

7

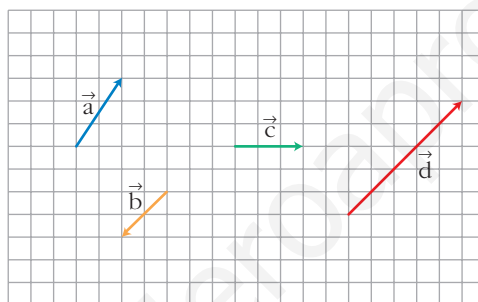
VECTORES

Página 171

REFLEXIONA Y RESUELVE

Multiplica vectores por números

■ Copia en un papel cuadrulado los cuatro vectores siguientes:



Representa:

a) $2\vec{a}$

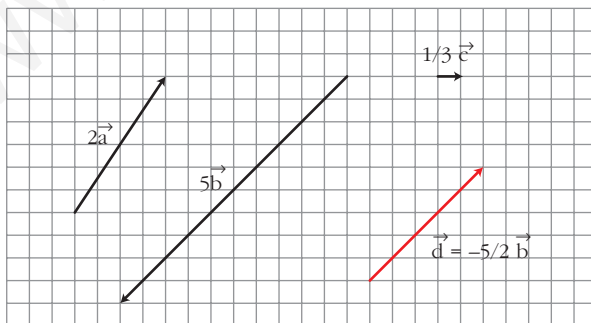
b) $5\vec{b}$

c) $\frac{1}{3}\vec{c}$

Expresa el vector \vec{d} como producto de uno de los vectores \vec{a} , \vec{b} o \vec{c} por un número.

Designa los vectores anteriores mediante pares de números. Por ejemplo: $\vec{a}(2, 3)$

Repite con pares de números las operaciones que has efectuado anteriormente.



• $\vec{d} = -2,5 \vec{b} = \frac{-5}{2} \vec{b}$

• $\vec{a}(2, 3)$

$\vec{b}(-2, -2)$

$\vec{c}(3, 0)$

$\vec{d}(5, 5)$

• $2\vec{a} = 2(2, 3) = (4, 6)$

$5\vec{b} = 5(-2, -2) = (-10, -10)$

$\frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}(3, 0) = (1, 0)$

Suma vectores

■ Efectúa gráficamente:

a) $\vec{a} + \vec{c}$ b) $\vec{b} + \vec{c}$ c) $\vec{b} + \vec{a}$ d) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

siendo \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} los del ejercicio anterior.

Realiza las mismas sumas con pares de números.

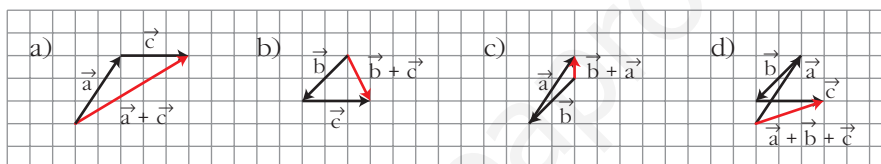
Por ejemplo: $\vec{a} + \vec{c} = (2, 3) + (3, 0) = (5, 3)$

a) $\vec{a} + \vec{c} = (2, 3) + (3, 0) = (5, 3)$

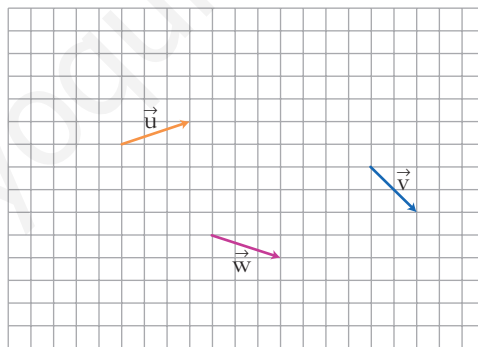
b) $\vec{b} + \vec{c} = (-2, -2) + (3, 0) = (1, -2)$

c) $\vec{b} + \vec{a} = (-2, -2) + (2, 3) = (0, 1)$

d) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2, 3) + (-2, -2) + (3, 0) = (3, 1)$



Combina operaciones



■ Con los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} efectúa las siguientes operaciones gráficamente y mediante pares de números:

a) $2\vec{u} + 3\vec{v}$

b) $-\vec{v} + 5\vec{w}$

c) $2\vec{u} + 3\vec{v} - 4\vec{w}$

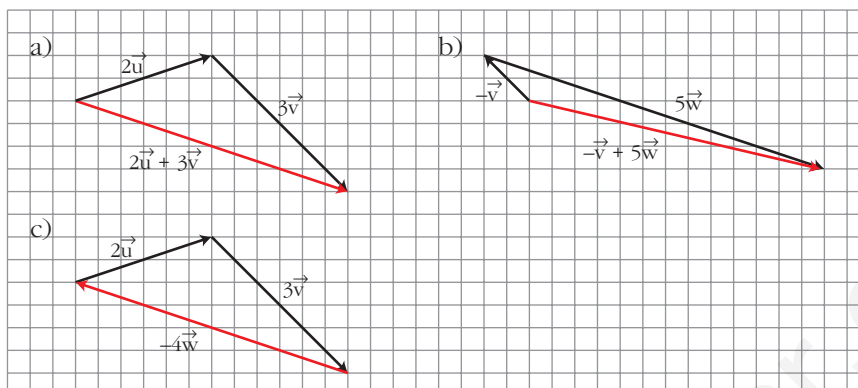
¿Cómo designarías al vector resultante de esta última operación?

a) $2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(3, 1) + 3(2, -2) = (6, 2) + (6, -6) = (12, -4)$

b) $-\vec{v} + 5\vec{w} = -(2, -2) + 5(3, -1) = (-2, 2) + (15, -5) = (13, -3)$

c) $2\vec{u} + 3\vec{v} - 4\vec{w} = 2(3, 1) + 3(2, -2) - 4(3, -1) = (6, 2) + (6, -6) + (-12, 4) = (0, 0)$

Vector nulo: $\vec{0}$



Página 175

1. Si $\vec{u}(-2, 5)$ y $\vec{v}(1, -4)$ son las coordenadas de dos vectores respecto de una base, halla las coordenadas respecto de la misma base de:

a) $2\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} - \vec{v}$ c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$ d) $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$

a) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-2, 5) + (1, -4) = (-4, 10) + (1, -4) = (-3, 6)$

b) $\vec{u} - \vec{v} = (-2, 5) - (1, -4) = (-2, 5) + (-1, 4) = (-3, 9)$

c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = 3(-2, 5) + \frac{1}{3}(1, -4) = (-6, 15) + \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{17}{3}, \frac{41}{3}\right)$

d) $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} = -\frac{1}{2}(-2, 5) - 2(1, -4) = \left(1, -\frac{5}{2}\right) + (-2, 8) = \left(-1, \frac{11}{2}\right)$

Página 176

1. Dos vectores \vec{u} y \vec{v} cumplen que: $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = \frac{3}{2}$, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 30^\circ$. Calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $\vec{v} \cdot \vec{u}$ c) $(-\vec{u}) \cdot \vec{v}$

d) $(3\vec{u}) \cdot (-5\vec{v})$ e) $\vec{u} \cdot \vec{u}$ f) $\vec{v} \cdot (-\vec{v})$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

b) $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{3}$

c) $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -3\sqrt{3}$

d) $(3\vec{u}) \cdot (-5\vec{v}) = 3(-5)(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -15 \cdot 3\sqrt{3} = -45\sqrt{3}$

e) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \cos 0^\circ = 16$

f) $\vec{v} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{v} \cdot \vec{v} = -|\vec{v}|^2 = -\frac{9}{4}$

2. Si $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$, averigua el ángulo (\vec{u}, \vec{v}) . (Usa la calculadora).

$$\cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-2}{3 \cdot 5} = -\frac{2}{15} \rightarrow (\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 97^\circ 39' 44''$$

3. Halla $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{u})$ y $\vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{u})$ sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$, $(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 120^\circ$.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos 120^\circ + |\vec{u}| |\vec{u}| \cos 0^\circ =$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot 3 = -\frac{15}{2} + 9 = \frac{3}{2}$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} = 25 - \left(-\frac{15}{2}\right) = \frac{65}{2}$$

Página 178

4. Dados los vectores \vec{u} y \vec{v} mediante sus coordenadas respecto a una base ortonormal, $\vec{u}(3, -4)$, $\vec{v}(-1, 3)$, halla:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \cdot \vec{u}$

b) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$

c) El valor de k para que $(4, k)$ sea perpendicular a \vec{v} .

d) Un vector unitario perpendicular a \vec{u} .

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -4) \cdot (-1, 3) = 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 = -15$

$\vec{v} \cdot \vec{u} = (-1, 3) \cdot (3, -4) = (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = -15$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$\cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-15}{5\sqrt{10}} = -0,9486832981 \rightarrow (\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 161^\circ 33' 54''$

c) $(4, k) \perp (-1, 3) \rightarrow (4, k) \cdot (-1, 3) = 0 \rightarrow -4 + 3k = 0 \rightarrow k = \frac{4}{3}$

Para que $(4, k)$ sea perpendicular a \vec{v} , ha de ser $k = \frac{4}{3}$.

d) Un vector perpendicular a $\vec{u}(3, -4)$ es, por ejemplo, $(4, 3)$.

Un vector unitario paralelo a $(4, 3)$ es $\frac{1}{|(4, 3)|} \cdot (4, 3) = \frac{1}{5}(4, 3) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

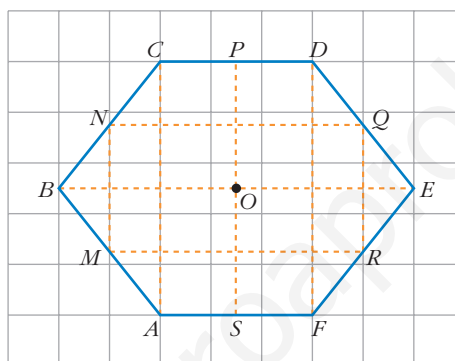
Hay dos vectores unitarios perpendiculares a $(3, -4)$. Son $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ y $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Los vectores y sus operaciones

- 1 La figura $ABCDEF$ es un hexágono.



Compara el módulo, la dirección y el sentido de los siguientes pares de vectores:

- a) \vec{AB} y \vec{BC} b) \vec{FE} y \vec{BC} c) \vec{BM} y \vec{DE} d) \vec{OS} y \vec{OE}

a) $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$. Tienen distinta dirección.

b) Los dos vectores tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo, luego: $\vec{FE} = \vec{BC}$.

c) $|\vec{BM}| = \frac{1}{2} |\vec{DE}|$. Tienen la misma dirección y el mismo sentido.

Luego: $\vec{BM} = \frac{1}{2} \vec{DE}$.

d) $|\vec{OS}| < |\vec{OE}|$. Sus direcciones son perpendiculares: $\vec{OS} \perp \vec{OE}$.

- 2 Busca en la figura del ejercicio 1 tres vectores iguales a \vec{NC} y otros tres iguales a \vec{AS} .

$$\vec{NC} = \vec{BN} = \vec{FR} = \vec{RE}$$

$$\vec{AS} = \vec{SF} = \vec{CP} = \vec{PD}$$

3 Sustituye los puntos suspensivos por un número, de forma que estas igualdades sean verdaderas para el hexágono del ejercicio 1:

a) $\vec{CD} = 2\vec{CP}$ b) $\vec{MN} = \dots\vec{AC}$ c) $\vec{OP} = \dots\vec{OS}$ d) $\vec{NB} = \dots\vec{BC}$

a) $\vec{CD} = 2\vec{CP}$

b) $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

c) $\vec{OP} = -\vec{OS}$

d) $\vec{NB} = -\frac{1}{2}\vec{BC}$

4 Completa las igualdades siguientes con las letras que faltan para que, en el hexágono del ejercicio 1, sean verdaderas:

a) $\vec{AF} + \vec{B}\dots = \vec{AE}$

b) $\vec{AS} + \dots\vec{C} = \vec{SF}$

c) $\vec{O}\dots + \vec{SO} = \vec{FD}$

d) $\vec{AM} + \vec{A}\dots = \vec{AB}$

a) $\vec{AF} + \vec{BC} = \vec{AE}$

b) $\vec{AS} + \vec{CC} = \vec{SF}$

c) $\vec{OP} + \vec{SO} = \vec{FD}$

d) $\vec{AM} + \vec{AM} = \vec{AB}$

5 Observa el rombo de la figura y calcula:

a) $\vec{AB} + \vec{BC}$

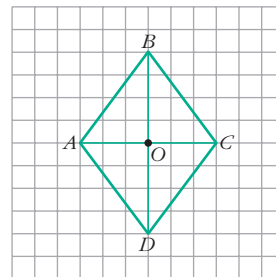
b) $\vec{OB} + \vec{OC}$

c) $\vec{OA} + \vec{OD}$

d) $\vec{AB} + \vec{CD}$

e) $\vec{AB} + \vec{AD}$

f) $\vec{DB} - \vec{CA}$



Expresa los resultados utilizando los vértices del rombo.

a) \vec{AC}

b) $\vec{AB} = \vec{DC}$

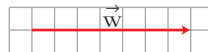
c) $\vec{BA} - \vec{CD}$

d) $\vec{AA} = \vec{0}$

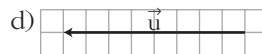
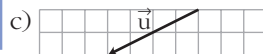
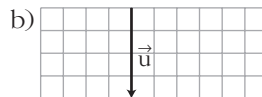
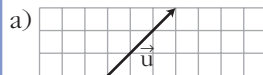
e) \vec{AC}

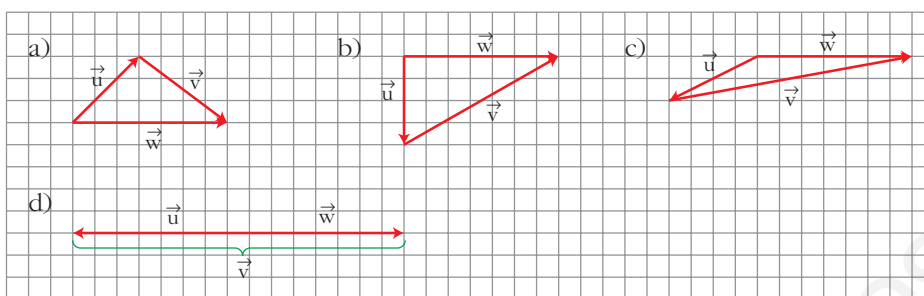
f) $2\vec{DC}$

6 Considera el vector \vec{w} :

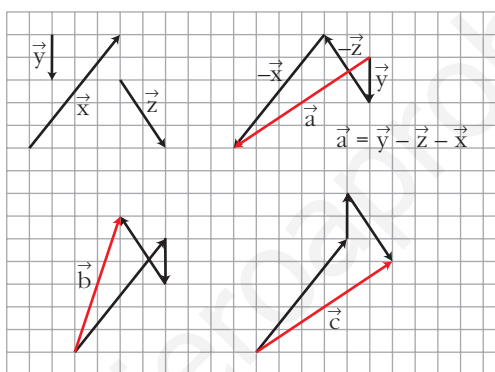


Dibuja en cada uno de estos casos un vector \vec{v} que sumado con \vec{u} dé como resultado \vec{w} :





7 Los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} los hemos obtenido operando con los vectores \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} . ¿Qué operaciones hemos hecho en cada caso?



$$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}$$

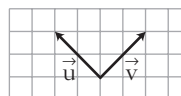
$$\vec{c} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z}$$

Bases y coordenadas

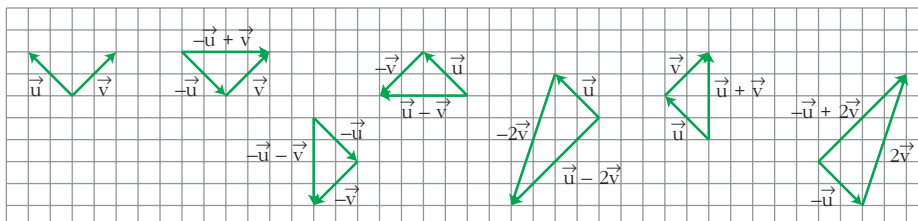
8 A la vista de la figura, dibuja los vectores:

$$-\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{v},$$

$$-\vec{u} - \vec{v}, -\vec{u} + 2\vec{v}, \vec{u} - 2\vec{v}$$



Si tomamos como base (\vec{u}, \vec{v}) , ¿cuáles son las coordenadas de los vectores que has dibujado?



$$-\vec{u} + \vec{v} = (-1, 1)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (1, -1)$$

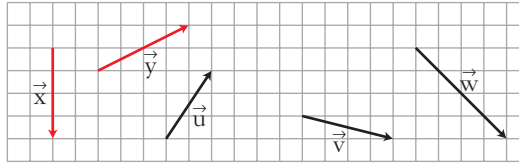
$$\vec{u} + \vec{v} = (1, 1)$$

$$-\vec{u} - \vec{v} = (-1, -1)$$

$$-\vec{u} + 2\vec{v} = (-1, 2)$$

$$\vec{u} - 2\vec{v} = (1, -2)$$

- 9 Escribe los vectores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} como combinación lineal de \vec{x} e \vec{y} .



¿Cuáles serán las coordenadas de esos vectores respecto a la base $B(\vec{x}, \vec{y})$?

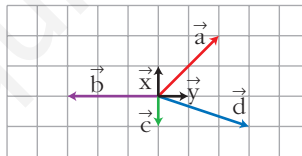
$$\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}, \text{ luego } \vec{u} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ respecto de } B(\vec{x}, \vec{y}).$$

$$\vec{v} = \frac{3}{4}\vec{x} + \vec{y}, \text{ luego } \vec{v} = \left(\frac{3}{4}, 1\right) \text{ respecto de } B(\vec{x}, \vec{y}).$$

$$\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{x} + \vec{y}, \text{ luego } \vec{w} = \left(\frac{3}{2}, 1\right) \text{ respecto de } B(\vec{x}, \vec{y}).$$

Página 183

- 10 Escribe las coordenadas de los vectores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} , con respecto a la base $B(\vec{x}, \vec{y})$.



$$\vec{a} = (2, 2); \vec{b} = (0, -3); \vec{c} = (-1, 0); \vec{d} = (-1, 3)$$

- 11 En una base ortonormal las coordenadas de un vector son $\vec{v}(2, -5)$. Halla las coordenadas de \vec{v} en la base $B = \{(1, -1), (0, -1)\}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x}(1, -1) \\ \vec{y}(0, -1) \\ \vec{v}(2, -5) \end{array} \right\} \vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y}$$

$$(2, -5) = a(1, -1) + b(0, -1) = (a, -a) + (0, -b) = (a, -a - b)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 = a \\ -5 = -a - b \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 2 \\ b = +3 \end{array}$$

Las coordenadas de \vec{v} en la nueva base son (2, 3).

- 12** Si las coordenadas de los vectores \vec{u} y \vec{v} son $(3, -5)$ y $(-2, 1)$, obtén las coordenadas de:

a) $-2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

b) $-\vec{u} - \frac{3}{5}\vec{v}$

c) $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v})$

a) $-2(3, -5) + \frac{1}{2}(-2, 1) = (-6, 10) + \left(-1, \frac{1}{2}\right) = \left(-7, \frac{21}{2}\right)$

b) $-(3, -5) - \frac{3}{5}(-2, 1) = (-3, 15) + \left(\frac{6}{5}, \frac{-3}{5}\right) = \left(\frac{-9}{5}, \frac{72}{5}\right)$

c) $\frac{1}{2}[(3, -5) + (-2, 1)] - \frac{2}{3}[(3, -5) - (-2, 1)] = \frac{1}{2}(1, -4) - \frac{2}{3}(5, -6) =$
 $= \left(\frac{1}{2}, -2\right) + \left(\frac{-10}{3}, 4\right) = \left(\frac{-17}{6}, 2\right)$

- 13** Halla el vector \vec{b} tal que $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, siendo $\vec{a}(-1, 3)$ y $\vec{c}(7, -2)$.

$$(7, -2) = 3(-1, 3) - \frac{1}{2}(b_1, b_2) \rightarrow \begin{cases} 7 = -3 - (1/2)b_1 \rightarrow b_1 = -20 \\ -2 = 9 - (1/2)b_2 \rightarrow b_2 = 22 \end{cases}$$

$\vec{b}(-20, 22)$

- 14** Dados los vectores $\vec{a}(3, -2)$, $\vec{b}(-1, 2)$ y $\vec{c}(0, -5)$, calcula m y n de modo que: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

$$(0, -5) = m(3, -2) + n(-1, 2) \rightarrow \begin{cases} 0 = 3m - n \\ -5 = -2m + 2n \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

Despejando en la primera ecuación, $n = 3m$, y sustituyendo en la segunda:

$$-5 = -2m + 6m \rightarrow -5 = 4m \rightarrow m = \frac{-5}{4} \rightarrow n = \frac{-15}{4}$$

- 15** Expresa el vector $\vec{a}(-1, -8)$ como combinación lineal de $\vec{b}(3, -2)$ y $\vec{c}\left(4, -\frac{1}{2}\right)$.

• Calcula m y n tales que $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$.

$$(-1, -8) = m(3, -2) + n\left(4, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} -1 = 3m + 4n \\ -8 = -2m - \frac{1}{2}n \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por reducción (por ejemplo).

Para ello, multiplicamos la segunda ecuación por 8 (en los dos miembros) y sumamos miembro a miembro las dos:

$$\begin{array}{r} -1 = 3m + 4n \\ -64 = -16m - 4n \\ \hline -65 = -13m \rightarrow m = \frac{-65}{-13} = 5 \end{array}$$

Sustituyendo en una de las dos ecuaciones y despejando n :

$$-1 = 3m + 4n \rightarrow -1 = 3 \cdot (5) + 4n \rightarrow -16 = 4n \rightarrow n = -4$$

Así, podemos decir: $\vec{a} = 5\vec{b} - 4\vec{c}$

16 ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores forman una base?

a) $\vec{u}(3, -1), \vec{v}(1, 3)$

b) $\vec{u}(2, 6), \vec{v}\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

a) Sí, tienen distinta dirección ($\vec{u} \neq k\vec{v}$ para cualquier k). Basta con representarlos gráficamente para comprobarlo.

b) No, pues tienen la misma dirección ($\vec{u} = 3\vec{v}$).

Producto escalar. Módulo y ángulo

17 En una circunferencia de centro O y de radio 2 cm, se inscribe un hexágono regular de vértices A, B, C, D, E, F . Calcula los productos:

a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$

b) $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$

c) $\vec{AB} \cdot \vec{ED}$

d) $\vec{BC} \cdot \vec{EF}$

a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cos \widehat{(\vec{OA}, \vec{OB})} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

b) $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

c) $\vec{AB} \cdot \vec{ED} \stackrel{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot \cos 0^\circ \stackrel{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

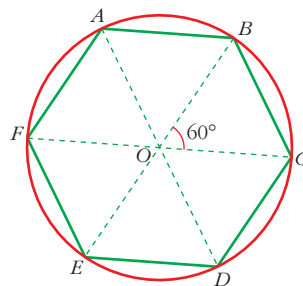
(*) OAB es un triángulo equilátero, luego:

$$|\vec{AB}| = |\vec{OA}| = 2$$

Razonamos igual para $|\vec{ED}|$.

d) $\vec{BC} = -\vec{EF}$ (mismo módulo, misma dirección y sentido opuesto)

Luego: $\vec{BC} \cdot \vec{EF} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 180^\circ = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4$



18 Dados los vectores $\vec{x}(5, -2)$, $\vec{y}(0, 3)$, $\vec{z}(-1, 4)$, calcula:

a) $\vec{x} \cdot \vec{y}$ b) $\vec{x} \cdot \vec{z}$ c) $\vec{y} \cdot \vec{z}$

a) $\vec{x} \cdot \vec{y} = (5, -2) \cdot (0, 3) = -6$

b) $\vec{x} \cdot \vec{z} = (5, -2) \cdot (-1, 4) = -5 - 8 = -13$

c) $\vec{y} \cdot \vec{z} = (0, 3) \cdot (-1, 4) = 12$

19 Calcula k para que el producto $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sea igual a 0 en los siguientes casos:

a) $\vec{u}(6, k)$, $\vec{v}(-1, 3)$ b) $\vec{u}\left(\frac{1}{5}, -2\right)$, $\vec{v}(k, 3)$ c) $\vec{u}(-3, -2)$, $\vec{v}(5, k)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (6, k) \cdot (-1, 3) = 0 \rightarrow -6 + 3k = 0 \rightarrow k = 2$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{1}{5}, -2\right) \cdot (k, 3) = 0 \rightarrow \frac{k}{5} - 6 = 0 \rightarrow k = 30$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, -2) \cdot (5, k) = 0 \rightarrow -15 - 2k = 0 \rightarrow k = -\frac{15}{2}$

20 Dados $\vec{u}(2, 3)$, $\vec{v}(-3, 1)$ y $\vec{w}(5, 2)$, calcula:

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v})\vec{w}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

d) $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v})$

• a) *Halla primero las coordenadas de $3\vec{u} + 2\vec{v}$.*

c) *Efectúa $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Multiplica el resultado (un número) por el vector \vec{w} . Obtendrás un vector.*

a) $3\vec{u} + 2\vec{v} = 3(2, 3) + 2(-3, 1) = (6, 9) + (-6, 2) = (0, 11)$

$(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w} = (0, 11) \cdot (5, 2) = 0 \cdot 5 + 11 \cdot 2 = 0 + 22 = 22$

b) $\left. \begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{w} &= (2, 3) \cdot (5, 2) = 10 + 6 = 16 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} &= (-3, 1) \cdot (5, 2) = -15 + 2 = -13 \end{aligned} \right\} \rightarrow$

$\rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w} = 16 - (-13) = 16 + 13 = 29$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3) \cdot (-3, 1) = -6 + 3 = -3$

$(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = -3(5, 2) = (-15, -6)$

d) $\vec{v} \cdot \vec{v} = (-3, 1) \cdot (-3, 1) = 9 + 1 = 10$

$\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (2, 3) \cdot 10 = (20, 30)$

21 Halla el módulo de cada uno de los siguientes vectores:

$$\vec{u}(3, 2)$$

$$\vec{v}(-2, 3)$$

$$\vec{w}(-8, -6)$$

$$\vec{z}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\vec{t}(5, 0)$$

$$\vec{r}(1, 1)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = 10$$

$$|\vec{z}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

$$|\vec{t}| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

22 Halla el valor de m para que el módulo del vector $\vec{u}\left(\frac{3}{5}, m\right)$ sea igual a 1.

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + m^2} = 1 \rightarrow \frac{9}{25} + m^2 = 1 \rightarrow m^2 = \frac{16}{25} \begin{cases} m_1 = \frac{4}{5} \\ m_2 = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

23 Calcula x , de modo que el producto escalar de $\vec{a}(3, -5)$ y $\vec{b}(x, 2)$ sea igual a 7. ¿Qué ángulo forman los vectores \vec{a} y \vec{b} ?

$$(3, -5) \cdot (x, 2) = 7 \rightarrow 3x - 10 = 7 \rightarrow x = \frac{17}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{7}{(\sqrt{3^2 + (-5)^2}) (\sqrt{(17/3)^2 + 2^2})} \rightarrow \alpha = 78^\circ 28' 34,6''$$

24 Halla el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:

a) $\vec{u}(3, 2), \vec{v}(1, -5)$

b) $\vec{m}(4, 6), \vec{n}(3, -2)$

c) $\vec{a}(1, 6), \vec{b}\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$

a) Utilizamos las dos expresiones para calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 1 + 2(-5) = -7$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

Igualando las dos expresiones, se tiene:

$$-7 = \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{-7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = -0,38$$

$$\text{Luego: } (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 112^\circ 22' 48''$$

b) Despejando directamente en la definición:

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\widehat{(\vec{m}, \vec{n})}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos(\widehat{(\vec{m}, \vec{n})}) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{4 \cdot 3 + 6 \cdot (-2)}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}} = \frac{0}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}} = 0$$

de donde: $(\widehat{(\vec{m}, \vec{n})}) = 90^\circ$ (basta con ver que $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$)

$$c) \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-1/2 - 18}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{37/2}} = \frac{-37/2}{(37\sqrt{2})/2} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Luego: $(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = 135^\circ$

25 Dado el vector $\vec{u}(-5, k)$ calcula k de modo que:

a) \vec{u} sea ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$.

b) El módulo de \vec{u} sea igual a $\sqrt{34}$.

$$a) \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \rightarrow -20 - 2k = 0 \rightarrow k = -10$$

$$b) |\vec{u}| = \sqrt{(-5)^2 + k^2} = \sqrt{25 + k^2} = \sqrt{34} \rightarrow 25 + k^2 = 34 \rightarrow k^2 = 9 \rightarrow k = \pm 3$$

Hay, pues, dos soluciones.

26 Dado el vector $\vec{u}(6, -8)$, determina:

a) Los vectores unitarios (módulo 1) de la misma dirección que \vec{u} .

b) Los vectores ortogonales a \vec{u} que tengan el mismo módulo que \vec{u} .

c) Los vectores unitarios y ortogonales a \vec{u} .

• *Mira el problema resuelto número 4.*

$$a) \text{Calculamos: } |\vec{u}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$$

Los vectores de la misma dirección que \vec{u} y de módulo 1 son:

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{10}(6, -8) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{10}(-6, 8) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

b) Se obtienen permutando las coordenadas de \vec{u} y cambiando el signo de una de ellas.

$$\vec{v}_1 = (8, 6)$$

$$\vec{v}_2 = (-8, -6)$$

También se pueden hallar expresando analíticamente las dos condiciones y resolviendo el sistema que obtenemos:

$$\vec{v} \perp \vec{u} \rightarrow (x, y) \cdot (6, -8) = 0 \rightarrow 6x - 8y = 0 \rightarrow x = \frac{8y}{6} = \frac{4}{3}y$$

$$|\vec{v}| = |\vec{u}| \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 10 \rightarrow x^2 + y^2 = 100$$

$$\left(\frac{4}{3}y\right)^2 + y^2 = 100 \rightarrow \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 100 \rightarrow \frac{25}{9}y^2 = 100 \rightarrow y^2 = 36 \rightarrow y = \pm 6$$

$$\bullet \text{ Si } y_1 = 6 \rightarrow x_1 = \frac{4}{3} \cdot 6 = 8 \rightarrow \vec{v}_1(8, 6)$$

$$\bullet \text{ Si } y_2 = -6 \rightarrow x_2 = -8 \rightarrow \vec{v}_2(-8, -6)$$

c) Teniendo en cuenta a) y b), haremos:

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{10}(8, 6) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{10}(-8, -6) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

O bien, resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{v}| = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \\ \vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow 6x - 8y = 0 \rightarrow x = \frac{8y}{6} = \frac{4y}{3} \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{4y}{3}\right)^2 + y^2 = 1 \rightarrow \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 1 \rightarrow \frac{25}{9}y^2 = 1 \rightarrow y^2 = \frac{25}{9} \rightarrow y = \pm \frac{3}{5}$$

$$\bullet \text{ Si } y_1 = \frac{3}{5} \rightarrow x_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\bullet \text{ Si } y_2 = -\frac{3}{5} \rightarrow x_2 = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$\text{Así, } \vec{v}_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \quad \vec{v}_2 = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

Página 184

PARA RESOLVER

27 Halla las coordenadas de un vector $\vec{v}(x, y)$, ortogonal a $\vec{u}(3, 4)$ y que mida el doble que \vec{u} .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow 3x + 4y = 0 \\ |\vec{v}| = 2|\vec{u}| \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{9 + 16} = 2\sqrt{25} = 10 \rightarrow x^2 + y^2 = 100 \end{array} \right\}$$

Resolvemos el sistema:

Despejamos x en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

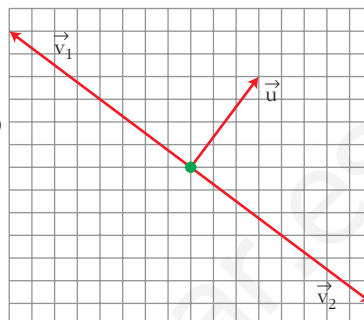
$$x = \frac{-4}{3}y \rightarrow \left(\frac{-4}{3}y\right)^2 + y^2 = 100 \rightarrow \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 100 \rightarrow \frac{25}{9}y^2 = 100 \rightarrow y = \pm 6$$

$$\text{Si } y_1 = 6 \rightarrow x_1 = \frac{-4}{3} \cdot 6 = -8 \rightarrow \vec{v}_1(-8, 6)$$

$$\text{Si } y_2 = -6 \rightarrow x_2 = \frac{-4}{3} \cdot (-6) = 8 \rightarrow \vec{v}_2(8, -6)$$

El problema tiene dos posibles soluciones, tales que:

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$$



- 28** Dados $\vec{a}(2, 1)$ y $\vec{b}(6, 2)$, halla un vector \vec{v} tal que $\vec{v} \cdot \vec{a} = 1$ y $\vec{v} \perp \vec{b}$.

$$\left. \begin{array}{l} (x, y) \cdot (2, 1) = 1 \rightarrow 2x + 2y = 1 \\ (x, y) \cdot (6, 2) = 0 \rightarrow 6x + 2y = 0 \end{array} \right\} \text{Resolvemos el sistema:}$$

Multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por (-1) y sumamos miembro a miembro:

$$\begin{array}{r} -2x - 2y = -1 \\ 6x + 2y = 0 \\ \hline 4x = -1 \rightarrow x = \frac{-1}{4} \end{array}$$

Sustituimos en una ecuación, por ejemplo en la segunda, y despejamos la otra incógnita:

$$6x + 2y = 0 \rightarrow 6 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) + 2y = 0 \rightarrow 2y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{4}$$

Así, nuestro vector será: $\vec{v}\left(\frac{-1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

- 29** Siendo $\vec{u}(5, -b)$ y $\vec{v}(a, 2)$, halla a y b , sabiendo que \vec{u} y \vec{v} son ortogonales y que $|\vec{v}| = \sqrt{13}$.

$$\text{Si } \vec{u} \perp \vec{v}, \text{ entonces } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (5, -b) \cdot (a, 2) = 0 \rightarrow 5a - 2b = 0$$

$$\text{Si } |\vec{v}| = \sqrt{13}, \text{ entonces } \sqrt{a^2 + 2^2} = \sqrt{13} \rightarrow a^2 + 4 = 13$$

Resolvemos el sistema:

$$a^2 + 4 = 13 \rightarrow a = \pm 3$$

$$\text{Entonces: Si } a = 3 \rightarrow b = \frac{5a}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\text{Si } a = -3 \rightarrow b = \frac{5a}{2} = \frac{-15}{2}$$

Luego hay dos posibles soluciones: $\vec{u} \left(5, \frac{-15}{2} \right)$, $\vec{v} (3, 2)$

O bien: $\vec{u} \left(5, \frac{15}{2} \right)$, $\vec{v} (-3, 2)$

- 30** Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$, siendo $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 0)$, halla k de modo que $(\vec{a} + \vec{b})$ sea ortogonal a $(\vec{a} - \vec{b})$.

• Escribe las coordenadas de $(\vec{a} + \vec{b})$ y $(\vec{a} - \vec{b})$.

Si $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$, entonces $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$. Obtendrás una ecuación cuya incógnita es k .

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= 2(2, 3) - (-3, 0) = (7, 6) \\ \vec{b} &= -3(2, 3) + k(-3, 0) = (-6 - 3k, -9) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \vec{a} + \vec{b} = (1 - 3k, -3) \\ \vec{a} - \vec{b} = (13 + 3k, 15) \end{cases}$$

Ahora, como el producto escalar de ambos vectores debe ser 0, por ser ortogonales:

$$(1 - 3k, -3) \cdot (13 + 3k, 15) = 0 \rightarrow (1 - 3k)(13 + 3k) + (-3) \cdot 15 = 0$$

$$13 + 3k - 39k - 9k^2 - 45 = 0 \rightarrow 9k^2 + 36k + 32 = 0$$

$$k = \frac{-36 \pm \sqrt{1296 - 1152}}{18} = \frac{-36 \pm \sqrt{144}}{18} =$$

$$= \frac{-36 \pm 12}{18} = \begin{cases} -24/18 = -4/3 = k_1 \\ -48/18 = -8/3 = k_2 \end{cases}$$

- 31** Halla el valor que debe tener k para que los vectores $\vec{x} = k\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{y} = k\vec{a} - \vec{b}$ sean perpendiculares, siendo $\vec{a}(3/2, 4)$ y $\vec{b}(5, 0)$.

$$\left. \begin{aligned} \vec{x} &= k \left(\frac{3}{2}, 4 \right) + (5, 0) = \left(\frac{3k}{2} + 5, 4k \right) \\ \vec{y} &= k \left(\frac{3}{2}, 4 \right) - (5, 0) = \left(\frac{3k}{2} - 5, 4k \right) \end{aligned} \right\} \text{Entonces:}$$

$$\text{Como queremos } \vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

$$\left(\frac{3k}{2} + 5, 4k \right) \cdot \left(\frac{3k}{2} - 5, 4k \right) = 0 \rightarrow \left(\frac{3k}{2} + 5 \right) \left(\frac{3k}{2} - 5 \right) + (4k)(4k) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{9k^2}{4} - 25 + 16k^2 = 0 \rightarrow \frac{73}{4}k^2 = 25 \rightarrow k = \pm \frac{10}{\sqrt{73}} \text{ (dos soluciones)}$$

- 32** Dados los vectores $\vec{u}(k, -6)$ y $\vec{v}(3, b)$, calcula k y b de modo que $|\vec{u}| = 10$ y $\vec{u} \perp \vec{v}$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{k^2 + (-6)^2} = 10 \rightarrow k^2 + 36 = 100 \rightarrow k^2 = 64 \rightarrow$$

$$\rightarrow k = \pm 8 \text{ (dos soluciones)}$$

- Si $k = 8 \rightarrow \vec{u}(8, -6)$; $\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow (8, -6) \cdot (3, b) = 0 \rightarrow 24 - 6b = 0 \rightarrow b = 4$
- Si $k = -8 \rightarrow \vec{u}(-8, -6)$; $\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow (-8, -6) \cdot (3, b) = 0 \rightarrow -24 - 6b = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow b = -4$

- 33** Calcula las coordenadas de un vector \vec{u} tal que $|\vec{u}| = 1$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ siendo $\vec{v}(2, 1)$.

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}(a, b) \rightarrow |\vec{u}| = 1 \rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \rightarrow (a, b) \cdot (2, 1) = 1 \rightarrow 2a + b = 1 \end{aligned} \right\} \text{ Resolvemos el sistema:}$$

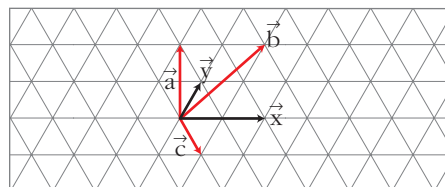
$$b = 1 - 2a \rightarrow a^2 + (1 - 2a)^2 = 1 \rightarrow a^2 + 1 + 4a^2 - 4a = 1 \rightarrow 5a^2 - 4a = 0$$

$$a = 0 \rightarrow b = 1$$

$$a = \frac{4}{5} \rightarrow b = -\frac{3}{5}$$

Soluciones: $\vec{u}_1(0, 1)$ y $\vec{u}_2\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

- 34** Expresa los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} como combinación lineal de \vec{x} e \vec{y} .



$$\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y} \quad \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y} \quad \vec{c} = \frac{1}{2}\vec{x} - \vec{y}$$

- 35** De los vectores \vec{a} y \vec{b} sabemos que $|\vec{a}| = 3$ y $|\vec{b}| = 5$ y que forman un ángulo de 120° . Calcula $|\vec{a} - \vec{b}|$.

• Mira el problema resuelto número 8.

Como: $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| |\vec{v}| \cos 0^\circ = |\vec{v}|^2 \cdot 1 = |\vec{v}|^2$

entonces podemos decir que:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 =$$

$$= 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ + 5^2 = 9 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 25 = 49$$

Luego: $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$

36 Si $|\vec{u}| = 3$ y $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -11$, halla $|\vec{v}|$.

$$\bullet (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = -11.$$

Como $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 = 9$, calcula $|\vec{v}|$.

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = -11$$

Como $|\vec{u}| = 3$, se tiene que:

$$3^2 - |\vec{v}|^2 = -11 \rightarrow |\vec{v}|^2 = 20 \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{20}$$

37 Sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u} \perp \vec{v}$, halla $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$\stackrel{(*)}{=} |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{34}$$

$$(*) \vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{34}$$

38 Sea $B(\vec{x}, \vec{y})$ una base ortonormal. Calcula $|\vec{x} + \vec{y}|$ y $|\vec{x} - \vec{y}|$.

• Mira el problema resuelto número 7.

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|^2 + 0 + |\vec{y}|^2 = 2 \rightarrow |\vec{x} + \vec{y}| = \sqrt{2}$$

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|^2 - 0 + |\vec{y}|^2 = 2 \rightarrow |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{2}$$

39 Si $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ y $|\vec{u} + \vec{v}| = 5$, ¿qué ángulo forman \vec{u} y \vec{v} ?

Razonando como en el problema resuelto número 7, llegamos a:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + |\vec{v}|^2$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$5^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 3^2$$

$$25 = 16 + 24 \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 9$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{25 - 25}{24} = 0 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 90^\circ$$

- 40** Calcula x para que los vectores $\vec{a}(7, 1)$ y $\vec{b}(1, x)$ formen un ángulo de 45° .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 + x = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow 7 + x = \sqrt{50} \cdot \sqrt{1 + x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 14 + 2x = \sqrt{100(1 + x^2)} \rightarrow \frac{14 + 2x}{10} = \sqrt{1 + x^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{7 + x}{5} = \sqrt{1 + x^2} \rightarrow \frac{49 + x^2 + 14x}{25} = 1 + x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 49 + x^2 + 14x = 25 + 25x^2 \rightarrow 24x^2 - 14x - 24 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 12x^2 - 7x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 576}}{24} \begin{cases} x_1 = 4/3 \\ x_2 = -3/4 \end{cases}$$

- 41** Calcula x para que $\vec{a}(3, x)$ y $\vec{b}(5, 2)$ formen un ángulo de 60° .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ$$

$$15 + 2x = \sqrt{9 + x^2} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow 30 + 4x = \sqrt{29(9 + x^2)} \rightarrow$$

$$\rightarrow 900 + 16x^2 + 240x = 29(9 + x^2) \rightarrow 13x^2 + 240x - 639 = 0$$

$$x = \frac{-240 \pm \sqrt{57600 + 33228}}{26} = \frac{-240 \pm \sqrt{90828}}{26} =$$

$$= \frac{-240 \pm 301,4}{26} \begin{cases} x_1 = -2,36 \\ x_2 = 20,82 \end{cases}$$

- 42** Halla las coordenadas de cierto vector \vec{x} , sabiendo que forma un ángulo de 60° con $\vec{a}(2, 4)$ y que los módulos de ambos son iguales.

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{a}| = \sqrt{20} = |\vec{x}| \\ \text{Sea } \vec{x}(m, n) \end{array} \right\} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{x} = |\vec{a}| |\vec{x}| \cos 60^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2m + 4n = \sqrt{20} \cdot \sqrt{20} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow 2m + 4n = 10 \\ \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{20} \rightarrow m^2 + n^2 = 20 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$m = \frac{10 - 4n}{2} = 5 - 2n$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$(5 - 2n)^2 + n^2 = 20 \rightarrow 25 + 4n^2 - 20n + n^2 = 20 \rightarrow n^2 - 4n + 1 = 0$$

$$n = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \begin{cases} n_1 = 0,27 \\ n_2 = 3,73 \end{cases}$$

• Si $n_1 = 0,27 \rightarrow m_1 = 5 - 2 \cdot 0,27 = 4,46 \rightarrow \vec{x}_1 = (4,46; 0,27)$

• Si $n_2 = 3,73 \rightarrow m_2 = 5 - 2 \cdot 3,73 = -2,46 \rightarrow \vec{x}_2 = (-2,46; 3,73)$

- 43** Determina un vector \vec{a} que forme con $\vec{b}(-1, -2)$ un ángulo de 30° y tal que $|\vec{a}| = \sqrt{3}|\vec{b}|$.

$$\text{Sea } \vec{a}(x, y) \rightarrow \begin{cases} -x - 2y = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 30^\circ \rightarrow \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -x - 2y = (\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow -x - 2y = \frac{15}{2} \\ x^2 + y^2 = 15 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$x = -2y - \frac{15}{2}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$\left(4y^2 + \frac{225}{4} + 30y\right) + y^2 = 15 \rightarrow 5y^2 + 30y + \frac{165}{4} = 0$$

$$20y^2 + 120y + 165 = 0 \rightarrow 4y^2 + 24y + 33 = 0$$

$$y = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 528}}{8} = \frac{-24 \pm 4\sqrt{3}}{8} = -3 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Así: } \vec{a}\left(\frac{-3}{2} - \sqrt{3}, -3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ o } \vec{a} = \left(\frac{-3}{2} + \sqrt{3}, -3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

- 44** Dados los vectores $\vec{u}(1, 3)$ y $\vec{v}(6, 4)$, halla la proyección de \vec{v} sobre \vec{u} .

• Sabes que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot \text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v})$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot (\text{proy. de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u})$$

$$(\text{proy. de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{6 + 12}{\sqrt{10}} = \frac{18}{\sqrt{10}} = \frac{18\sqrt{10}}{10} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

- 45** Dados los vectores $\vec{a}(5, 2)$ y $\vec{b}(4, -3)$, calcula la proyección de \vec{a} sobre \vec{b} y la de \vec{b} sobre \vec{a} .

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot (\text{proy. de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a}) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{b}| \cdot (\text{proy. de } \vec{a} \text{ sobre } \vec{b}) \end{aligned} \right\}$$

$$\text{proy. de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{20 - 6}{\sqrt{29}} = \frac{14}{\sqrt{29}} = \frac{14\sqrt{29}}{29}$$

$$\text{proy. de } \vec{a} \text{ sobre } \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{20 - 6}{\sqrt{25}} = \frac{14}{5}$$

- 46** De una base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ se sabe que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. En esa base las coordenadas de dos vectores son $\vec{x}(1, 2)$ e $\vec{y}(-1, 1)$. Calcula $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

• Mira el problema resuelto número 8.

$$\vec{x} = 1\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

$$\vec{y} = -1\vec{u} + 1\vec{v} = -\vec{u} + \vec{v}$$

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{y} &= (\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{v} = \\ &= -|\vec{u}|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2|\vec{v}|^2 = -2 - (-1) + 2 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

- 47** Dados $\vec{a}(1, 2)$ y $\vec{b}(5, 5)$, expresa el vector \vec{b} como suma de dos vectores: uno de la misma dirección que \vec{a} y otro ortogonal a \vec{a} .

• Mira el problema resuelto número 6.

$$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y}, \text{ donde:}$$

- \vec{x} tiene la misma dirección de $\vec{a} \rightarrow \vec{x} = k\vec{a} = k(1, 2) = (k, 2k)$
- $\vec{y} \perp \vec{a} \rightarrow \vec{y} = b(-2, 1) = (-2b, b)$

Entonces:

$$(5, 5) = \vec{x} + \vec{y} = (k, 2k) + (-2b, b) = (k - 2b, 2k + b)$$

$$\begin{cases} 5 = k - 2b \\ 5 = 2k + b \end{cases} \begin{matrix} k = 3 \\ b = -1 \end{matrix}$$

Los vectores pedidos son $\vec{x}(3, 6)$ e $\vec{y}(2, -1)$.

- 48** Se sabe que $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ y $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ son perpendiculares y que \vec{a} y \vec{b} son unitarios. ¿Cuál es el ángulo que forman \vec{a} y \vec{b} ?

• Si $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$.

Si $\vec{c} \perp \vec{d} \rightarrow \vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$

$$5\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 10\vec{b} \cdot \vec{a} - 8\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$$

Como \vec{a} y \vec{b} son unitarios $\rightarrow |\vec{a}| = 1 = |\vec{b}|$

$$5|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8|\vec{b}|^2 = 5 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8 = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = \frac{-1}{2} \rightarrow \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 120^\circ$$

- 49** Demuestra que el vector $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$ es perpendicular al vector \vec{c} .

• Debes probar que $[(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.

Hay que probar que el producto escalar de ambos vectores es igual a 0.

- Veamos primero cuáles son las coordenadas del primer vector:

$$\begin{aligned} (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} &= (b_1c_1 + b_2c_2) (a_1, a_2) - (a_1c_1 + a_2c_2) (b_1, b_2) = \\ &= ((b_1c_1 + b_2c_2) a_1, (b_1c_1 + b_2c_2) a_2) - ((a_1c_1 + a_2c_2) b_1, (a_1c_1 + a_2c_2) b_2) = \\ &= (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2, a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2) - (a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2, a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2) = \\ &= (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2 - a_1b_1c_1 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2 - a_1b_2c_1 - a_2b_2c_2) = \\ &= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1) \end{aligned}$$

- Calculamos ahora:

$$\begin{aligned} [(\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b}] \cdot \vec{c} &= \\ &= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1) \cdot (c_1, c_2) = \\ &= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2) c_1 + (a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1) c_2 = \\ &= a_1b_2c_2c_1 - a_2b_1c_2c_1 + a_2b_1c_1c_2 - a_1b_2c_1c_2 = 0 \end{aligned}$$

Página 185

CUESTIONES TEÓRICAS

- 50** Indica si el resultado de las siguientes operaciones es un número o un vector:

a) $2\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$

c) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{c}$

d) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

a) Número

b) Vector

c) Número

d) Número

- 51** Si $B(\vec{a}, \vec{b})$ es una base de los vectores del plano, señala cuáles de los siguientes pares de vectores pueden ser otra base:

a) $(3\vec{a}, -2\vec{b})$

b) $(-\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$

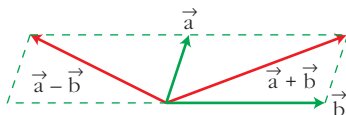
c) $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$

d) $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a})$

a) Sí, pues no tienen la misma dirección, ya que $3\vec{a}$ tiene la dirección de \vec{a} y $-2\vec{b}$ tiene la dirección de \vec{b} (que, por ser $B(\vec{a}, \vec{b})$ base, no es la misma).

b) No, pues $-\vec{a} - \vec{b} = -1(\vec{a} + \vec{b})$, luego los dos vectores tienen la misma dirección (y sentidos opuestos).

c) Sí, pues tienen distinta dirección.



d) No, pues tienen la misma dirección al ser $\vec{a} - \vec{b} = -1(\vec{b} - \vec{a})$.

52 Sean \vec{a} y \vec{b} dos vectores no nulos. Indica qué ángulo forman en los siguientes casos:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$

d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,5 |\vec{a}| |\vec{b}|$

a) $\cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = 1 \rightarrow \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 0^\circ$

b) $\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 90^\circ$

c) $\cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = -1 \rightarrow \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 180^\circ$

d) $\cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = 0,5 \rightarrow \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 60^\circ$

PARA PROFUNDIZAR

53 Dados los vectores $\vec{a}(2, 6)$ y $\vec{b}(5, 1)$, calcula:

a) Las coordenadas de un vector unitario de la misma dirección que \vec{b} .

b) Un vector de la misma dirección que \vec{b} y cuyo módulo sea igual a la proyección de \vec{a} sobre \vec{b} . (Vector proyección de \vec{a} sobre \vec{b}).

a) Habrá dos soluciones (\vec{v} y $-\vec{v}$)

• Si \vec{v} es vector unitario $\rightarrow |\vec{v}| = 1$

• Si \vec{v} es de la misma dirección que $\vec{b} \rightarrow \vec{v} = k\vec{b} = (k5, k)$

$$\sqrt{25k^2 + k^2} = 1 \rightarrow k = \pm \frac{1}{\sqrt{26}} = \pm \frac{\sqrt{26}}{26}$$

Luego las soluciones son:

$$\vec{v} = \left(\frac{5\sqrt{26}}{26}, \frac{\sqrt{26}}{26} \right) \text{ y } -\vec{v} = \left(-\frac{5\sqrt{26}}{26}, -\frac{\sqrt{26}}{26} \right)$$

b) proy. de \vec{a} sobre $\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{10 + 6}{\sqrt{26}} = \frac{16}{\sqrt{26}} = \frac{16\sqrt{26}}{26} = \frac{8\sqrt{26}}{13}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Luego, } |\vec{v}| = \frac{8\sqrt{26}}{13} \\ \text{y } \vec{v} = k\vec{b} = (5k, k) \end{array} \right\} \rightarrow \sqrt{26k^2} = \frac{8\sqrt{26}}{13} \rightarrow k = \pm \frac{8}{13}$$

Así: $\vec{v} \left(\frac{40}{13}, \frac{8}{13} \right)$, $-\vec{v} \left(-\frac{40}{13}, -\frac{8}{13} \right)$

54 Sean \vec{a} y \vec{b} los vectores que definen los lados de un rombo, partiendo de uno de sus vértices (cada vector determina un par de lados paralelos):

a) Expresa las diagonales del rombo en función de \vec{a} y \vec{b} .

b) Demuestra vectorialmente que las diagonales del rombo son perpendiculares.

a) $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

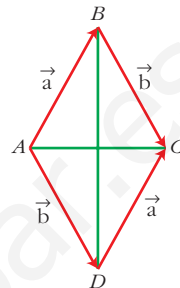
$$\vec{BD} = \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{b}$$

b) Hay que probar que $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$. Veámoslo:

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2$$

Como $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ por ser la medida de los lados, se cumple que:

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$$



55 Busca algunos ejemplos con los que se vea que $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ no implica que $\vec{b} = \vec{c}$.

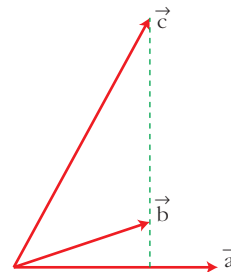
Considera los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} del dibujo de la derecha:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{proy. de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot \text{proy. de } \vec{c} \text{ sobre } \vec{a}$$

Como ambas proyecciones coinciden: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$

Y, sin embargo: $\vec{b} \neq \vec{c}$



56 Prueba, que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$, entonces: $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$, $m, n \in \mathbb{R}$.

Hay que probar que $\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = 0$. Veamos:

$$\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) \stackrel{(*)}{=} m(\vec{a} \cdot \vec{b}) + n(\vec{a} \cdot \vec{c})$$

(*) Propiedades 6 y 7 del producto escalar.

$$\text{Como: } \vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{c} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) \stackrel{(*)}{=} m(\vec{a} \cdot \vec{b}) + n(\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m \cdot 0 + n \cdot 0$$

57 Prueba que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c})$ entonces se verifica que $\vec{a} \perp \vec{c}$.

$$\text{Si } \vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

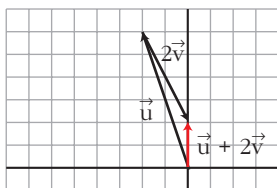
$$\text{Si } \vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c}) \rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \left. \vphantom{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})} \right\} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$$

Página 185

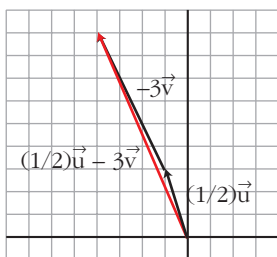
AUTOEVALUACIÓN

1. Se consideran los vectores $\vec{u}(-2, 6)$ y $\vec{v}(1, -2)$.

Calcula $\vec{u} + 2\vec{v}$ y $\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v}$ gráficamente y utilizando coordenadas.



$$\begin{aligned}\vec{u} + 2\vec{v} &= (-2, 6) + 2(1, -2) = \\ &= (-2, 6) + (2, -4) = (0, 2)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v} &= \frac{1}{2}(-2, 6) - 3(1, -2) = \\ &= (-1, 3) - (3, -6) = (-4, 9)\end{aligned}$$

2. Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores unitarios que forman un ángulo de 60° . Calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $(3\vec{u}) \cdot (-2\vec{v})$ c) $\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v})$

$$a) \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos 60^\circ = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$b) 3\vec{u} \cdot (-2\vec{v}) = -6(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -3$$

$$c) \text{proy}_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})}{|\vec{u}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v}}{1} = |\vec{u}|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

3. Expresa el vector $\vec{a}(-1, -9)$ como combinación lineal de la base $B = \{(-2, 3), (-1, 5)\}$.

$$(-1, -9) = k(-2, 3) + s(-1, 5) = (-2k - s, 3k + 5s)$$

$$\begin{cases} -1 = -2k - s \\ -9 = 3k + 5s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1 - 2k \\ -9 = 3k + 5(1 - 2k) \end{cases} \rightarrow -9 = -7k + 5 \rightarrow k = 2$$

$$s = 1 - 4 = -3$$

$$\text{Por tanto: } (-1, -9) = 2(-2, 3) - 3(-1, 5)$$

$$\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$$

4. Consideramos los vectores $\vec{u}(0, 2)$ y $\vec{v}(1, \sqrt{3})$. Calcula:

a) Su producto escalar.

b) El módulo de ambos vectores.

c) El ángulo que forman.

$$a) \vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 2) \cdot (1, \sqrt{3}) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$b) |\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

$$c) \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ$$

5. Sea $\vec{u}(-3, k)$, calcula k de forma que:

a) \vec{u} sea ortogonal a $\vec{v}(4, -6)$.

b) El módulo de \vec{u} sea igual a 5.

a) El producto escalar de dos vectores ortogonales es igual a 0.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, k) \cdot (4, -6) = -12 - 6k = 0 \rightarrow k = -2$$

$$b) |\vec{u}| = \sqrt{9 + k^2} = 5 \rightarrow 9 + k^2 = 25 \rightarrow k = \pm 4$$

6. Determina las coordenadas de un vector $\vec{a}(x, y)$ que forme con el vector $\vec{v}(-1, 0)$ un ángulo de 60° y cuyo módulo sea 2.

$$\cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{v})}) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-x}{2 \cdot 1} \rightarrow x = -1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + y^2} = 2 \rightarrow 1 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

Hay dos soluciones para el vector \vec{a} : $\begin{cases} \vec{a}(-1, \sqrt{3}) \\ \vec{a}(-1, -\sqrt{3}) \end{cases}$

7. Obtén un vector $\vec{u}(x, y)$ ortogonal a $\vec{v}(8, 6)$ y cuyo módulo sea la mitad del de \vec{v} .

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad |\vec{v}| = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$(x, y) \cdot (8, 6) = 8x + 6y = 0$$

$$|\vec{u}| = \frac{1}{2} |\vec{v}| \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 8x + 6y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -\frac{3}{4}y \\ \frac{9}{16}y^2 + y^2 = 25 \rightarrow \frac{25}{16}y^2 = 25 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4 \end{array}$$

$$y = 4 \rightarrow x = -3$$

$$y = -4 \rightarrow x = 3$$

Hay dos soluciones para \vec{u} : $\vec{u}(-3, 4)$; $\vec{u}(3, -4)$

- 8. Calcula la proyección de \vec{v} sobre \vec{u} , siendo $\vec{u}(2, 0)$ y $\vec{v}(-3, -1)$.**

$$\text{proy}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{-6 + 0}{2} = -3$$

- 9. Sean \vec{a} y \vec{b} dos vectores unitarios que forman un ángulo de 120° .**

Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \\ &= 1 - 1 + 1 = 1 \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \\ &= 1 + 1 + 1 = 3 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3} \end{aligned}$$