

TEMA 6:
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I, de primero de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira.

Página 153

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

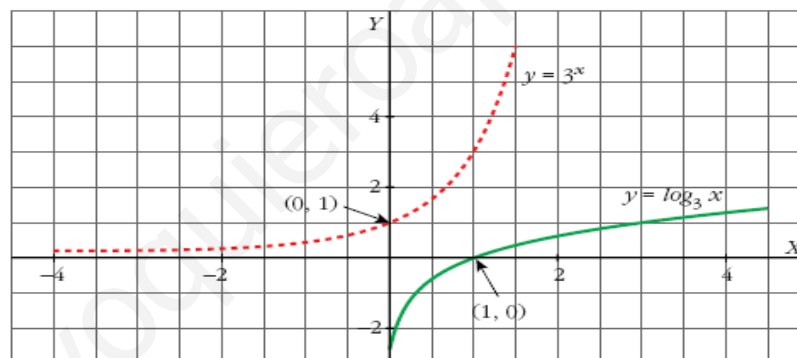
PARA PRACTICAR

- 1** Haz una tabla de valores de la función $y = 3^x$. A partir de ella, representa la función $y = \log_3 x$.

• Si el punto $(2, 9)$ pertenece a $y = 3^x$, el punto $(9, 2)$ pertenecerá a $y = \log_3 x$.

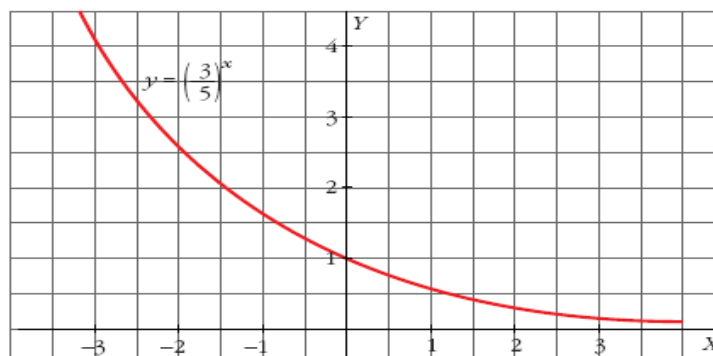
x	-2	-1	0	1	2
3^x	1/9	1/3	1	3	9

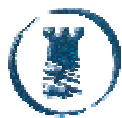
x	1/9	1/3	1	3	9
$\log_3 x$	-2	-1	0	1	2



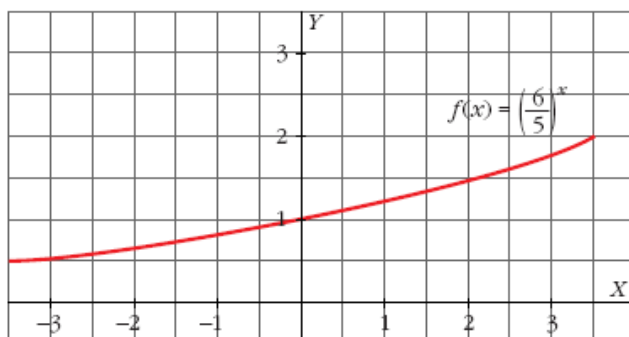
- 2** Con ayuda de la calculadora, haz una tabla de valores de la función $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ y represéntala gráficamente.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4,63	2,78	1,67	1	0,6	0,36	0,22





- 3 Representa la función $y = \left(\frac{6}{5}\right)^x$. ¿Es creciente o decreciente?



Es creciente.

- 4 Considera las funciones f y g definidas por $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \frac{1}{x}$.
Calcula:

a) $(f \circ g)(2)$ b) $(g \circ f)(-3)$ c) $(g \circ g)(x)$ d) $(f \circ g)(x)$
a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $g(g(x)) = x$ d) $f(g(x)) = \frac{1+x^2}{x^2}$

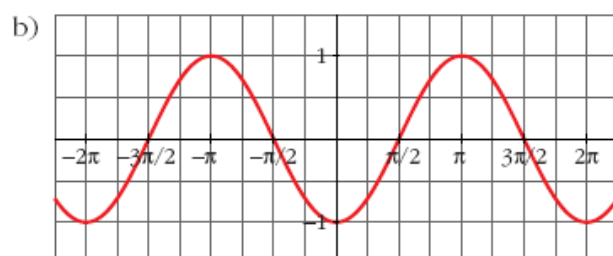
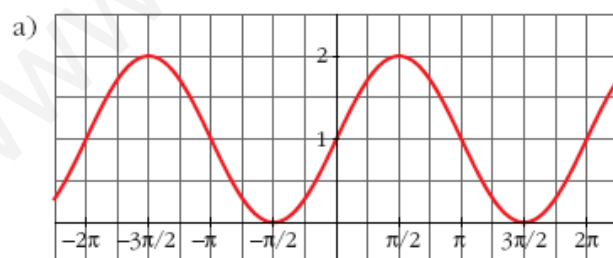
- 5 Dadas las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \sqrt{x}$, halla:

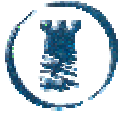
a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$ c) $(g \circ g)(x)$
a) $f[g(x)] = \cos \sqrt{x}$ b) $g[f(x)] = \sqrt{\cos x}$ c) $g[g(x)] = \sqrt[4]{x}$

- 6 Representa las funciones:

a) $y = 1 + \operatorname{sen} x$

b) $y = -\cos x$





7 Halla la función inversa de estas funciones:

a) $y = 3x$

b) $y = x + 7$

c) $y = 3x - 2$

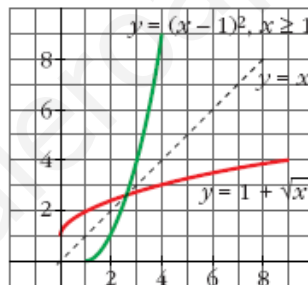
a) $x = 3y \Rightarrow y = \frac{x}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$

b) $x = y + 7 \Rightarrow y = x - 7 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 7$

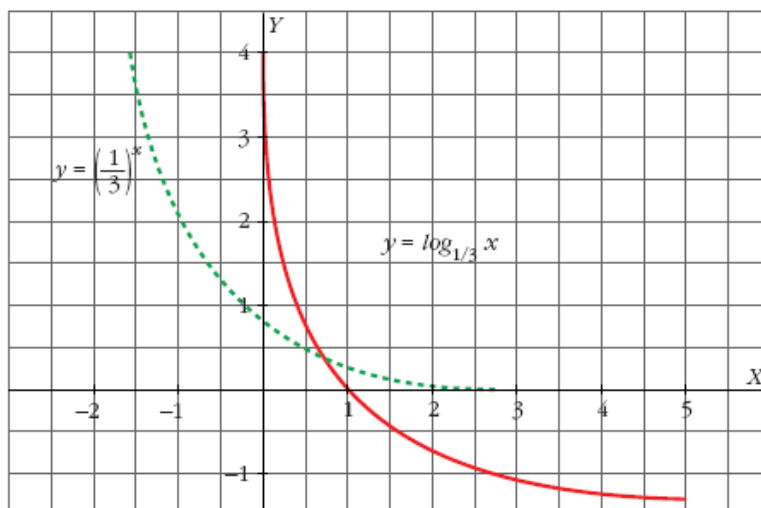
c) $x = 3y - 2 \Rightarrow y = \frac{x + 2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3}$

8 Dada la función $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, halla $f^{-1}(x)$. Representa las dos funciones y comprueba su simetría respecto de la bisectriz del 1^{er} cuadrante.

$f^{-1}(x) = (x - 1)^2, x \geq 1$



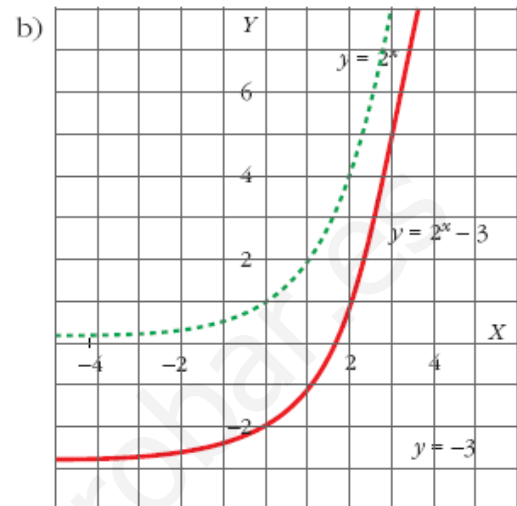
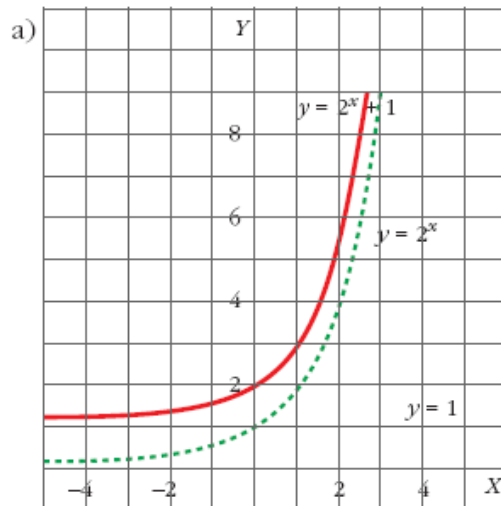
9 Representa la gráfica de $y = \log_{1/3} x$ a partir de la gráfica de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.





10 Representa las funciones: a) $y = 2^x + 1$; b) $y = 2^x - 3$

Utiliza la gráfica de $y = 2^x$.



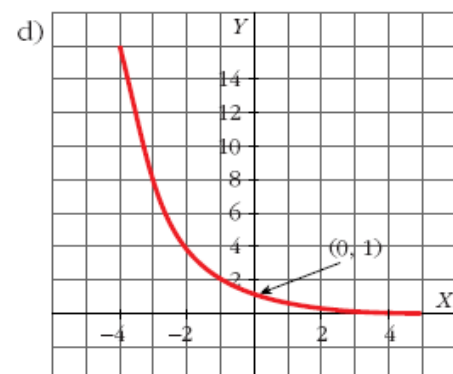
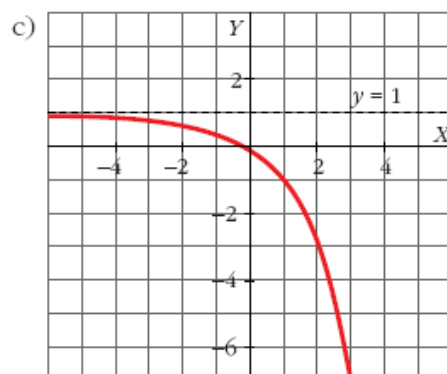
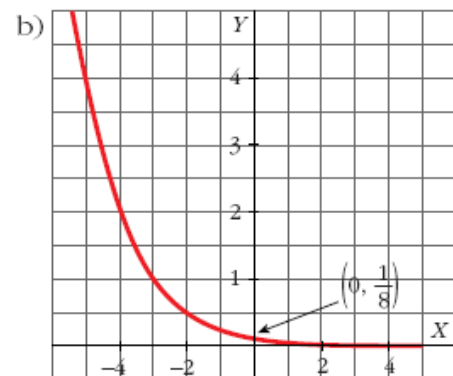
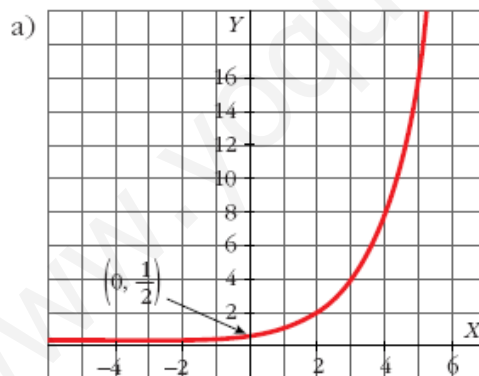
11 Representa las siguientes funciones:

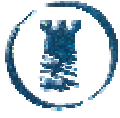
a) $y = 2^{x-1}$

b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

c) $y = 1 - 2^x$

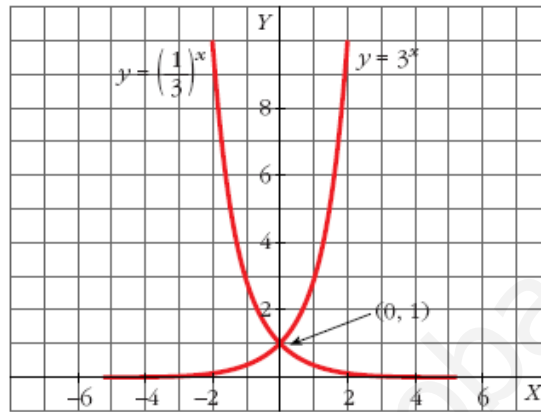
d) $y = 2^{-x}$





- 12 Comprueba que las gráficas de $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ son simétricas respecto a eje OY .

• Representálas en los mismos ejes.



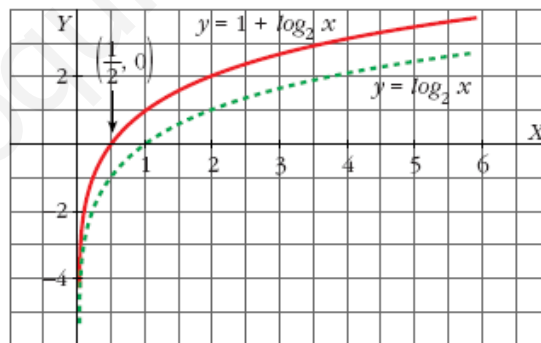
- 13 Representa estas funciones a partir de la gráfica de $y = \log_2 x$:

a) $y = 1 + \log_2 x$

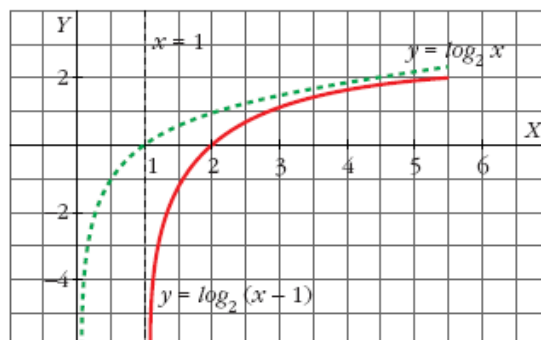
b) $y = \log_2(x - 1)$

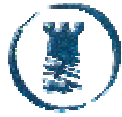
• En b), el dominio es $(1, +\infty)$.

a) $y = 1 + \log_2 x$



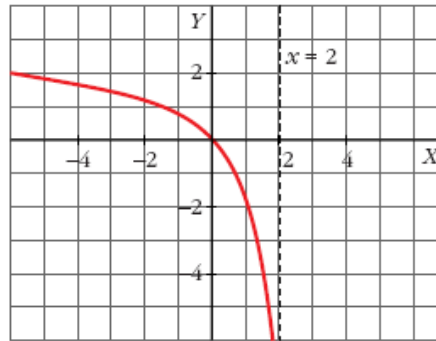
b) $y = \log_2(x - 1)$





14 ¿Cuál es el dominio de esta función?: $y = \log_2(2 - x)$. Representála.

Dominio: $(-\infty, 2)$



PARA RESOLVER

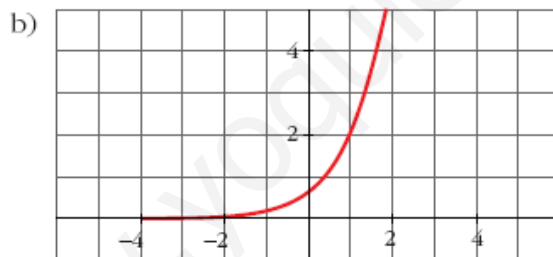
15 La gráfica de una función exponencial del tipo $y = k a^x$ pasa por los puntos $(0; 0,5)$ y $(1; 1,7)$.

a) Calcula k y a .

b) Representa la función.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 0,5 = k \cdot a^0 \\ 1,7 = k \cdot a^1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,5 = k \\ 1,7 = k \cdot a \end{array} \Rightarrow \begin{cases} k = 0,5 \\ a = 3,4 \end{cases}$$

La función es $y = 0,5 \cdot (3,4)^x$



16 Se llama inflación a la pérdida de valor del dinero; es decir, si un artículo que costó 100 euros al cabo de un año cuesta 106 euros, la inflación ha sido del 6%.

Suponiendo que la inflación se mantiene constante en el 6% anual, ¿cuánto costará dentro de 5 años un terreno que hoy cuesta cinco mil euros?

$$5000 \cdot (1,06)^5 \approx 6691,13 \text{ euros}$$

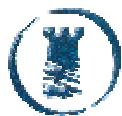
17 En el contrato de trabajo de un empleado figura que su sueldo subirá un 6% anual.

a) Si empieza ganando 10 000 euros anuales, ¿cuánto ganará dentro de 10 años?

b) Calcula cuánto tiempo tardará en duplicarse su sueldo.

a) $10000 \cdot (1,06)^{10} \approx 17908,48$ euros

b) $1,06^x = 2 \Rightarrow x \approx 12$ años tardará en duplicarse.



21 Un cultivo de bacterias crece según la función $y = 1 + 2^{x/10}$ (y : miles de bacterias, x : horas).

- ¿Cuántas había en el momento inicial?
- ¿Y al cabo de 10 horas?
- Calcula cuánto tiempo tardarán en duplicarse.

a) $x = 0 \rightarrow y = 1 + 2^0 = 1 + 1 = 2 \rightarrow 2\,000$ bacterias

b) $x = 10 \rightarrow y = 1 + 2 = 3 \rightarrow 3\,000$ bacterias

c) $1 + 2^{x/10} = 4 \rightarrow x = \frac{10 \log 3}{\log 2} \approx 15,8 \text{ h} \approx 16 \text{ h}$

Aproximadamente, 16 horas.

22 De la función exponencial $f(x) = k a^x$ conocemos $f(0) = 5$ y $f(3) = 40$
¿Cuánto valen k y a ?

$$f(0) = 5 \Rightarrow 5 = k$$

$$f(3) = 40 \Rightarrow 40 = 5 \cdot a^3 \Rightarrow a = 2$$

La función es $f(x) = 5 \cdot 2^x$

23 Halla la función inversa de las siguientes funciones:

a) $y = 3 \cdot 2^{x-1}$

b) $y = 1 + 3^x$

a) $x = 3 \cdot 2^{y-1}; \frac{x}{3} = 2^{y-1}; \log_2 \frac{x}{3} = y - 1$

$$y = 1 + \log_2 \frac{x}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \log_2 \frac{x}{3}$$

b) $x = 1 + 3^y; x - 1 = 3^y; \log_3(x - 1) = y \rightarrow f^{-1}(x) = \log_3(x - 1)$

24 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2,3^x = 18$

b) $7 \cdot 3^x = 567$

c) $\frac{2^x}{3} = 7,5$

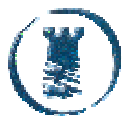
d) $4^{2x-1} = 0,25$

a) $x \log 2,3 = \log 18 \Rightarrow x = \frac{\log 18}{\log 2,3} = 3,47$

b) $3^x = \frac{567}{7} \Rightarrow 3^x = 81 \Rightarrow x = 4$

c) $2^x = 22,5 \Rightarrow x = \frac{\log 22,5}{\log 2} = 4,49$

d) $4^{2x-1} = 4^{-1} \Rightarrow 2x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$



25 Las siguientes ecuaciones exponenciales tienen soluciones enteras.

Hállalas:

a) $2^{x^2+1} = 32$ b) $3^{2x-5} = 2187$ c) $\sqrt{7^x} = \frac{1}{49}$ d) $(0,5)^x = 16$

a) $2^{x^2+1} = 2^5 \Rightarrow x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$

b) $3^{2x-5} = 3^7 \Rightarrow 2x - 5 = 7 \Rightarrow x = 6$

c) $7^{x/2} = 7^{-2} \Rightarrow \frac{x}{2} = -2 \Rightarrow x = -4$

d) $2^{-x} = 2^4 \Rightarrow x = -4$

26 Resuelve mediante un cambio de variable:

a) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ b) $3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 21$ c) $3^x - 3^{-x} = \frac{728}{27}$

a) $2^x = z; z^2 - 5z + 4 = 0; z_1 = 4, z_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 0$

b) $3^x = z; z - \frac{z}{3} + \frac{z}{9} = 21 \Rightarrow z = 27 \Rightarrow x = 3$

c) $3^x = z; z - \frac{1}{z} = \frac{728}{27} \Rightarrow z^2 - 1 = \frac{728}{27}z \Rightarrow 27z^2 - 728z - 27 = 0$

$z_1 = 27 \Rightarrow x_1 = 3; z_2 = -\frac{2}{54}$ (no vale)

27 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $7^{x+2} = 823543$ b) $5^{5x-2} = 390625$

c) $3^x + 3^{x+2} = 39$ d) $10^{3+x} = 1$

a) $7^{x+2} = 7^7 \Rightarrow x + 2 = 7 \Rightarrow x = 5$

b) $5^{5x-2} = 5^8 \Rightarrow x = 2$

c) $3^x(1+9) = 39 \Rightarrow 3^x = 3,9 \Rightarrow x = \frac{\log 3,9}{\log 3} = 1,24$

d) $3 + x = 0 \Rightarrow x = -3$

28 Calcula x en las siguientes ecuaciones:

a) $\log x = \log 9 - \log 4$ b) $\ln x = 3 \ln 5$

c) $3 + 2 \log x = 5$ d) $\frac{1}{3} \log_2 x = -3$

a) $\log x = \log \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$

b) $\ln x = \ln 5^3 \Rightarrow x = 125$

c) $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$

d) $\log_2 x = -9 \Rightarrow x = 2^{-9} = \frac{1}{512}$