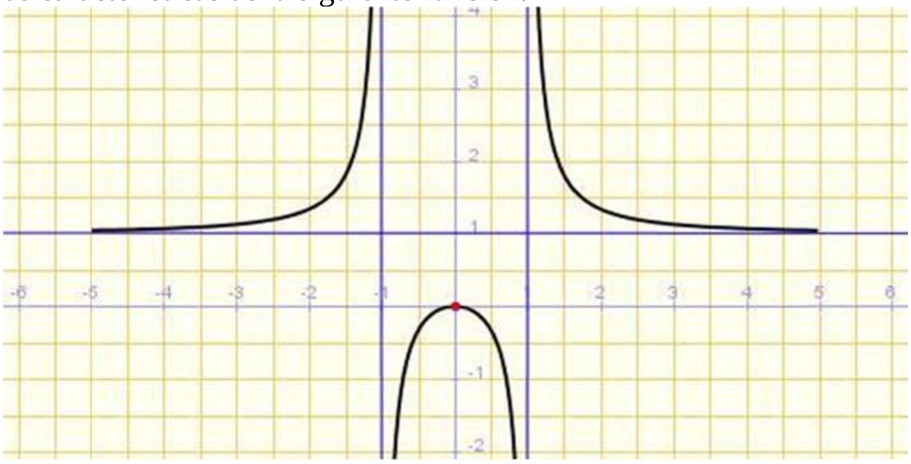
ACTIVIDADES UNIDAD 6: Funciones

1. Indica las características de la siguiente función:



Dominio: $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,-\infty)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

Imagen o recorrido: $(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$

Monotonía:

- Creciente: $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$
- Decreciente: $(0,1)\cup(1,+\infty)$
- Máximos relativos: $(0,0)$
- Mínimos relativos: No tiene

Simetrías: Es par. Simétrica respecto del eje OY.

Continuidad: Continua en $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,-\infty)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

Periodicidad: No es periódica

Acotación: No está acotada (la función completa)

- Cotas, supremo (ínfimo) y extremos absolutos en $[-1,1]$: $\begin{cases}\text{Cotas superiores: } 0,1,2,\ldots \\ \text{Supremo: } 0 \\ \text{Máximo absoluto:}(0,0)\end{cases}$

Curvatura:

- Cóncava: $(-1,1)$
- Convexa: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Tendencias:

Cuando $\begin{cases}x\to 0\\ x\to+\infty\\ x\to-\infty\end{cases}\Rightarrow f(x)\to\begin{cases}0\\1\\1\end{cases}$

2. Indica las características de la siguiente función:

Dominio: $\mathbb{R}$

Imagen o recorrido: $[-0.25\ ,0.15]$

Monotonía:

- Creciente: $(-\infty,-1.8)\cup(0\ ,1.8)$
- Decreciente: $(-1.8\ ,\ 0)\cup(1.8\ ,\ +\infty)$
- Máximos relativos: $(-1.8\ ,0.15)$ y $(1.8\ ,0.15)$
- Mínimos relativos: $(0\ ,\ -0.25)$

Simetrías: Par. Simétrica respecto del eje OY

Continuidad: Continua en $\mathbb{R}$

Periodicidad: No es periódica

Acotación: Acotada

- Cotas, supremo (ínfimo) y extremos absolutos:

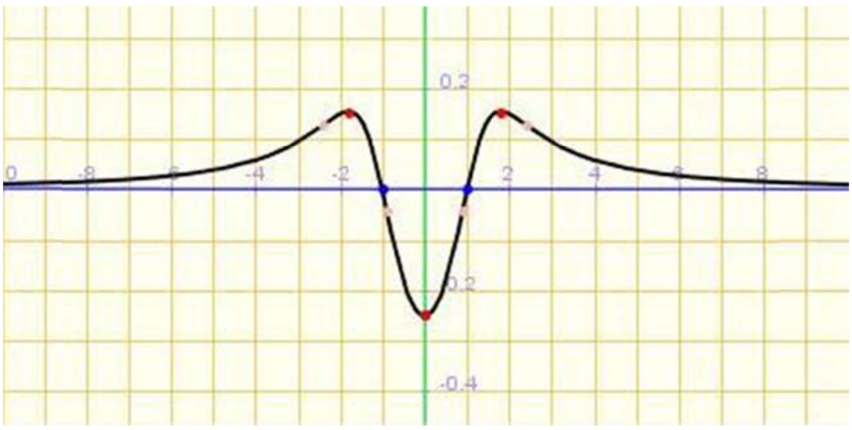
$$\begin{cases} \text{Cotas superiores: } 0.15\ ,\ 0.2,... \\ \text{Supremo: } 0.15 \\ \text{Máximos absolutos:}(-1.8\ ,\ 0.15) \text{ y } (1.8\ ,0.15) \\ \text{Cotas inferiores: } -0.25\ ,\ 0.3,... \\ \text{Ínfimo: } -0.25 \\ \text{Mínimo absoluto:}(0\ ,\ -0.25) \end{cases}$$

Curvatura:

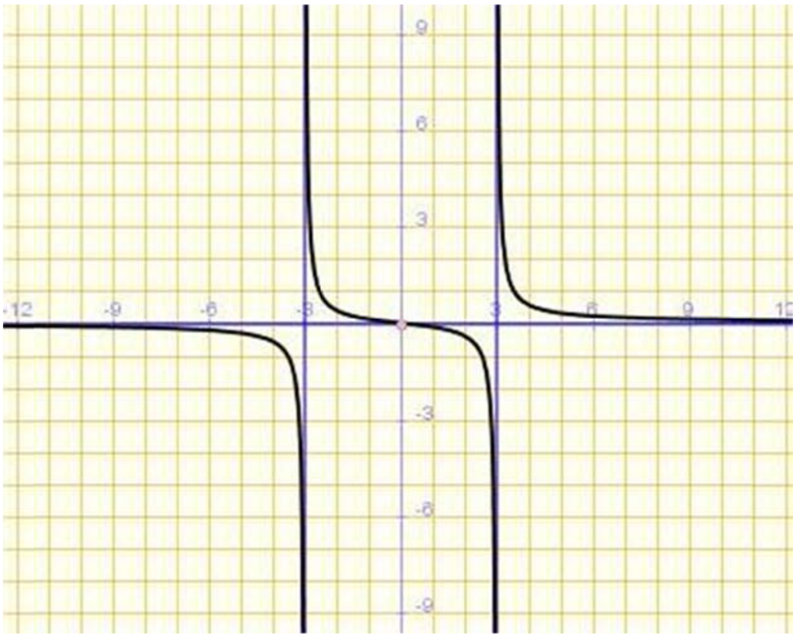
- Cóncava: $(-2.5\ ,\ -0.9)\cup(0.9\ ,\ 2.5)$
- Convexa: $(-\infty\ ,\ -2.5)\cup(-0.9\ ,\ 0.9)\cup(2.5\ ,\ +\infty)$

Tendencias:

$$\text{Cuando } \begin{cases} x\to 0 \\ x\to+\infty \\ x\to-\infty \end{cases} \Rightarrow f(x)\to \begin{cases} -0.25 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$



3. Indica las características de la siguiente función:



Dominio: $(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

Imagen o recorrido: $\mathbb{R}$

Monotonía:

- Creciente: Nunca
- Decreciente: $(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)=\mathbb{R}-\{-3,3\}$
- Máximos relativos: No tiene
- Mínimos relativos: No tiene

Simetrías: Impar. Simétrica respecto del origen de coordenadas

Continuidad: Continua en $(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

Periodicidad: No es periódica

Acotación: No está acotada

- Cotas, supremo (ínfimo) y extremos absolutos: No tiene

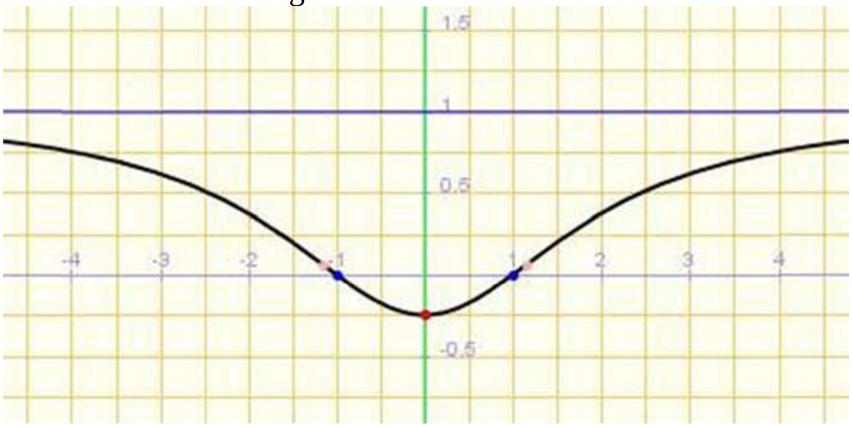
Curvatura:

- Cóncava: $(-\infty,-3)\cup(0,3)$
- Convexa: $(-3,0)\cup(3,+\infty)$

Tendencias:

$$\text{Cuando }\begin{cases} x\to 0 \\ x\to -3 \\ x\to 3 \\ x\to +\infty \\ x\to -\infty \end{cases} \Rightarrow f(x)\to\begin{cases} 0 \\ \nexists \text{ ya que } f(x)\to\begin{cases} -\infty \text{ cuando } x\to -3- \\ +\infty \text{ cuando } x\to -3+ \end{cases} \\ \nexists \text{ ya que } f(x)\to\begin{cases} -\infty \text{ cuando } x\to 3- \\ +\infty \text{ cuando } x\to 3+ \end{cases} \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

4. Indica las características de la siguiente función:



Dominio: $\mathbb{R}$

Imagen o recorrido: $[-0.25\ ,\ 1)$

Monotonía:

- Creciente: $(0,+\infty)$
- Decreciente: $(-\infty,0)$
- Máximos relativos: No tiene
- Mínimos relativos: $(0\ ,\ -0.25)$

Simetrías: Par. Simétrica respecto del eje OY

Continuidad: Continua en $\mathbb{R}$

Periodicidad: No es periódica

Acotación: Acotada

- Cotas, supremo (ínfimo) y extremos absolutos: $\begin{cases} \text{Cotas superiores: } 1,2,3,... \\ \text{Supremo: } 1 \\ \text{Máximo absoluto: No tiene} \\ \text{Cotas inferiores: } -0.25\ ,\ 0.5,... \\ \text{Ínfimo: } -0.25 \\ \text{Mínimo absoluto:} (0\ ,\ -0.25) \end{cases}$

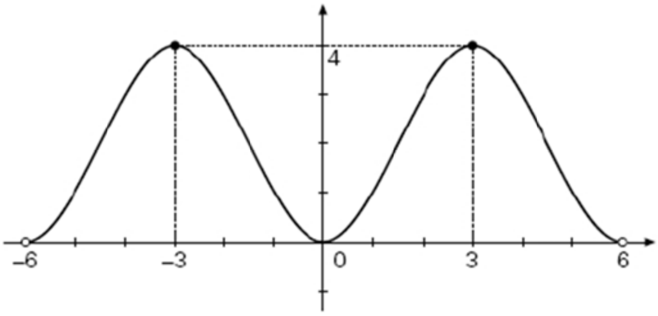
Curvatura:

- Cóncava: $(-\infty\ ,\ -1.2)\cup(1.2\ ,\ +\infty)$
- Convexa: $(-1.2\ ,1.2)$

Tendencias:

$$\text{Cuando} \begin{cases} x\to 0 \\ x\to+\infty \\ x\to-\infty \end{cases} \Rightarrow f(x)\to \begin{cases} -0.25 \\ 1 \\ 1 \end{cases}$$

5. Indica las características de la siguiente función:



Dominio: $(-6,6)$

Imagen o recorrido: $[0,4]$

Monotonía:

- Creciente: $(-6,-3)\cup(0,3)$
- Decreciente: $(-3,0)\cup(3,6)$
- Máximos relativos: $(-3,4)$ y $(3,4)$
- Mínimos relativos: $(0,0)$

Simetrías: Par. Simétrica respecto del eje OY

Continuidad: Continua en $(-6,6)$

Periodicidad: Periódica de período 6

Acotación: Acotada

- Cotas, supremo (ínfimo) y extremos absolutos: $\begin{cases} \text{Cotas superiores: } 4,5,6,... \\ \text{Supremo: } 4 \\ \text{Máximo absoluto: } (-3,4) \text{ y } (3,4) \\ \text{Cotas inferiores: } 0,-1,-2,... \\ \text{Ínfimo: } 0 \\ \text{Mínimo absoluto: } (0,0) \end{cases}$

Curvatura:

- Cóncava: $(-6,-3)\cup(3,6)$
- Convexa: $(-3,3)$

Tendencias:

Cuando $\begin{cases} x\to+\infty \\ x\to-\infty \end{cases} \Rightarrow f(x)\to\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$

6. Una determinada empresa nos formula la siguiente oferta para conectarnos a Internet:

- Cuota mensual de abono: 6 €
- Cada hora de conexión: 1 €

a) Encuentra la función que nos indique el precio a pagar mensualmente, según las horas que se haya establecido conexión.

b) Representa gráficamente esta función.

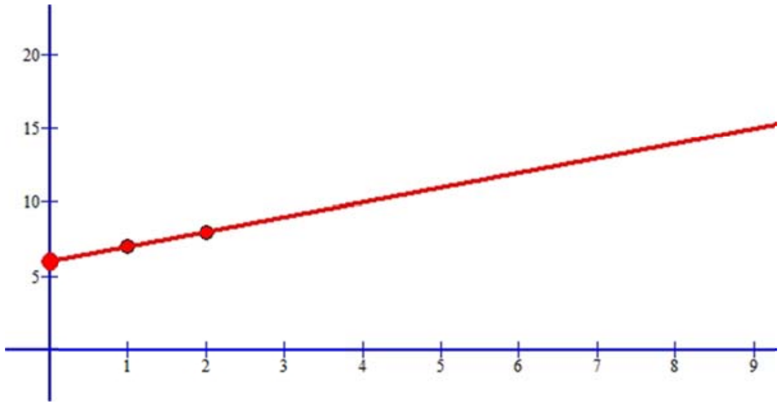
c) La empresa carga un 18 % de IVA. ¿Cómo afecta esto a la función anterior y a su gráfica?

Sea $P(t)=$ precio a pagar dependiendo del número t de horas de conexión.

a) $P(t)=6+t$

b) Representación gráfica:

x	y
0	6
1	7



c) $P_{IVA}(t)=1{,}18P(t)=1{,}18(6+t)$

Todas las ordenadas de esta función quedan multiplicadas por 1,18.

Aclaración: Lo que se paga por un producto es el 100 %, o escrito en forma decimal, 1. Si además tenemos que pagar un 18 % de IVA, en forma decimal 0,18, al final tenemos que pagar el 118 %, es decir, 1,18.

7. Queremos encuadernar todos los libros de la biblioteca de nuestro centro y nos cobran 7 € por cada libro si el número de páginas no supera las 200. A partir de 200 páginas, por cada página más se incrementa el precio en 0,02 €. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Encuentra la función que nos da el precio a pagar por la encuadernación de un libro dependiendo del número de páginas de este.

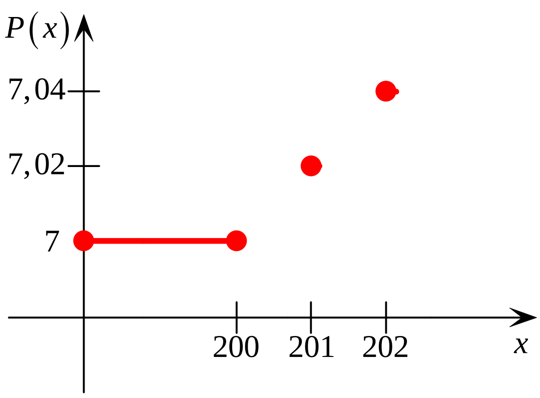
b) Representa gráficamente esta función.

c) ¿Es continua dicha función?

a) La función que nos da el precio a pagar (en función del número de páginas) por cada libro es:

$$P(x)=\begin{cases}7 & \text{si} \quad x\le 200\\ 7+0{,}02x & \text{si} \quad x>200\end{cases}$$

b) Representación gráfica



Para ser completamente rigurosos, en el intervalo $[0,200]$ habría que representar puntos, en vez de un segmento de recta.

c) Es una función discontinua.

8. Los costes de producción (en euros) de una empresa vienen dados por:

$$C(q) = 40\ 000 + 20q + q^2$$

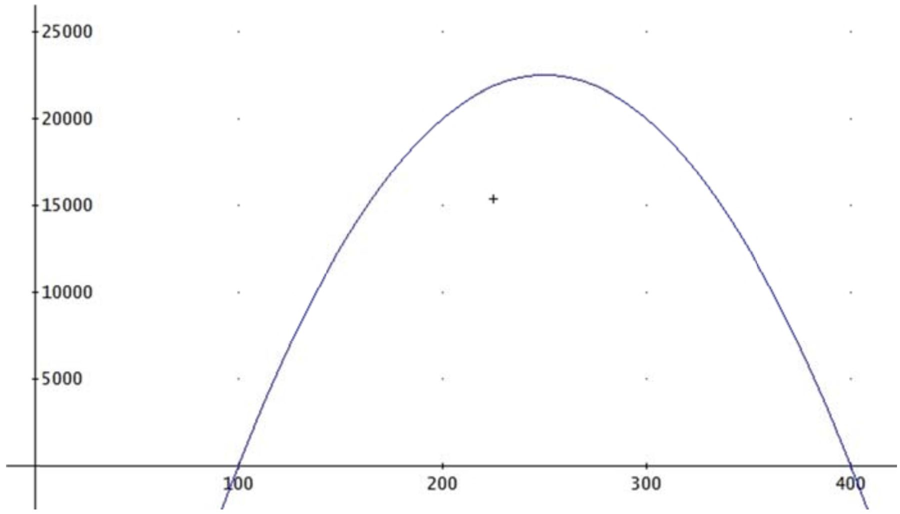
donde q es el número de unidades producidas. El precio de venta de cada unidad producida es de 520 euros.

a) Expresa en función de q el beneficio de la empresa y represéntalo gráficamente.
b) ¿Cuántas unidades hay que producir para que el beneficio sea máximo?

<u>Indicaciones</u>: (1) Recuerda que para representar una parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$, hay que calcular el vértice (V$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ y los puntos de corte con el eje OX, si los tiene, o construir una tabla de valores con dos valores a la izquierda del vértice y otros dos a la derecha del mismo.
(2) Las funciones cuadráticas alcanzan su máximo o su mínimo en el vértice.

a) La función beneficio (ganancias menos costes) viene dada por:

$$B(q) = 520q - C(q) = 520q - 40\ 000 - 20q - q^2 = -q^2 + 500q - 40\ 000$$



b) Para obtener el máximo, calculamos el vértice:

$$\text{Vértice}\begin{cases} q = \dfrac{-500}{-2} = 250 \\ B(q) = B(250) = -250^2 + 500 \cdot 250 - 40\ 000 = 22\ 500 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 22 500 € y se obtiene fabricando 250 unidades.

9. La dosis de un fármaco comienza con 10 mg y cada día debe aumentar 2 mg hasta llegar a 20 mg. Debe seguir 15 días con esa cantidad y a partir de entonces ir disminuyendo 4 mg cada día.

a) Representa gráficamente la función que describe el enunciado y determina su expresión algebraica.
b) Indica su dominio y su recorrido.

a) Ecuación del primer trozo de recta que pasa por (20, 20) y (5, 20):

$$y = 10 + 2x$$

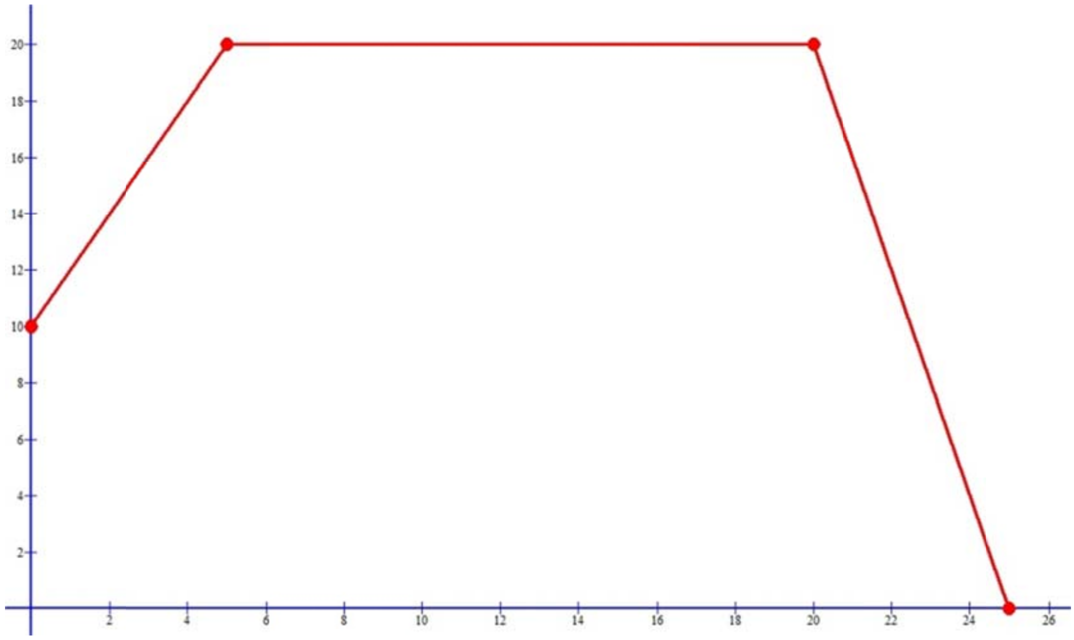
El segundo trozo es constante:

$$y = 20$$

Ecuación del trozo de recta que pasa por (20, 20) y (25, 0)

$$y = -4x + 100$$

Expresión analítica de la función:



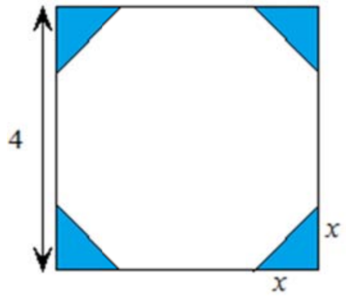
b) $\text{Dom}(f) = [0, 25]$

$\text{Img}(f) = \text{Rec}(f) = [0, 20]$

10. De un cuadrado de 4 cm de lado, se cortan en las esquinas triángulos rectángulos isósceles cuyos lados iguales miden *x*.

a) Escribe el área del octógono que resulta en función de *x*.

b) ¿Cuál es el dominio de esa función? ¿Y su recorrido?



a) $A_{Octógono} = A_{Total} - 4A_{Triángulo} = 4^2 - 4\frac{x^2}{2} = 16 - 2x^2$

b) $\text{Dom}(f) = \left(0, 2\sqrt{2}\right)$

$\text{Img}(f) = \text{Rec}(f) = (0, 16)$

<u>*Aclaración*</u>: Tenemos la expresión algebraica de la función área, que es

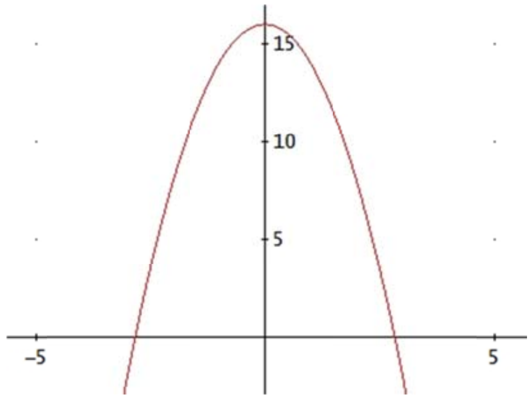
$$A_{Octógono} = A_{Total} - 4A_{Triángulo} = 4^2 - 4\frac{x^2}{2} = 16 - 2x^2$$

El dominio abstracto de esa función es $\mathbb{R}$, ahora bien, como en este caso concreto representa el área de un octógono, tenemos que restringirlo para los valores de x para los que tenga sentido el área. ¿Cuáles son los valores positivos que puede tomar la función? Pues desde cero, abierto, hasta $16 - 2x^2 = 0$ de donde se obtiene el valor $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Así, el dominio es el intervalo abierto $\left(0, 2\sqrt{2}\right)$.

¿Cómo determinamos la imagen? ¿Dónde se mira la imagen? En el eje OY, ¿no?, pues entonces lo que tenemos que ver es cuánto vale y (que es $A(x)$) cuando $x=0$ y cuando $x=2\sqrt{2}$. Para $x=0$ obtenemos $y=16$, y para $x=2\sqrt{2}$ obtenemos $y=0$. Por eso la imagen es:

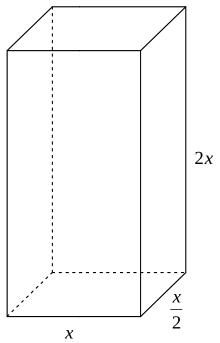
$$\text{Img}(f)=\text{Rec}(f)=(0,16)$$

De todas formas cuando tengamos dudas y la función no sea muy complicada, lo mejor es representarla gráficamente.



11. Una empresa fabrica envases con forma de prisma de dimensiones *x*, $\frac{x}{2}$ y 2*x* cm.

a) Escribe la función que da el volumen del envase en función de *x*.
b) Halla su dominio sabiendo que el envase más grande tiene 1 l de volumen.
c) ¿Cuál es su recorrido?



a) $V_{prisma}=V(x)=x\cdot\frac{x}{2}\cdot 2x=x^3$

b) $\text{Dom}(V)=(0,10)$

$\text{Img}(V)=\text{Rec}(V)=(0,1000)$

Para calcular el dominio en este caso hay que acordarse del sistema métrico decimal y de la siguiente igualdad (aproximada):

$$1\text{ L}=1\text{ dm}^3=1\,000\text{ cm}^3$$

Por eso la imagen es

$$\text{Img}(V)=\text{Rec}(V)=(0,1000)$$

Si el volumen máximo es de 1 L. ¿cuáles pueden ser las dimensiones del prisma? Sabemos que la *y* más grande es 1000, pero

$$y=x^3 \text{ de donde } x=\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{1000}=10\text{ cm.}$$

y así $\text{Dom}(V)=(0,10)$

12. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2}$

b) $f(x)=\sqrt[5]{x^2+5}$

c) $f(x)=\log\left(x^2+1\right)$

d) $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{2x+1}{2x^2}}$

e) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x^2-4}}$

f) $f(x)=3^{x+2}$

g) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\geq 1 \\ \dfrac{x}{x+3} & \text{si } x<1 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+1} & \text{si } x<0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

i) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

a) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{x \text{ que anulan al denominador}\}$

$x^2=0\rightarrow x=0$

$\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

b) Como la función es una raíz de índice impar, solo nos tenemos que fijar en el radicando, y como en este caso es un polinomio, el dominio es $\mathbb{R}$.

c) $x^2+1>0\rightarrow x^2>-1$ y esto es cierto siempre

$\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

d) Como es una raíz de índice par el radicando tiene que ser ≥ 0, pero como además es una fracción algebraica, el denominador tiene que ser distinto de cero.

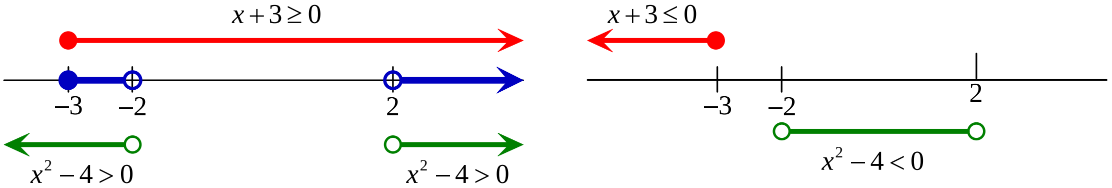
$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{2x^2}\geq 0\rightarrow 2x+1\geq 0\rightarrow x\geq -\dfrac{1}{2} \\ 2x^2\neq 0\rightarrow x\neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Dom}(f)=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)-\{0\}$$

e) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x^2-4}}$

El radicando tiene que ser ≥ 0:

$$\frac{x+3}{x^2-4}\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases} \begin{cases} x+3\geq 0 \\ x^2-4>0 \end{cases}\rightarrow x\in[-3,-2)\cup(2,+\infty) \\ \text{o} \\ \begin{cases} x+3\leq 0 \\ x^2-4<0 \end{cases}\rightarrow x\in\varnothing \text{ (no se cumplen las dos condiciones a la vez)} \end{cases}$$



Por tanto, el dominio es: $\text{Dom}(f)=[-3,-2)\cup(2,+\infty)=[-3,+\infty)-[-2,2]$

f), g), h) e i) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

13. Si $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=x^3$, halla $(f\circ g)$ y $(g\circ f)$.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^3)=\frac{1}{x^3}$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^3=\frac{1}{x^3}$$

¡¡Cuidado!! Esto **no** quiere decir que la composición sea conmutativa. Ya sabemos que

$$\boxed{f\circ g\neq g\circ f \text{ en general}}$$

$$\boxed{\text{¡¡Alerta!!}\quad \underbrace{f^{-1}(x)}_{\text{función inversa}} \neq \underbrace{\frac{1}{f(x)}}_{\text{función recíproca}}}$$

14. Dadas $f(x)=x-1$ y $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, calcula:

a) $(f\circ g)(1)$

b) $\mathrm{Dom}(g\circ f)$

Calculamos en primer lugar la composición:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}-1$$

a) $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f\left(\dfrac{1}{1^2}\right)=\dfrac{1}{1^2}-1=0$

b) $\mathrm{Dom}(g\circ f)=\mathbb{R}-\{0\}$

15. Considera las funciones $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2+1$ y $h(x)=\dfrac{1}{3x+1}$, y determina:

a) $(g\circ f)(2)$

b) $(g\circ(f\circ h))(2)$

a) $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2=2$

b) $(g\circ(f\circ h))(2)=g[(f\circ g)(2)]=g[f(h(2))]=g\left[f\left(\dfrac{1}{7}\right)\right]=g\left(\sqrt{\dfrac{1}{7}}\right)=\left(\sqrt{\dfrac{1}{7}}\right)^2+1=$

$=\dfrac{1}{7}+1=\dfrac{8}{7}$

16. Halla la función inversa de las siguientes funciones:

a) $y=3x-2$

b) $y=\dfrac{x+1}{2}$

c) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

d) $y=x^3$

a) $y = 3x - 2$
$x = 3y - 2$
$\frac{x+2}{3} = y$
$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$

b) $y = \frac{x+1}{2}$
$x = \frac{y+1}{2}$
$2x - 1 = y$
$f^{-1}(x) = 2x - 1$

c) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$
$x = \frac{y^2}{y^2 - 1}$
$(y^2 - 1)x = y^2$
$y^2 x - x - y^2 = 0$
$y^2(x - 1) - x = 0$
$y^2 = \frac{x}{x - 1}$
$y = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$
$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

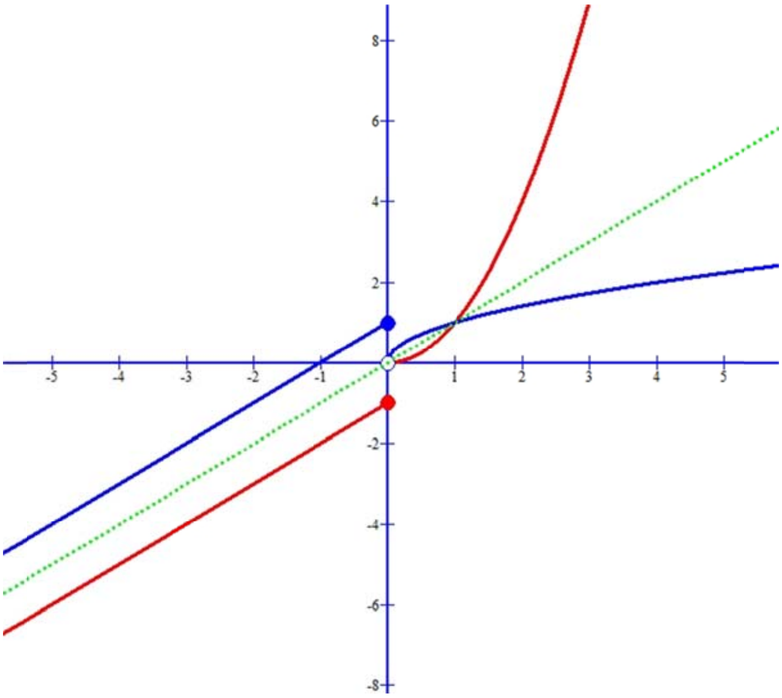
d) $y = x^3$
$x = y^3$
$\sqrt[3]{x} = y$
$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

17. Sabiendo que $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ x - 1 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$ halla, si es posible, $f^{-1}(x)$.

Analíticamente:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ x + 1 & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$$

Gráficamente:



18. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^5 - x$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$

c) $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 1}$

a) $\left.\begin{array}{l} f(-x)=(-x)^5-(-x)=-x^5+x \\ -f(x)=-x^5+x \end{array}\right\}$ Como $f(-x)=-f(x) \Rightarrow f(x)$ es impar

b) $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{(-x)^4+1}=\dfrac{x^2}{x^4+1}$

Como $f(-x)=f(x) \Rightarrow f(x)$ es par

c) $f(-x)=\sqrt{(-x)^4+(-x)^2-1}=\sqrt{x^4+x^2-1}$

Como $f(-x)=f(x) \rightarrow f(x)$ es par

Las representaciones gráficas de las funciones anteriores son: