos la ecuación de la recta que pasa por (2,0) y (0,2):

$$y = mx + n \quad \begin{cases} (0,2) \rightarrow 2 = m\cdot 0 + n \rightarrow n = 2 \\ (2,0) \rightarrow 0 = m\cdot 2 + 2 \rightarrow m = -1 \end{cases} \rightarrow y = -x + 2 \rightarrow x + y = 2$$

Los puntos del recinto (por ejemplo, el (0,0)) verifican $x + y \leq 2$

- Ecuación de la recta paralela al eje X que pasa por (0,2) : $y = 2$.
  Los puntos del recinto verifican $y \leq 2$
- Ecuación de la recta paralela al eje X que pasa por (0,-1): $y = -1$
  Los puntos del recinto verifican $y \geq -1$
- Ecuación de la recta paralela al eje Y que pasa por (2,0) : $x = 2$
  Los puntos del recinto verifican $x \leq 2$
- Ecuación de la recta paralela al eje Y que pasa por (-2,0): $x = -2$
  Los puntos del recinto verifican $x \geq -2$

Las inecuaciones que cumplen los puntos del recinto son:

$$x + y \leq 2$$
$$-2 \leq x \leq 2$$
$$-1 \leq y \leq 2$$

1. Disponemos de 210.000 euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A, que rinden el 10% y las del tipo B, que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130.000 euros en las del tipo A y como mínimo 60.000 en las del tipo B. Además queremos que la inversión en las del tipo A sea menor que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo interés anual?

Solución

Es un problema de programación lineal.

Llamamos **x** a la cantidad que invertimos en acciones de tipo A

Llamamos **y** a la cantidad que invertimos en acciones de tipo B

	inversión	rendimiento
Tipo A	x	0,1x
Tipo B	y	0,08y

210000 0,1x+0,08y

Condiciones que deben cumplirse (restricciones):

$x \geq 0$

$y \geq 0$

R_1 $x + y \leq 210000$

R_2 $x \leq 130000$

R_3 $y \geq 60000$

R_4 $x \leq 2y$

Dibujamos las rectas auxiliares asociadas a las restricciones para conseguir la región factible (conjunto de puntos que cumplen esas condiciones)

r_1 r_2 (paralela a OY) r_3(paralela a OX) r_4

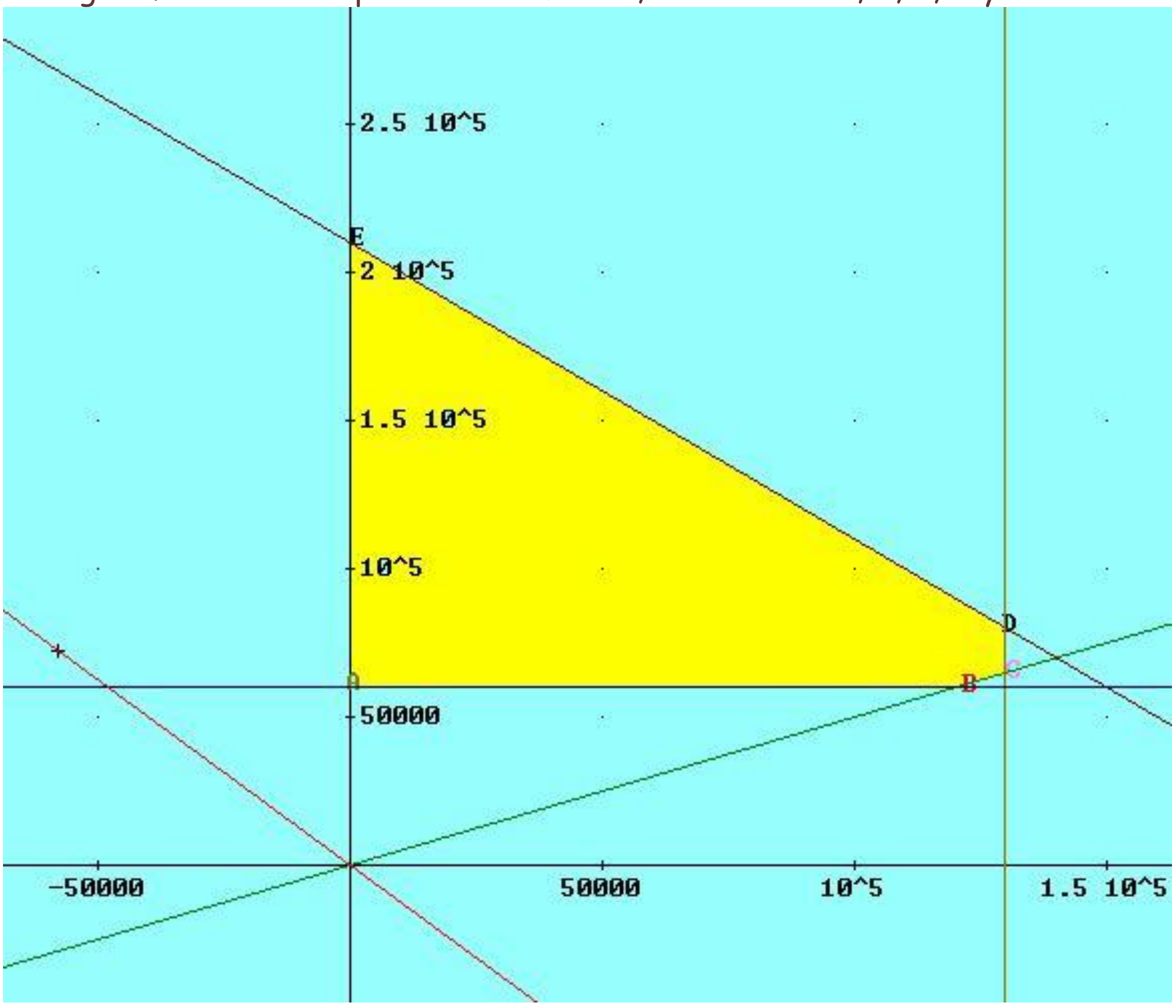
X	y
0	210000
210000	0

x	y
130000	0

x	y
0	60000

x	y
0	0
130000	65000

La región factible es la pintada de amarillo, de vértices A, B, C, D y E



A(0, 60000), B(120000, 60000), C(130000, 65000), D(130000, 80000) y E(0, 210000)
La función objetivo es;
F(x, y)= 0,1x+0,08y
Si dibujamos la curva F(x, y) =0 (en rojo) y la desplazamos se puede comprobar gráficamente que el vértice mas alejado es el **D, y por tanto es la solución óptima.**
Comprobarlo analíticamente (es decir comprobar que el **valor máximo de la función objetivo, F,** se alcanza en el vértice **D**)
2. En una pastelería se hacen dos tipos de tartas: Vienesa y Real. Cada tarta Vienesa necesita un cuarto de relleno por cada Kg. de bizcocho y produce un beneficio de 250 Pts, mientras que una tarta Real necesita medio Kg. de relleno por cada Kg. de bizcocho y produce 400 Ptas. de beneficio. En la pastelería se pueden hacer diariamente hasta 150 Kg. de bizcocho y 50 Kg. de relleno, aunque por problemas de maquinaria no pueden hacer mas de 125 tartas de cada tipo. ¿Cuántas tartas Vienesas y cuantas Reales deben vender al día para que sea máximo el beneficio?
Solución
En primer lugar hacemos una tabla para organizar los datos:

Tipo	Nº	Bizcocho	Relleno	Beneficio
T. Vienesa	x	1.x	0,250x	250x
T. Real	y	1.y	0,500y	400y
		150	50	

Función objetivo (hay que obtener su máximo): f(x, y)=250x+ 400y
Sujeta a las siguientes condiciones (restricciones del problema):

$$\begin{cases} x+y\leq 150 \\ 0{,}250x+0{,}500y\leq 50 \\ x\leq 125 \\ y\leq 125 \\ x\geq 0, y\geq 0 \end{cases}$$

Consideramos las rectas auxiliares a las restricciones y dibujamos la región factible:
Para 0.25x+0.50y=50, ó x + 2y=200

x	y
0	100
200	0

Para x + y =150

x	y
0	150

150	0

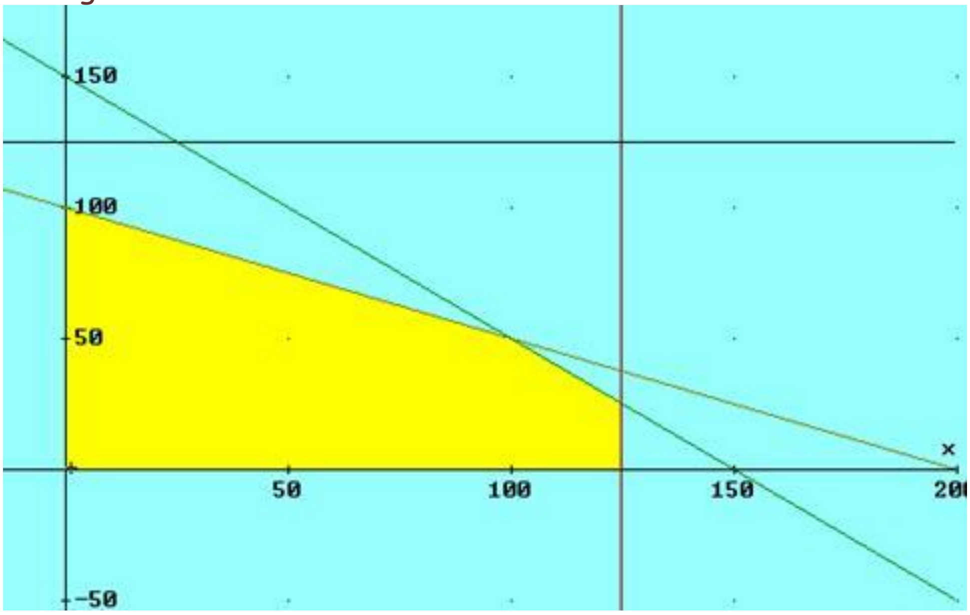
La otras dos son paralelas a los ejes

Al eje OY x=125

Al eje Ox y =125

Y las otras restricciones (x e y mayor o igual a cero) nos indican que las soluciones deben estar en el primer cuadrante

La región factible la hemos coloreado de amarillo:



Encontremos los vértices:

El **O**(0,0), el **A**(125, 0) y el **D**(0, 100) se encuentran directamente (son las intersecciones con los ejes coordenados)

Se observa que la restricción y≤ 125 es redundante (es decir "sobra")

Resolviendo el sistema:

$\begin{cases} x+2y=200 \\ x+y=150 \end{cases}$, por reducción obtenemos y=50, x=100

Otro vértice es el punto C(100, 50)

Y el último vértice que nos falta se obtiene resolviendo el sistema:

X+y=150

X=125

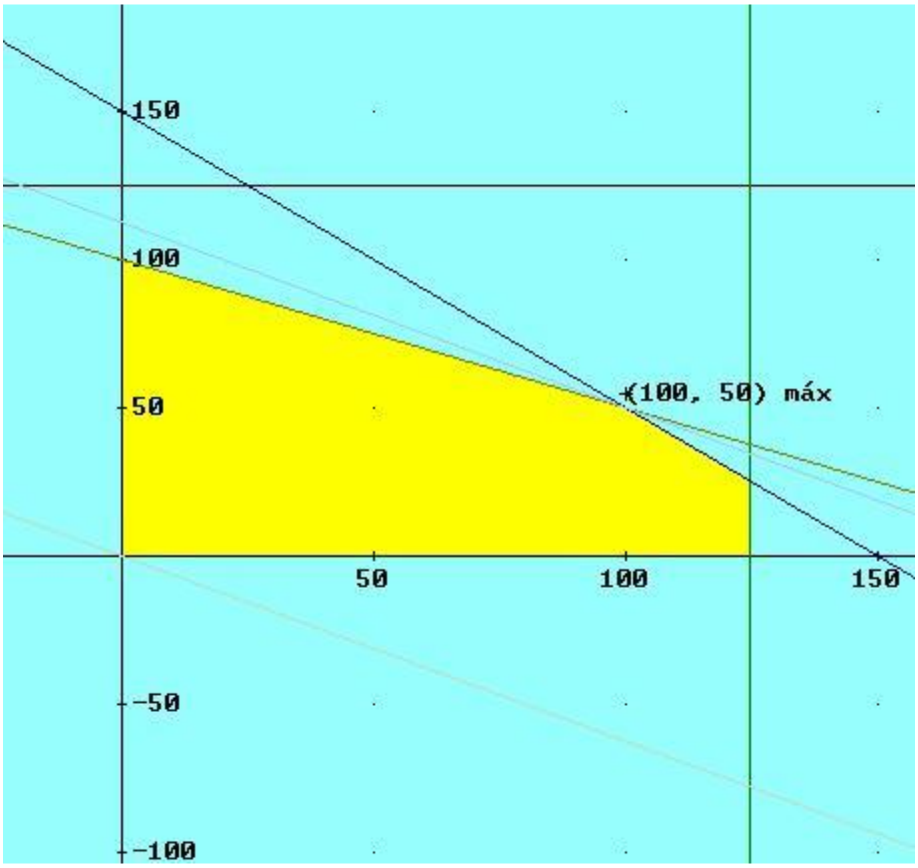
Cuya solución es: X=125, Y=25 B(125, 25)

Los vértices de la región son O(0,0), A(125,0), B(125,25) y C(100,50) y D(0,100),

Si dibujamos el vector de dirección de la función objetivo f(x, y)=250x+ 400y

Haciendo 250x+ 400y =0, y=-(250/400)x=-125x/200

x	y
0	0
200	-125



Se ve gráficamente que la solución es el punto (100, 50), ya que es el vértice mas alejado (el último que nos encontramos al desplazar la rectas 250x+400y=0)

Lo comprobamos con el método analítico, es decir usando el teorema que dice que si existe solución única debe hallarse en uno de los vértices

La unción objetivo era: f(x, y)=250x+400y, sustituyendo en los vértices obtenemos

f(125,0)=31.250

f(125,25)=31.250+10.000=41.250

f(100,50)=25.000+20.000=45.000

f(0,100)=40.000

El máximo beneficio es 45.000 y se obtiene en el punto (100, 50)

Conclusión: se tienen que vender 100 tartas vienesas y 50 tartas reales.

3. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autocares de 40 plazas y 10 autocares de 50 plazas, pero solo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autocar grande cuesta 80 euros y el de uno pequeño, 60 euros. Calcular cuantos de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo mas económica posible para la escuela.

Solución

Es un problema de programación lineal, en este caso lo que queremos es hacer mínima la función objetivo.

Llamamos **x** al nº de autocares de 40 plazas e **y** al nº de autocares de 50 plazas que alquila la escuela.

Entonces se tiene **x** ≤ 8 , **y** ≤ 10

Como sólo hay 9 conductores se verifica que: **x +y** ≤ 9

Como tienen que caber 400 alumnos se debe de verificar:

40x +50y ≥ 400 , que simplificada quedaría 4 x +5y ≥ 40

Por lo tanto las **restricciones** que nos van a permitir calcular la región factible (conjunto de puntos solución donde se cumplen todas las condiciones) son

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ \quad x \leq 8 \quad R_1 \\ \quad y \leq 10 \quad R_2 \\ x + y \leq 9 \quad R_3 \\ 4x + 5y \geq 40 \quad R_4 \end{cases}$$

La función objetivo es F(x, y)= 60x+ 80y

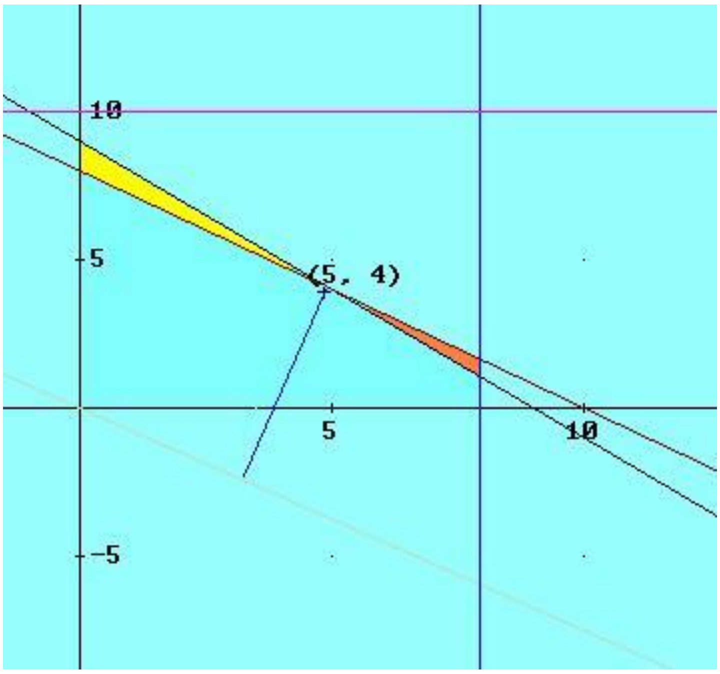
Dibujamos las rectas auxiliares,

r_1 r_2 r_3 r_4

X	y	x	y	x	y	x	y
8	0	0	10	0	9	0	8
				0	9	10	0

Así como la de que corresponde a F(x, y)=0 que se dibuja en rojo.

Teniendo en cuenta las restricciones (la de R_4 es la parte de arriba y que la R_3 es la parte de abajo), se encuentra la región factible. En el dibujo es la parte amarilla.



Los vértices son (0, 8), (0, 9) y el **(5, 4),** este último es el punto de intersección de las rectas r_3 y r_4

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 4x + 5y = 40 \end{cases} \underset{\text{por reducción}}{\Rightarrow} \begin{cases} 5x + 5y = 45 \\ 4x + 5y = 40 \end{cases}$$

restando ambas ecuaciones se tiene **x =5** y sustituyendo en la 1ª ecuación, **y =4**

Resolviendo gráficamente se llega a que el punto (5, 4) es la solución del problema. La solución óptima .

Comprobarlo sustituyendo en F(x, y) todos los vértices y que este es el que da menor valor (método analítico).

4. Una compañía posee dos minas: la mina A produce cada día 1 tonelada de hierro de alta calidad, 3 toneladas de calidad media y 5 de baja calidad. La mina B produce cada día 2 toneladas de cada una de las tres calidades. La compañía necesita al menos 80 toneladas de mineral de alta calidad, 160 toneladas de calidad media y 200 de baja calidad. Sabiendo que el coste diario de la operación es de 2000 euros en cada mina ¿cuántos días debe trabajar cada mina para que el coste sea mínimo?.

Solución

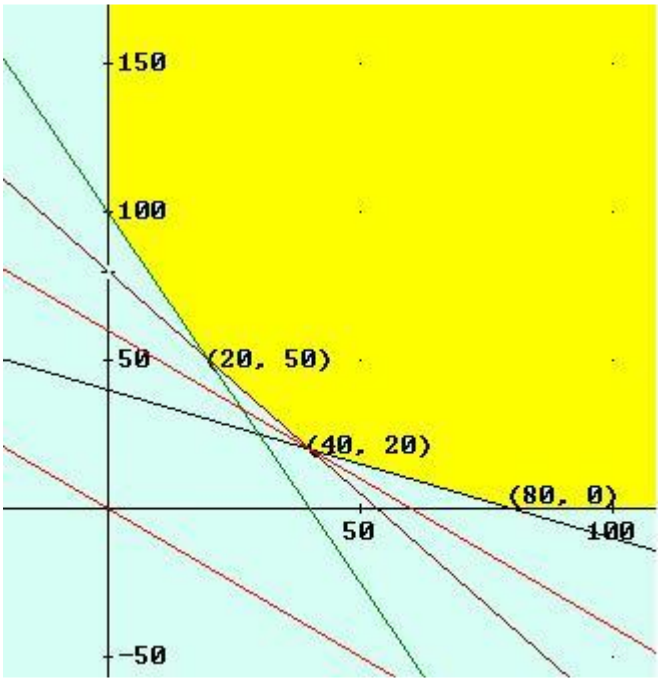
Organizamos los datos en una tabla:

	días	**Alta calidad**	**Calidad media**	**Baja calidad**	**Coste diario**
Mina A	x	1x	3x	5x	2000x
Mina B	y	2y	2y	2y	2000y
		80	160	200	

La función objetivo *C*(x, y)=2000x + 2000y

Las restricciones son:
$$\begin{cases} x + 2y \geq 80 \\ 3x + 2y \geq 160 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible la obtenemos dibujando las rectas auxiliares: $r_1 \equiv x + 2y = 80$, $r_2 \equiv 3x + 2y = 160$ y $r_3 \equiv 5x + 2y = 200$ en el primer cuadrante y considerando la región no acotada que determina el sistema de restricciones:



Los vértices son los puntos A(0, 100), B(20, 50), C(40, 20), D(80, 0), que se encuentran al resolver el sistema que determinan dos a dos las rectas auxiliares y (y que estén dentro de la región factible).

$r_1 \cap r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y = 80 \\ 3x + 2y = 160 \end{cases}$ que nos da el punto (40, 20) (comprobarlo)

$r_2 \cap r_3 \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 160 \\ 5x + 2y = 200 \end{cases}$ que nos da el punto (20, 50)

$r_1 \cap r_3$ no hace falta calcularlo pues queda fuera de la región factible.

En la gráfica se aprecia que el primer punto que se alcanza al desplazar la recta C(x, y)=0 es el (40, 20). Luego la solución es trabajar 40 días en la mina A y 20 en la B. (método gráfico)

Lo comprobamos aplicando el método analítico:

C(0, 100)=2000.100=200000

C(20, 50)=2000.20+2000.50=40000 + 100000= 140000

C(40, 20)= 2000. 40+2000.20=80000 + 40000= 120000 coste mínimo

C(80, 0)= 2000.80 =160000

5. Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos. Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble que el de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornada es de 250 euros por electricista y 200 euros por mecánico. ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio y cual es este?

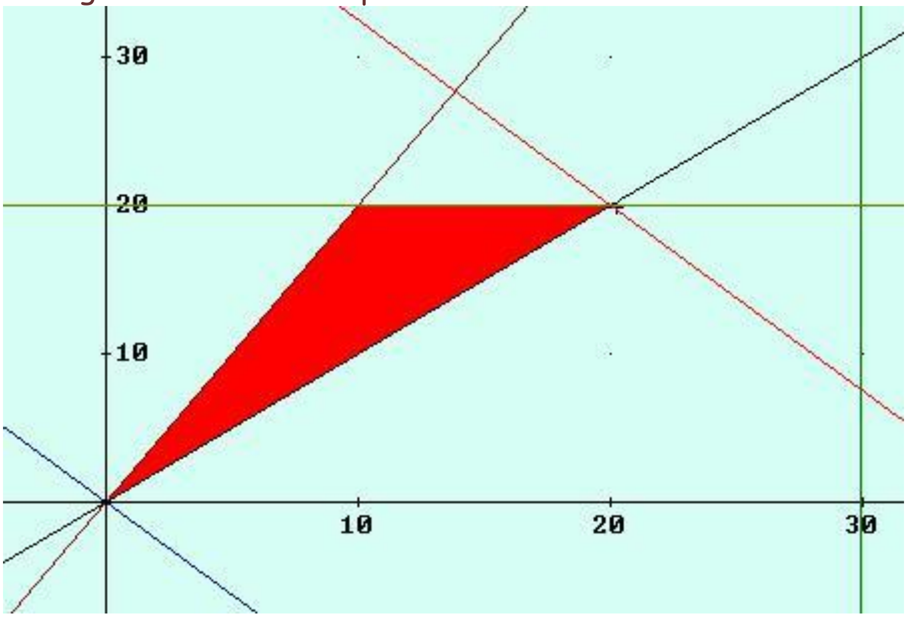
Sea x = nº electricistas

y = nº mecánicos

La función objetivo

$f(x, y)=250x+200y$, las restricciones $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq 2x \\ x \leq 30 \\ y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

La región factible sería para estas restricciones:



Se aprecia gráficamente (línea en rojo) que la solución óptima está en el punto (20, 20).

Por tanto:

20 electricistas y 20 mecánicos dan el máximo beneficio, y este es 9000 euros, ya que f(x, y) =250.20+200.20=9000

6. Para recorrer un determinado trayecto, una compañía aérea desea ofertar, a lo sumo, 5000 plazas de dos tipos: T(turista) y P(primera). La ganancia correspondiente a cada plaza de tipo T es de 30 euros, mientras que la ganancia del tipo P es de 40 euros.

El número de plazas tipo T no puede exceder de 4500 y el del tipo P, debe ser, como máximo, la tercera parte de las del tipo T que se oferten.

Calcular cuántas tienen que ofertarse de cada clase para que las ganancias sean máximas.

Solución

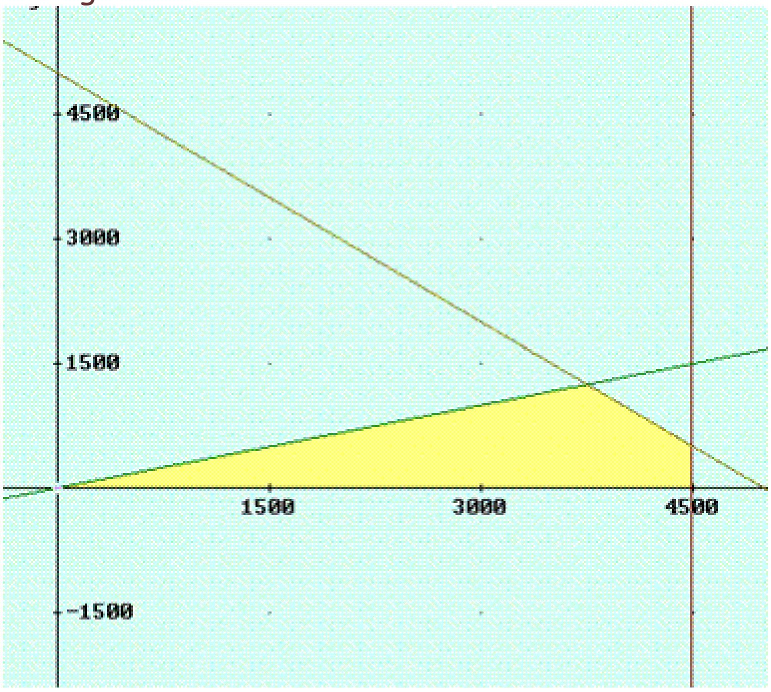
Sea x el nº que se ofertan de tipo T, y el nº que se ofertan de tipo P.

	nº	Ganancia
Turista	x	30x
Primera	y	40y
Total	5000	30x +40y

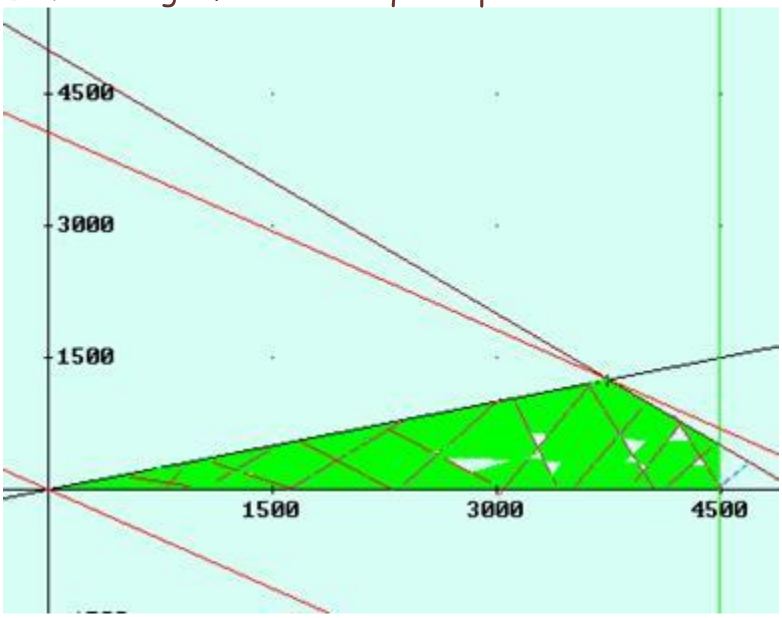
La función objetivo es:
$f(x, y)=30x +40y$

Las restricciones:
$$\begin{cases} x+y \leq 5000 \\ x \leq 4500 \\ y \leq \dfrac{x}{3} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible:



Los vértices, A(0, 5000), B(3750, 1250), C(4500, 500) y D(4500, 0)
(comprueba el punto B resolviendo el sistema correspondiente)
El método gráfico nos da que el punto solución es el B (3750, 1250)



Comprueba los resultados usando el método analítico (sustituyendo los puntos vértices en f y viendo q el máximo valor se obtiene en B)