

Tema 4

Representación de Funciones



0.- Introducción

1.- Estudio de una función.

- 1.1.- Dominio.
- 1.2.- Simetrías.
- 1.3.- Periodicidad.
- 1.4.- Continuidad.
- 1.5.- Puntos de Corte con los ejes.
- 1.6.- Asíntotas y ramas infinitas.
- 1.7.- Monotonía.
- 1.8.- Curvatura.
- 1.9.- Esbozo o dibujo de la gráfica.

2.- Ejemplo de aplicación.

3.- Ejercicios Resueltos.

Raúl González Medina

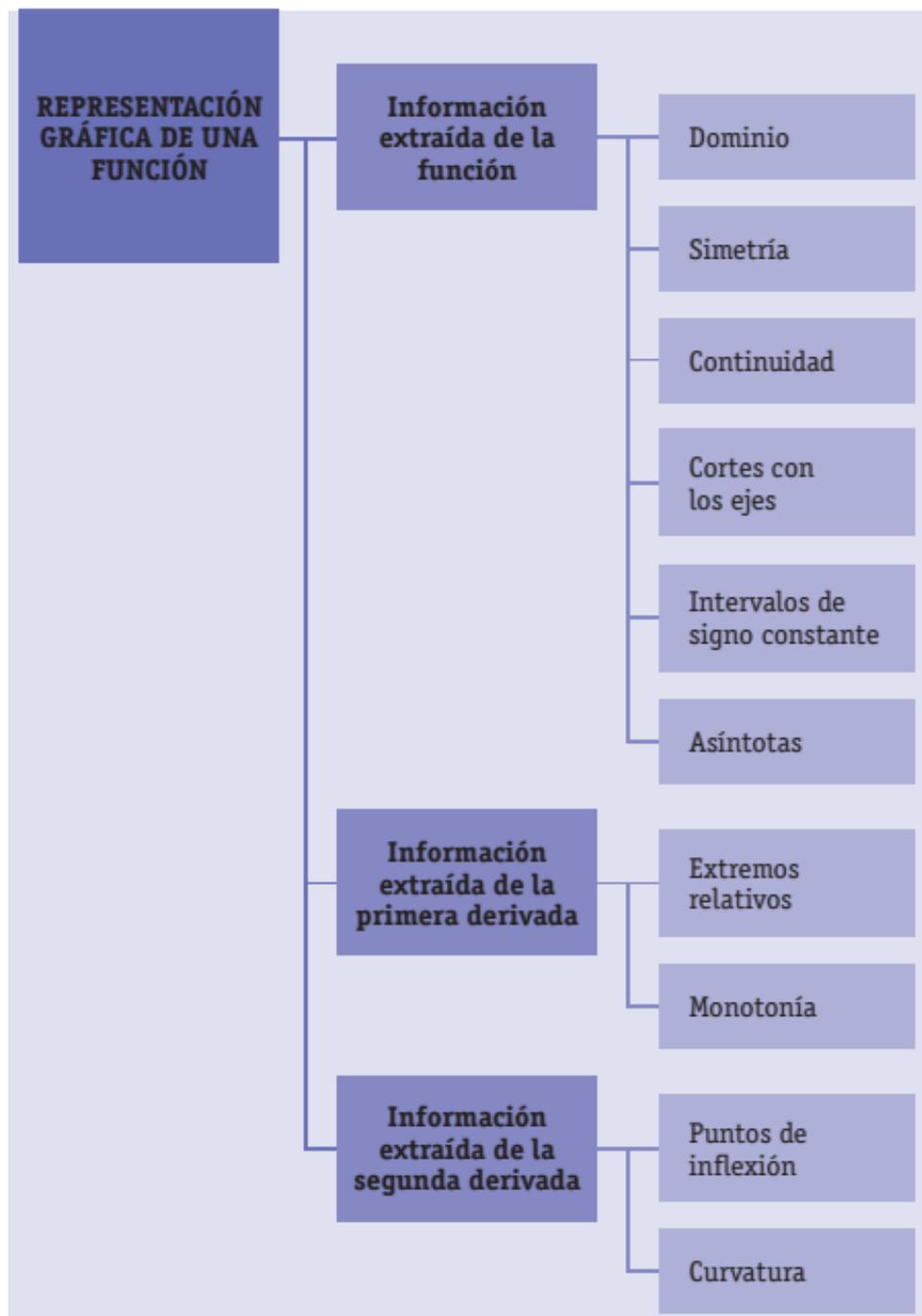
I.E. Juan Ramón Jiménez

Tema 4

4.0.- Introducción

Esta Unidad pretende ser una aplicación práctica de todo lo aprendido hasta ahora en el bloque de Análisis. En ella nos centraremos en las funciones polinómicas y racionales. Asimismo, usaremos el cálculo de límites como instrumento para conocer las posibles asíntotas de una función, así como su continuidad. Incluiremos también el estudio de la derivada para obtener los extremos relativos y la monotonía de una función. A partir de la segunda derivada obtendremos los puntos de inflexión y estudiaremos su curvatura.

Por esta razón la representación gráfica de funciones se considera una de las aplicaciones del cálculo de límites y de las derivadas más utilizada en las ciencias sociales y, en correspondencia, es uno de los temas de ejercicios más frecuentes en las Pruebas de acceso a la universidad.



4.1.- Representación de Funciones

A la hora de estudiar una función, trabajaremos cada uno de los siguientes apartados:

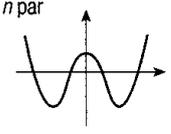
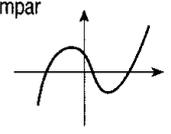
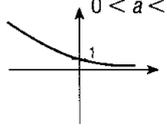
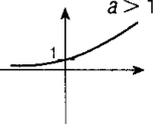
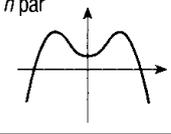
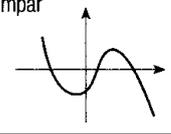
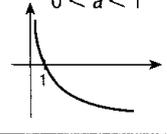
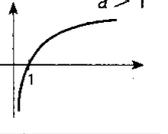
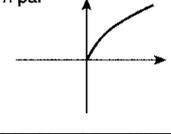
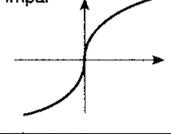
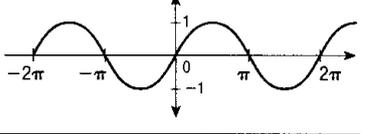
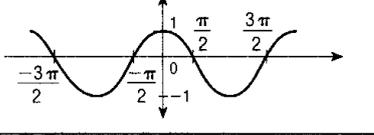
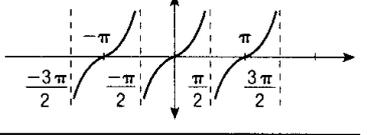
1. Dominio y recorrido
2. Simetrías
3. Periodicidad
4. Continuidad
5. Puntos de Corte
6. Asíntotas
7. Monotonía
8. Curvatura
9. Representación

Veamos paso a paso cada uno de los ítems anteriores:

4.1.1.- Dominio y recorrido

Dominio: Valores de x para los que está definida (existe) $f(x)$

Recorrido: Valores que toma $f(x)$

MODELO	GRÁFICA	MODELO	GRÁFICA
Polinómica	$a_n > 0$ n par  n impar 	Exponencial	$0 < a < 1$  $a > 1$ 
	$a_n < 0$ n par  n impar 		Logarítmica $0 < a < 1$  $a > 1$ 
Irrracional	n par  n impar 	sen x	
cos x		tg x	

- Funciones Polinómicas, son de la forma $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ y su dominio es \mathbb{R} .
- Funciones Racionales, son de la forma $f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n}$ y su dominio es \mathbb{R} menos los valores que anulan el denominador.
- Funciones Irracionales, son del tipo $f(x) = \sqrt[n]{f'(x)}$, siendo su dominio:
 - El mismo que $f(x)$ si n es impar
 - El conjunto de valores reales que hagan $f(x) \geq 0$ si n es par
- Funciones exponenciales, son de la forma $f(x) = a^{f'(x)}$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, su dominio es \mathbb{R} .

- Funciones logarítmicas, son de la forma $f(x) = \log_a f'(x)$, con $a > 0$ y $f'(x) > 0$
- Funciones circulares: $f(x) = \text{sen}x, f(x) = \text{cos}x$, su dominio es \mathbb{R} .

A partir de estas dos, podemos definir el resto de funciones circulares:

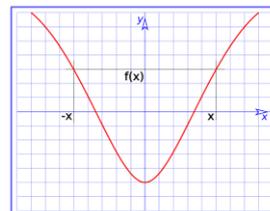
$$\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}x}{\text{cos}x}, \quad \text{sec}(x) = \frac{1}{\text{cos}x} \quad \text{sus dominios son } \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{ctg}(x) = \frac{\text{cos}x}{\text{sen}x}, \quad \text{cosec}(x) = \frac{1}{\text{sen}x} \quad \text{sus dominios son } \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

4.1.2.- Simetrías

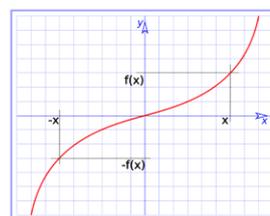
- La función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es **par** si $\forall x \in A, f(-x) = f(x)$

La curva de cualquier función par es simétrica respecto del eje OY



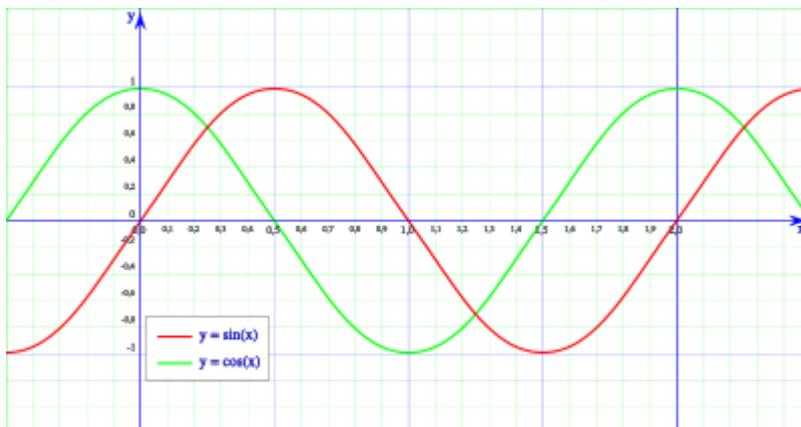
- La función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es **impar** si $\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$

La curva de toda función impar es simétrica respecto del origen de Coordenadas (0,0)



4.1.3.- Periodicidad

- La función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es **periódica**, si existe un número real T distinto de cero, llamado **periodo**, tal que: $f(x+T) = f(x)$



4.1.4.- Continuidad.

Las discontinuidades de una función, son los puntos donde la función no es continua.

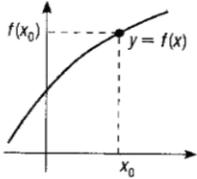
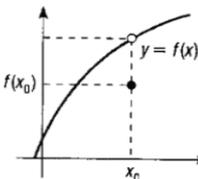
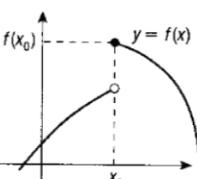
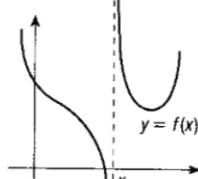
Según la definición de continuidad en un punto, una función es continua en un punto **a** cuando se cumple:

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \exists f(a) \\ b) \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ c) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \end{array} \right.$$

Si en algún punto no se verifican los tres puntos anteriores, decimos que en dicho punto la función no es continua.

4.1.4.1.- Discontinuidades de una función

En la tabla siguiente se resumen los 4 tipos de discontinuidades:

<p>Continua</p> <p>Existe el límite y coincide con la imagen.</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$		<p>Evitable</p> <p>Existe el límite, pero no coincide con la imagen.</p> $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$	
<p>De salto</p> <p>Los límites laterales son finitos, pero diferentes.</p> $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$		<p>Asintótica</p> <p>Los límites laterales son infinitos.</p> $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm \infty$	

4.1.5.- Puntos de Corte con los ejes

- ✓ **Con el eje X:** Para calcular los puntos de corte de la función con el eje x, hacemos $f(x) = 0$ y calculamos las soluciones de dicha ecuación, y éstas son los puntos de corte con el eje x.
- ✓ **Con el eje Y:** Calculamos $f(0)$, y los puntos de corte son los puntos $(0, f(0))$.

4.1.6.- Asíntotas y ramas infinitas

4.1.6.1.- Asíntota Vertical

La recta vertical $x=a$ es una asíntota vertical de la función $f(x)$ si existe alguno de estos límites:

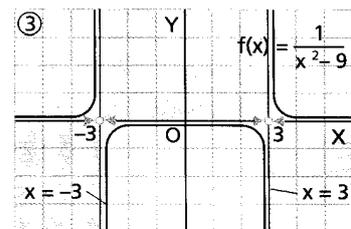
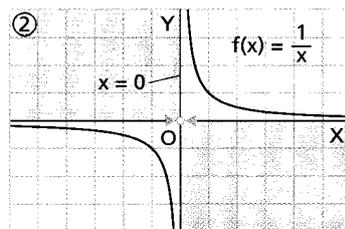
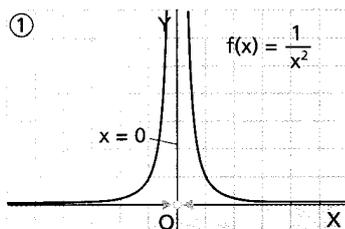
$$1. - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$$

$$2. - \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$$

$$3. - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$$

¿Cómo saber dónde buscar la asíntota vertical?

- Si es una función **polinómica**, **no tiene** asíntotas de ningún tipo.
- Si es una función **RACIONAL**, tendremos que buscar en las raíces del denominador, o lo que es lo mismo, **donde se anula el denominador**. Eso son los candidatos; después hay que comprobar que efectivamente es así.



- Otra función que tiene asíntota vertical es la **función LOGARÍTMICA**, más concretamente, en los **puntos extremos** de los intervalos donde empieza el **dominio**.

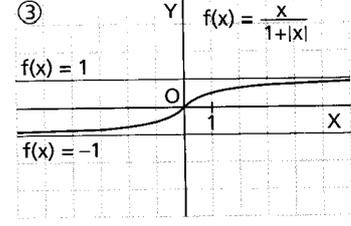
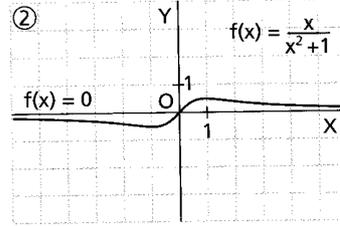
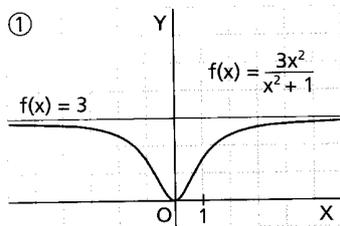
7.5.6.1.- Asíntota Horizontal

La recta horizontal $y=k$ es una **asíntota horizontal** de la función $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$1. - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$$

$$2. - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k'$$

Una función tiene como máximo 2 asíntotas horizontales correspondientes a cada uno de los límites en el infinito.



Una función puede tener como máximo dos asíntotas horizontales, correspondientes a cada uno de los límites en $+\infty$ y en $-\infty$: tendríamos una asíntota hacia la izquierda y otra hacia la derecha aunque frecuentemente la misma recta es asíntota por la izquierda y por la derecha.

En funciones racionales, si hay asíntota para $x \rightarrow +\infty$, la misma recta es asíntota para $x \rightarrow -\infty$. Sin embargo, en funciones con radicales suelen ser distintas.

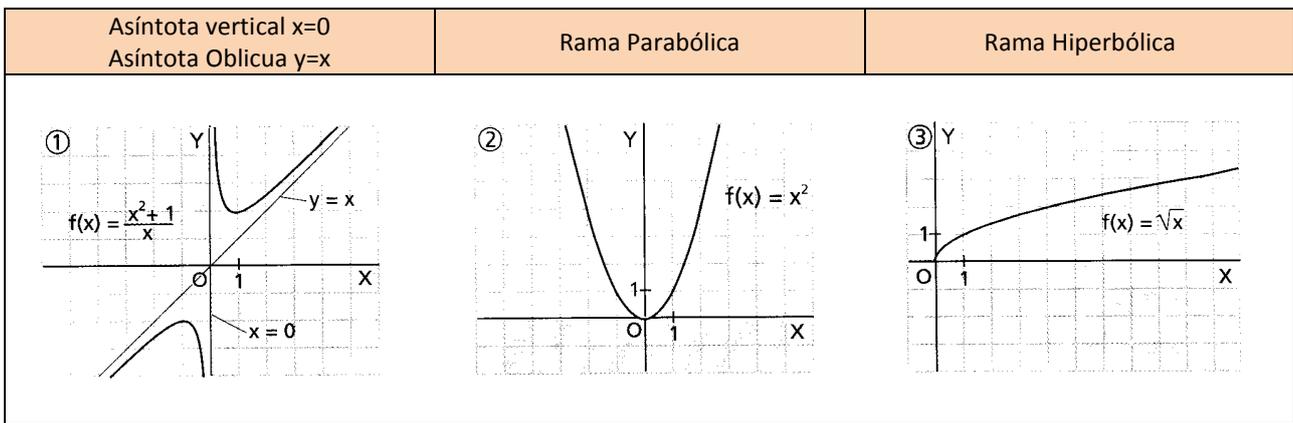
La gráfica de una función puede cortar a la asíntota horizontal en uno o varios puntos, aunque en la mayoría de las funciones elementales la gráfica está por encima o por debajo de la asíntota.

7.5.6.3.- Asíntota Oblicuas y ramas parabólicas

Se estudian solo si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, es decir si no hay asíntota horizontal.

Lo primero es estudiar el límite: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ la curva tiene una **rama parabólica** en la dirección del eje OY.
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ la curva tiene una **rama hiperbólica** en la dirección OX. (de la forma $y = \sqrt{x}$)
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$, estudiamos el límite: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$
 - ✓ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = b$, la curva tiene la asíntota en la dirección $y = mx + b$ llamada **asíntota oblicua**.
 - ✓ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \infty$, la curva tiene una **rama parabólica** en la dirección de la recta $y = mx$



Debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Una función puede tener como máximo dos asíntotas oblicuas correspondientes a cada uno de los límites.
- Las asíntotas horizontales y las oblicuas son mutuamente excluyentes.
- La gráfica de una función puede cortar a la asíntota oblicua en uno o varios puntos.
- La situación de la gráfica respecto de la asíntota oblicua se hace estudiando el signo de $f(x) - (mx + n)$ para valores grandes de x .

7.5.7.- Monotonía

En este punto, estudiaremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos y absolutos. Para ello nos ayudaremos de derivada, que igualaremos a cero para obtener los posibles extremos.

En una tabla, en la que representaremos la recta real, indicaremos con una línea sencilla los puntos de derivada nula, y con dos rayas los puntos de no dominio.

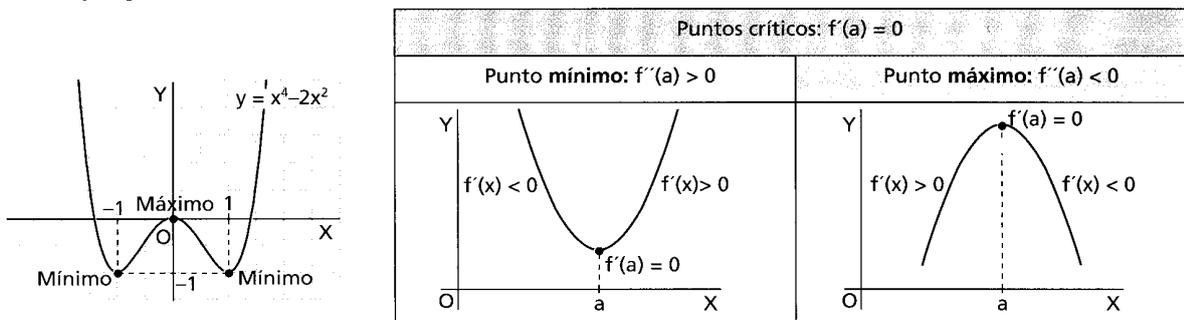
Por tanto, si utilizamos la tabla, tenemos:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	+
$f(x)$	↘	↗	↗

Mín $(0,1)$

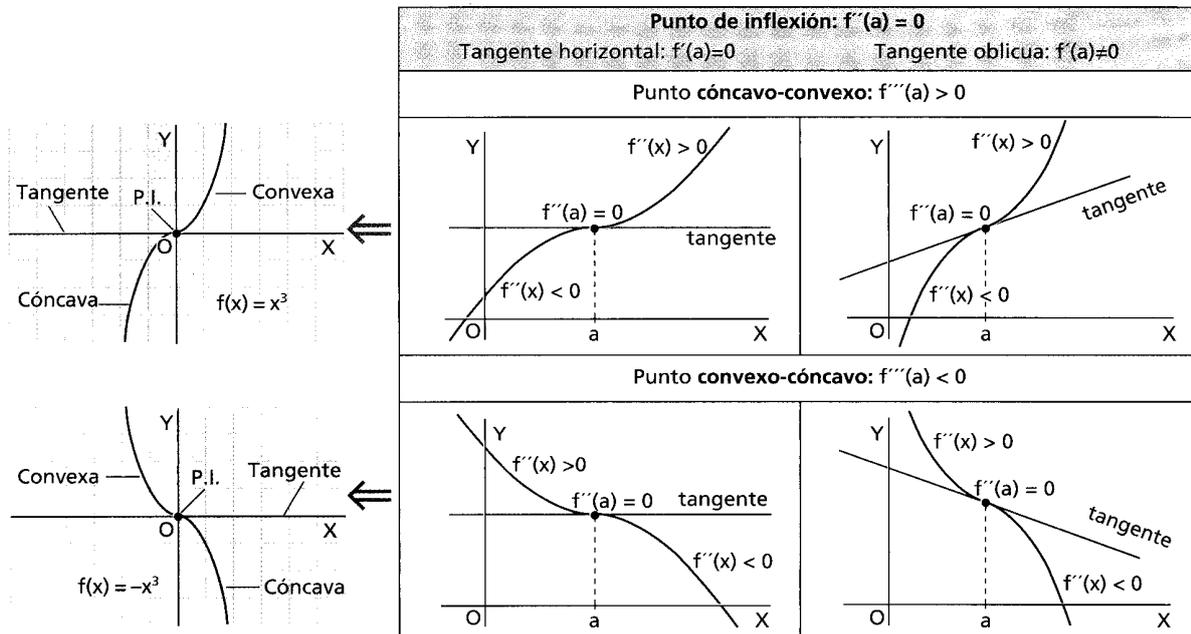
Calculamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos formados y veremos si la función es creciente o decreciente, señalándolo con una flechita, y donde están los extremos relativos, que calcularemos.

Véase el ejemplo del final.



7.5.8.- Curvatura

Para la curvatura, nos ayudaremos de la segunda derivada. Calculamos $f''(x)$ y la igualamos a cero, de forma que estos puntos serán los posibles puntos de inflexión.



Utilizaremos una tabla similar a la del apartado anterior para discutir la curvatura y los puntos de inflexión, pero en ésta, trabajaremos con la segunda derivada de la función.

7.5.9.- Dibujo de la gráfica

Atendiendo a todos los datos obtenidos una vez seguidos los 8 pasos anteriores, ya estamos en paraje de poder representar la función.

Veamos todo esto con un ejemplo.

4.2.- Ejemplo

Representar la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

1.- Dominio:

La función es un cociente de polinomios, por tanto su dominio es el conjunto de los números reales, menos los valores que anulen el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{2, -2\}$$

2.- Simetrías:

$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -f(x) \rightarrow$ Por tanto la función es impar, es simétrica respecto del origen de coordenadas.

3.- Periodicidad:

La función $f(x)$ no es periódica, no aparecen funciones circulares.

4.- Puntos de discontinuidad:

Como $f(x)$ es un cociente de polinomios, es una función continua excepto donde se anule el denominador.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \frac{-8}{0^-} + \infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \frac{-8}{0^+} - \infty \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \frac{8}{0^+} + \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \frac{8}{0^-} - \infty \end{array} \right.$$

La función $f(x)$ presenta en $x=2$ y en $x=-2$ dos discontinuidades asintóticas.

5.- Puntos de corte con los ejes.

$$\text{Hacemos } f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow \frac{x^3}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x^3 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\text{Calculamos } f(0) = 0$$

Por tanto el punto de corte con el eje X y con el eje Y es el (0,0)

6.- Asíntotas:

Como hemos visto ya, $f(x)$ presenta en $x=2$ y en $x=-2$ dos asíntotas verticales.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, no presenta asíntotas horizontales, pero si puede presentar alguna asíntota oblicua o rama parabólica.

$$\text{Calculamos } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1$$

$$\text{Y ahora calculamos } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 - x^3 + 4x}{x^2 - 4} \right] = 0$$

Por tanto $f(x)$ presenta una asíntota oblicua en $y=x$.

7.- Monotonía y curvatura:

Para ello, lo primero es calcular la derivada de $f(x)$

$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$ y la igualamos a cero para calcular los extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2} = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{12} \\ x = -\sqrt{12} \end{cases}$$

Estudiamos ahora el signo de $f'(x)$ para ver los intervalos de monotonía.

Dibujamos una línea recta en la que ponemos los puntos que hacen la derivada 0, los puntos que hacen la función cero, y los puntos donde no es continua.

x	$(-\infty, -\sqrt{12})$	$(-\sqrt{12}, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \sqrt{12})$	$(\sqrt{12}, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	-	-	-	+
$f(x)$	\nearrow	\searrow	\searrow	\searrow	\searrow	\nearrow
	Mín $(-\sqrt{12}, 1)$		Punto de Inflexión $(0, 0)$		Máx $(\sqrt{12}, 1)$	

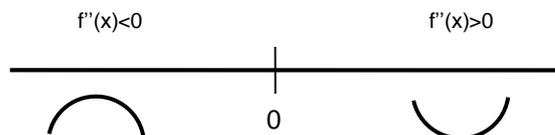
$f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$

$f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{12})$

$f(x)$ tiene un máximo en $x = -\sqrt{12}$ $f(-\sqrt{12}) = -3\sqrt{3}$ en el punto $(-\sqrt{12}, -3\sqrt{3})$

$f(x)$ tiene un mínimo en $x = \sqrt{12}$ $f(\sqrt{12}) = 3\sqrt{3}$ en el punto $(\sqrt{12}, 3\sqrt{3})$

Vamos a calcular ahora los puntos de inflexión, donde la curva cambia de cóncava a convexa. Para ello trabajamos con la segunda derivada. $f''(x)$

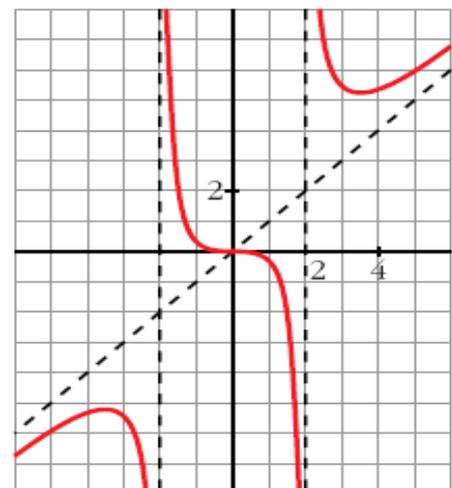


$$f''(x) = \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3} \text{ y la igualamos a cero } f''(x) = \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3} = 0 \rightarrow 8x(x^2 + 12) = 0 \rightarrow \{x = 0\}$$

Obtenemos 1 punto, vamos a ver dónde la función cambia de convexa a cóncava. Tenemos un punto de inflexión en el punto $(0, 0)$

8.- Gráfica de la función:

Con todos los datos que ya tenemos de $f(x)$, lo único que nos falta es representarla.



4.3.- Ejercicios resueltos

1.- Estudiar las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

Asíntotas Verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-3}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-3}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{array} \right\} \text{La función presenta una } \mathbf{Asíntota Vertical} \text{ en el punto } x=2$$

Asíntota Horizontal:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3}{x-2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-3}{x-2} = -\infty \end{array} \right\} \text{La función no presenta Asíntota Horizontal}$$

Asíntotas Oblicuas o Ramas Infinitas:

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3}{x-2} = +\infty$, calculamos el límite $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-3}{x^2-2x} = 1 \rightarrow m=1 \rightarrow$ Ya sabemos que la función tiene una asíntota oblicua en la dirección de la recta $y=mx+b$. Vamos a calcular b haciendo el límite $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2-3}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2-3-x^2+2x}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x-3}{x-2} \right) = 2$$

Por tanto la función presenta una **Asíntota Oblicua** en la dirección de la recta $y = x + 2$

2.- De la función $f(x) = x + \frac{4}{(x-1)^2}$ se pide:

- Dominio de Definición y asíntotas.
- Máximos y mínimos relativos en intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Representación Gráfica.

Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

Asíntotas Verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x + \frac{4}{(x-1)^2} = 1 + \frac{4}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x + \frac{4}{(x-1)^2} = 1 + \frac{4}{0^+} = +\infty \end{array} \right\} \text{La función presenta una } \mathbf{Asíntota Vertical} \text{ en el punto } x=1$$

Asíntota Horizontal:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{4}{x-2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{4}{x-2} = -\infty \end{array} \right\} \text{La función no presenta Asíntota Horizontal}$$

Asíntotas Oblicuas o Ramas Infinitas:

Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x + \frac{4}{x-2} = +\infty$, calculamos el límite $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + \frac{4}{x(x-1)^2} = 1 \rightarrow m=1 \rightarrow$ Ya sabemos que la función tiene una asíntota oblicua en la dirección de la recta $y=mx+b$.

Vamos a calcular b haciendo el límite $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - \frac{4}{(x-1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-4}{(x-1)^2} \right) = 0$$

Por tanto la función presenta una **Asíntota Oblicua** en la dirección de la recta $y = x$

Máximos y mínimos:

Para calcular los máximos y mínimos necesitamos la derivada.

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 1 - \frac{8(x-1)}{(x-1)^4} = 1 - \frac{8}{(x-1)^3}$$

Igualamos la derivada a cero para encontrar los posibles extremos relativos:

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{8}{(x-1)^3} \Leftrightarrow (x-1)^3 = 2^3 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$$

Creamos una tabla:

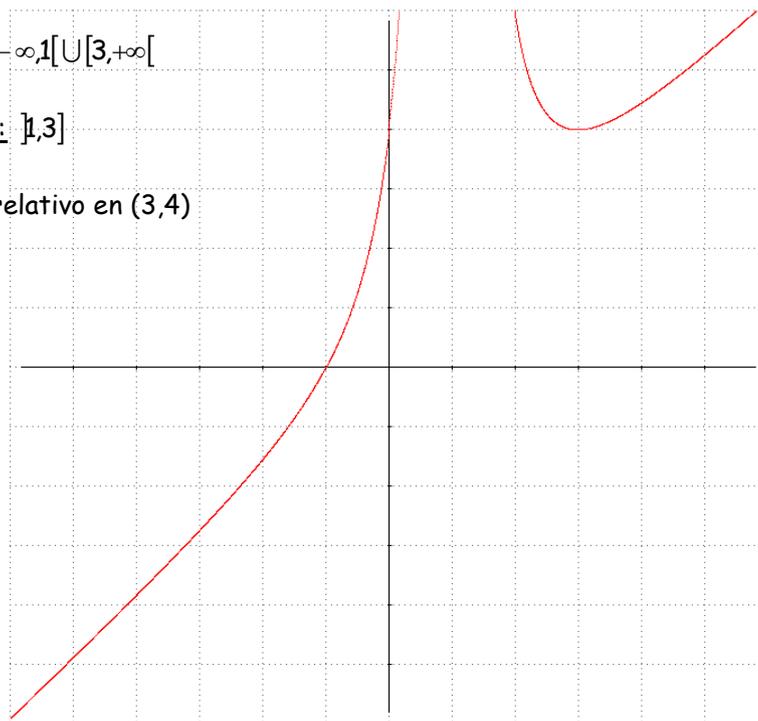
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'(x)		+		-	0	+	
f(x)			Asíntota Vertical		Mínimo Relativo		
		$+\infty$		$+\infty$	(3,4)		

Intervalos de Crecimiento: $]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$

Intervalos de Decrecimiento: $]1, 3]$

Máximos y mínimos: Mínimo relativo en (3,4)

Representación Gráfica:



$f(x) = x + 4/(x-1)^2$

3.- **Estudia y representa gráficamente la siguiente función:** $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

1.- **Dominio:** $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

2.- **Simetrías:**

$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} \Rightarrow$ Por tanto la función es impar \Rightarrow simétrica respecto al origen de coordenadas.

3.- **Periodicidad:** La función no es periódica.

4.- **Continuidad:** La función es continua en todos los puntos de su dominio, mientras que en los puntos $x=-1$ y $x=1$ presenta discontinuidades de segunda especie (Asintóticas).

5.- **Puntos de corte con los ejes:**

Eje x: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Eje y: $f(0) = 0$ Corta a los ejes en el (0,0)

6.- **Asíntotas:**

Asíntotas Verticales:

$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{aligned} \right\}$ La función presenta una **Asíntota Vertical** en el punto $x=-1$

$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= \frac{-1}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{aligned} \right\}$ La función presenta una **Asíntota Vertical** en el punto $x=1$

Asíntota Horizontal:

$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= +\infty \end{aligned} \right\}$ La función no presenta Asíntota Horizontal

Asíntotas Oblicuas o Ramas Infinitas:

Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \pm\infty$, calculamos el límite $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1 \Rightarrow m=1 \Rightarrow$ Ya sabemos que la función tiene una asíntota oblicua en la dirección de la recta $y=mx+b$.

Vamos a calcular b haciendo el límite $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - x^3 - x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-x}{x^2 - 1} \right) = 0$$

Por tanto la función presenta una **Asíntota Oblicua** en la dirección de la recta $y = x$

7.- Máximos y mínimos:

Para calcular los máximos y mínimos necesitamos la derivada.

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

Igualamos la derivada a cero para encontrar los posibles extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Creamos una tabla:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f(x)		+	0	-	No Definida	-	0	-	No Definida	-	0	+	
f(x)		↗	Máximo Relativo	↘	Asíntota Vertical	↘		↘	Asíntota Vertical	↘	Mínimo Relativo	↗	
			$(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$	$-\infty$		$+\infty$	(0,0)	$-\infty$			$(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$		

Intervalos de Crecimiento: $]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty[$

Intervalos de Decrecimiento: $[-\sqrt{3}, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, \sqrt{3}]$

Máximo relativo en $(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$ y mínimo relativo en $(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$

8.- Concavidad y convexidad. Puntos de Inflexión:

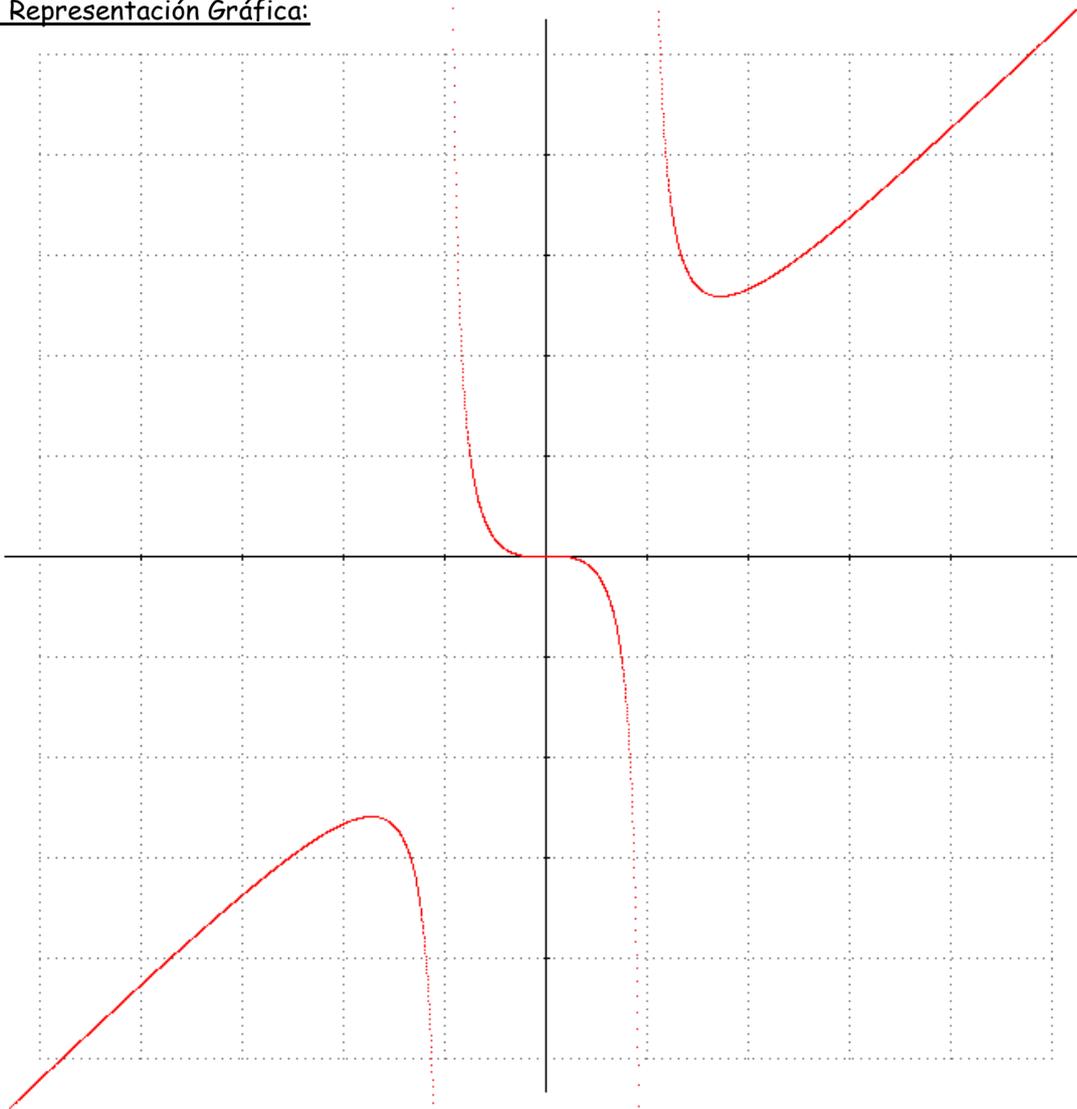
Para ello necesitamos la segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Por tanto en (0,0) tenemos un punto de inflexión:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f''(x)		-	No Definida	+	0	-	No Definida	+	
f(x)		∩	Asíntota Vertical	∪	Punto de Inflexión	∩	Asíntota Vertical	∪	
					(0,0)				

9.- Representación Gráfica:

4.- Sea la función definida por $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- Estudiar las asíntotas, las zonas de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos relativos y las zonas de concavidad y convexidad.
- Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, realiza un esbozo de la gráfica de f .

El dominio de la función es \mathbb{R} , por tanto no tiene asíntotas verticales.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0 \end{array} \right\} \text{La función presenta una asíntota horizontal en } y=0.$$

No presenta asíntotas oblicuas ya que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1+x^2} \neq \pm\infty$

Estudiamos su derivada:

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Creamos una tabla:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)			Min Absoluto		Max Absoluto		
	0		-1/2		1/2		0

Intervalos de Crecimiento: [-1,1]

Intervalos de Decrecimiento: $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

Máximo Absoluto en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y mínimo absoluto en $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

Para los intervalos de concavidad y convexidad utilizaremos la segunda derivada:

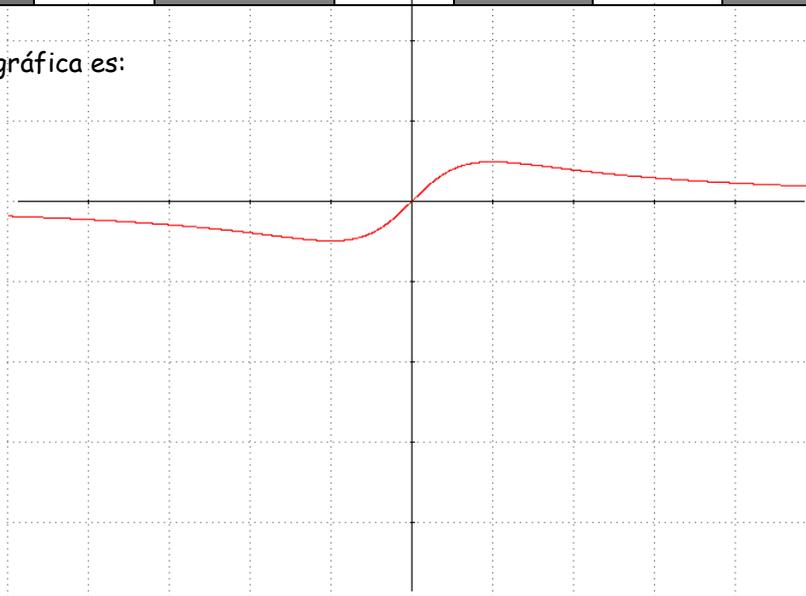
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1+x^2) \cdot 2x \cdot (1-x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x(1+x^2) - 4x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad y \quad x = \pm\sqrt{3}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$+\sqrt{3}$		$+\infty$
f''(x)		-	0	+	0	-	0	+	
f(x)			Punto de Inflexión		Punto de Inflexión		Punto de Inflexión		
			$\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$		(0,0)		$\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$		

El dibujo de la gráfica es:



5.- Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, se pide

- a) Dominio y asíntotas. Puntos de corte de la gráfica con las asíntotas, si las hay.
- b) Crecimiento y decrecimiento.
- c) Dibujar la gráfica a partir de los resultados anteriores.

Dominio de f; \mathbb{R}^* .

Asíntotas Verticales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} &= \frac{1}{+\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} &= \frac{1}{1} = 1 \end{aligned} \right\} \text{La función no tiene asíntota vertical}$$

Asíntota Horizontal:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} &= \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \text{La función presenta **Asíntota Horizontal** en } y = 1/2$$

La función no presenta asíntotas oblicuas.

Calculamos la derivada para estudiar los distintos intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2 \left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} > 0$$

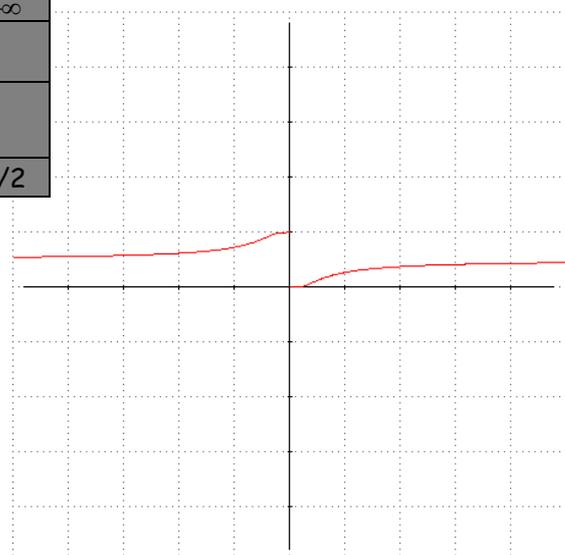
Por tanto la función es siempre creciente, Creciente en $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

Creamos una tabla:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	No definida	+	
f(x)			No definida		
	1/2				1/2

La función no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

El dibujo de la gráfica es:



6.- Dada la función $f(x) = x \ln x - 1$, $x > 0$, se pide:

a) Explicar de forma razonada por qué la ecuación $x \ln x - 1 = 0$ tiene exactamente una raíz.

b) Representar gráficamente la curva de la función f .

Vamos a estudiar la función.

Dominio $]0, +\infty[$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x - 1 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x - \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} - \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x}{\frac{1}{x^2}} - \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x^2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - 1 &= +\infty \end{aligned} \right\}$$

Calculamos su derivada: $f'(x) = \ln x + 1$; igualamos a cero: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

Creamos una tabla:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'(x)	No Definida	-	0	+	
f(x)	No Definida		Min Absoluto		
	-1		$-\left(\frac{e+1}{e}\right)$		$+\infty$

Intervalos de Crecimiento: $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$

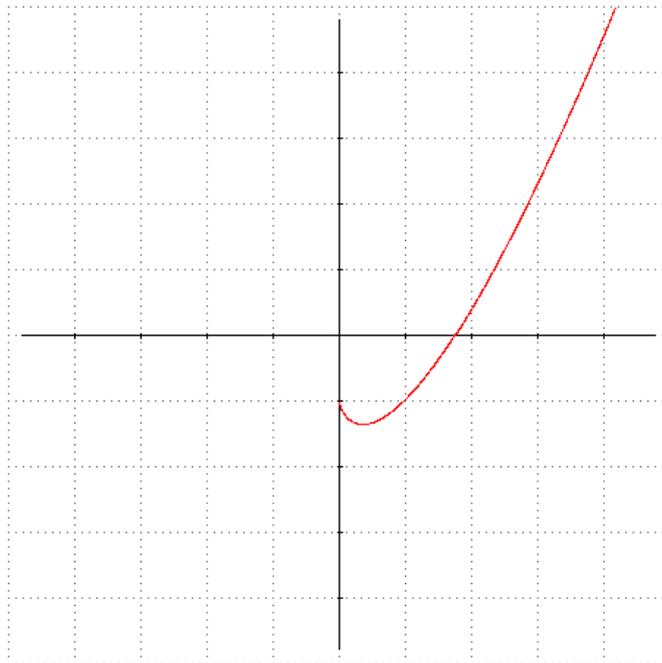
Intervalos de Decrecimiento: $\left]0, \frac{1}{e}\right]$

Mínimo absoluto en $\left(\frac{1}{e}, -\frac{e+1}{e}\right)$

A la pregunta de explicar de forma razonada por qué la ecuación $x \ln x - 1 = 0$ tiene exactamente una raíz diremos que:

La función f es una función definida en $X > 0$, vemos que la función empieza en -1 , y es decreciente hasta $\frac{1}{e}$, en el que hay un mínimo absoluto, y a partir de este punto pasa a ser creciente hasta $+\infty$. Por tanto, tenemos una función que al principio es negativa, cambia de signo a positiva, que es continua, y que diverge a $+\infty$, entonces corta al eje x una vez sola vez, y la ecuación solo tiene una solución.

Si dibujamos la gráfica:



$$f(x) = x \cdot \ln(x-1)$$

7.- Dada la función $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

a) Determinar su dominio de definición.

b) Calcula sus asíntotas

c) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus máximos y mínimos.

d) Dibuja la gráfica de la función f .

Dominio de f : $]0,1[\cup]1,+\infty[$

Asíntotas Verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{array} \right\} \text{La función presenta una } \mathbf{Asíntota Vertical} \text{ en el punto } x=1$$

Asíntota Horizontal:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x} = 0 \end{array} \right\} \text{La función no presenta Asíntota Horizontal}$$

Asíntotas Oblicuas o Ramas Infinitas:

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$, calculamos el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \ln x} = 0$$

Por tanto la función presenta una **Rama hiperbólica** en la dirección del eje OX.

Para los intervalos de crecimiento de la función necesitamos calcular su derivada:

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e$$

Creamos una tabla:

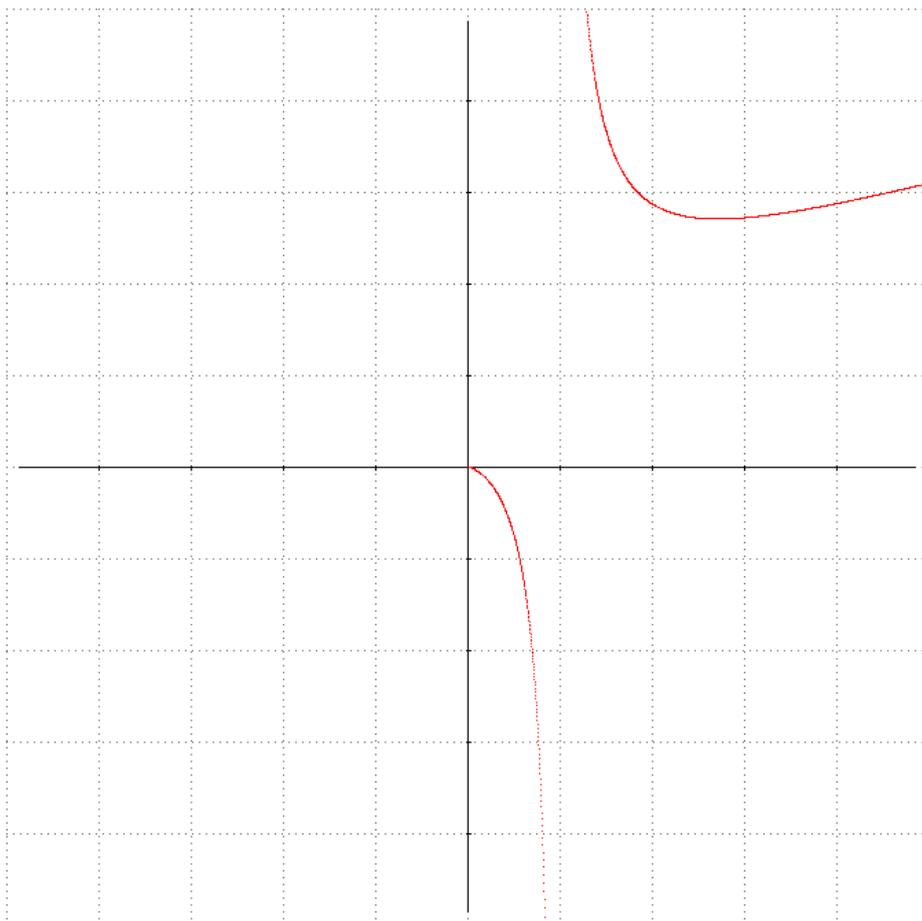
x	0		1		e		$+\infty$
f'(x)	No Definida	-	No definida	+	0	-	
f(x)	No Definida	↘	Asíntota Vertical	↘	Mínimo Absoluto	↗	
	0	$-\infty$		$+\infty$	e		$+\infty$

Intervalos de Decrecimiento: $]0,1[\cup]1,e]$

Intervalos de Crecimiento: $[e,+\infty[$

Mínimo absoluto en (e,e)

La representación gráfica es:



f(x) =