CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Dada una función real $y = f(x)$ y un punto $x_o \in D$ se dice que $f(x)$ es:

- **Creciente** en x_o, si existe un entorno de x_o en el que se cumple $\begin{cases} f(x) \le f(x_o) & si \quad x < x_o \\ f(x_o) \le f(x) & si \quad x_o < x \end{cases}$
- **Estrictamente creciente** en x_o, si existe un entorno de x_o en el que se verifica $\begin{cases} f(x) < f(x_o) & si \ x < x_o \\ f(x_o) < f(x) & si \ x_o < x \end{cases}$
- **Decreciente** en x_o, si existe un entorno de x_o en el que se cumple $\begin{cases} f(x) \ge f(x_o) & si \ x < x_o \\ f(x_o) \ge f(x) & si \ x_o < x \end{cases}$
- **Estrictamente decreciente** en x_o, si existe un entorno de x_o en el que se verifica $\begin{cases} f(x) > f(x_o) & si \ x < x_o \\ f(x_o) > f(x) & si \ x_o < x \end{cases}$

A continuación se van a dar condiciones suficientes para caracterizar estos conceptos para funciones derivables en x_o.

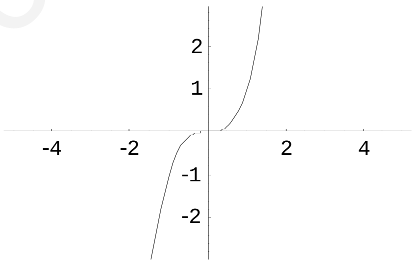
Proposición

Dada $f(x)$ una función derivable en x_o se cumple:

a) Si $f'(x_o) > 0$ entonces f es estrictamente creciente en x_o.

b) Si $f'(x_o) < 0$ entonces f es estrictamente decreciente en x_o.

Notar que los recíprocos de estas afirmaciones no son ciertos, por ejemplo, $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en $x_o = 0$ (ver figura) y sin embargo, $f'(0)$ no es positiva ya que $f'(0) = 0$.



Ejemplo 1: Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones en su dominio de definición:

a) $f(x) = 2x^3 - 6x + 7$

Esta función es derivable en su dominio, $D = (-\infty, +\infty)$, por ser un polinomio y su derivada es $f'(x) = 6x^2 - 6$.

En este caso, para estudiar el signo de $f'(x)$ se factoriza el polinomio obteniéndose:

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 6(x+1)(x-1)$

El signo de esta expresión depende del signo de $(x + 1)$ y del signo de $(x - 1)$ que cambian en los puntos $x = -1$ y $x = 1$ respectivamente, como se observa en la siguiente tabla:

Signo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$x + 1$	-	+	+
$x - 1$	-	-	+
$f'(x) = 6x^2 - 6$	+	-	+

Al ser $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$, se deduce que f es estrictamente creciente en dichos intervalos y al ser $f'(x) < 0$ en $(-1, 1)$, la función f es estrictamente decreciente en este intervalo.

b) $f(x) = (\ln x)^2$

Esta función es derivable en su dominio $D = (0, +\infty)$ y su derivada es $f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$

Para determinar el signo de $f'(x)$ se analiza el signo del numerador y del denominador:

- El signo del numerador puede cambiar en los puntos que lo anulan: $2\ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

  Así, $2\ln x < 0$ en $(0, 1)$ y $2\ln x > 0$ en $(1, +\infty)$.

- El signo del denominador es siempre positivo en los puntos del dominio.

Se divide el dominio en los intervalos determinados por $x = 1$ y se estudia el signo de $f'(x)$ en cada uno de ellos, obteniéndose:

• En $(0, 1)$, $f'(x) < 0$, luego f es estrictamente decreciente.

• En $(1, +\infty)$, $f'(x) > 0$, luego f es estrictamente creciente.