

NÚMEROS REALES

Página 27

REFLEXIONA Y RESUELVE

El paso de \mathbb{Z} a \mathbb{Q}

■ Di cuáles de las siguientes ecuaciones se pueden resolver en \mathbb{Z} y para cuáles es necesario el conjunto de los números racionales, \mathbb{Q} .

a) $-5x = 60$

b) $-7x = 22$

c) $2x + 1 = 15$

d) $6x - 2 = 10$

e) $-3x - 3 = 1$

f) $-x + 7 = 6$

Se pueden resolver en \mathbb{Z} a), c), d) y f).

Hay que recurrir a \mathbb{Q} para resolver b) y e).

El paso de \mathbb{Q} a \mathbb{R}

■ Resuelve, ahora, las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 9 = 0$

b) $5x^2 - 15 = 0$

c) $x^2 - 3x - 4 = 0$

d) $2x^2 - 5x + 1 = 0$

e) $7x^2 - 7x = 0$

f) $2x^2 + 3x = 0$

a) $x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$

b) $5x^2 - 15 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

c) $x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

d) $2x^2 - 5x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 8}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4} = \begin{cases} \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \\ \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}$

e) $7x^2 - 7x = 0 \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x = 0, x = 1$

f) $2x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(2x + 3) = 0 \rightarrow x = 0, x = -\frac{3}{2}$

Números irracionales

- **Demuestra que $\sqrt{2}$ es irracional. Para ello, supón que no lo es: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Eleva al cuadrado y llega a una contradicción.**

Supongamos que $\sqrt{2}$ no es irracional. Entonces, se podría poner en forma de fracción:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \rightarrow p^2 = 2q^2$$

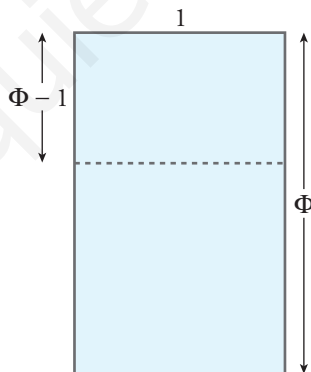
En p^2 , el factor 2 está un número par de veces (es decir, en la descomposición de factores primos de p^2 , el exponente de 2 es par). Lo mismo ocurre con q^2 . Por tanto, en $2q^2$ el exponente de 2 es un número impar. De ser así, no se podría cumplir la igualdad.

Suponiendo que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ llegamos a una contradicción:

$$"p^2 = 2q^2, \text{ pero } p^2 \text{ no puede ser igual a } 2q^2".$$

Por tanto, $\sqrt{2}$ no puede ponerse en forma de fracción. No es racional.

- **Obtén el valor de Φ teniendo en cuenta que un rectángulo de dimensiones $\Phi : 1$ es semejante al rectángulo que resulta de suprimirle un cuadrado.**



$$\frac{\Phi}{1} = \frac{1}{\Phi - 1} \rightarrow \Phi(\Phi - 1) = 1 \rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

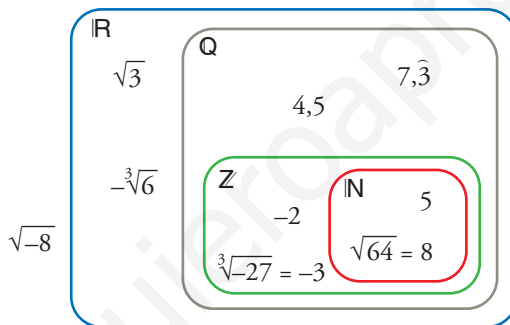
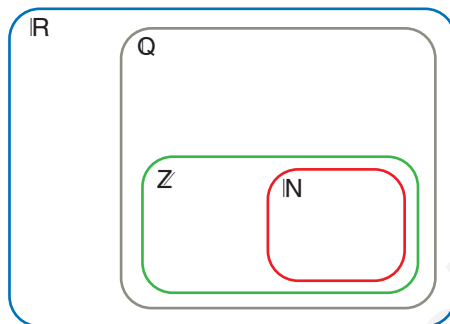
$$\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (negativo)} \end{cases}$$

Como Φ ha de ser positivo, la única solución válida es $\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

Página 28

1. Sitúa los siguientes números en el diagrama:

$$\sqrt{3}; 5; -2; 4,5; 7,\bar{3}; -\sqrt[3]{6}; \sqrt{64}; \sqrt[3]{-27}; \sqrt{-8}$$



2. Sitúa los números del ejercicio anterior en los siguientes casilleros. Cada número puede estar en más de una casilla.

| | |
|--------------------------|--|
| NATURALES, \mathbb{N} | |
| ENTEROS, \mathbb{Z} | |
| RACIONALES, \mathbb{Q} | |
| REALES, \mathbb{R} | |
| NO REALES | |

Añade un número más (de tu cosecha) en cada casilla.

| | |
|--------------------------|---|
| NATURALES, \mathbb{N} | $5; \sqrt{64}$ |
| ENTEROS, \mathbb{Z} | $5; -2; \sqrt{64}; \sqrt[3]{-27}$ |
| RACIONALES, \mathbb{Q} | $5; -2; 4,5; 7,\bar{3}; \sqrt[3]{-27}; \sqrt{64}$ |
| REALES, \mathbb{R} | $\sqrt{3}; 5; -2; 4,5; 7,\bar{3}; -\sqrt[3]{6}; \sqrt{64}; \sqrt[3]{-27}$ |
| NO REALES | $\sqrt{-8}$ |

Página 29

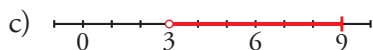
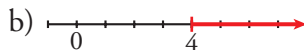
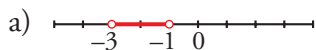
3. Representa los siguientes conjuntos:

a) $(-3, -1)$

b) $[4, +\infty)$

c) $(3, 9]$

d) $(-\infty, 0)$



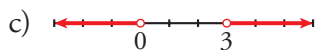
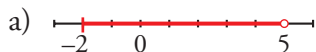
4. Representa los siguientes conjuntos:

a) $\{x / -2 \leq x < 5\}$

b) $[-2, 5) \cup (5, 7]$

c) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

d) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



Página 30

1. Halla los siguientes valores absolutos:

a) $|-11|$

b) $|\pi|$

c) $|-\sqrt{5}|$

d) $|0|$

e) $|3 - \pi|$

f) $|3 - \sqrt{2}|$

g) $|1 - \sqrt{2}|$

h) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}|$

i) $|7 - \sqrt{50}|$

a) 11

b) π

c) $\sqrt{5}$

d) 0

e) $|3 - \pi| = \pi - 3$

f) $|3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$

g) $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

h) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

i) $|7 - \sqrt{50}| = \sqrt{50} - 7$

2. Averigua para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones:

a) $|x| = 5$

b) $|x| \leq 5$

c) $|x - 4| = 2$

d) $|x - 4| \leq 2$

e) $|x - 4| > 2$

f) $|x + 4| > 5$

a) 5 y -5

b) $-5 \leq x \leq 5$; $[-5, 5]$

c) 6 y 2

d) $2 \leq x \leq 6$; $[2, 6]$

e) $x < 2$ o $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

f) $x < -9$ o $x > 1$; $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$

Página 31

1. Simplifica:

a) $\sqrt[12]{x^9}$

b) $\sqrt[12]{x^8}$

c) $\sqrt[3]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$

e) $\sqrt[3]{64}$

f) $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[12]{x^9} = \sqrt[4]{x^3}$

b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2. ¿Cuál es mayor, $\sqrt[4]{31}$ o $\sqrt[3]{13}$?

Reducimos a índice común:

$$\sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{29791}; \quad \sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{28561}$$

Por tanto, es mayor $\sqrt[4]{31}$.

3. Reduce a índice común:

a) $\sqrt[12]{a^5}$ y $\sqrt[18]{a^7}$

b) $\sqrt[3]{51}$ y $\sqrt[2]{132650}$

a) $\sqrt[12]{a^5} = \sqrt[36]{a^{15}}$; $\sqrt[18]{a^7} = \sqrt[36]{a^{14}}$

b) $\sqrt[3]{51} = \sqrt[6]{132651}$; $\sqrt[2]{132650}$

4. Simplifica:

a) $(\sqrt{\sqrt{k}})^8$

b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$

c) $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$

a) $(\sqrt[8]{k})^8 = k$

b) $\sqrt[15]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[6]{x^6} = x$

Página 32

5. Reduce:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[2]{2}$

b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{4}$

a) $\sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

d) $\sqrt[12]{8^3} \cdot \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{(2^3)^3 \cdot (2^2)^4} = \sqrt[12]{2^{17}} = 2\sqrt[12]{2^5}$

6. Simplifica:

$$\text{a) } \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}} \quad \text{b) } \frac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt[3]{a \cdot b}} \quad \text{c) } \frac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}} \quad \text{d) } \frac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}}$$

$$\text{a) } \sqrt{\frac{x^3}{x^5}} = \sqrt{\frac{1}{x^2}} = \sqrt{x^{-2}}$$

$$\text{b) } \sqrt[6]{\frac{a^3 b^3}{a^2 b^2}} = \sqrt[6]{a b}$$

$$\text{c) } \sqrt[6]{\frac{a^3}{a^4}} = \sqrt[6]{\frac{1}{a}} = \sqrt[6]{a^{-1}}$$

$$\text{d) } \sqrt[4]{\frac{a^3 b^5 c}{a^2 b^6 c^6}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b c^5}} = \frac{1}{c} \sqrt[4]{\frac{a}{b c}}$$

7. Reduce:

$$\text{a) } \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}} \quad \text{b) } \frac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}} \quad \text{c) } \frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}} \quad \text{d) } \frac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{a) } \sqrt{\frac{3^4}{3^3}} = \sqrt{3}$$

$$\text{b) } \sqrt[6]{\frac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$$

$$\text{c) } \sqrt[10]{\frac{2^8}{2^5}} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}$$

$$\text{d) } \sqrt[4]{\frac{3^6}{3^2}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

8. Suma y simplifica:

$$\text{a) } 5\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$$

$$\text{b) } \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{2}$$

$$\text{c) } \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$$

$$\text{d) } \sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$$

$$\text{e) } \sqrt{50a} - \sqrt{18a}$$

$$\text{a) } 10\sqrt{x}$$

$$\text{b) } 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} &= \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} = \\ &= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \sqrt{3^3} - \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^3} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$$

$$\text{e) } \sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot a} - \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot a} = 5\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = 2\sqrt{2a}$$

Página 33

9. Racionaliza denominadores y simplifica cuando puedas:

a) $\frac{5}{\sqrt{7}}$

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

c) $\sqrt{\frac{7}{3}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\frac{3}{\sqrt{50}}$

f) $\frac{4}{\sqrt{18}}$

g) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}}$

h) $\frac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\frac{3}{\sqrt[3]{36}}$

j) $\frac{2}{\sqrt[3]{100}}$

a) $\frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$

d) $\frac{1}{\sqrt{a^3}} = \frac{1}{a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$

e) $\frac{3}{\sqrt{50}} = \frac{3}{\sqrt{2 \cdot 5^2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$

f) $\frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{4}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

g) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{5}$

h) $\frac{1}{\sqrt[3]{40}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{10} = \frac{\sqrt[3]{25}}{10}$

i) $\frac{3}{\sqrt[3]{36}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{3\sqrt[3]{6}}{6} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}$

j) $\frac{2}{\sqrt[3]{100}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2 \cdot 5}}{2 \cdot 5} = \frac{2\sqrt[3]{10}}{10} = \frac{\sqrt[3]{10}}{5}$

10. Racionaliza denominadores y simplifica cuando puedas:

a) $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

b) $\frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

c) $\frac{a - 1}{\sqrt{a} - 1}$

d) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

e) $\frac{1}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}$

f) $\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$

g) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

h) $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

a) $\frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1$

b) $\frac{(x + y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{(x + y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y} = \frac{x\sqrt{x} - x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x - y}$

c) $\frac{(a - 1)(\sqrt{a} + 1)}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} = \frac{(a - 1)(\sqrt{a} + 1)}{(a - 1)} = \sqrt{a} + 1$

d) $\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{x + y + 2\sqrt{xy}}{x - y}$

e) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{(2\sqrt{3} - \sqrt{5})(2\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{12 - 5} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{7}$

f) $\frac{(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2}{18 - 12} = \frac{18 + 12 + 12\sqrt{6}}{6} = \frac{30 + 12\sqrt{6}}{6} = 5 + 2\sqrt{6}$

g) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} + 1}{1} + \frac{\sqrt{2} - 1}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

h) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} = \frac{2\sqrt{x}}{x - y}$

Página 36

1. Halla:

a) $\log_2 16$

b) $\log_2 0,25$

c) $\log_9 1$

d) $\log_{10} 0,1$

e) $\log_4 64$

f) $\log_7 49$

g) $\ln e^4$

h) $\ln e^{-1/4}$

i) $\log_5 0,04$

j) $\log_6 \left(\frac{1}{216} \right)$

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

c) $\log_9 1 = 0$

e) $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$

g) $\ln e^4 = 4$

i) $\log_5 0,04 = \log_5 5^{-2} = -2$

b) $\log_2 0,25 = \log_2 2^{-2} = -2$

d) $\log_{10} 0,1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$

f) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$

h) $\ln e^{-1/4} = -\frac{1}{4}$

j) $\log_6 \left(\frac{1}{216} \right) = \log_6 6^{-3} = -3$

2. Halla la parte entera de:

a) $\log_2 60$

b) $\log_5 700$

c) $\log_{10} 43\,000$

d) $\log_{10} 0,084$

e) $\log_9 60$

f) $\ln e$

a) $2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $32 < 60 < 64$

$5 < \log_2 60 < 6 \rightarrow \log_2 60 = 5, \dots$

b) $5^4 = 625$; $5^5 = 3125$; $625 < 700 < 3125$

$4 < \log_5 700 < 5 \rightarrow \log_5 700 = 4, \dots$

c) $10^4 = 10\,000$; $10^5 = 100\,000$; $10\,000 < 43\,000 < 100\,000$

$4 < \log_{10} 43\,000 < 5 \rightarrow \log_{10} 43\,000 = 4, \dots$

d) $10^{-2} = 0,01$; $10^{-1} = 0,1$; $0,01 < 0,084 < 0,1$

$-2 < \log_{10} 0,084 < -1 \rightarrow \log_{10} 0,084 = -1, \dots$

e) $9^1 = 9$; $9^2 = 81$; $9 < 60 < 81$

$1 < \log_9 60 < 2 \rightarrow \log_9 60 = 1, \dots$

f) $\ln e = 1$

3. Aplica la propiedad (8) para obtener los siguientes logaritmos con la ayuda de la calculadora:

a) $\log_2 1\,500$

b) $\log_5 200$

c) $\log_{100} 200$

d) $\log_{100} 40$

En cada caso, comprueba el resultado utilizando la potenciación.

a) $\frac{\log 1500}{\log 2} = 10,55$; $2^{10,55} \approx 1500$

b) $\frac{\log 200}{\log 5} = 3,29$; $5^{3,29} \approx 200$

c) $\frac{\log 200}{\log 100} = 1,15$; $100^{1,15} \approx 200$

d) $\frac{\log 40}{\log 100} = 0,80$; $100^{0,80} \approx 40$

4. Sabiendo que $\log_5 A = 1,8$ y $\log_5 B = 2,4$, calcula:

a) $\log_5 \sqrt[3]{\frac{A^2}{25B}}$

b) $\log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$

a) $\log_5 \sqrt[3]{\frac{A^2}{25B}} = \frac{1}{3} [2 \log_5 A - \log_5 25 - \log_5 B] = \frac{1}{3} [2 \cdot 1,8 - 2 - 2,4] = \frac{-0,8}{3} \approx -0,27$

b) $\log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = \log_5 5 + \frac{3}{2} \log_5 A - 2 \log_5 B = 1 + \frac{3}{2} \cdot 1,8 - 2 \cdot 2,4 = 1 + 2,7 - 4,8 = -1,1$

5. Averigua la relación que hay entre x e y , sabiendo que se verifica:

$$\ln y = 2x - \ln 5$$

$$\ln y = 2x - \ln 5 \rightarrow \ln y = \ln e^{2x} - \ln 5$$

$$\ln y = \ln \frac{e^{2x}}{5} \rightarrow y = \frac{e^{2x}}{5}$$

Página 38

1. Di una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes mediciones:

a) La superficie de esta casa es de $96,4 \text{ m}^2$.

b) Por la gripe se han perdido 37 millones de horas de trabajo.

c) Juana gana 19 000 € al año.

a) $|\text{Error absoluto}| < 0,05 \text{ m}^2$

$$|\text{Error relativo}| < \frac{0,05}{96,4} < 0,00052 = 0,052\%$$

b) $|\text{Error absoluto}| < 0,5 \text{ millones de horas} = 500\,000 \text{ horas}$

$$|\text{Error relativo}| < \frac{0,5}{37} < 0,014 = 1,4\%$$

c) — Si suponemos que los tres ceros finales se han utilizado para poder expresar la cantidad (es decir, que se trata de 19 mil €, redondeando a los “miles de euros”), entonces:

$$|\text{E.A.}| < 0,5 \text{ miles de } \text{€} = 500 \text{ €} \quad |\text{E.R.}| < \frac{0,5}{19} < 0,027 = 2,7\%$$

— Si suponemos que es 19 000 € exactamente:

$$|\text{E.A.}| < 0,5 \text{ €} \quad |\text{E.R.}| < \frac{0,5}{19\,000} < 0,000027 = 0,0027\%$$

Página 39

2. Calcula en notación científica sin usar la calculadora:

a) $(800\,000 : 0,0002) \cdot 0,5 \cdot 10^{12}$

b) $0,486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7}$

$$\begin{aligned} \text{a) } (800\,000 : 0,0002) \cdot 0,5 \cdot 10^{12} &= ((8 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^{-4})) \cdot 5 \cdot 10^{11} = \\ &= (4 \cdot 10^9) \cdot 5 \cdot 10^{11} = 20 \cdot 10^{20} = 2 \cdot 10^{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 0,486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7} &= 48,6 \cdot 10^{-7} + 0,93 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-7} = \\ &= 43,53 \cdot 10^{-7} = 4,353 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

3. Opera con la calculadora:

a) $(3,87 \cdot 10^{15} \cdot 5,96 \cdot 10^{-9}) : (3,941 \cdot 10^{-6})$

b) $8,93 \cdot 10^{-10} + 7,64 \cdot 10^{-10} - 1,42 \cdot 10^{-9}$

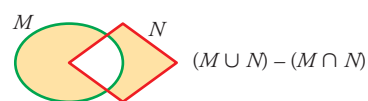
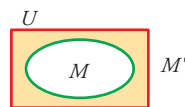
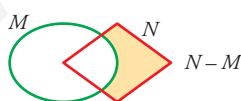
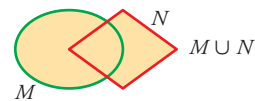
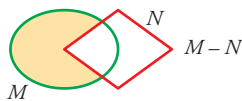
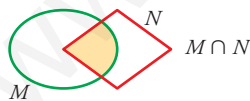
a) $(3,87 \cdot 10^{15} \cdot 5,96 \cdot 10^{-9}) : (3,941 \cdot 10^{-6}) \approx 5,85 \cdot 10^{12}$

b) $8,93 \cdot 10^{-10} + 7,64 \cdot 10^{-10} - 1,42 \cdot 10^{-9} = 2,37 \cdot 10^{-10}$

Página 41

LENGUAJE MATEMÁTICO

1. Da nombre al conjunto sombreado en cada caso:



2. Expresa simbólicamente estas relaciones:

a) 13 es un número natural.

b) -4 es un número entero.

c) $0,43$ es un número racional.

- d) π es un número real.
- e) Todos los enteros son racionales.
- f) El intervalo $[3, 4]$ está formado por números reales.

- a) $13 \in \mathbb{N}$
- b) $-4 \in \mathbb{Z}$
- c) $0,43 \in \mathbb{Q}$
- d) $\pi \in \mathbb{R}$
- e) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
- f) $[3, 4] \subset \mathbb{R}$

3. Designa simbólicamente estos conjuntos:

a) Los números enteros mayores que -5 y menores que 7 (utiliza \mathbb{Z} y el intervalo abierto $(-5, 7)$).

b) Los números irracionales (utiliza \mathbb{R} y \mathbb{Q}).

c) Los números racionales mayores que 2 y menores o iguales que 3 .

d) Los números que son múltiplos de 2 o de 3 (el conjunto de los múltiplos de p se designa \dot{p}).

- a) $\{x \in \mathbb{Z} / x \in (-5, 7)\}$
- b) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$
- c) $\{x \in \mathbb{Q} / 2 < x \leq 3\}$
- d) $\{x / x = \dot{2} \text{ o } x = \dot{3}\}$

4. Traduce:

a) $\{x \in \mathbb{Z} / x \geq -4\}$

b) $\{x \in \mathbb{N} / x > 5\}$

c) $\{x \in \mathbb{N} / 1 < x \leq 9\}$

d) $\{x \in \mathbb{Z} / -2 \leq x < 7\}$

- a) Números enteros mayores o iguales que -4 .
- b) Números naturales mayores que 5 .
- c) Números naturales mayores que 1 y menores o iguales que 9 .
- d) Números enteros mayores o iguales que -2 y menores que 7 .

5. ¿Cuáles son los números que forman el conjunto $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$?

Todos los irracionales comprendidos en el intervalo $(0, 1)$.

Página 45

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Números racionales e irracionales

- 1 Expresa como fracción cada decimal y opera:

$$0,1\overline{2} - 5,6\overline{6} - 0,2\overline{3} + 3,1$$

• Recuerda que $5,6\overline{6} = \frac{56-5}{9}$; $0,2\overline{3} = \frac{23-2}{90}$.

$$\frac{12}{99} - \frac{51}{9} - \frac{21}{90} + \frac{31}{10} = -\frac{442}{165} = -2,6\overline{78}$$

- 2 Demuestra que el producto $4,0\overline{9} \cdot 1,3\overline{9}$ es un decimal exacto.

• Comprueba, pasando a fracción, que los dos factores son decimales exactos.

$$4,0\overline{9} = \frac{409-40}{90} = \frac{369}{90} = 4,1 \quad 1,3\overline{9} = \frac{139-13}{90} = \frac{126}{90} = 1,4$$

$$4,0\overline{9} \cdot 1,3\overline{9} = 4,1 \cdot 1,4 = 5,74$$

- 3 Calcula: a) $\sqrt{1,7}$ b) $\sqrt{\frac{1,3}{3}}$

$$\text{a) } \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} = 1,3\overline{3} \quad \text{b) } \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = 0,6\overline{6}$$

- 4 Indica cuál, de cada par de números, es mayor:

a) $\frac{140}{99}$ y $\sqrt{2}$

b) $0,52\overline{6}$ y $0,5\overline{26}$

c) $4,8\overline{9}$ y $2\sqrt{6}$

d) $-2,098$ y $-2,1$

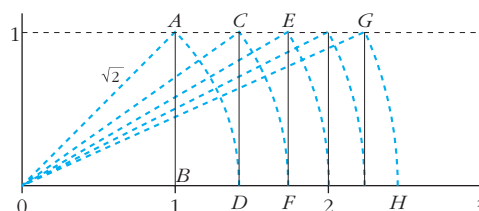
a) $\sqrt{2}$

b) $0,52\overline{6}$

c) $4,8\overline{9}$

d) $-2,098$

- 5 Observa cómo hemos representado algunos números irracionales:

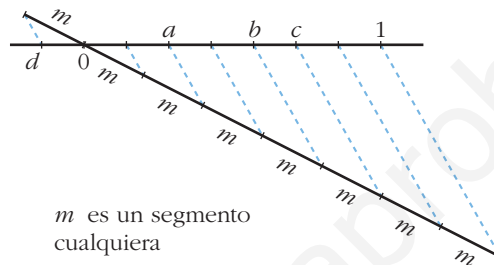


En el triángulo OAB , $\overline{OB} = 1$, $\overline{AB} = 1$ y $\overline{OA} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Por tanto, el punto D representa a $\sqrt{2}$. ¿Qué números representan los puntos F y H ? Justifica tu respuesta.

F representa $\sqrt{3}$, pues $\overline{OF} = \overline{OC} = \sqrt{\overline{OD}^2 + \overline{DC}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

H representa $\sqrt{6}$, pues $\overline{OH} = \overline{OG} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

- 6 ¿Cuáles son los números racionales a, b, c, d representados en este gráfico?



$$a = \frac{2}{7} \quad b = \frac{4}{7} \quad c = \frac{5}{7} \quad d = -\frac{1}{7}$$

Potencias

- 7 Halla sin calculadora: $\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{9}\right)^{-1} + 4$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)^{-1} + 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + 4 = -4 + 4 = 0$$

- 8 Simplifica, utilizando las propiedades de las potencias:

a) $\frac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{9^3 \cdot 4^3 \cdot 5}$

b) $\frac{3^4 \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{5^{-1} \cdot 3^5}$

c) $\frac{15^2 \cdot 8^{-1}}{6^3 \cdot 10^2}$

d) $\frac{a^{-3} b^{-4} c^7}{a^{-5} b^2 c^{-1}}$

• Mira el problema resuelto número 2 c).

a) $\frac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{3^6 \cdot 2^6 \cdot 5} = \frac{5}{2}$

b) $\frac{3^4 \cdot 2^4 \cdot 3^{-2}}{5^{-1} \cdot 3^5} = \frac{2^4 \cdot 5}{3^3} = \frac{80}{27}$

c) $\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{-3}}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = \frac{1}{2^8 \cdot 3} = \frac{1}{768}$

d) $\frac{c^7 a^5 c}{a^3 b^4 b^2} = \frac{a^2 c^8}{b^6}$

9 Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario y simplifica:

a) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a}$

b) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$

c) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

a) $a^{2/5} \cdot a^{1/2} = a^{9/10} = \sqrt[10]{a^9}$

b) $\frac{x^{2/3}}{x^{1/2}} = x^{1/6} = \sqrt[6]{x}$

c) $a^{-3/4} = \sqrt[4]{a^{-3}}$

10 Resuelve, sin utilizar la calculadora:

a) $\sqrt[5]{32}$

b) $\sqrt[3]{343}$

c) $\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt{0,25}$

e) $\sqrt[3]{8^4}$

f) $\sqrt[3]{0,001}$

a) $\sqrt[5]{2^5} = 2$

b) $\sqrt[3]{7^3} = 7$

c) $\sqrt[4]{5^4} = 5$

d) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0,5$

e) $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = 16$

f) $\sqrt[3]{0,1^3} = 0,1$

11 Expresa como una potencia de base 2:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $(-32)^{1/5}$

c) $(\sqrt[8]{2})^4$

a) $2^{-1/2}$

b) $(-2^5)^{1/5} = -2$

c) $2^{4/8} = 2^{1/2}$

12 Calcula utilizando potencias de base 2, 3 y 5:

a) $4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{8}$

c) $\frac{(-5)^3 (-8)^3 (-9)^2}{15^2 \cdot 20^4}$

d) $\frac{(-30)^{-1} \cdot 15^2}{10^3}$

a) $2^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(-3)^3}{2^3} = \frac{-3^2}{2} = \frac{-9}{2}$

b) $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{3^2}{2} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{3^2}{2^8} = \frac{9}{256}$

c) $\frac{(-5)^3 \cdot (-2^3)^3 \cdot (-3^2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2 \cdot 5)^4} = \frac{5^3 \cdot 2^9 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^8 \cdot 5^4} = \frac{2 \cdot 3^2}{5^3} = \frac{18}{125}$

d) $\frac{3^2 \cdot 5^2}{-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 5^3} = -\frac{3}{5^2 \cdot 2^4} = \frac{-3}{400}$

13 Expresa en forma de potencia, efectúa las operaciones y simplifica:

a) $\frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}}{a\sqrt{a}}$

b) $16^{1/4} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{4}}$

a) $\frac{a^{3/4} \cdot a^{-1}}{a \cdot a^{1/2}} = a^{-7/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^7}}$

b) $(2^4)^{1/4} \cdot (2^2)^{-1/3} \cdot (2^2)^{-1/6} = 2 \cdot 2^{-2/3} \cdot 2^{-1/3} = 2^0 = 1$

14 Justifica las igualdades que son verdaderas. Escribe el resultado correcto en las falsas:

a) $\frac{a^2 \cdot b^{-2}}{a^{-2} \cdot b^2} = 1$

b) $(3^{-2})^{-3} \left(\frac{1}{27}\right)^2 = 1$

c) $\frac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}} = \frac{8}{15}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = \frac{80}{9}$

a) Falsa. $\frac{a^2 \cdot b^{-2}}{a^{-2} \cdot b^2} = \frac{a^4}{b^4}$

b) Verdadera. $(3^{-2})^{-3} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 = 3^6 \cdot \left(\frac{1}{3^3}\right)^2 = 3^6 \cdot \frac{1}{3^6} = \frac{3^6}{3^6} = 1$

c) Verdadera. $\frac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}} = \frac{(1/3^2) - (1/5^2)}{1/3 - 1/5} = \frac{(1/3 - 1/5)(1/3 + 1/5)}{(1/3 - 1/5)} =$
 $= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$

d) Verdadera. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = 3^2 - \frac{1}{(-3)^2} = 3^2 - \frac{1}{3^2} = 9 - \frac{1}{9} = \frac{81 - 1}{9} = \frac{80}{9}$

15 Demuestra, utilizando potencias, que:

a) $(0,125)^{1/3} = 2^{-1}$

b) $(0,25)^{-1/2} = 2$

a) $(0,125)^{1/3} = \left(\frac{125}{1000}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{2^3}\right)^{1/3} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

b) $(0,25)^{-1/2} = \left(\frac{25}{100}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{-1/2} = (2^2)^{1/2} = 2$

Página 46

Radicales

16 Introduce los factores dentro de cada raíz:

a) $2\sqrt[3]{3}$ b) $4\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ c) $\frac{2}{x}\sqrt{\frac{3x}{8}}$

d) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{25}{9}}$ e) $2\sqrt[4]{4}$ f) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

a) $\sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$ b) $\sqrt[3]{\frac{4^3}{4}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{\frac{2^2 \cdot 3x}{x^2 \cdot 2^3}} = \sqrt{\frac{3}{2x}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 3^2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

e) $\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$ f) $\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5}{5^3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{25}}$

17 Sacas de la raíz el factor que puedas:

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $4\sqrt{8}$ c) $\sqrt{1000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$ e) $\sqrt{\frac{125a^2}{16b}}$ f) $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}$

g) $\sqrt{\frac{16}{a^3}}$ h) $\sqrt{4a^2 + 4}$ i) $\sqrt{\frac{a}{9} + \frac{a}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$ b) $4\sqrt{2^3} = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2^3 \cdot 5^3} = 10\sqrt{10}$

d) $\sqrt[3]{2^3 \cdot a^5} = 2a\sqrt[3]{a^2}$ e) $\sqrt{\frac{5^3 \cdot a^2}{2^4 \cdot b}} = \frac{5a}{4}\sqrt{\frac{5}{b}}$ f) $\sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{13}$

g) $\frac{4}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}$ h) $\sqrt{4(a^2 + 1)} = 2\sqrt{a^2 + 1}$ i) $\sqrt{\frac{25a}{16 \cdot 9}} = \frac{5\sqrt{a}}{12}$

18 Simplifica:

a) $\sqrt[6]{0,027}$ b) $\sqrt[8]{0,0016}$ c) $\sqrt[4]{1 + \frac{9}{16}}$

a) $\sqrt[6]{\frac{27}{1000}} = \sqrt[6]{\frac{3^3}{10^3}} = \sqrt[6]{\left(\frac{3}{10}\right)^3} = \left(\frac{3}{10}\right)^{3/6} = \left(\frac{3}{10}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{10}}$

b) $\sqrt[8]{\frac{16}{10000}} = \sqrt[8]{\frac{2^4}{10^4}} = \sqrt[8]{\left(\frac{2}{10}\right)^4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{4/8} = \left(\frac{1}{5}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{5}}$

c) $\sqrt[4]{\frac{25}{16}} = \sqrt[4]{\frac{5^2}{4^2}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{2/4} = \left(\frac{5}{4}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

19 Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[6]{27}$

c) $\sqrt[3]{-108}$

d) $\sqrt[12]{64y^3}$

e) $\sqrt[4]{\frac{81}{64}}$

f) $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$

a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2 \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{3^3} = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

c) $-\sqrt[3]{3^3 \cdot 2^2} = -3 \sqrt[3]{2^2}$

d) $\sqrt[12]{2^6 \cdot y^3} = \sqrt[4]{2^2 \cdot y} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{y}$

e) $\sqrt[4]{\frac{3^4}{2^6}} = \frac{3}{\sqrt{2^3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

f) $\sqrt[8]{5^4} : \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} : \sqrt{5} = 1$

20 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor:

a) $\sqrt[4]{4}, \sqrt[3]{3}, \sqrt{2}$

b) $\sqrt{6}, \sqrt[3]{4}, \sqrt{2}$

c) $\sqrt[4]{6}, \sqrt[3]{10}$

d) $\sqrt[4]{72}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[6]{100}$

a) $\sqrt[12]{64}, \sqrt[12]{81}, \sqrt[12]{64}; \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{216}, \sqrt[6]{16}; \sqrt[3]{4} < \sqrt{6}$

c) $\sqrt[20]{7776}, \sqrt[20]{10000}; \sqrt[4]{6} < \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[12]{373248}, \sqrt[12]{6561}, \sqrt[12]{10000}; \sqrt[3]{9} < \sqrt[6]{100} < \sqrt[4]{72}$

21 Realiza la operación y simplifica, si es posible:

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27}{8}}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}$

d) $(\sqrt[3]{12})^2$

e) $(\sqrt[6]{32})^3$

f) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

a) $20\sqrt{27 \cdot 6} = 20\sqrt{3^3 \cdot 2 \cdot 3} = 20\sqrt{2 \cdot 3^4} = 180\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{\frac{4 \cdot 27}{3 \cdot 8}} = 2\sqrt{\frac{9}{2}} = 6\sqrt{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

d) $(\sqrt[3]{2^2 \cdot 3})^2 = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{18}$

e) $(\sqrt[6]{2^5})^3 = \sqrt[6]{2^{15}} = \sqrt{2^5} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

f) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} : \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{3} = 2$

22 Efectúa y simplifica, si es posible:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt{a}$

c) $\left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$

d) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} : \sqrt[3]{\sqrt{4}}$

En b) y c) puedes expresar los radicales como potencias de bases a y 2 , respectivamente.

a) $\sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{108}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}$

c) $\left(\sqrt[6]{\frac{2^5}{2^9}}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2^4}}\right)^3 = \sqrt[6]{\frac{1}{2^{12}}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 3}} : \sqrt[3]{\sqrt{2^2}} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3} : \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3}$

23 Expresa con una única raíz:

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$

b) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$

c) $(\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^4}) : \sqrt{a}$

a) $\sqrt[12]{4} = \sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[12]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128}$

c) $\sqrt[20]{\frac{a^{15} \cdot a^{16}}{a^{10}}} = \sqrt[20]{a^{21}} = a \sqrt[20]{a}$

24 Racionaliza los denominadores y simplifica:

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$

b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{3}{3+\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{72} + 3\sqrt{32} - \sqrt{8}}{\sqrt{8}}$

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot 3^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{2\sqrt[3]{2^2}}{2} = \sqrt[3]{4}$

c) $\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{3(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{9-3\sqrt{3}}{6} = \frac{3(3-\sqrt{3})}{2 \cdot 3} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2^3} \cdot 3^2 + 3\sqrt{2^5} - \sqrt{2^3}}{\sqrt{2^3}} = \frac{3\sqrt{8} + 6\sqrt{8} - \sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{8\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = 8$

25 Calcula y simplifica:

a) $5\sqrt{125} + 6\sqrt{45} - 7\sqrt{20} + \frac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54} - \frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $\sqrt{125} + \sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24}$

d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$

a) $25\sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 14\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 35\sqrt{5}$

b) $2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - 21\sqrt[3]{2} = -20\sqrt[3]{2}$

c) $5\sqrt{5} + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{5} + \sqrt{6}$

d) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

26 Simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{250} + 5\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{18}{125}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{45}}$

c) $7\sqrt[3]{81a} - 2\sqrt[3]{3a^4} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $3\sqrt[3]{2^4} - 2\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} + 5\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - 4\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} + 15\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = 7\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{2 \cdot 3^2}{5^3}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2^3}{3^2 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{2}{5}} - \frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{-53}{45}\sqrt{\frac{2}{5}}$

c) $7\sqrt[3]{3^4 \cdot a} - 2\sqrt[3]{3a^4} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = 21\sqrt[3]{3a} - 2a\sqrt[3]{3a} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = \left(\frac{106}{5} - 2a\right)\sqrt[3]{3a}$

27 Efectúa y simplifica:

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

b) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})2\sqrt{2}$

c) $(\sqrt{5} - \sqrt{6})(\sqrt{5} + \sqrt{6})$

d) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2$

e) $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)\sqrt{3}$

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{12} + 2\sqrt{10} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{10}$

c) $5 - 6 = -1$

d) $20 + 18 - 12\sqrt{10} = 38 - 12\sqrt{10}$

e) $(2 - 1)\sqrt{3} = \sqrt{3}$

28 Racionaliza y simplifica:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}} & \text{b)} \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}} & \text{c)} \frac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})} \\ \text{d)} \frac{3}{\sqrt{5}-2} & \text{e)} \frac{11}{2\sqrt{5}+3} & \text{f)} \frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 3^2} &= \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}-2}{3 \cdot 2} = \\ &= \frac{2(\sqrt{6}-1)}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}-1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6+\sqrt{6}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{c)} \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2(3-5)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-4} = -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$$

$$\text{d)} \frac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{3(\sqrt{5}+2)}{5-4} = 3(\sqrt{5}+2) = 3\sqrt{5}+6$$

$$\text{e)} \frac{11(2\sqrt{5}-3)}{2(\sqrt{5}+3)(2\sqrt{5}-3)} = \frac{11(2\sqrt{5}-3)}{20-9} = \frac{11(2\sqrt{5}-3)}{11} = 2\sqrt{5}-3$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \frac{(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2)}{(3\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}-2)} &= \frac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{27-4} = \frac{9\sqrt{2} \cdot 3^2 - 4\sqrt{2}}{23} = \\ &= \frac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23} = \frac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

29 Efectúa y simplifica:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} & \text{b)} \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \end{array}$$

$$\text{a)} \frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+5\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2 - (\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} &= \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5} = \\ &= \frac{2\sqrt{7}(-2\sqrt{5})}{2} = -2\sqrt{35} \end{aligned}$$

Notación científica y errores

- 30** Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

a)
$$\frac{(3,12 \cdot 10^{-5} + 7,03 \cdot 10^{-4}) 8,3 \cdot 10^8}{4,32 \cdot 10^3}$$

b)
$$\frac{(12,5 \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^9)(3,5 \cdot 10^{-5} + 185)}{9,2 \cdot 10^6}$$

c)
$$\frac{5,431 \cdot 10^3 - 6,51 \cdot 10^4 + 385 \cdot 10^2}{8,2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}$$

a) $1,41 \cdot 10^2$ | Error absoluto | $< 0,005 \cdot 10^2 = 0,5$

| Error relativo | $< \frac{0,5}{141} < 0,00355$

b) $-1,58 \cdot 10^5$ | Error absoluto | $< 0,005 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^2$

| Error relativo | $< \frac{5 \cdot 10^2}{1,58 \cdot 10^5} < 3,16 \cdot 10^{-3}$

c) $-2,65 \cdot 10^6$ | Error absoluto | $< 0,005 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^3$

| Error relativo | $< \frac{5 \cdot 10^3}{2,65 \cdot 10^6} < 1,89 \cdot 10^{-3}$

- 31** Ordena de mayor a menor los números de cada apartado. Para ello, pasa a notación científica los que no lo estén:

a) $3,27 \cdot 10^{13}$; $85,7 \cdot 10^{12}$; $453 \cdot 10^{11}$

b) $1,19 \cdot 10^{-9}$; $0,05 \cdot 10^{-7}$; $2000 \cdot 10^{-12}$

a) $8,57 \cdot 10^{13} > 4,53 \cdot 10^{13} > 3,27 \cdot 10^{13}$

b) $5 \cdot 10^{-9} > 2 \cdot 10^{-9} > 1,19 \cdot 10^{-9}$

- 32** Efectúa:
$$\frac{2 \cdot 10^{-7} - 3 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^6 + 10^5}$$

$-7,268 \cdot 10^{-12}$

- 33** Expresa en notación científica y calcula:
$$\frac{60\,000^3 \cdot 0,00002^4}{100^2 \cdot 72\,000\,000 \cdot 0,0002^5}$$

$$\frac{(6 \cdot 10^4)^3 \cdot (2 \cdot 10^{-5})^4}{10^4 \cdot 7,2 \cdot 10^7 \cdot (2 \cdot 10^{-4})^5} = 150$$

34 Considera los números:

$$A = 3,2 \cdot 10^7; B = 5,28 \cdot 10^4 \text{ y } C = 2,01 \cdot 10^5$$

Calcula $\frac{B+C}{A}$. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

$$\frac{B+C}{A} = 7,93 \cdot 10^{-3}$$

$$|\text{E.A.}| < 0,005 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-6}$$

$$|\text{E.R.}| < 6,31 \cdot 10^{-4}$$

35 Si $A = 3,24 \cdot 10^6$; $B = 5,1 \cdot 10^{-5}$; $C = 3,8 \cdot 10^{11}$ y $D = 6,2 \cdot 10^{-6}$, calcula $\left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D$. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

$$\left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D = 2,75 \cdot 10^6$$

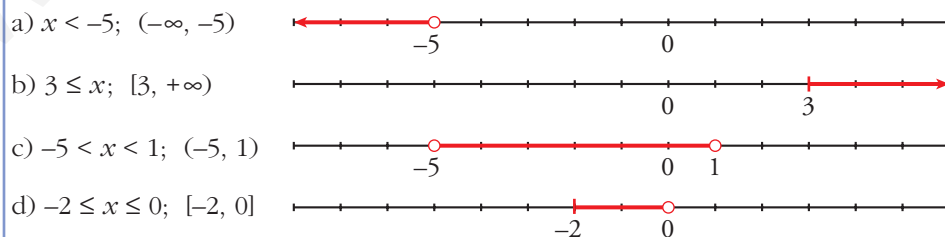
$$|\text{E.A.}| = 0,005 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^3$$

$$|\text{E.R.}| < 1,82 \cdot 10^{-3}$$

Intervalos y valor absoluto

36 Expresa como desigualdad y como intervalo, y represéntalos:

- x es menor que -5 .
- 3 es menor o igual que x .
- x está comprendido entre -5 y 1 .
- x está entre -2 y 0 , ambos incluidos.



37 Representa gráficamente y expresa como intervalos estas desigualdades:

a) $-3 \leq x \leq 2$

b) $5 < x$

c) $x \geq -2$

d) $-2 \leq x < 3/2$

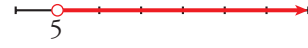
e) $4 < x < 4,1$

f) $-3 \leq x$

a) $[-3, 2]$



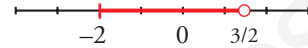
b) $(5, +\infty)$



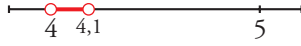
c) $[-2, +\infty)$



d) $[-2, \frac{3}{2})$



e) $(4; 4,1)$



f) $[-3, +\infty)$



38 Escribe la desigualdad que verifica todo número x que pertenece a estos intervalos:

a) $[-2, 7]$

b) $[13, +\infty)$

c) $(-\infty, 0)$

d) $(-3, 0]$

e) $[3/2, 6)$

f) $(0, +\infty)$

a) $-2 \leq x \leq 7$

b) $x \geq 13$

c) $x < 0$

d) $-3 < x \leq 0$

e) $\frac{3}{2} \leq x < 6$

f) $0 < x < +\infty$

39 Expresa como intervalo la parte común de cada pareja de intervalos $(A \cap B)$ e $(I \cap J)$:

a) $A = [-3, 2]$ $B = [0, 5]$

b) $I = [2, +\infty)$ $J = (0, 10)$

a) $[0, 2]$

b) $[2, 10)$

40 Escribe en forma de intervalos los números que verifican estas desigualdades:

a) $x < 3$ o $x \geq 5$

b) $x > 0$ y $x < 4$

c) $x \leq -1$ o $x > 1$

d) $x < 3$ y $x \geq -2$

• Representalos gráficamente, y si son dos intervalos separados, como en a), escribe: $(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$

a) $(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$

b) $(0, 4)$

c) $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

d) $[-2, 3)$

41 Expresa, en forma de intervalo, los números que cumplen cada una de estas expresiones:

a) $|x| < 7$

b) $|x| \geq 5$

c) $|2x| < 8$

d) $|x - 1| \leq 6$

e) $|x + 2| > 9$

f) $|x - 5| \geq 1$

a) $(-7, 7)$

b) $[-\infty, -5] \cup [5, +\infty]$

c) $(-4, 4)$

d) $[-5, 7]$

e) $(-11, 7)$

f) $(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$

42 Averigua qué valores de x cumplen:

- a) $|x - 2| = 5$ b) $|x - 4| \leq 7$ c) $|x + 3| \geq 6$
 a) 7 y -3
 b) $-3 \leq x \leq 11$; $[-3, 11]$
 c) $x \leq -9$ y $x \geq 3$; $(-\infty, -9] \cup [3, +\infty)$

43 Escribe, mediante intervalos, los valores que puede tener x para que se pueda calcular la raíz en cada caso:

- a) $\sqrt{x - 4}$ b) $\sqrt{2x + 1}$ c) $\sqrt{-x}$
 d) $\sqrt{3 - 2x}$ e) $\sqrt{-x - 1}$ f) $\sqrt{1 + \frac{x}{2}}$

- a) $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$; $[4, +\infty)$
 b) $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$; $[-\frac{1}{2}, +\infty)$
 c) $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$; $(-\infty, 0]$
 d) $3 - 2x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq 2x \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$; $(-\infty, \frac{3}{2}]$
 e) $-x - 1 \geq 0 \Rightarrow -1 \geq x$; $(-\infty, -1]$
 f) $1 + \frac{x}{2} \geq 0 \Rightarrow 2 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$; $[-2, +\infty)$

44 Halla la distancia entre los siguientes pares de números:

- a) 7 y 3 b) 5 y 11 c) -3 y -9 d) -3 y 4
 a) $|7 - 3| = 4$
 b) $|11 - 5| = 6$
 c) $|-9 - (-3)| = |-9 + 3| = |-6| = 6$
 d) $|4 - (-3)| = 7$

45 Expresa como un único intervalo:

- a) $(1, 6] \cup [2, 5)$ b) $[-1, 3) \cup (0, 3]$
 c) $(1, 6] \cap [2, 7)$ d) $[-1, 3) \cap (0, 4)$
 a) $(1, 6] \cup [2, 5) = (1, 6]$
 b) $[-1, 3) \cup (0, 3] = [-1, 3]$
 c) $(1, 6] \cap [2, 7) = [2, 6]$
 d) $[-1, 3) \cap (0, 4) = (0, 3)$

Página 48

46 Escribe en forma de intervalo los siguientes entornos:

a) Centro -1 y radio 2

b) Centro $2,5$ y radio $2,01$

c) Centro 2 y radio $1/3$

a) $(-1 - 2, -1 + 2) = (-3, 1)$

b) $(2,5 - 2,01; 2,5 + 2,01) = (0,49; 4,51)$

c) $\left(2 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

47 Describe como entornos los siguientes intervalos:

a) $(-1, 2)$ b) $(1,3; 2,9)$ c) $(-2,2; 0,2)$ d) $(-4; -2,8)$

a) $C = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}$; $R = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Entorno de centro $\frac{1}{2}$ y radio $\frac{3}{2}$.

b) $C = \frac{1,3 + 2,9}{2} = 2,1$; $R = 2,9 - 2,1 = 0,8$

Entorno de centro $2,1$ y radio $0,8$

c) $C = \frac{-2,2 + 0,2}{2} = -1$; $R = 0,2 - (-1) = 1,2$

Entorno de centro -1 y radio $1,2$.

d) $C = \frac{-4 + (-2,8)}{2} = -3,4$; $R = -2,8 - (-3,4) = 0,6$

Entorno de centro $-3,4$ y radio $0,6$.

48 Comprueba si es verdadera o falsa cada una de las siguientes expresiones:

a) $|a| < b$ equivale a $-b < a < b$

b) $|-a| = -|a|$

c) $|a + b| = |a| + |b|$

d) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

a) Verdadera (siempre que $b > 0$).

b) Falsa; pues $|-a| \geq 0$ y $-|a| \leq 0$. (Solo sería cierta para $a = 0$).

c) Falsa. Solo es cierta cuando a y b tienen el mismo signo.

En general, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

d) Verdadera.

Logaritmos

49 Calcula:

a) $\log_2 1024$ b) $\log 0,001$ c) $\log_2 \frac{1}{64}$ d) $\log_{\sqrt{3}} 3$

e) $\log_3 \sqrt{3}$ f) $\log_2 \sqrt{8}$ g) $\log_{1/2} \frac{2}{\sqrt{2}}$ h) $\log_{\pi} 1$

a) $\log_2 2^{10} = 10$ b) $\log 10^{-3} = -3$ c) $\log_2 2^{-6} = -6$

d) $\log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^2 = 2$ e) $\log_3 3^{1/2} = \frac{1}{2}$ f) $\log_2 2^{3/2} = \frac{3}{2}$

g) $\log_{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}$ h) 0

50 Calcula, utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$

b) $\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1$

a) $6 - 2 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

b) $-5 - 3 - 0 = -8$

51 Calcula la base de estos logaritmos:

a) $\log_x 125 = 3$

b) $\log_x \frac{1}{9} = -2$

a) $x^3 = 125$; $x = 5$

b) $x^{-2} = \frac{1}{9}$; $x = 3$

52 Calcula el valor de x en estas igualdades:

a) $\log 3^x = 2$

b) $\log x^2 = -2$

c) $7^x = 115$

d) $5^{-x} = 3$

a) $x = \frac{2}{\log 3} = 4,19$

b) $2 \log x = -2$; $x = \frac{1}{10}$

c) $x = \frac{\log 115}{\log 7} = 2,438$

d) $x = -\frac{\log 3}{\log 5} = -0,683$

53 Halla con la calculadora y comprueba el resultado con la potenciación.

a) $\log \sqrt{148}$ b) $\ln (2,3 \cdot 10^{11})$ c) $\ln (7,2 \cdot 10^{-5})$

d) $\log_3 42,9$ e) $\log_5 1,95$ f) $\log_2 0,034$

a) 1,085

b) $\ln (2,3 \cdot 10^{11}) \approx 26,16 \rightarrow e^{26,161} \approx 2,3 \cdot 10^{11}$

c) $\ln (7,2 \cdot 10^{-5}) \approx -9,54 \rightarrow e^{-9,54} \approx 7,2 \cdot 10^{-5}$

d) $3,42 \rightarrow 3^{3,42} \approx 42,9$

e) $0,41 \rightarrow 5^{0,41} \approx 1,95$

f) $-4,88 \rightarrow 2^{-4,88} \approx 0,034$

54 Calcula la base de cada caso:

a) $\log_x 1/4 = 2$ b) $\log_x 2 = 1/2$ c) $\log_x 0,04 = -2$ d) $\log_x 4 = -1/2$

• Aplica la definición de logaritmo y las propiedades de las potencias para despejar x .

En c), $x^{-2} = 0,04 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{4}{100}$.

a) $x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $x^{1/2} = 2 \rightarrow x = 4$

c) $x^{-2} = 0,04 \rightarrow x = 5$

d) $x^{-1/2} = 4 \rightarrow x = \frac{1}{16}$

55 Halla el valor de x en estas expresiones aplicando las propiedades de los logaritmos:

a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13$

b) $\log x = \log 36 - \log 9$

c) $\ln x = 3 \ln 5$

d) $\log x = \log 12 + \log 25 - 2 \log 6$

e) $\ln x = 4 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 25$

• a) Por logaritmo de un producto: $\ln x = \ln (17 \cdot 13)$

a) $\ln x = \ln (17 \cdot 13) \Rightarrow x = 17 \cdot 13 = 221$

b) $\log x = \log \frac{36}{9} \Rightarrow x = \frac{36}{9} = 4$

c) $\ln x = \ln 5^3 \Rightarrow x = 5^3 = 125$

d) $\log x = \log \frac{12 \cdot 25}{6^2} \Rightarrow x = \frac{25}{3}$

e) $\ln x = \ln 2^4 - \ln \sqrt{25}$

$\ln x = \ln 16 - \ln 5$

$\ln x = \ln \frac{16}{5} \Rightarrow x = \frac{16}{5}$

- 56** Sabiendo que $\log 3 = 0,477$, calcula el logaritmo decimal de 30; 300; 3 000; 0,3; 0,03; 0,003.

$$\log 30 = \log (3 \cdot 10) = \log 3 + \log 10 = 0,477 + 1 = 1,477$$

$$\log 300 = \log (3 \cdot 10^2) = \log 3 + 2 \log 10 = 2,477$$

$$\log 3\,000 = 0,477 + 3 = 3,477$$

$$\log 0,3 = \log (3 \cdot 10^{-1}) = 0,477 - 1 = -0,523$$

$$\log 0,03 = \log (3 \cdot 10^{-2}) = 0,477 - 2 = -1,523$$

$$\log 0,003 = 0,477 - 3 = -2,523$$

- 57** Sabiendo que $\log k = 14,4$, calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log \frac{k}{100}$ b) $\log 0,1 k^2$ c) $\log \sqrt[3]{\frac{1}{k}}$ d) $(\log k)^{1/2}$

a) $\log k - \log 100 = 14,4 - 2 = 12,4$

b) $\log 0,1 + 2 \log k = -1 + 2 \cdot 14,4 = 27,8$

c) $\frac{1}{3} (\log 1 - \log k) = -\frac{1}{3} \cdot 14,4 = -4,8$

d) $(14,4)^{1/2} = \sqrt{14,4} = 3,79$

- 58** Sabiendo que $\ln k = 0,45$, calcula el valor de:

a) $\ln \frac{k}{e}$ b) $\ln \sqrt[3]{k}$ c) $\ln \frac{e^2}{k}$

a) $\ln \frac{k}{e} = \ln k - \ln e = 0,45 - 1 = -0,55$

b) $\ln \sqrt[3]{k} = \frac{1}{3} \ln k = \frac{1}{3} \cdot 0,45 = 0,15$

c) $\ln \frac{e^2}{k} = 2 \ln e - \ln k = 2 - 0,45 = 1,55$

- 59** Calcula x para que se cumpla:

a) $x^{2,7} = 19$ b) $\log_7 3x = 0,5$ c) $3^{2+x} = 172$

a) $\log x^{2,7} = \log 19 \Rightarrow 2,7 \log x = \log 19 \Rightarrow \log x = \frac{\log 19}{2,7} = 0,47$
 $x = 10^{0,47} = 2,98$

b) $7^{0,5} = 3x \Rightarrow x = \frac{7^{0,5}}{3} = 0,88$

c) $\log 3^{2+x} = \log 172 \Rightarrow (2+x) \log 3 = \log 172 \Rightarrow 2+x = \frac{\log 172}{\log 3}$

$$x = \frac{\log 172}{\log 3} - 2 = 2,685$$

60 Si $\log k = x$, escribe en función de x :

a) $\log k^2$

b) $\log \frac{k}{100}$

c) $\log \sqrt{10k}$

a) $2 \log k = 2x$

b) $\log k - \log 100 = x - 2$

c) $\frac{1}{2} \log 10k = \frac{1}{2} (1 + x)$

61 Comprueba que $\frac{\log \frac{1}{a} + \log \sqrt{a}}{\log a^3} = -\frac{1}{6}$ (siendo $a \neq 1$).

$$\frac{-\log a + 1/2 \log a}{3 \log a} = \frac{-1/2 \log a}{3 \log a} = -\frac{1}{6}$$

Ha de ser $a \neq 1$ para que $\log a \neq 0$ y podamos simplificar.

Página 49

CUESTIONES TEÓRICAS

62 Explica si estas frases son verdaderas o falsas:

a) Todo número entero es racional.

b) Hay números irracionales que son enteros.

c) Todo número irracional es real.

d) Todos los números decimales son racionales.

e) Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.

f) Los números racionales llenan la recta.

a) V

b) F

c) V

d) F

e) V

f) F

63 ¿Qué relación existe entre a y b en los siguientes casos?:

a) $\log a = 1 + \log b$

b) $\log a + \log \frac{1}{b} = 0$

a) $\log a - \log b = 1 \rightarrow \log \frac{a}{b} = 1 \rightarrow \frac{a}{b} = 10 \rightarrow a = 10b$

b) $\log \left(a \cdot \frac{1}{b} \right) = 0 \rightarrow \frac{a}{b} = 10^0 \rightarrow \frac{a}{b} = 1 \rightarrow a = b$

64 ¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Explica por qué:

a) $\log m + \log n = \log (m + n)$

b) $\log m - \log n = \frac{\log m}{\log n}$

c) $\log m - \log n = \log \frac{m}{n}$

d) $\log x^2 = \log x + \log x$

e) $\log (a^2 - b^2) = \log (a + b) + \log (a - b)$

a) Falso. $\log m + \log n = \log (m \cdot n) \neq \log (m + n)$

b) Falso. $\log m - \log n = \log \left(\frac{m}{n} \right) \neq \frac{\log m}{\log n}$

c) Verdadero. Por una propiedad de los logaritmos.

d) Verdadero. $\log x^2 = \log (x \cdot x) = \log x + \log x$

e) Verdadero. $\log (a^2 - b^2) = \log [(a + b) \cdot (a - b)] = \log (a + b) + \log (a - b)$

PARA PROFUNDIZAR

65 Si $n \neq 0$ es natural, determina para qué valores de n estos números pertenecen a \mathbb{Z} :

a) $\frac{n}{2}$ b) $\frac{3}{n}$ c) $n - 5$ d) $n + \frac{1}{2}$ e) \sqrt{n}

a) n par.

b) $n = 1$ o $n = 3$.

c) n cualquier natural.

d) Ninguno.

e) n cuadrado perfecto.

66 Di cuál es la parte entera de los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

a) $\log 348$

b) $\log_2 58$

c) $\log 0,03$

a) $100 < 348 < 1000 \rightarrow 2 < \log 348 < 3 \rightarrow \log 348 = 2, \dots$

b) $2^5 < 58 < 2^6 \rightarrow 5 < \log_2 58 < 6 \rightarrow \log_2 58 = 5, \dots$

c) $0,01 < 0,03 < 0,1 \rightarrow -2 < \log 0,03 < -1 \rightarrow \log 0,03 = -1, \dots$

67 Sean m y n dos números racionales. ¿Qué puedes decir del signo de m y n en cada uno de estos casos?

a) $m \cdot n > 0$ y $m + n < 0$

b) $m \cdot n < 0$ y $m - n > 0$

c) $m \cdot n < 0$ y $m - n < 0$

a) $m < 0, n < 0$

b) $m > 0, n < 0$

c) $m < 0, n > 0$

68 Si $x \in \mathbb{N}$ y $x > 1$, ordena estos números:

$$\frac{1}{x+1}; x; \frac{1}{x}; -\frac{1}{x}; \frac{1}{-x-1}$$

$$-\frac{1}{x} < \frac{-1}{x+1} < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} < x$$

69 Ordena de menor a mayor los números $a, a^2, \frac{1}{a}, \sqrt{a}$, si $a > 1$ y si $0 < a < 1$.

Si $a > 1 \rightarrow \frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2$

Si $0 < a < 1 \rightarrow a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$

AUTOEVALUACIÓN

1. Dados los números:

$$-\frac{58}{45}; \frac{51}{17}; \frac{\pi}{3}; \sqrt[4]{-3}; \sqrt[3]{-8}; \sqrt[5]{2^3}; 1,0\widehat{7}$$

a) Clasifícalos indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ o \mathbb{R} , pertenecen.

b) Ordena de menor a mayor los reales.

c) ¿Cuáles de ellos pertenecen al intervalo $(-2, 11/9]$?

a) \mathbb{N} : $\frac{51}{17}$

\mathbb{Z} : $\frac{51}{17}; \sqrt[3]{-8}$

\mathbb{Q} : $\frac{51}{17}; \sqrt[3]{-8}; -\frac{58}{45}; 1,0\widehat{7}$

\mathbb{R} : $\frac{51}{17}; \sqrt[3]{-8}; -\frac{58}{45}; 1,0\widehat{7}; \frac{\pi}{3}; \sqrt[5]{2^3}$

b) $\sqrt[3]{-8} < -\frac{58}{45} < \frac{\pi}{3} < 1,0\widehat{7} < \sqrt[5]{2^3} < \frac{51}{17}$

c) $-\frac{58}{45}; \frac{\pi}{3}; 1,0\widehat{7}$

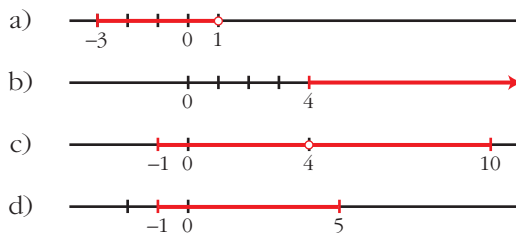
2. Representa los siguientes conjuntos:

a) $\{x / -3 \leq x < 1\}$

b) $[4, +\infty)$

c) $[-1, 4) \cup (4, 10]$

d) $(-\infty, 5) \cap (-1, +\infty)$

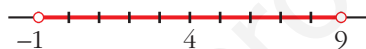

3. Expresa en forma de intervalo en cada caso:

a) $|x| \geq 8$

b) $|x - 4| < 5$

a) $(-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$

b) $(-1, 9)$


4. Multiplica y simplifica: $\sqrt[3]{9a^2b} \cdot \sqrt[6]{18a^3b^2}$

Reducimos a índice común:

$$\sqrt[6]{(9a^2b)^2} \cdot \sqrt[6]{18a^3b^2} = \sqrt[6]{2 \cdot 3^6 \cdot a^7 \cdot b^4} = 3a\sqrt[6]{2ab^4}$$

5. Reduce: $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2}$

$$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = 5\sqrt[3]{2}; \quad \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}; \quad \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

6. Escribe como potencia y simplifica.

$$\left(\sqrt[3]{5\sqrt{a^{12}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} \right) : (a\sqrt[4]{a^{-2}})$$

$$\sqrt[3]{5\sqrt{a^{12}}} = \sqrt[15]{a^{12}} = a^{\frac{12}{15}} = a^{\frac{4}{5}}; \quad \sqrt[3]{1/a^2} = \sqrt[3]{a^{-2}} = a^{-\frac{2}{3}}; \quad a\sqrt[4]{a^{-2}} = a \cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(a^{\frac{4}{5}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} \right) : a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}} = a^{-\frac{11}{30}}$$

7. Efectúa, racionalizando previamente.

$$\frac{4 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \frac{2}{3 - \sqrt{3}}$$
$$\frac{4 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{(4 + \sqrt{6})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{18}}{6} = \frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$$
$$\frac{2}{3 - \sqrt{3}} = \frac{2(3 + \sqrt{3})}{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6}$$
$$\frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6} - \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 6}{6}$$

8. Aplica la definición de logaritmo y obtén x :

a) $\log_3 x = -\frac{1}{4}$ b) $\ln \frac{x}{3} = -1$ c) $\log_x 125 = 3$

a) $x = 3^{-\frac{1}{4}} \rightarrow x = 0,76$

b) $\frac{x}{3} = e^{-1} \rightarrow x = 3 \cdot e^{-1} = 1,10$

c) $x^3 = 125 \rightarrow x = 5$

9. Aplica las propiedades de los logaritmos y halla A .

$$\log A = 2 \log 3 + 0,5 \log 4 - 3 \log 2$$

$$\log A = \log \frac{3^2 \cdot 4^{0,5}}{2^3} \rightarrow A = \frac{9 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}$$

10. Calcula x en cada caso.

a) $2,5^x = 0,0087$

b) $e^{-x} = 425$

a) $x \log 2,5 = \log 0,0087 \rightarrow x = \frac{\log 0,0087}{\log 2,5} = -5,18$

b) $-x \ln e = \ln 425 \rightarrow x = -\ln 425 = -6,05$