1. Calcular el dominio de las siguientes funciones: **(1 punto)**

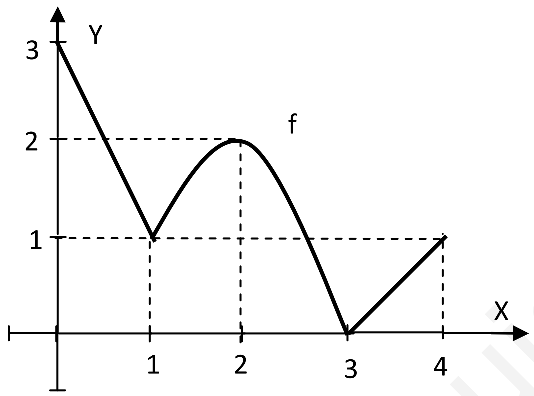
a) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2-x-1}$ **b)** $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x}$

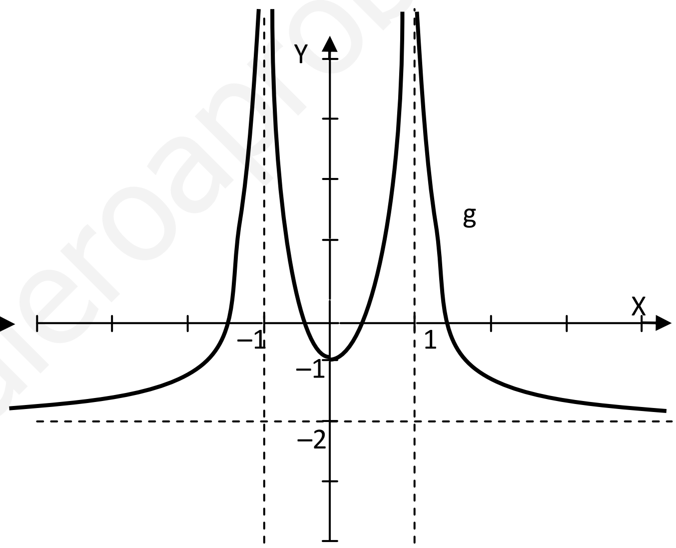
2. Estudia la simetría de las siguientes funciones: **(1 punto)**

a) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x^4}$ **b)** $g(x)=\sqrt{x^2-2}$

3. Dada la función parabólica $y=2x^2-13x+20$, calcular: puntos de corte con los ejes **(0,5 puntos)**, vértice **(0,5 puntos)** y hacer la representación gráfica **(1 punto)**.

4. De cada una de las funciones cuya gráfica se da a continuación, calcular:





a) Intervalos donde la función es creciente, decreciente, estrictamente creciente, estrictamente decreciente o constante. **(0,5 puntos)**

b) Máximos y mínimos relativos y máximos y mínimos absolutos. **(0,5 puntos)**

c) Dominio e imagen de la función. **(0,5 puntos)**

5. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$ y $g(x)=\dfrac{x+1}{2x}$:

a) $f\circ g$ **(0,5 puntos)** **b)** $g\circ f$ **(0,5 puntos)**

6. Dada la función $f(x)=\dfrac{3x}{2x-1}$, halla la función inversa de f respecto de la composición **(0,5 puntos)** y comprueba que efectivamente lo es **(1,5 puntos).**

① a) $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x^2 - x - 1 = 0\}$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto $\underline{\underline{\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{1, -\frac{1}{2}\}}}$

b) $\text{Dom} g = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x - 2 \geq 0\} - \{0\}$

Como $x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2$, entonces: $\underline{\underline{\text{Dom} g = [2, +\infty)}}$

② a) $$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + (-x)^4} = \frac{-x^3}{x^2 + x^4} = -\frac{x^3}{x^2 + x^4} = -f(x)$$

Por tanto f es IMPAR (simétrica respecto del origen)

b) $g(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 2} = \sqrt{x^2 - 2} = g(x)$

Por tanto g es PAR (simétrica respecto del eje Y).

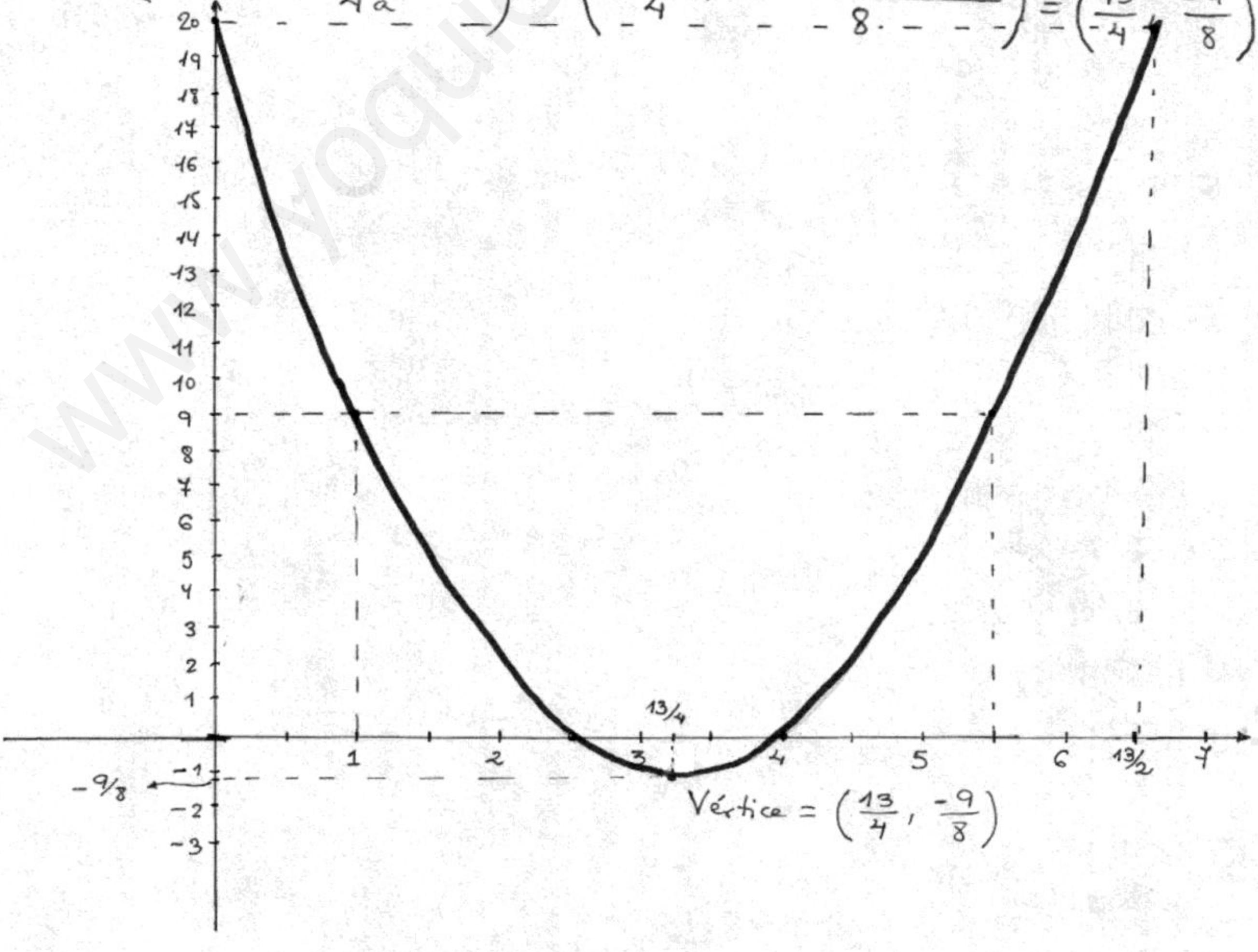
③ Punto de corte con el eje Y: $(0, 20)$

Puntos de corte con el eje X: $2x^2 - 13x + 20 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4\cdot 2\cdot 20}}{4} = \frac{13 \pm 3}{4} = \begin{cases} 4 \\ \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Por tanto los puntos de corte con el eje X son: $(4, 0)$ y $(\frac{5}{2}, 0)$

Vértice: $$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right) = \left(\frac{13}{4}, \frac{-169 + 4\cdot 2\cdot 20}{8}\right) = \left(\frac{13}{4}, \frac{-9}{8}\right)$$



④ Función f:

a) f es estrictamente decreciente en $[0,1)\cup(2,3)$.
f es estrictamente creciente en $(1,2)\cup(3,4]$.

b) En $x=2$ hay un máximo relativo. Punto $(2,2)$.
En $x=0$ hay un máximo absoluto. Punto $(0,3)$.
En $x=1$ hay un mínimo relativo. Punto $(1,1)$.
En $x=3$ hay un mínimo absoluto. Punto $(3,0)$.

c) $\mathrm{Dom} f=[0,4]$; $\mathrm{Im} f=[0,3]$

Función g:

a) g es estrictamente decreciente en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.
g es estrictamente creciente en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

b) En $x=0$ hay un mínimo relativo. Punto $(0,-1)$.
No hay máximos relativos. Tampoco hay ni máximos ni mínimos absolutos.

c) $\mathrm{Dom}\, g=\mathbb{R}-\{-1,1\}$; $\mathrm{Im}\, g=(-2,+\infty)$

⑤ $$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{x+1}{2x}\right)=\frac{2\cdot\frac{x+1}{2x}}{\frac{x+1}{2x}-3}=\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{-5x+1}{2x}}=$$
$$=\frac{2x(x+1)}{x(-5x+1)}=\frac{2(x+1)}{-5x+1}=\underline{\underline{\frac{2x+2}{-5x+1}}}$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{2x}{x-3}\right)=\frac{\frac{2x}{x-3}+1}{2\cdot\frac{2x}{x-3}}=\frac{\frac{3x-3}{x-3}}{\frac{4x}{x-3}}=$$
$$=\frac{(3x-3)(x-3)}{4x(x-3)}=\underline{\underline{\frac{3x-3}{4x}}}$$

⑥ $$y=\frac{3x}{2x-1}\Rightarrow y(2x-1)=3x\Rightarrow 2yx-y=3x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2yx-3x=y\Rightarrow x(2y-3)=y\Rightarrow x=\frac{y}{2y-3}$$

La función inversa será pues $\underline{\underline{f^{-1}(x)=\frac{x}{2x-3}}}$

<u>Comprobación</u>:

$$(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=f\left(\frac{x}{2x-3}\right)=\frac{3\frac{x}{2x-3}}{2\frac{x}{2x-3}-1}=\frac{\frac{3x}{2x-3}}{\frac{3}{2x-3}}=$$
$$=\frac{3x(2x-3)}{3(2x-3)}=x\ .\ \Rightarrow f\circ f^{-1}=I$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}\left(\frac{3x}{2x-1}\right)=\frac{\frac{3x}{2x-1}}{2\frac{3x}{2x-1}-3}=$$
$$=\frac{\frac{3x}{2x-1}}{\frac{6x}{2x-1}-\frac{3(2x-1)}{2x-1}}=\frac{\frac{3x}{2x-1}}{\frac{3}{2x-1}}=\frac{3x(2x-1)}{3(2x-1)}=x\Rightarrow f^{-1}\circ f=I$$