

Examen de Matemáticas Ciencias Sociales I – 1º de Bachillerato

1. Dada la siguiente función definida por trozos: $f(x) = \begin{cases} \frac{-2}{x} & \text{si } x < -1 \\ -x+1 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ x^2 - 4x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad. **(1,5 puntos)**

b) Representala gráficamente **(1 punto)**

2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x < -2 \\ -x - 2 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ \frac{kx - 7}{x + 1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de f en el punto $x = -2$. **(0,5 puntos)**

b) Hallar el valor de k para que f sea continua en $x = 1$. **(1 punto)**

c) Para el valor de k hallado en el apartado anterior, representa gráficamente la función f . **(1 punto)**

3. Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$:

a) Hallar, utilizando la definición, la derivada de la función en el punto $x = 1$. **(1 punto)**

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $x = 1$. **(1 punto)**

c) Halla el ángulo que forma dicha recta tangente con el eje X. **(0,5 puntos)**

4. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$ **(0,5 puntos)**

b) $y = (5x^3 - 3x^2 + 2x - 6)^7$ **(0,5 puntos)**

c) $y = (4x^3 - 2x^2 - x + 1)(2x^3 - 1)$ **(0,5 puntos)**

d) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 2}$ **(0,5 puntos)**

e) $y = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ **(0,5 puntos)**

① a) f es continua en todo \mathbb{R} salvo, a lo sumo, en $x = -1$ y $x = 2$. Veamos qué ocurre en estos puntos.

* $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-2}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x+1) = 2$$

$$f(-1) = 2.$$

$$\text{Por tanto } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2 = f(-1) \Rightarrow$$

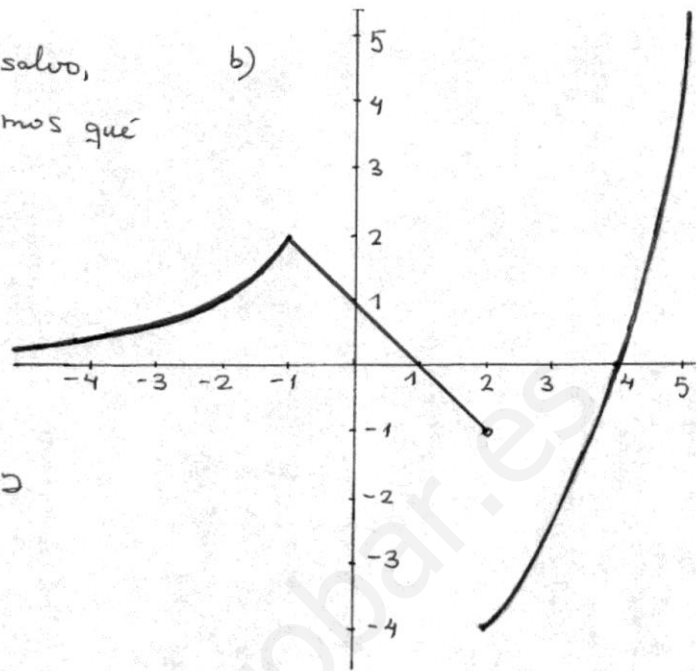
f es continua en $x = -1$

* $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x+1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4x) = -4$$

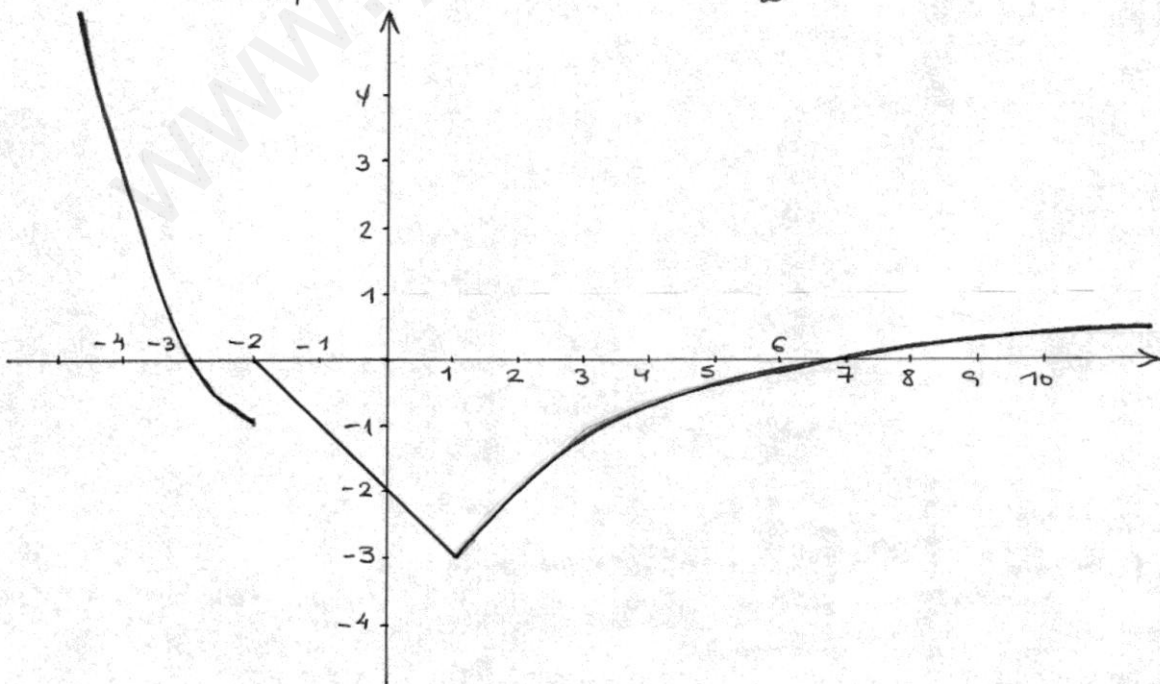
Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, f no es continua en $x = 2$. Hay una discontinuidad de salto finito de longitud 3.



$$\textcircled{2} \text{ a) } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 + 4x + 3) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (-x - 2) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \Rightarrow$$

f no es continua en $x = -2$. Hay una discontinuidad de salto finito de longitud 1.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow -3 = \frac{k-7}{2} \Rightarrow -6 = k-7 \Rightarrow \underline{\underline{k=1}}$$



$$\textcircled{3} \quad \begin{aligned} \text{a) } f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x - 5 - (-1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 5x + 4)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x + 4) = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y - f(1) &= f'(1)(x-1) \Rightarrow y - (-1) = 0 \cdot (x-1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = -1}} \quad (\text{función constante: recta para-} \\ &\quad \text{lela al eje X que pasa por el punto } (0, -1)). \end{aligned}$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ.$$

$$\textcircled{4} \quad \text{a) } y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^2}{x^{1/3}} = x^{2 - 1/3} = x^{5/3}$$

$$y' = \frac{5}{3} x^{5/3 - 1} = \frac{5}{3} x^{2/3} = \underline{\underline{\frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2}}}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y' &= 7(5x^3 - 3x^2 + 2x - 6)^6 \cdot (15x^2 - 6x + 2) = \\ &= \underline{\underline{(105x^2 - 42x + 14) \cdot (5x^3 - 3x^2 + 2x - 6)^6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } y' &= (12x^2 - 4x - 1) \cdot (2x^3 - 1) + (4x^3 - 2x^2 - x + 1) \cdot 6x^2 = \\ &= 24x^5 - 12x^2 - 8x^4 + 4x - 2x^3 + 1 + 24x^5 - 12x^4 - 6x^3 + 6x^2 = \\ &= \underline{\underline{48x^5 - 20x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 4x + 1}} \end{aligned}$$

$$\text{d) } y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x + 2}} \cdot (2x - 4) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 2}} = \frac{2(x - 2)}{2\sqrt{x^2 - 4x + 2}} = \underline{\underline{\frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 2}}}}$$

$$\text{e) } y' = \frac{2\sqrt{x^2 - 1} - (2x - 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x}{(\sqrt{x^2 - 1})^2} = \frac{2\sqrt{x^2 - 1} - \frac{2x^2 - x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} =$$

$$= \frac{\frac{2(x^2 - 1) - 2x^2 + x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} = \frac{2x^2 - 2 - 2x^2 + x}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}} = \underline{\underline{\frac{x - 2}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}}}$$