

# 9

## LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS

Página 213

### REFLEXIONA Y RESUELVE

#### Cónicas abiertas: parábolas e hipérbolas

- Completa la siguiente tabla, en la que  $\alpha$  es el ángulo que forman las generatrices con el eje,  $e$ , de la cónica y  $\beta$  el ángulo del plano  $\pi$  con  $e$ .

	$\beta = 90^\circ$	$\beta > \alpha$	$\beta = \alpha$	$\beta < \alpha$
$\pi$ PASA POR EL VÉRTICE	• punto		/ recta	
$\pi$ NO PASA POR EL VÉRTICE	○ circunferencia			

	$\beta = 90^\circ$	$\beta > \alpha$	$\beta = \alpha$	$\beta < \alpha$
$\pi$ PASA POR EL VÉRTICE	• punto	• punto	/ recta	X dos rectas que se cortan en V
$\pi$ NO PASA POR EL VÉRTICE	○ circunferencia	◌ elipse	∩ parábola	∩ hipérbola

Página 215

- Halla las ecuaciones de los siguientes lugares geométricos:

- Mediatriz del segmento de extremos  $A(-5, -3)$ ,  $B(7, 1)$ . Comprueba que es una recta perpendicular al segmento en su punto medio.
- Circunferencia de centro  $O(-3, 4)$  y radio 5. Comprueba que pasa por el origen de coordenadas.
- Bisectrices de los ángulos formados por las rectas:

$$r_1: 5x + y + 3 = 0 \quad r_2: x - 2y + 16 = 0$$

Comprueba que las bisectrices son dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto que  $r_1$  y  $r_2$ .

a) Los puntos  $X(x, y)$  deben cumplir  $dist(X, A) = dist(X, B)$ :

$$\sqrt{(x+5)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2}$$

Elevamos al cuadrado y desarrollamos:

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$$

$$10x + 14x + 6y + 2y + 34 - 50 = 0 \rightarrow 24x + 8y - 16 = 0$$

$$3x + y - 2 = 0 \rightarrow y = -3x + 2$$

- El punto medio de  $AB$  es  $M(1, -1)$  que, efectivamente, está en la recta (pues verifica la ecuación).
- La pendiente de la recta es  $m_r = -3$ , y la del segmento es:

$$m_{AB} = \frac{1 - (-3)}{7 - (-5)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Cumplen que } m_r \cdot m_{AB} = (-3) \left(\frac{1}{3}\right) = -1 \rightarrow AB \perp r$$

b) Los puntos  $X(x, y)$  son tales que:

$$dist(X, O) = 5 \rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} = 5 \rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 8y + 25 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 8y = 0$$

c) Son los puntos  $X(x, y)$ :

$$dist(X, r_1) = dist(X, r_2) \rightarrow \frac{|5x + y + 3|}{\sqrt{26}} = \frac{|x - 2y + 16|}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Se dan dos casos: } \sqrt{5}(5x + y + 3) = \sqrt{26}(x - 2y + 16)$$

$$\sqrt{5}(5x + y + 3) = -\sqrt{26}(x - 2y + 16)$$

$$\text{Son dos rectas: } b_1: (5\sqrt{5} - \sqrt{26})x + (\sqrt{5} + 2\sqrt{26})y + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} = 0$$

$$b_2: (5\sqrt{5} + \sqrt{26})x + (\sqrt{5} - 2\sqrt{26})y + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} = 0$$

$$\bullet \text{ Sus pendientes son: } \left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{-(5\sqrt{5} - \sqrt{26})}{\sqrt{5} + 2\sqrt{26}} \\ m_2 &= \frac{-(5\sqrt{5} + \sqrt{26})}{\sqrt{5} - 2\sqrt{26}} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow m_1 \cdot m_2 = \frac{25 \cdot 5 - 26}{5 - 4 \cdot 26} = \frac{99}{-99} = -1 \rightarrow b_1 \perp b_2$$

- Calculamos el punto de corte de las rectas iniciales y comprobamos que está también en ambas bisectrices:

$$\left. \begin{aligned} r_1: 5x + y + 3 = 0 &\rightarrow y = -5x - 3 \\ r_2: x - 2y + 16 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow x - 2(-5x - 3) + 16 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x + 10x + 6 + 16 = 0 \rightarrow 11x = -22 \rightarrow x = -2$$

$$\text{Luego: } y = -5(-2) - 3 = 7$$

El punto de corte es  $(-2, 7)$ , que se puede comprobar fácilmente que está en  $b_1$  y  $b_2$  sustituyendo en sus ecuaciones respectivas:

$$\begin{aligned} b_1: (5\sqrt{5} - \sqrt{26}) \cdot (-2) + (\sqrt{5} + 2\sqrt{26}) \cdot 7 + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} &= \\ = -10\sqrt{5} + 2\sqrt{26} + 7\sqrt{5} + 14\sqrt{26} + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2: (5\sqrt{5} + \sqrt{26}) \cdot (-2) + (\sqrt{5} - 2\sqrt{26}) \cdot 7 + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} &= \\ = -10\sqrt{5} - 2\sqrt{26} + 7\sqrt{5} - 14\sqrt{26} + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} &= 0 \end{aligned}$$

- Por tanto,  $b_1$  y  $b_2$  son dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto que  $r_1$  y  $r_2$ .

## Página 217

1. Halla la ecuación de la circunferencia de centro  $(-5, 12)$  y radio 13. Comprueba que pasa por el punto  $(0, 0)$ .

$$(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 169 \rightarrow x^2 + y^2 + 10x - 24y = 0$$

Si sustituimos  $x = 0$ ,  $y = 0$  en la ecuación, esta se verifica. Por tanto, la circunferencia pasa por  $(0, 0)$ .

2. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo cociente de distancias a los puntos  $M(6, 0)$  y  $N(-2, 0)$  es 3 (es decir,  $\overline{PM}/\overline{PN} = 3$ )?

Si  $P(x, y)$  es un punto del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = 3 \rightarrow \frac{\sqrt{(x-6)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}} = 3$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 9[(x+2)^2 + y^2]$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 9[x^2 + 4x + 4 + y^2]$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 9x^2 + 36x + 36 + 9y^2$$

$$8x^2 + 8y^2 + 48x = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x = 0$$

Es la circunferencia de centro  $(-3, 0)$  y radio 3.

## Página 218

3. Estudia la posición relativa de la circunferencia  $C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$  respecto a las rectas:

$$s_1: 3x - 4y - 26 = 0 \quad s_2: 5x - 8y + 60 = 0 \quad s_3: 3x - 4y - 1 = 0 \quad s_4: x = 5$$

Halla los puntos de corte y de tangencia, si los hubiera.

$$\bullet \left. \begin{array}{l} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_1: 3x - 4y - 26 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 3x = 4y + 26 \rightarrow x = \frac{4}{3}y + \frac{26}{3}$$

$$\left(\frac{4}{3}y + \frac{26}{3}\right)^2 + y^2 - 6\left(\frac{4}{3}y + \frac{26}{3}\right) - 4y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{16}{9}y^2 + \frac{676}{9} + \frac{208}{9}y + y^2 - 8y - 52 - 4y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16y^2 + 676 + 208y + 9y^2 - 72y - 468 - 36y - 108 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 25y^2 + 100y + 100 = 0 \rightarrow y^2 + 4y + 4 = 0 \rightarrow (y + 2)^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -2 \text{ (solución única)}$$

$$x = \frac{4}{3}(-2) + \frac{26}{3} \rightarrow x = 6$$

$C$  y  $s_1$  son tangentes en el punto  $(6, -2)$ .

$$\bullet \left. \begin{array}{l} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_2: 5x - 8y + 60 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 5x = 8y - 60 \rightarrow x = \frac{8}{5}y - 12$$

$$\left(\frac{8}{5}y - 12\right)^2 + y^2 - 6\left(\frac{8}{5}y - 12\right) - 4y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{64}{25}y^2 + 144 - \frac{192}{5}y + y^2 - \frac{48}{5} + 72 - 4y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 64y^2 + 3600 - 960y + 25y^2 - 240 + 1800 - 100y - 300 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 89y^2 - 1060y + 4860 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

$s_2$  es exterior a la circunferencia  $C$ .

$$\bullet \left. \begin{array}{l} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_3: 3x - 4y - 1 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 3x = 4y + 1 \rightarrow x = \frac{4}{3}y + \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{4}{3}y + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 - 6\left(\frac{4}{3}y + \frac{1}{3}\right) - 4y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{16}{9}y^2 + \frac{1}{9} + \frac{8}{9}y + y^2 - 8y - 2 - 4y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16y^2 + 1 + 8y + 9y^2 - 72y - 18 - 36y - 108 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 25y^2 - 100y - 125 = 0 \rightarrow y^2 - 4y - 5 = 0 \begin{cases} y_1 = 5 \rightarrow x_1 = 7 \\ y_2 = -1 \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

$C$  y  $s_3$  son secantes en los puntos  $(7, 5)$  y  $(-1, -1)$ .

$$\bullet \left. \begin{array}{l} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_4: x = 5 \end{array} \right\} \rightarrow 25 + y^2 - 30 - 4y - 12 = 0 \rightarrow y^2 - 4y - 17 = 0$$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-17)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{84}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{21}}{2} = 2 \pm \sqrt{21} \begin{cases} y_1 = 2 + \sqrt{21} \\ y_2 = 2 - \sqrt{21} \end{cases}$$

$C$  y  $s_4$  se cortan en los puntos  $(5, 2 + \sqrt{21})$  y  $(5, 2 - \sqrt{21})$ .

**4. ¿Para qué valores de  $b$  la recta  $y = x + b$  es tangente a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 9$ ?**

La recta será tangente a la circunferencia si la distancia del centro de la circunferencia a la recta es igual al radio de la circunferencia.

$$C: x^2 + y^2 = 9 \rightarrow O = (0, 0), R = 3$$

$$r: y = x + b \rightarrow x - y + b = 0$$

$$\text{dist}(O, r) = \frac{|0 - 0 + b|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}} = 3 \rightarrow b = \pm 3\sqrt{2}$$

**5. Halla la posición relativa de  $C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$  respecto a las rectas:**

$$r_1: x + y = 10 \quad r_2: 4x + 3y + 20 = 0 \quad r_3: 3x - 4y = 0 \quad r_4: y = -2$$

$$C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0 \rightarrow O = (3, -4), r = 5$$

$$\bullet \text{ dist}(O, r_1) = \frac{|3 - 4 - 10|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{11}{\sqrt{2}} \approx 7,78 > 5 \rightarrow r_1 \text{ es exterior a } C.$$

$$\bullet \text{ dist}(O, r_2) = \frac{|4 \cdot 3 + 3(-4) + 20|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{20}{5} = 4 < 5 \rightarrow r_2 \text{ y } C \text{ se cortan en dos puntos.}$$

$$\bullet \text{ dist}(O, r_3) = \frac{|3 \cdot 3 - 4(-4)|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{25}{5} = 5 \rightarrow r_3 \text{ y } C \text{ son tangentes.}$$

$$\bullet \text{ dist}(O, r_4) = \frac{|-4 + 2|}{\sqrt{0 + 1}} = \frac{2}{1} = 2 < 5 \rightarrow r_4 \text{ y } C \text{ se cortan en dos puntos.}$$

## Página 219

**1. Halla la potencia de  $P(-3, 8)$  a las circunferencias:**

$$C_1: x^2 + y^2 - 14x + 20 = 0$$

$$C_2: O(4, -3), r = 20$$

Di si  $P$  es interior o exterior a  $C_1$  y a  $C_2$ .

$$C_1: x^2 + y^2 - 14x + 20 = 0 \rightarrow O_1 = (7, 0), r_1 = \sqrt{49 - 20} = \sqrt{29}$$

$$C_2: O(4, -3), r = 20$$

$$P(-3, 8)$$

$$P(P \text{ a } C_1) = (7 + 3)^2 + (0 - 8)^2 - (\sqrt{29})^2 = 100 + 64 - 29 = 135 > 0 \rightarrow$$

$\rightarrow P$  es exterior a  $C_1$ .

$$P(P \text{ a } C_2) = (4 + 3)^2 + (-3 - 8)^2 - (20)^2 = 49 + 121 - 400 = -230 < 0 \rightarrow$$

$\rightarrow P$  es interior a  $C_2$ .

## 2. Halla el eje radical de estas circunferencias:

$$C_1: x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 6y = 0$$

**Comprueba que es una recta perpendicular a la línea de sus centros.**

Calculamos las potencias de un punto genérico  $P(x, y)$  a  $C_1$  y a  $C_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}(P \text{ a } C_1) &= x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = 0 \\ \mathcal{P}(P \text{ a } C_2) &= x^2 + y^2 - 6y = 0 \end{aligned} \right\} \text{Igualamos ambas expresiones:}$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = x^2 + y^2 - 6y \rightarrow -4x + 18y - 11 = 0$$

$$\text{Ecuación del eje radical: } 4x - 18y + 11 = 0 \rightarrow m = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Centro de } C_1 \rightarrow O_1 &= (2, -6) \\ \text{Centro de } C_2 \rightarrow O_2 &= (0, 3) \end{aligned} \right\} \overrightarrow{O_1O_2} = (-2, 9) \rightarrow$$

$\rightarrow$  La pendiente de la recta que une  $O_1$  y  $O_2$  es  $m' = -\frac{9}{2}$ .

Como  $m \cdot m' = \left(\frac{2}{9}\right) \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -1$ , el eje radical y la recta que une  $O_1$  y  $O_2$  son perpendiculares.

## Página 221

- 1. Halla la ecuación de la elipse de focos  $F_1(4, 0)$ ,  $F_2(-4, 0)$  y cuya constante es 10. Una vez puesta la ecuación inicial, pasa una raíz al segundo miembro, eleva al cuadrado (¡atención con el doble producto!), simplifica, aísla la raíz, vuelve a elevar al cuadrado y simplifica hasta llegar a la ecuación  $9x^2 + 25y^2 = 225$ .**

Si  $P(x, y)$  es un punto de la elipse, entonces:

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 10$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$$

$$\text{Elevamos al cuadrado: } (x-4)^2 + y^2 = 100 + (x+4)^2 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$$

$$\text{Operamos: } x^2 - 8x + 16 + y^2 = 100 + x^2 + 8x + 16 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$$

$$20\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 16x + 100$$

$$5\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 4x + 25$$

$$\text{Elevamos al cuadrado: } 25(x^2 + 8x + 16 + y^2) = 16x^2 + 200x + 625$$

Simplificamos:

$$25x^2 + 200x + 400 + 25y^2 = 16x^2 + 200x + 625 \rightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225$$

- 2. Halla la ecuación de la hipérbola de focos  $F_1(5, 0)$ ,  $F_2(-5, 0)$  y cuya constante es 6. Simplifica como en el ejercicio anterior hasta llegar a la expresión  $16x^2 - 9y^2 = 144$ .**

Si  $P(x, y)$  es un punto de la hipérbola, entonces:

$$|dist(P, F_1) - dist(P, F_2)| = 6$$

$$dist(P, F_1) - dist(P, F_2) = \pm 6$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \pm 6$$

$$\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \pm 6 + \sqrt{(x-5)^2 + y^2}$$

Elevamos al cuadrado:

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 36 + x^2 + 10x + 25 + y^2 \pm 12\sqrt{(x-5)^2 + y^2}$$

$$\pm 12\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 20x + 36$$

$$\pm 3\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 5x + 9$$

$$\text{Elevamos al cuadrado: } 9(x^2 + 10x + 25 + y^2) = 25x^2 + 90x + 81$$

$$9x^2 + 90x + 225 + 9y^2 = 25x^2 + 90x + 81$$

$$16x^2 - 9y^2 = 144$$

- 3. Halla la ecuación de la parábola de foco  $F(-1, 0)$  y directriz  $r: x = 1$ . Simplifica hasta llegar a la expresión  $y^2 = -4x$ .**

Si  $P(x, y)$  es un punto de la parábola, entonces:

$$dist(P, F) = dist(P, r)$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = |x-1|$$

$$\text{Elevamos al cuadrado: } x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\text{Simplificamos: } y^2 = -4x$$

## Página 223

- 1. Una elipse tiene sus focos en los puntos  $F(5, 0)$  y  $F'(-5, 0)$  y su constante es  $k = 26$ . Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida. Representala.**

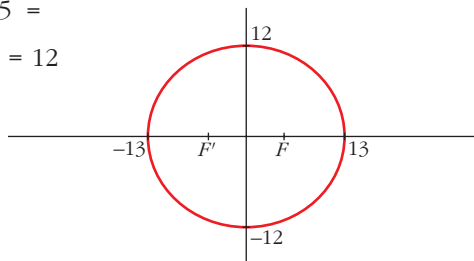
- Semieje mayor:  $k = 26 \rightarrow 2a = 26 \rightarrow a = 13$

- Semidistancia focal:  $\overline{FF'} = 10 \rightarrow 2c = 10 \rightarrow c = 5$

- Semieje menor:  $b^2 = a^2 - c^2 = \sqrt{169 - 25} =$   
 $= \sqrt{144} = 12 \rightarrow b = 12$

- Excentricidad:  $\frac{c}{a} = \frac{5}{13} \approx 0,38 \rightarrow$   
 $\rightarrow exc \approx 0,38$

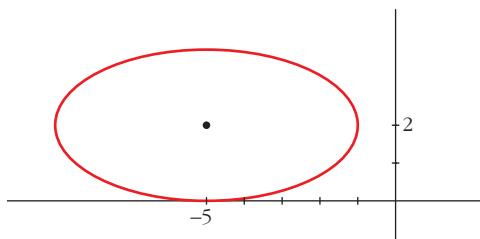
- Ecuación reducida:  $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$



## Página 224

### 2. Representa y di su excentricidad:

$$\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$



$$c = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

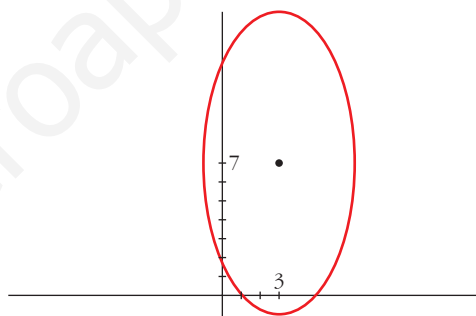
$$exc = \frac{\sqrt{12}}{4} \approx 0,87$$

### 3. Representa y di su excentricidad:

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{64} = 1$$

$$c = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48}$$

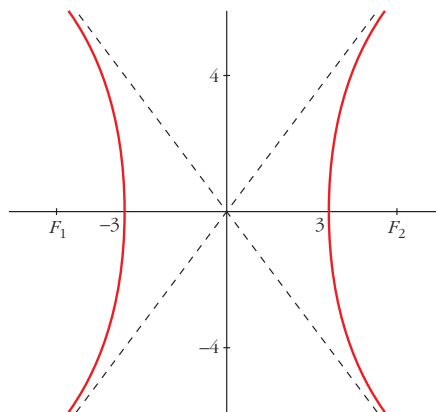
$$exc = \frac{\sqrt{48}}{8} \approx 0,87$$



## Página 226

### 1. Una hipérbola tiene sus focos en los puntos $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$ y su constante es $k = 6$ . Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida. Representa.

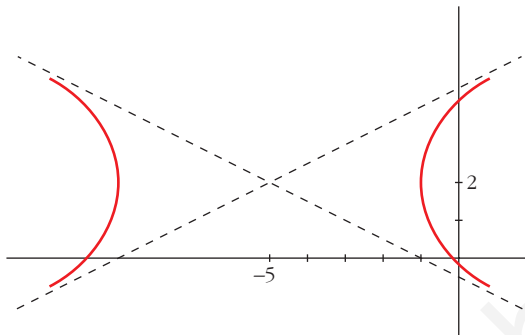
- Semieje:  $k = 2a = 6 \rightarrow a = 3$
- Semidistancia focal:  $\overline{F_1F_2} = 10 \rightarrow c = 5$
- Cálculo de  $b$ :  $b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow$   
 $\rightarrow b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \rightarrow b = 4$
- Excentricidad:  $exc = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \approx 1,67$
- Asíntotas:  $y = \frac{4}{3}x$ ;  $y = -\frac{4}{3}x$
- Ecuación reducida:  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$



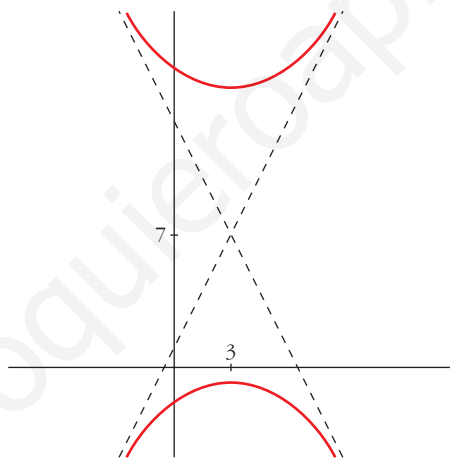


## Página 227

2. Representa:  $\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$



3. Representa:  $\frac{(y-7)^2}{64} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$



## Página 228

1. Halla la ecuación reducida de la parábola de foco  $F(1,5; 0)$  y directriz  $x = -1,5$ .

Si  $P(x, y)$  es un punto de la parábola:  $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d)$ , donde  $d$  es la directriz y  $F$  el foco.

$$\sqrt{(x-1,5)^2 + y^2} = |x+1,5|$$

$$x^2 - 3x + 2,25 + y^2 = x^2 + 3x + 2,25 \rightarrow y^2 = 6x$$

- De otra forma:

Distancia del foco a la directriz:  $p = 3$

Ecuación reducida:  $y^2 = 6x$

**2. Halla la ecuación reducida de la parábola de foco  $F(0, 2)$  y directriz  $y = -2$ .**

Si  $P(x, y)$  es un punto de la parábola:  $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d)$ , donde  $d$  es la directriz y  $F$  el foco.

$$\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = |y + 2|$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4 \rightarrow x^2 = 8y$$

- De otra forma:

Distancia del foco a la directriz:  $p = 4$

Ecuación reducida:  $x^2 = 8y$

www.yoquieroaprobar.es

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

## PARA PRACTICAR

## Lugares geométricos

- 1** Halla, en cada caso, el lugar geométrico de los puntos que equidistan de  $A$  y  $B$ .

a)  $A(5, -3)$   $B(2, 0)$

b)  $A(3, 5)$   $B(-4, 5)$

c)  $A(2, 7)$   $B(2, -1)$

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2} &= \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \rightarrow \\ \rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 &= x^2 - 4x + 4 + y^2 \rightarrow \\ \rightarrow -6x + 6y + 30 &= 0 \rightarrow -x + y + 5 = 0. \text{ Es la mediatriz de } AB. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} &= \sqrt{(x+4)^2 + (y-5)^2} \rightarrow \\ \rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 &= x^2 + 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 \rightarrow \\ \rightarrow -14x - 7 &= 0 \rightarrow 2x + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sqrt{(x-2)^2 + (y-7)^2} &= \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \rightarrow \\ \rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 14y + 49 &= x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 \rightarrow \\ \rightarrow -16y + 48 &= 0 \rightarrow y - 3 = 0 \end{aligned}$$

- 2** Halla el lugar geométrico de los puntos  $P(x, y)$  cuya diferencia de cuadrados de distancias a los puntos  $A(0, 0)$  y  $B(6, 3)$  es 15. ¿Qué figura obtienes?

$$[dist(P, A)]^2 - [dist(P, B)]^2 = 15$$

$$x^2 + y^2 - [(x-6)^2 + (y-3)^2] = 15$$

Desarrollamos y simplificamos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - x^2 - 36 + 12x - y^2 - 9 + 6y &= 15 \rightarrow \\ \rightarrow 12x + 6y - 60 &= 0 \rightarrow r: 2x + y - 10 = 0 \end{aligned}$$

Veamos que la recta obtenida es perpendicular al segmento  $AB$ :

$$\vec{AB} = (6, 3) \rightarrow \text{pendiente: } m_{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

La pendiente de  $r$  es  $m_r = -2$ .

$$m_{AB} \cdot m_r = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1 \rightarrow \vec{AB} \perp r$$

- 3** Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta  $4x - 3y + 11 = 0$  es 6.

• El valor absoluto dará lugar a dos rectas.

$$P(x, y) \text{ cumple que } \text{dist}(P, r) = 6 \rightarrow \frac{|4x - 3y + 11|}{\sqrt{16 + 9}} = 6 \rightarrow$$

$$\rightarrow |4x - 3y + 11| = 30 \rightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 11 = 30 \\ 4x - 3y + 11 = -30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_1: 4x - 3y - 19 = 0 \\ r_2: 4x - 3y + 41 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas paralelas entre sí y paralelas, a su vez, a la recta dada.

- 4** Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas:

$$r: 3x - 5y + 11 = 0$$

$$s: 3x - 5y + 3 = 0$$

Interpreta las líneas obtenidas.

$$P(x, y) \text{ donde } d(P, r) = d(P, s) \rightarrow \frac{|3x - 5y + 11|}{\sqrt{34}} = \frac{|3x - 5y + 3|}{\sqrt{34}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x - 5y + 11 = 3x - 5y + 3 \rightarrow 11 = 3 \text{ ¡¡Imposible!!} \\ 3x - 5y + 11 = -3x + 5y - 3 \rightarrow 6x - 10y + 14 = 0 \rightarrow r: 3x - 5y + 7 = 0 \end{cases}$$

Es una recta paralela a las dos rectas dadas que, a su vez, son paralelas entre sí, como puede verse por sus coeficientes, pues:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = 1 \neq \frac{C}{C'} = \frac{11}{3}$$

- 5** Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas  $r$  y  $s$ :

$$r: 4x - 3y + 8 = 0$$

$$s: 12x + 5y - 7 = 0$$

Son todos los puntos  $P(x, y)$  tales que  $d(P, r) = d(P, s)$ :

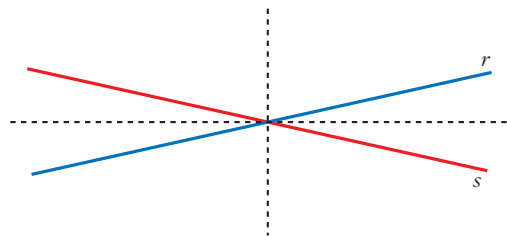
$$\frac{|4x - 3y + 8|}{\sqrt{25}} = \frac{|12x + 5y - 7|}{\sqrt{169}} \rightarrow \frac{|4x - 3y + 8|}{5} = \frac{|12x + 5y - 7|}{13} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 13(4x - 3y + 8) = 5(12x + 5y - 7) \rightarrow \\ 13(4x - 3y + 8) = -5(12x + 5y - 7) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 52x - 39y + 104 = 60x + 25y - 35 \rightarrow \begin{cases} 8x + 64y - 139 = 0 \\ 112x - 14y + 69 = 0 \end{cases} \\ 52x - 39y + 104 = -60x - 25y + 35 \end{cases}$$

Luego hay dos soluciones, bisectrices de los ángulos cóncavo y convexo que forman las rectas  $r$  y  $s$ .

Ambas bisectrices se cortan en el punto de corte de las rectas  $r$  y  $s$ , y son perpendiculares.



## Circunferencia

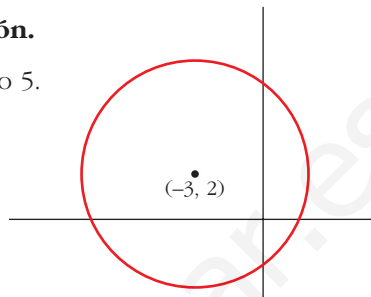
- 6** ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que distan 5 unidades del punto  $P(-3, 2)$ ?

Representalo gráficamente y halla su ecuación.

Es una circunferencia de centro  $P(-3, 2)$  y radio 5.

Ecuación:  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$$



- 7** Escribe las ecuaciones de las circunferencias de centro  $C$  y radio  $r$ .

a)  $C = (0, 0)$ ,  $r = \sqrt{5}$

b)  $C = (2, 0)$ ,  $r = 5/2$

c)  $C = (-2, -3/2)$ ,  $r = 1/2$

a)  $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{5})^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 5$

b)  $(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \rightarrow 4x^2 + 4y^2 - 16x - 9 = 0$

c)  $(x + 2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 3y + 6 = 0$

- 8** Averigua cuáles de las siguientes expresiones corresponden a circunferencias y, en ellas, halla su centro y su radio:

a)  $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 10 = 0$

b)  $x^2 - y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$

c)  $x^2 + y^2 + xy - x + 4y - 8 = 0$

d)  $2x^2 + 2y^2 - 16x + 24 = 0$

e)  $x^2 + y^2 + 6x + 10y = -30$

a) Los coeficientes de  $x^2$  e  $y^2$  son 1. No hay término en  $xy$ .

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 1 - 10 = 7 > 0$$

Es una circunferencia de centro  $(4, -1)$  y radio  $\sqrt{7}$ .

b) Los coeficientes de  $x^2$  e  $y^2$  no son iguales. No es una circunferencia.

c) Hay un término  $xy$ . No es una circunferencia.

d) Los coeficientes de  $x^2$  e  $y^2$  son iguales y no tiene término en  $xy$ . Dividimos entre 2 la igualdad:  $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ .

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 0 - 12 = 4 > 0$$

Es una circunferencia de centro  $(4, 0)$  y radio  $\sqrt{4} = 2$ .

e) Los coeficientes de  $x^2$  e  $y^2$  son 1. No hay término en  $xy$ .

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 9 + 25 - 30 = 4 > 0$$

Es una circunferencia de centro  $(-3, -5)$  y radio 2.

### 9 Escribe las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

a) Centro en  $C(-2, 1)$  y pasa por el punto  $P(0, -4)$ .

b) Uno de sus diámetros es el segmento  $\overline{AB}$  donde  $A(1, 2)$  y  $B(3, 6)$ .

c) Centro en  $C(-1, -5)$  y es tangente a la recta  $x - 4 = 0$ .

d) Centro en  $C(3, 5)$  y es tangente a la recta  $4x + 3y - 2 = 0$ .

a) Radio =  $|\overrightarrow{CP}| = \sqrt{(0+2)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{29}$

Ecuación:  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 29$

b) Centro: Punto medio de  $AB \rightarrow \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (2, 4)$

$$\text{Radio} = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{(3-1)^2 + (6-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$$

Ecuación:  $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 5$

c) Radio: Distancia de  $C(-1, -5)$  a la recta  $x - 4 = 0$ .

$$R = \frac{|-1 - 4|}{\sqrt{1}} = 5$$

Ecuación:  $(x+1)^2 + (y+5)^2 = 25$

d) Radio:  $\text{dist}(C, r) = \frac{|4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{25}{5} = 5$

Ecuación:  $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$

## Posiciones relativas de rectas y de circunferencias

### 10 Estudia la posición de la recta $x + y = 0$ con relación a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$$

El centro de la circunferencia es  $C(-3, -1)$  y su radio es  $r = \sqrt{9 + 1 - 6} = \sqrt{4} = 2$ .

Hallamos la distancia de  $C$  a la recta  $s: x + y = 0$ :

$$d = \text{dist}(C, s) = \frac{|-3 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \approx 2,83 > 2 = r$$

La recta es *exterior* a la circunferencia.

**11 Estudia la posición relativa de la circunferencia  $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$  respecto de cada una de las siguientes rectas:**

$$r_1: 2x - y - 2 = 0$$

$$r_2: x + y - 1 = 0$$

$$r_3: 3x - 4y + 9 = 0$$

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = -9 + 9 + 4 \rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$C(3, 2), R = 2$$

- Calculamos la distancia del centro a cada una de las rectas y la comparamos con el radio:

$$\text{dist}(C, r_1) = \frac{|2 \cdot 3 - 2 - 2|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} < 2 \rightarrow r_1 \text{ es secante.}$$

$$\text{dist}(C, r_2) = \frac{|3 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > 2 \rightarrow r_2 \text{ es exterior.}$$

$$\text{dist}(C, r_3) = \frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2 \rightarrow r_3 \text{ es tangente.}$$

**12 ¿Para qué valor de  $b$  la recta  $y = x + b$  es tangente a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ ?**

El centro de la circunferencia es  $C(0, 0)$  y su radio es  $r = 1$ .

Hallamos la distancia de  $C$  a la recta  $s: x - y + b = 0$ :  $d = \text{dist}(C, s) = \frac{|b|}{\sqrt{2}}$

Para que la recta sea tangente a la circunferencia, ha de ser  $d = r$ , es decir:

$$\frac{|b|}{\sqrt{2}} = 1 \rightarrow |b| = \sqrt{2} \begin{cases} b = \sqrt{2} \\ b = -\sqrt{2} \end{cases}$$

**13 Calcula la distancia del centro de la circunferencia  $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$  a la recta  $r: 2x - y + 3 = 0$ . ¿Cuál es la posición de  $r$  respecto a la circunferencia?**

El centro de la circunferencia es  $C(0, 1)$  y su radio es  $R = \sqrt{2}$ . La distancia de  $C$  a  $r$  es:

$$\text{dist}(C, r) = \frac{|-1 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,89 < \sqrt{2} \approx 1,41$$

Luego la circunferencia y la recta son secantes.

## Potencia de un punto a una circunferencia

- 14** Calcula la potencia de los puntos  $P(5, 2)$ ,  $Q(2, 1)$  y  $R(-1, 0)$  a la circunferencia:  $C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ .

Utilízalo para estudiar la posición relativa de  $P$ ,  $Q$  y  $R$  respecto de  $C$ .

$$C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \rightarrow O(3, 2), r = 2$$

$$P(5, 2) \rightarrow \mathcal{P} = (5 - 3)^2 + (2 - 2)^2 - 4 = 0 = 0; \text{ por tanto, } P \text{ pertenece a } C.$$

$$Q(2, 1) \rightarrow \mathcal{P} = (2 - 3)^2 + (1 - 2)^2 - 4 = -2 < 0; \text{ por tanto, } P \text{ es un punto interior a } C.$$

$$R(-1, 0) \rightarrow \mathcal{P} = (-1 - 3)^2 + (0 - 2)^2 - 4 = 16 > 0; \text{ por tanto, } P \text{ es un punto exterior a } C.$$

## Página 236

- 15** Halla el eje radical de los siguientes pares de circunferencias:

a)  $C_1: (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 4$

$C_2: (x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 1$

b)  $C_3: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$

$C_4: (x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 4$

c)  $C_5: (x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 1$

$C_6: (x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 1$

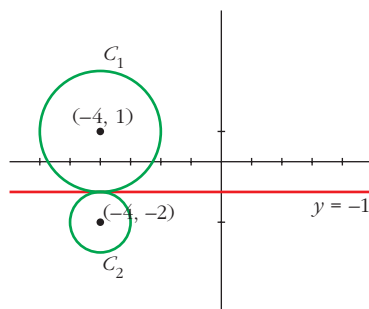
Representálo.

a)  $C_1: (x + 4)^2 + (y - 1)^2 - 4 = 0$  } Igualamos:  
 $C_2: (x + 4)^2 + (y + 2)^2 - 1 = 0$  }

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 - 4 = (x + 4)^2 + (y + 2)^2 - 1$$

$$\rightarrow y^2 - 2y + 1 - 4 = y^2 + 4y + 4 - 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow -6y - 6 = 0 \rightarrow y = -1. \text{ Eje radical.}$$

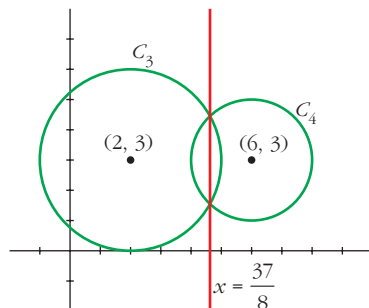


b)  $C_3: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 9 = 0$  } Igualamos:  
 $C_4: (x - 6)^2 + (y - 3)^2 - 4 = 0$  }

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 9 = (x - 6)^2 + (y - 3)^2 - 4$$

$$\rightarrow x^2 + 4 - 4x - 9 = x^2 + 36 - 12x - 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow 8x - 37 = 0 \rightarrow x = \frac{37}{8}. \text{ Eje radical.}$$



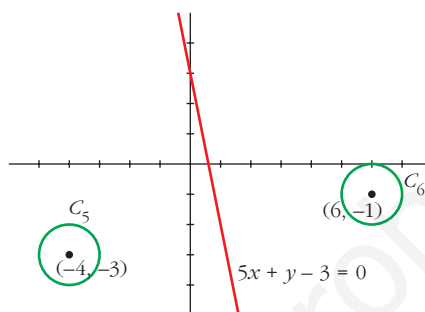


c) 
$$\left. \begin{aligned} C_5: (x+4)^2 + (y+3)^2 - 1 &= 0 \\ C_6: (x-6)^2 + (y+1)^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Igualamos:}$$

$$(x+4)^2 + (y+3)^2 - 1 = (x-6)^2 + (y+1)^2 - 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 - 1 = x^2 - 12x + 36 + y^2 + 2y + 1 - 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 20x + 4y - 12 = 0 \rightarrow 5x + y - 3 = 0. \text{ Eje radical.}$$



## Elipse

**16** Halla los vértices, los focos, las excentricidades, y representa las elipses dadas por sus ecuaciones:

a)  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

b)  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

c)  $9x^2 + 25y^2 = 25$

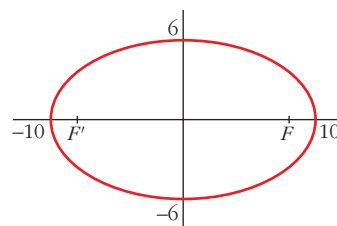
d)  $9x^2 + 4y^2 = 1$

a) **Vértices:** (10, 0); (-10, 0); (0, 6) y (0, -6)

**Focos:**  $c = \sqrt{100 - 36} = 8$

$F(8, 0)$  y  $F'(-8, 0)$

**Excentricidad:**  $exc = \frac{8}{10} = 0,8$

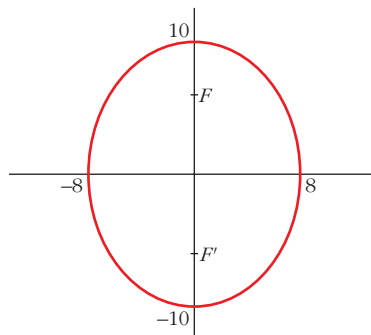


b) **Vértices:** (8, 0); (-8, 0); (0, 10) y (0, -10)

**Focos:**  $c = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$

$F(0, 6)$  y  $F'(0, -6)$

**Excentricidad:**  $exc = \frac{6}{10} = 0,6$



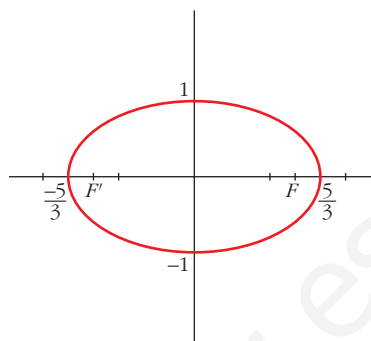
$$c) 9x^2 + 25y^2 = 25 \rightarrow \frac{x^2}{25/9} + \frac{y^2}{1} = 1$$

$$\text{Vértices: } \left(\frac{5}{3}, 0\right); \left(-\frac{5}{3}, 0\right); (0, 1) \text{ y } (0, -1)$$

$$\text{Focos: } c = \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

$$F\left(\frac{4}{3}, 0\right) \text{ y } F'\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$$

$$\text{Excentricidad: } exc = \frac{4/3}{5/3} = \frac{4}{5} = 0,8$$



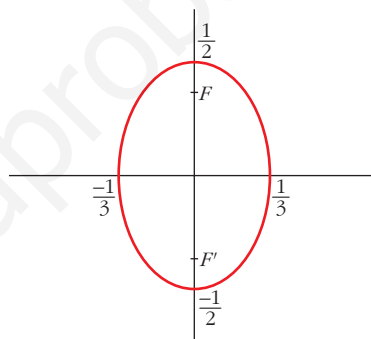
$$d) 9x^2 + 4y^2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{1/9} + \frac{y^2}{1/4} = 1$$

$$\text{Vértices: } \left(\frac{1}{3}, 0\right); \left(-\frac{1}{3}, 0\right);$$

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ y } \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Focos: } c = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

$$F\left(0, \frac{\sqrt{5}}{6}\right) \text{ y } F'\left(0, -\frac{\sqrt{5}}{6}\right)$$



**17** Halla las ecuaciones de las elipses determinadas de los modos siguientes:

a) Focos  $(-2, 0)$ ,  $(2, 0)$ . Longitud del eje mayor, 10.

b)  $F(-3, 0)$  y  $F'(3, 0)$  y cuya excentricidad es igual a 0,5.

c) Eje mayor sobre el eje  $X$ , igual a 10. Pasa por el punto  $(3, 3)$ .

d) Eje mayor sobre el eje  $Y$  e igual a 2. Excentricidad,  $1/2$ .

$$a) c = 2; 2a = 10 \rightarrow a = 5; b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$$

$$\text{Ecuación: } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$$

$$b) c = 3; exc = \frac{c}{a} = 0,5 \rightarrow a = \frac{c}{0,5} = \frac{3}{0,5} = 6$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 9 = 27$$

$$\text{Ecuación: } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$$

$$c) 2a = 10 \rightarrow a = 5; \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Como pasa por } (3, 3) \rightarrow \frac{9}{25} + \frac{9}{b^2} = 1 \rightarrow 9b^2 + 225 = 25b^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16b^2 = 225 \rightarrow b^2 = \frac{225}{16}$$

$$\text{Ecuación: } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{225/16} = 1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{25} + \frac{16y^2}{225} = 1$$

$$d) exc = \frac{c}{1} = \frac{1}{2} \rightarrow c = \frac{1}{2} \quad (a = 1, \text{ pues } 2a = 2)$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Ecuación: } \frac{x^2}{3/4} + \frac{y^2}{1} = 1, \text{ o bien, } \frac{4x^2}{3} + y^2 = 1$$

**18 Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a  $P(-4, 0)$  y  $Q(4, 0)$  es 10.**

Es una elipse de focos  $P(-4, 0)$  y  $Q(4, 0)$ , y constante  $k = 10$ , es decir,  $2a = 10$  y  $c = 4$ .

$$\text{Así: } a = 5; b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\text{La ecuación será: } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

**19 Escribe la ecuación de la elipse que tiene por focos los puntos  $F(0, 1)$  y  $F'(0, -1)$ , y cuya constante es igual a 4.**

Si  $P(x, y)$  es un punto de la elipse, entonces:

$$\text{dist}(P, F) + \text{dist}(P, F') = 2a, \text{ es decir:}$$

$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 16 + x^2 + (y + 1)^2 - 8\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 16 + x^2 + y^2 + 2y + 1 - 8\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow -4y - 16 = -8\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \rightarrow (4y + 16)^2 = 64[x^2 + (y + 1)^2] \rightarrow$$

$$\rightarrow 16y^2 + 256 + 128y = 64x^2 + 64y^2 + 64 + 128y \rightarrow$$

$$\rightarrow 192 = 64x^2 + 48y^2 \rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$$

- De otra forma:

El centro de la elipse es el punto medio del segmento que une  $F$  con  $F'$ , es decir:  $(0, 0)$

Por otra parte:

$$2c = \text{dist}(F, F') = |\vec{FF'}| = |(0, 2)| = 2 \rightarrow c = 1$$

$$2a = 4 \rightarrow a = 2 \rightarrow a^2 = 4$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$$

Por tanto, la ecuación es:  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$

**20** Halla la ecuación de la elipse que pasa por el punto  $(3, 1)$  y tiene sus focos en  $(4, 0)$  y  $(-4, 0)$ .

La ecuación es:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- Como pasa por  $(3, 1) \rightarrow \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$

- Como  $a^2 = b^2 + c^2$  y sabemos que  $c = 4 \rightarrow a^2 = b^2 + 16$

Teniendo en cuenta las dos condiciones anteriores:

$$\frac{9}{b^2 + 16} + \frac{1}{b^2} = 1 \rightarrow 9b^2 + b^2 + 16 = b^4 + 16b^2 \rightarrow b^4 + 6b^2 - 16 = 0$$

$$b^2 = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} \begin{cases} b^2 = 2 \\ b^2 = -8 \text{ (No vale)} \end{cases}$$

Así:  $a^2 = 2 + 16 = 18$

Por tanto, la ecuación de la elipse será:  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$

## Hipérbola

**21** Halla los vértices, los focos, las excentricidades y las asíntotas, y dibuja las hipérbolas dadas por las ecuaciones:

a)  $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$

b)  $\frac{9x^2}{16} - y^2 = 1$

c)  $x^2 - 4y^2 = 1$

d)  $x^2 - 4y^2 = 4$

e)  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{36} = 1$

f)  $y^2 - 16x^2 = 16$

g)  $9x^2 - 4y^2 = 36$

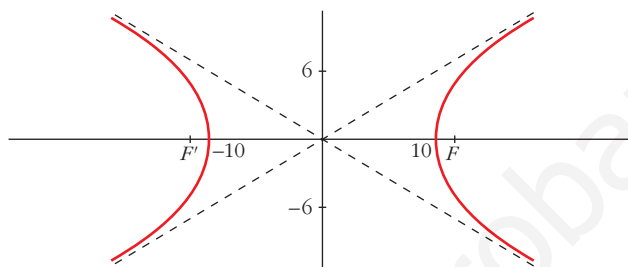
h)  $4x^2 - y^2 + 16 = 0$

a)  $a = 10$ ,  $b = 6$ ,  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$ ,  $exc = \frac{2\sqrt{34}}{10} \approx 1,17$

**Vértices:**  $(10, 0)$  y  $(-10, 0)$

**Focos:**  $F(2\sqrt{34}, 0)$  y  $F'(-2\sqrt{34}, 0)$

**Asíntotas:**  $y = \frac{3}{5}x$ ;  $y = -\frac{3}{5}x$



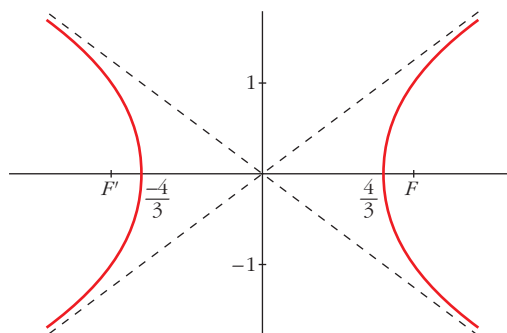
b)  $\frac{9x^2}{16} - y^2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16/9} - \frac{y^2}{1} = 1$

$a = \frac{4}{3}$ ,  $b = 1$ ,  $c = \sqrt{\frac{16}{9} + 1} = \frac{5}{3}$ ,  $exc = \frac{5/3}{4/3} = \frac{5}{4} = 1,25$

**Vértices:**  $(\frac{4}{3}, 0)$  y  $(-\frac{4}{3}, 0)$

**Focos:**  $F(\frac{5}{3}, 0)$  y  $F'(-\frac{5}{3}, 0)$

**Asíntotas:**  $y = \frac{3}{4}x$ ;  $y = -\frac{3}{4}x$

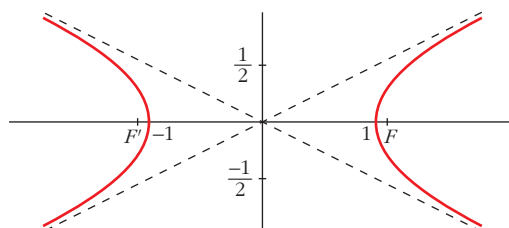


c)  $x^2 - 4y^2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1/4} = 1$

$a = 1$ ,  $b = \frac{1}{2}$ ,  $c = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $exc = \frac{\sqrt{5}/2}{1} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12$

**Vértices:**  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$ . **Focos:**  $F\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$  y  $F'\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

**Asíntotas:**  $y = \frac{1}{2}x$ ;  $y = -\frac{1}{2}x$



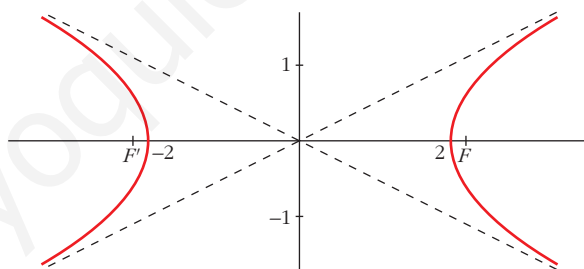
d)  $x^2 - 4y^2 = 4 \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

$a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$ ,  $exc = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12$

**Vértices:**  $(2, 0)$  y  $(-2, 0)$

**Focos:**  $F(\sqrt{5}, 0)$  y  $F'(-\sqrt{5}, 0)$

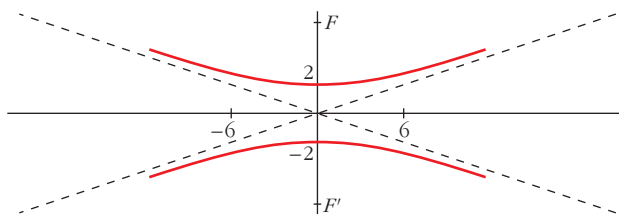
**Asíntotas:**  $y = \frac{1}{2}x$ ;  $y = -\frac{1}{2}x$



e) **Vértices:**  $(0, 2)$  y  $(0, -2)$

**Focos:**  $F(0, \sqrt{40})$  y  $F'(0, -\sqrt{40})$

$exc = \frac{\sqrt{40}}{2} \approx 3,16$ . **Asíntotas:**  $y = \frac{1}{3}x$ ;  $y = -\frac{1}{3}x$



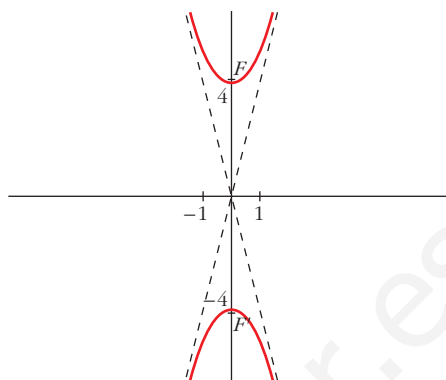
$$f) y^2 - 16x^2 = 16 \rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{1} = 1$$

**Vértices:**  $(0, 4)$  y  $(0, -4)$

**Focos:**  $F(0, \sqrt{17})$  y  $F'(0, -\sqrt{17})$

$$exc = \frac{\sqrt{17}}{4} \approx 1,03$$

**Asíntotas:**  $y = 4x$ ;  $y = -4x$



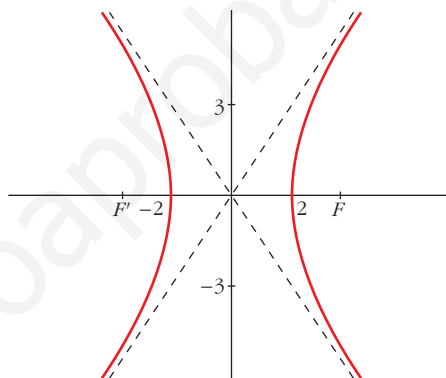
$$g) 9x^2 - 4y^2 = 36 \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

**Vértices:**  $(2, 0)$  y  $(-2, 0)$

**Focos:**  $F(\sqrt{13}, 0)$  y  $F'(-\sqrt{13}, 0)$

$$exc = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,80$$

**Asíntotas:**  $y = \frac{3}{2}x$ ;  $y = -\frac{3}{2}x$



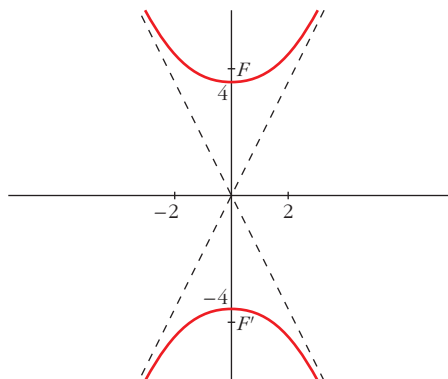
$$h) 4x^2 - y^2 + 16 = 0 \rightarrow y^2 - 4x^2 = 16 \rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$$

**Vértices:**  $(0, 4)$  y  $(0, -4)$

**Focos:**  $F(\sqrt{20}, 0)$  y  $F'(-\sqrt{20}, 0)$

$$exc = \frac{\sqrt{20}}{4} \approx 1,12$$

**Asíntotas:**  $y = 2x$ ;  $y = -2x$



**22** Halla las ecuaciones de las hipérbolas determinadas de los modos siguientes:

a) Focos  $(-4, 0)$ ,  $(4, 0)$ . Distancia entre vértices, 4.

b) Asíntotas,  $y = \pm \frac{1}{5}x$ . Vértice,  $(2, 0)$ .

c) Asíntotas,  $y = \pm 3x$ . Pasa por el punto  $(2, 1)$ .

d) Focos  $(-3, 0)$ ,  $(3, 0)$ . Excentricidad, 3.

$$a) c = 4; 2a = 4 \rightarrow a = 2; b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$\text{La ecuación es: } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

$$b) a = 2; \frac{b}{a} = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{b}{2} = \frac{1}{5} \rightarrow b = \frac{2}{5}$$

$$\text{Ecuación: } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4/25} = 1, \text{ o bien, } \frac{x^2}{4} - \frac{25y^2}{4} = 1$$

$$c) \frac{b}{a} = 3 \rightarrow b = 3a \rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9a^2} = 1$$

$$\text{Como pasa por } (2, 1) \rightarrow \frac{4}{a^2} - \frac{1}{9a^2} = 1 \rightarrow 36 - 1 = 9a^2$$

$$35 = 9a^2 \rightarrow a^2 = \frac{35}{9} \rightarrow b^2 = 9a^2 = 35$$

$$\text{Ecuación: } \frac{x^2}{35/9} - \frac{y^2}{35} = 1, \text{ o bien, } \frac{9x^2}{35} - \frac{y^2}{35} = 1$$

$$d) c = 3, \frac{c}{a} = \frac{3}{a} = 3 \rightarrow a = 1$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 1 = 8$$

$$\text{Ecuación: } \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$$

**23** Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a  $F'(-4, 0)$  y  $F(4, 0)$  es 6.

Es una hipérbola de focos  $F$  y  $F'$  y constante  $2a = 6$ .

Por tanto,  $a = 3$ ,  $c = 4$ ,  $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$ .

$$\text{La ecuación es: } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$



**24** Halla la ecuación de la hipérbola que tiene por focos los puntos  $F(-3, 0)$  y  $F'(3, 0)$  y que pasa por el punto  $P(8, 5\sqrt{3})$ .

• Hallamos la constante de la hipérbola:  $|\text{dist}(P, F) - \text{dist}(P, F')| = 2a$

$$||\vec{FP}| - |\vec{F'P}|| = 2a \rightarrow ||(11, 5\sqrt{3})| - |(5, 5\sqrt{3})|| = 2a$$

$$\sqrt{121 + 75} - \sqrt{25 + 75} = 2a \rightarrow 14 - 10 = 2a \rightarrow 4 = 2a \rightarrow a = 2$$

• Como  $a = 2$  y  $c = 3$ , entonces  $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$ .

• La ecuación es:  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

### Parábola

**25** Halla los vértices, los focos y las directrices de las siguientes parábolas, y represéntalas:

a)  $y^2 = 6x$

b)  $y^2 = -6x$

c)  $y = x^2$

d)  $y = \frac{x^2}{4}$

e)  $y^2 = 4(x - 1)$

f)  $(y - 2)^2 = 8x$

g)  $x^2 = 4(y + 1)$

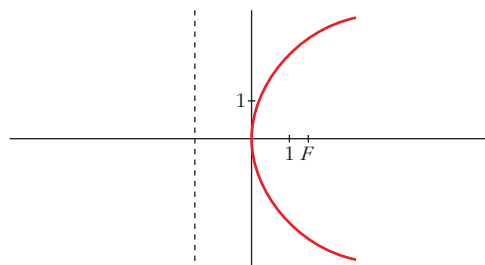
h)  $(x - 2)^2 = -6y$

a)  $\left. \begin{matrix} y^2 = 2px \\ y^2 = 6x \end{matrix} \right\} 2p = 6 \rightarrow p = 3 \rightarrow \frac{p}{2} = \frac{3}{2}$

**Vértice:**  $(0, 0)$

**Foco:**  $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

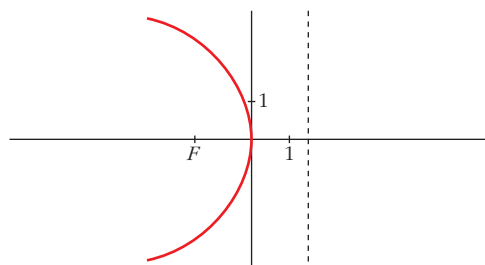
**Directriz:**  $x = -\frac{3}{2}$



b) **Vértice:**  $(0, 0)$

**Foco:**  $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

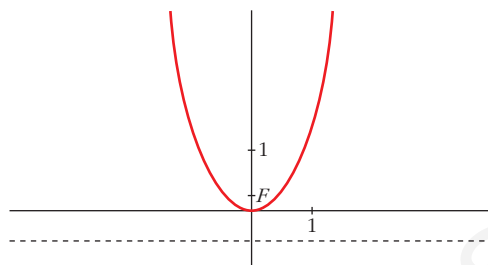
**Directriz:**  $x = \frac{3}{2}$



c) **Vértice:**  $(0, 0)$

**Foco:**  $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

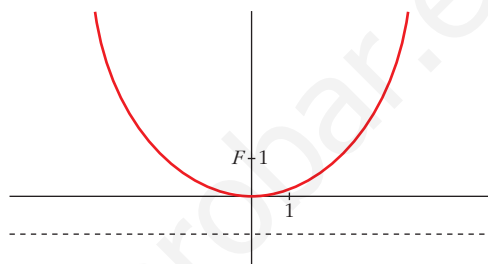
**Directriz:**  $y = -\frac{1}{4}$



d) **Vértice:**  $(0, 0)$

**Foco:**  $(0, 1)$

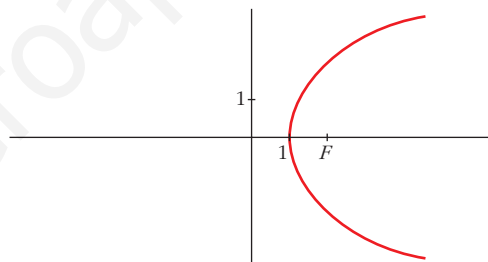
**Directriz:**  $y = -1$



e) **Vértice:**  $(1, 0)$

**Foco:**  $(2, 0)$

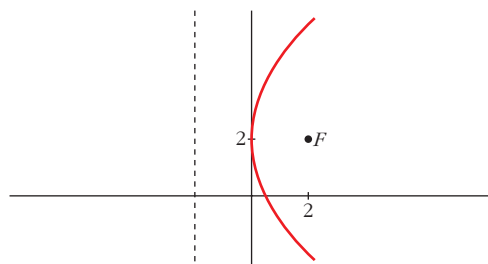
**Directriz:**  $x = 0$



f) **Vértice:**  $(0, 2)$

**Foco:**  $(2, 2)$

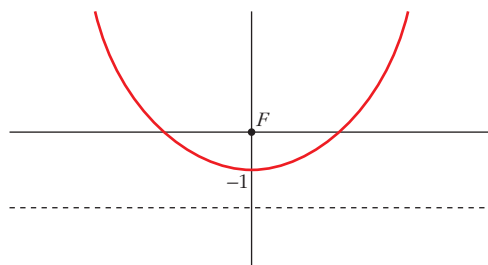
**Directriz:**  $x = -2$



g) **Vértice:**  $(0, -1)$

**Foco:**  $(0, 0)$

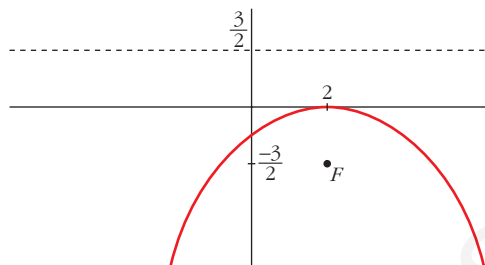
**Directriz:**  $y = -2$



h) **Vértice:**  $(2, 0)$

**Foco:**  $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$

**Directriz:**  $y = \frac{3}{2}$



**26** Halla las ecuaciones de las parábolas determinadas de los siguientes modos:

a) **Directriz,**  $x = -5$ . **Foco,**  $(5, 0)$ .

b) **Directriz,**  $y = 3$ . **Vértice,**  $(0, 0)$ .

c) **Vértice**  $(0, 0)$  **y pasa por**  $(2, 3)$ . **(2 soluciones).**

a)  $\frac{p}{2} = 5 \rightarrow p = 10 \rightarrow 2p = 20$ . Ecuación:  $y^2 = 20x$

b) El foco será  $F(0, -3)$ . Si  $P(x, y)$  es un punto de la parábola y  $d: y - 3 = 0$  es la directriz, entonces:

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d) &\rightarrow \sqrt{x^2 + (y + 3)^2} = |y - 3| \rightarrow \\ &\rightarrow x^2 + y^2 + 6y + 9 = y^2 - 6y + 9 \rightarrow x^2 = -12y \end{aligned}$$

c) Hay dos posibilidades:

I) *Eje horizontal:*  $y^2 = 2px$ . Como pasa por  $(2, 3)$ , entonces:

$$9 = 4p \rightarrow p = \frac{9}{4} \rightarrow y^2 = \frac{9}{2}x$$

II) *Eje vertical:*  $x^2 = 2py$ . Como pasa por  $(2, 3)$ , entonces:

$$4 = 6p \rightarrow p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow x^2 = \frac{4}{3}y$$

**27** Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto  $(3, 0)$  y de la recta  $y = -3$ .

Es una parábola cuyo foco es  $F(3, 0)$  y cuya directriz es  $d: y + 3 = 0$ . Si  $P(x, y)$  es un punto de la parábola, entonces:

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d) &\rightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = |y + 3| \rightarrow \\ &\rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = y^2 + 6y + 9 \rightarrow y = \frac{x^2}{6} - x \end{aligned}$$

O bien:  $(x - 3)^2 = 6\left(y + \frac{3}{2}\right)$

**28** Escribe la ecuación de la parábola de foco  $F(2, 1)$  y directriz  $y + 3 = 0$ .

Si  $P(x, y)$  es un punto de la parábola,  $F(2, 1)$  el foco, y  $d: y + 3 = 0$  la directriz, entonces:

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, F) &= \text{dist}(P, d) \rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = |y+3| \rightarrow \\ &\rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = (y+3)^2 \rightarrow \\ &\rightarrow (x-2)^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 6y + 9 \rightarrow \\ &\rightarrow (x-2)^2 = 8y + 8 \rightarrow (x-2)^2 = 8(y+1) \end{aligned}$$

**Página 237**

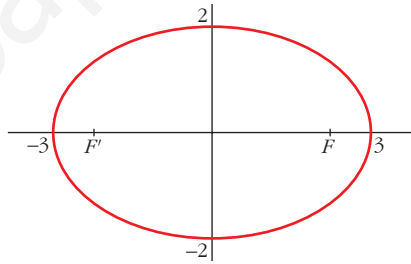
**PARA RESOLVER**

**29** Identifica las siguientes cónicas, calcula sus elementos característicos y dibújalas:

- a)  $4x^2 + 9y^2 = 36$       b)  $16x^2 - 9y^2 = 144$       c)  $9x^2 + 9y^2 = 25$   
 d)  $x^2 - 4y^2 = 16$       e)  $y^2 = 14x$       f)  $25x^2 + 144y^2 = 900$

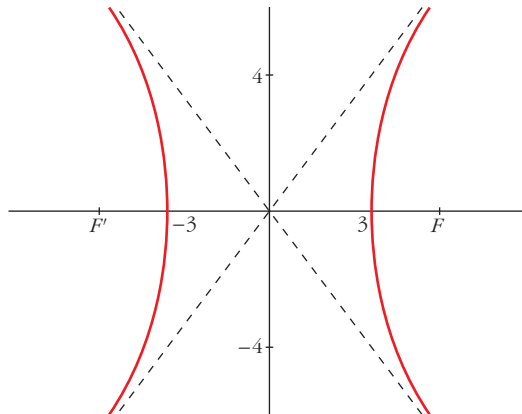
a)  $4x^2 + 9y^2 = 36 \rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Es una elipse  $\rightarrow a = 3, b = 2, c = \sqrt{5}$   
 $exc = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0,75$



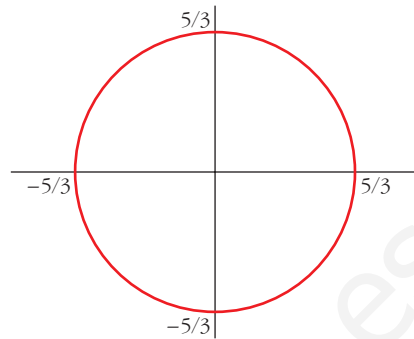
b)  $16x^2 - 9y^2 = 144 \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Es una hipérbola  $\rightarrow \begin{cases} a = 3, b = 4, c = 5; exc = \frac{5}{3} \approx 1,67 \\ \text{Asíntotas: } y = \frac{4}{3}x; y = -\frac{4}{3}x \end{cases}$



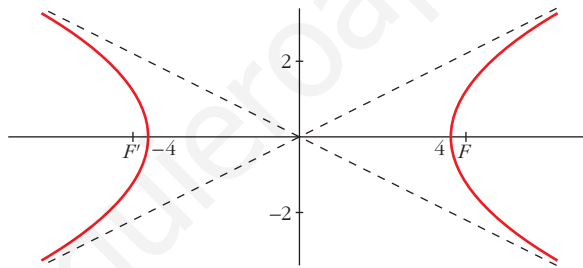
$$c) 9x^2 + 9y^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 = \frac{25}{9}$$

Es una circunferencia de centro  $(0, 0)$   
y radio  $\frac{5}{3}$ .



$$d) x^2 - 4y^2 = 16 \rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Es una hipérbola  $\rightarrow \begin{cases} a = 4, b = 2, c = 2\sqrt{5}; \text{exc} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12 \\ \text{Asíntotas: } y = \frac{1}{2}x; y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$

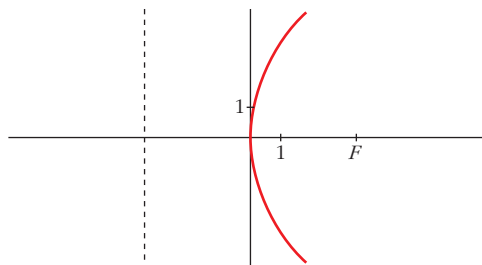


e) Es una parábola.

Vértice:  $(0, 0)$

Foco:  $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$

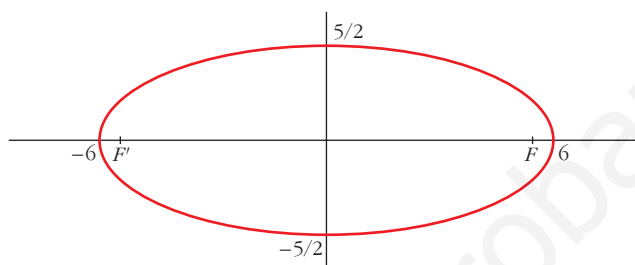
Directriz:  $x = -\frac{7}{2}$



$$f) 25x^2 + 144y^2 = 900 \rightarrow \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25/4} = 1$$

$$\text{Es una elipse} \rightarrow a = 6, b = \frac{5}{2}, c = \frac{\sqrt{119}}{12}$$

$$exc = \frac{\sqrt{119}}{12} \approx 0,91$$



- 30** Escribe la ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas y focos en el eje de abscisas, sabiendo que pasa por el punto  $P(8, -3)$  y que su eje mayor es igual al doble del menor.

El eje mayor es igual al doble del menor, es decir:  $a = 2b$ . Además, pasa por el punto  $P(8, -3)$ . Luego:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{64}{4b^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{16}{b^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{25}{b^2} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 25 = b^2; a^2 = 4b^2 = 100$$

$$\text{La ecuación es: } \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

- 31** Halla la ecuación de la hipérbola que tiene el centro en el origen de coordenadas y los focos en el eje de abscisas, sabiendo que pasa por el punto  $P(\sqrt{5}/2, 1)$  y que una de sus asíntotas es la recta  $y = 2x$ .

$$\text{La pendiente de la asíntota es } \frac{b}{a} = 2 \rightarrow b = 2a$$

$$\text{Luego } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4a^2} = 1 \text{ es la ecuación.}$$

Como pasa por el punto  $P(\sqrt{5}/2, 1)$ , entonces:

$$\frac{5/4}{a^2} - \frac{1}{4a^2} = 1 \rightarrow 10 - 1 = 4a^2 \rightarrow 9 = 4a^2 \rightarrow a^2 = \frac{9}{4} \rightarrow b^2 = 4a^2 = 9$$

$$\text{La ecuación será: } \frac{x^2}{9/4} - \frac{y^2}{9} = 1, \text{ es decir: } \frac{4x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$$

- 32** Se llama **hipérbola equilátera** a aquella en que  $a = b$ . Halla la ecuación de la **hipérbola equilátera** cuyos focos son  $(5, 0)$  y  $(-5, 0)$ .

La ecuación será:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

Como  $c^2 = a^2 + b^2$ , y sabemos que  $c = 5$  y que  $a^2 = b^2$ , entonces:

$$25 = 2a^2 \rightarrow a^2 = \frac{25}{2}$$

Por tanto, la ecuación es:  $\frac{x^2}{25/2} - \frac{y^2}{25/2} = 1$ , o bien,  $x^2 - y^2 = \frac{25}{2}$

- 33** Halla la ecuación de la **hipérbola** cuyas **asíntotas** son las rectas  $y = \pm \frac{3}{5}x$  y los focos  $(2, 0)$  y  $(-2, 0)$ .

• Si los focos son  $(2, 0)$  y  $(-2, 0)$ , entonces  $c = 2$ .

• Si las asíntotas son  $y = \pm \frac{3}{5}x$ , entonces:  $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$

• Como  $c^2 = a^2 + b^2$ , tenemos que  $a^2 + b^2 = 4$ .

• Teniendo en cuenta los dos últimos resultados:

$$\left. \begin{array}{l} b = \frac{3}{5}a \\ a^2 + b^2 = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a^2 + \frac{9}{25}a^2 = 4 \rightarrow \frac{34a^2}{25} = 4 \rightarrow 34a^2 = 100 \\ a^2 = \frac{100}{34} = \frac{50}{17} \rightarrow b^2 = 4 - a^2 = \frac{18}{17} \end{array}$$

• Por tanto, la ecuación será:  $\frac{x^2}{50/17} - \frac{y^2}{18/17} = 1$ , o bien,  $\frac{17x^2}{50} - \frac{17y^2}{18} = 1$

- 34** Halla las ecuaciones de las siguientes **parábolas**:

**a) Foco  $(0, 0)$ ; directriz  $y = -2$ .**

**b) Foco  $(2, 0)$ ; directriz  $x = -1$ .**

**c) Foco  $(1, 1)$ ; vértice  $(1, \frac{1}{2})$ .**

a) Si  $P(x, y)$  es un punto de la parábola, debe cumplir:  $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d)$ ; donde  $F$  es el foco y  $d$  la directriz.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |y + 2| \rightarrow x^2 + y^2 = y^2 + 4y + 4 \rightarrow x^2 = 4(y + 1)$$

b) Si  $P(x, y)$  es un punto de la parábola:  $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d)$ ; siendo  $F$  el foco y  $d$  la directriz.

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = |x + 1| \rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$y^2 = 6x - 3 \rightarrow y^2 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

c) Si el foco es  $F(1, 1)$  y el vértice es  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ , la directriz tiene que ser la recta

$d: y = 0$ , ya que la distancia del vértice al foco ha de ser igual a la distancia del vértice a la directriz. Así, si  $P(x, y)$  es un punto de la parábola:

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d)$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = |y| \rightarrow (x-1)^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2$$

$$(x-1)^2 = 2y - 1 \rightarrow (x-1)^2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

**35** Aplica dos métodos diferentes que permitan decidir si la recta  $r: 4x + 3y - 8 = 0$  es exterior, tangente o secante a la circunferencia:

$$(x-6)^2 + (y-3)^2 = 25$$

• MÉTODO I

Calculamos la distancia del centro de la circunferencia,  $O(6, 3)$ , a la recta  $r$ :

$$\text{dist}(O, r) = \frac{|4 \cdot 6 + 3 \cdot 3 - 8|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

Como coincide con el radio de la circunferencia, son tangentes.

• MÉTODO II

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y - 8 = 0 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 - 25 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = \frac{8-3y}{4} \\ x^2 - 12x + y^2 - 6y + 20 = 0 \end{array}$$

$$\left(\frac{8-3y}{4}\right)^2 - 12 \cdot \frac{8-3y}{4} + y^2 - 6y + 20 = 0$$

$$\frac{64 - 48y + 9y^2}{16} + \frac{36y - 96}{4} + y^2 - 6y + 20 = 0$$

$$64 - 48y + 9y^2 + 144y - 384 + 16y^2 - 96y + 320 = 0$$

$$25y^2 = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = \frac{8-3y}{4} = 2$$

Por tanto, hay un único punto de corte entre la circunferencia y la recta,  $P(2, 0)$ ; es decir, son tangentes.

**36** Halla los puntos de intersección de cada pareja de circunferencias y di cuál es su posición relativa:

a)  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0 \end{cases}$



$$a) \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 4 - 6x - 16 = 0 \rightarrow -6x = 12 \rightarrow x = -2 \\ 4 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 0 \rightarrow y = 0 \end{array} \right.$$

Las circunferencias se cortan en el punto  $(-2, 0)$ .

La primera circunferencia tiene centro en  $(3, 0)$  y radio 5; la segunda tiene centro en  $(0, 0)$  y radio 2. La distancia entre sus centros es  $d = 3$ . Como la diferencia entre sus radios es  $5 - 2 = 3 = d$ , las circunferencias son tangentes interiores.

$$b) \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª:} \\ 6y = 0 \rightarrow y = 0 \end{array} \right.$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$$

Las circunferencias se cortan en el punto  $(3, 0)$ .

La primera circunferencia tiene su centro en  $(3, 2)$  y radio 2; la segunda tiene su centro en  $(3, -1)$  y radio 1. La distancia entre sus centros es  $d = 3$ , igual que la suma de sus radios. Por tanto, las circunferencias son tangentes exteriores.

**37 Describe las siguientes cónicas.**

**Obtén sus elementos y dibújalas.**

a)  $\frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$

b)  $\frac{(x - 3)^2}{9} + \frac{(y + 2)^2}{25} = 1$

c)  $\frac{(x - 3)^2}{16} - \frac{(y + 2)^2}{4} = 1$

d)  $\frac{(y + 2)^2}{4} - \frac{(x - 3)^2}{16} = 1$

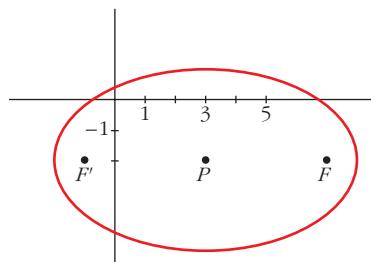
a) Es una elipse de centro  $P(3, -2)$ .

$$a = 5, \quad b = 3$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

Los focos son  $F(7, -2)$  y  $F'(-1, -2)$ .

$$\text{La excentricidad es: } exc = \frac{4}{5} = 0,8$$

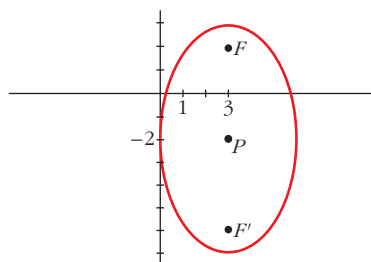


b) Es una elipse de centro  $P(3, -2)$ .

$$a = 5, \quad b = 3, \quad c = 4$$

Los focos son  $F(3, 2)$  y  $F'(3, -6)$ .

$$\text{La excentricidad es: } exc = \frac{4}{5} = 0,8$$



c) Es una hipérbola de centro  $P(3, -2)$ .

$$a = 4, b = 2, c = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

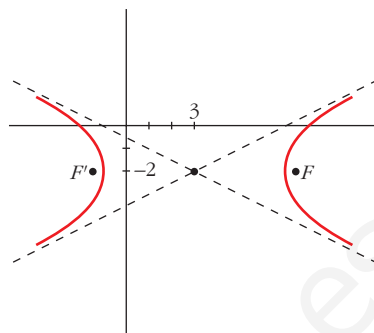
Los focos son:

$$F(3 + 2\sqrt{5}, -2) \text{ y } F'(3 - 2\sqrt{5}, -2)$$

$$\text{La excentricidad es: } exc = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12$$

Las asíntotas son:

$$y + 2 = \frac{1}{2}(x - 3); \quad y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$



d) Es una hipérbola de centro  $P(3, -2)$ .

$$b = 2, a = 4, c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

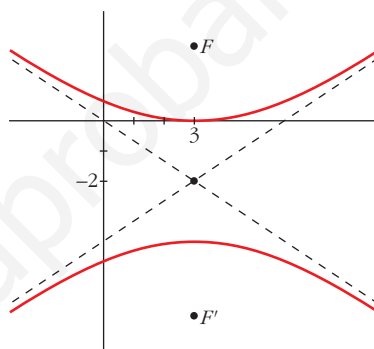
Los focos son:

$$F(3, -2 + 2\sqrt{5}) \text{ y } F'(3, -2 - 2\sqrt{5})$$

$$\text{La excentricidad es: } exc = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

Las asíntotas son:

$$y + 2 = \frac{1}{2}(x - 3); \quad y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$



**38 a) Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es  $C(-1, 1)$  y es tangente a la recta  $3x - 4y - 3 = 0$ .**

**b) De todas las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante, encuentra las que sean tangentes a la circunferencia hallada en el apartado anterior.**

a) El radio,  $r$ , de la circunferencia es la distancia del centro  $C(-1, 1)$  a la recta  $s: 3x - 4y - 3 = 0$ ; es decir:

$$r = \text{dist}(C, s) = \frac{|-3 - 4 - 3|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2$$

La ecuación será:  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ , o bien,  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

b) Las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante son de la forma  $y = x + k$ , es decir,  $t: x - y + k = 0$ . La recta  $t$  es tangente a la circunferencia cuando la distancia del centro de la circunferencia,  $C(-1, 1)$ , a la recta es igual al radio, 2. Es decir:

$$\text{dist}(C, t) = \frac{|-1 - 1 + k|}{\sqrt{2}} = 2 \rightarrow \frac{|k - 2|}{\sqrt{2}} = 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow |k - 2| = 2\sqrt{2} \begin{cases} k - 2 = 2\sqrt{2} \rightarrow k = 2 + 2\sqrt{2} \\ k - 2 = -2\sqrt{2} \rightarrow k = 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Hay dos rectas: } \begin{cases} y = x + 2 + 2\sqrt{2} \\ y = x + 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

- 39** Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto  $C(3, 2)$  y una de cuyas rectas tangentes tiene por ecuación  $4x - 3y - 5 = 0$ .

Determina si el punto  $X(3, 3)$  es interior, es exterior o está en la circunferencia.

- El radio,  $r$ , de la circunferencia es igual a la distancia del centro,  $C(3, 2)$ , a la recta  $s: 4x - 3y - 5 = 0$ ; es decir:

$$r = \text{dist}(C, s) = \frac{|12 - 6 - 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{1}{5}$$

La ecuación es:  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{25}$ , o bien,  $x^2 + y^2 - 6x - 4y - \frac{324}{25} = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow 25x^2 + 25y^2 - 150x - 100y - 324 = 0$$

- Veamos si  $X(3, 3)$  es interior, exterior o está en la circunferencia:

$$\text{dist}(C, X) = |\vec{CX}| = |(0, 1)| = 1 > \text{radio} = \frac{1}{5}$$

Luego el punto es *exterior* a la circunferencia.

- 40** a) Considera el lugar geométrico de los puntos del plano que son centro de las circunferencias que pasan por los puntos  $P(4, 0)$  y  $Q(0, 2)$ . Halla su ecuación.

b) El origen de coordenadas pertenece a una circunferencia de longitud  $6\pi$ . Calcula el centro de esta circunferencia si imponemos que debe ser un punto del lugar definido en a).

- a) Si  $C(x, y)$  es el centro de la circunferencia, la distancia de  $C$  a  $P$  y a  $Q$  ha de ser la misma, es decir:

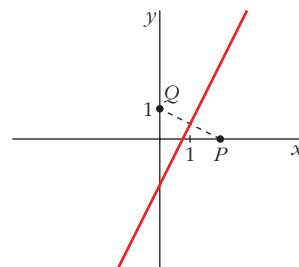
$$\text{dist}(C, P) = \text{dist}(C, Q) \rightarrow |\vec{PC}| = |\vec{QC}|$$

$$\sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x - y - 3 = 0$$

Obtenemos una recta, que es la *mediatriz del segmento PQ*.



- b) Longitud  $= 2\pi r = 6\pi \rightarrow$  radio  $= r = 3$

Su centro está en un punto de la recta  $2x - y - 3 = 0$  y pasa por el punto  $P(0, 0)$ .

El centro es de la forma  $C(x, 2x - 3)$ :

$$r = \text{dist}(P, C) = |\vec{PC}| = \sqrt{x^2 + (2x - 3)^2} = 3$$

$$x^2 + 4x^2 - 12x + 9 = 9 \rightarrow 5x^2 - 12x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 12/5 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:  $C_1(0, -3)$  y  $C_2\left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$

**41** Halla las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

a) Pasa por los puntos  $A(-2, 0)$ ,  $B(0, 4)$  y  $C(-4, 1)$ .

• *Mira el problema resuelto 1.*

b) Pasa por el origen de coordenadas y por los puntos  $A(4, 0)$  y  $B(0, 3)$ .

c) Tiene su centro en la recta  $x - 3y = 0$  y pasa por los puntos  $(-1, 4)$  y  $(3, 6)$ .

d) Pasa por los puntos  $(1, 3)$  y  $(3, 5)$  y tiene el centro en la recta  $x + 2y = 3$ .

a) El centro pertenece a la mediatriz de  $AB$ .

Ecuación de la mediatriz de  $AB$ :

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-4)^2} \rightarrow x + 2y - 3 = 0$$

También pertenece a la mediatriz de  $AC$ :

$$\text{Ecuación: } \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2} \rightarrow -4x + 2y - 13 = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ -4x + 2y - 13 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -2 \\ y = 5/2 \end{cases}$$

$$\text{Centro: } \left(-2, \frac{5}{2}\right). \text{ Radio: } |\vec{AC}| = \frac{5}{2}$$

$$\text{Ecuación: } (x+2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 5y + 4 = 0$$

b) El centro pertenece a la mediatriz del segmento que une  $O(0, 0)$  y  $A(4, 0)$ , es decir, pertenece a la recta  $x = 2$ .

También pertenece a la mediatriz del segmento que une  $O(0, 0)$  y  $B(0, 3)$ , es decir, pertenece a la recta  $y = \frac{3}{2}$ .

Por tanto, el centro de la circunferencia es  $C\left(2, \frac{3}{2}\right)$ .

El radio es la distancia del centro a cualquiera de los tres puntos:

$$r = \text{dist}(C, O) = |\vec{OC}| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

La ecuación es:  $(x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ , o bien,  $x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0$

c) Si el centro está sobre la recta  $x - 3y = 0$ , es de la forma  $C(3y, y)$ .

El centro está a igual distancia de  $A(-1, 4)$  que de  $B(3, 6)$ . Además, esta distancia es el radio,  $r$ , de la circunferencia:

$$r = \text{dist}(A, C) = \text{dist}(B, C) \rightarrow |\vec{AC}| = |\vec{BC}| \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{(3y+1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(3y-3)^2 + (y-6)^2}$$

$$9y^2 + 1 + 6y + y^2 + 16 - 8y = 9y^2 + 9 - 18y + y^2 + 36 - 12y$$

$$28y = 28 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 3y = 3$$

Por tanto, el centro de la circunferencia está en  $C(3, 1)$ , y su radio es:

$$r = |\vec{AC}| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

La ecuación es:  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$ , o bien,  $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

d) Si el centro está en la recta  $x + 2y = 3$ , es de la forma  $C(3 - 2y, y)$ .

El centro está a igual distancia de  $A(1, 3)$  y de  $B(3, 5)$ . Además, esta distancia es el radio,  $r$ , de la circunferencia:

$$r = \text{dist}(A, C) = \text{dist}(B, C) \rightarrow |\vec{AC}| = |\vec{BC}| \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{(2 - 2y)^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(-2y)^2 + (y - 5)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 + 4y^2 - 8y + y^2 + 9 - 6y = 4y^2 + y^2 + 25 - 10y \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 + 9 - 25 = -10y + 8y + 6y \rightarrow -12 = 4y \rightarrow y = -3 \rightarrow x = 3 - 2y = 9$$

Por tanto, el centro de la circunferencia está en  $C(9, 3)$ , y su radio es:

$$r = |\vec{AC}| = \sqrt{8^2 + 0^2} = 8$$

La ecuación es:  $(x - 9)^2 + (y - 3)^2 = 64$

## Página 238

**42** Calcula la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos  $F(-1, 2)$  y  $F'(3, 2)$  y cuya excentricidad es igual a  $1/3$ .

- El centro de la elipse es el punto medio entre los focos:

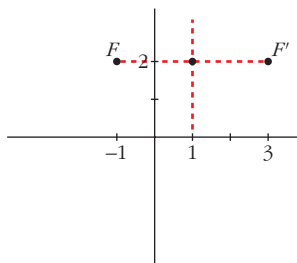
$$\left( \frac{-1 + 3}{2}, \frac{2 + 2}{2} \right) = (1, 2)$$

- La semidistancia focal es  $c = 2$ .

- La excentricidad es  $\text{exc} = \frac{c}{a} = \frac{2}{a} = \frac{1}{3} \rightarrow a = 6$

- Obtenemos  $b^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 4 = 32$

- La ecuación es:  $\frac{(x - 1)^2}{36} + \frac{(y - 2)^2}{32} = 1$



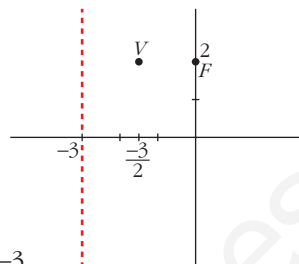
- 43** La parábola  $y^2 - 4y - 6x - 5 = 0$  tiene por foco el punto  $(0, 2)$ . Encuentra su directriz.

$$y^2 - 4y = 6x + 5 \rightarrow y^2 - 4y + 4 = 6x + 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow (y - 2)^2 = 6\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

El vértice de la parábola es  $V\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ .

Como el foco es  $F(0, 2)$ , entonces la directriz es  $x = -3$ .



- 44** Halla la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que su distancia al punto  $(4, 0)$  es el doble de su distancia a la recta  $x = 1$ .

Comprueba que dicho lugar geométrico es una cónica y halla sus focos.

Sea  $P(x, y)$  uno de los puntos del lugar geométrico. La distancia de  $P$  al punto  $Q(4, 0)$  ha de ser el doble que la distancia de  $P$  a la recta  $s: x - 1 = 0$ ; es decir:

$$\text{dist}(P, Q) = 2\text{dist}(P, s) \rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2|x-1|$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 4(x-1)^2 \rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4x^2 - 8x + 4 \rightarrow 3x^2 - y^2 = 12 \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

Es una hipérbola, centrada en  $(0, 0)$ .

$$a^2 = 4; b^2 = 12 \rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 16 \rightarrow c = 4$$

Por tanto, los focos son  $F(4, 0)$  y  $F(-4, 0)$ .

- 45** Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto  $(4, 0)$  es igual a la mitad de la distancia a la recta  $x - 16 = 0$ . Representa la curva que obtienes.

Sea  $P(x, y)$  uno de los puntos del lugar geométrico. La distancia de  $P$  a  $(4, 0)$  ha de ser igual a la mitad de la distancia de  $P$  a la recta  $x - 16 = 0$ ; es decir:

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \frac{1}{2}|x-16|$$

$$(x-4)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x-16)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = \frac{1}{4}(x^2 - 32x + 256)$$

$$4x^2 - 32x + 64 + 4y^2 = x^2 - 32x + 256$$

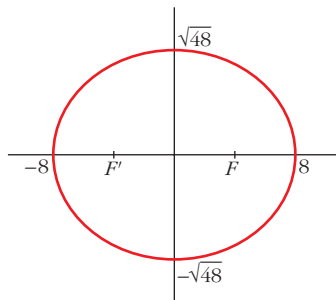
$$3x^2 + 4y^2 = 192 \rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

Es una elipse, en la que  $a = 8$  y  $b = \sqrt{48} \approx 6,93$ .

La representamos:

Los focos están en  $F(4, 0)$  y  $F'(-4, 0)$ .

La excentricidad es:  $exc = \frac{c}{a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5$



**46** Halla el lugar geométrico de los puntos  $P(x, y)$  tales que el producto de las pendientes de las rectas trazadas desde  $P$  a los puntos:  $A(-2, 1)$  y  $B(2, -1)$  sea igual a 1. ¿Qué figura obtienes? Representála.

• La pendiente de la recta que une  $P$  con  $A$  es:  $\frac{y-1}{x+2}$

• La pendiente de la recta que une  $P$  con  $B$  es:  $\frac{y+1}{x-2}$

• El producto de las pendientes ha de ser igual a 1, es decir:

$$\left(\frac{y-1}{x+2}\right) \cdot \left(\frac{y+1}{x-2}\right) = 1 \rightarrow \frac{y^2-1}{x^2-4} = 1 \rightarrow y^2-1 = x^2-4$$

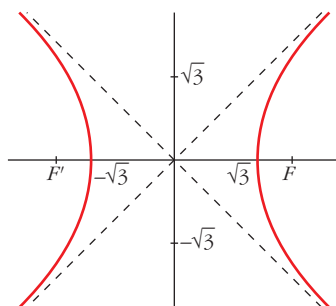
$$x^2 - y^2 = 3 \rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$$

Es una hipérbola, en la que  $a = b = \sqrt{3}$  y  $c = \sqrt{6}$ .

Los focos son  $F(\sqrt{6}, 0)$  y  $F(-\sqrt{6}, 0)$ .

Las asíntotas son:  $y = x$  e  $y = -x$

La excentricidad es:  $exc = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \approx 1,41$



- 47** a) Halla el lugar geométrico de todos los puntos  $P(x, y)$  del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos  $A(-3, 0)$  y  $B(3, 0)$  es 68.

Puedes comprobar fácilmente que se trata de una circunferencia de centro  $O(0, 0)$ . ¿Cuál es su radio?

- b) Generaliza: Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a  $A(-a, 0)$  y  $B(a, 0)$  es  $k$  (constante), y comprueba que se trata de una circunferencia de centro  $O(0, 0)$ .

Di el valor de su radio en función de  $a$  y de  $k$ . ¿Qué relación deben cumplir los parámetros  $a$  y  $k$  para que realmente sea una circunferencia?

$$\begin{aligned} \text{a) } [dist(A, P)]^2 + [dist(B, P)]^2 &= 68 \rightarrow (x+3)^2 + y^2 + (x-3)^2 + y^2 = 68 \rightarrow \\ &\rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 + x^2 - 6x + 9 + y^2 = 68 \rightarrow \\ &\rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 68 - 18 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 50 \rightarrow \\ &\rightarrow x^2 + y^2 = 25, \text{ que es la ecuación de una circunferencia de centro } P(0, 0) \text{ y} \\ &\text{radio } r = 5. \end{aligned}$$

Comprobemos que, efectivamente, se trata de esa circunferencia.

$$\text{Despejamos } y \rightarrow y = \sqrt{25 - x^2} \rightarrow P(x, y) = (x, \sqrt{25 - x^2})$$

Debe verificarse que:

$$dist(O, P) = r$$

Es decir, que:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5 \rightarrow \sqrt{x^2 + (25 - x^2)} = 5 \rightarrow \sqrt{25} = 5$$

Por tanto, como se cumple la condición, podemos asegurar que se trata de esa circunferencia.

$$\text{b) } [dist(A, P)]^2 + [dist(B, P)]^2 = k \rightarrow (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 = k \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = k \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2y^2 = k - 2a^2 \rightarrow x^2 + y^2 = \frac{k}{2} - a^2$$

que es la ecuación de una circunferencia de centro  $(0, 0)$  y radio:

$$r = \sqrt{\frac{k}{2} - a^2}$$

Para que realmente sea una circunferencia, debe ocurrir que  $r > 0$ . Por tanto, debe verificarse:

$$\frac{k}{2} - a^2 > 0 \rightarrow k > 2a$$



**48** Asocia cada una de las siguientes ecuaciones a una de las gráficas que se muestran a continuación:

a)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

b)  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

c)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

d)  $\frac{x}{4} + y = 1$

e)  $\frac{x^2}{4} + y = 1$

f)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

g)  $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

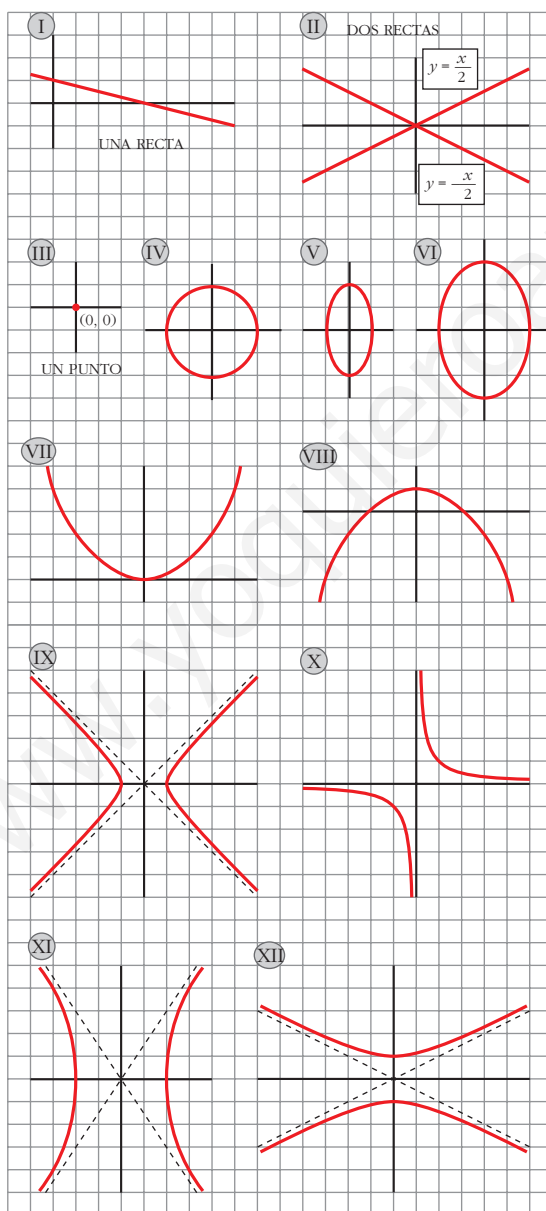
h)  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 0$

i)  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 0$

j)  $\frac{x^2}{4} - y = 0$

k)  $x^2 - y^2 = 1$

l)  $xy = 1$



a) VI

b) V

c) IV

d) I

e) VIII

f) XI

g) XII

h) III

i) II

j) VII

k) IX

l) X

**REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA**

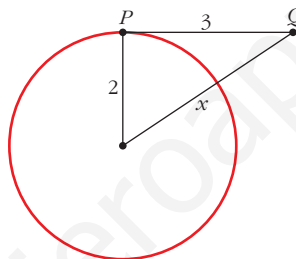
- 49** Un segmento  $PQ$  de 3 cm de longitud se mueve apoyándose tangencialmente sobre la circunferencia  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$ . Si el extremo  $P$  es el punto de tangencia, ¿cuál es el lugar geométrico que describe el otro extremo  $Q$ ?

La circunferencia dada tiene su centro en  $(2, -3)$  y su radio es  $\sqrt{4 + 9 - 9} = 2$ .

Como la tangente es perpendicular al radio, la distancia de  $Q$  al centro será siempre la misma:

$$x = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Por tanto,  $Q$  describe una circunferencia con el mismo centro que la dada y radio  $\sqrt{13}$ .



Su ecuación será:  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$ ; o bien

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$$

- 50** Pon la ecuación del lugar geométrico de los puntos  $P(x, y)$  que equidistan del punto  $F(6, -1)$  y de la recta  $r: 3x - 4y - 2 = 0$ .

(Encontrarás una ecuación complicada. No te molestes en simplificarla). ¿De qué figura se trata? Para responder a esta pregunta, fijate en cómo se ha definido y no en cuál es su ecuación.

Representa  $r$  y  $F$ . ¿Cómo habrá que situar unos nuevos ejes coordenados para que la ecuación de esa curva sea  $y^2 = kx$ ? ¿Cuánto vale  $k$ ?

$$\text{Ecuación: } \sqrt{(x - 6)^2 + (y + 1)^2} = \frac{|3x - 4y - 2|}{5}$$

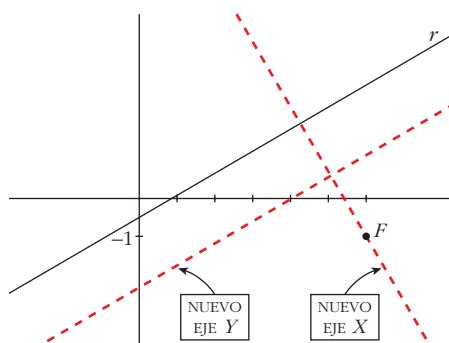
El lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto (foco) y de una recta (directriz) es una *parábola*.

La ecuación de la parábola respecto a los nuevos ejes es  $y^2 = 2px$ , donde  $p$  es la distancia del foco a la directriz:

$$\text{dist}(F, r) = \frac{|18 + 4 - 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$$

Si  $p = 4$ , entonces  $k = 8$ .

La ecuación es  $y^2 = 8x$  respecto a los nuevos ejes.



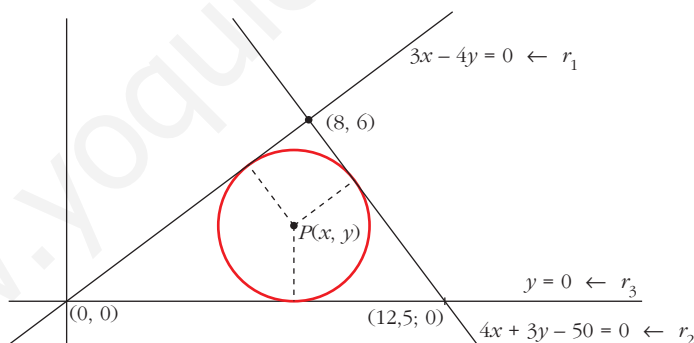
- 51** Dos circunferencias se cortan en los puntos  $(0, 0)$  y  $(0, 8)$ . ¿Cuál es su eje radical? Justifica tu respuesta.

Su eje radical será la recta que pasa por los puntos  $(0, 0)$  y  $(0, 8)$ ; es decir:  $x = 0$ .

**PARA PROFUNDIZAR**

- 52** Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo de lados:

$$y = 0 \quad 3x - 4y = 0 \quad 4x + 3y - 50 = 0$$



Si  $P(x, y)$  es el centro de la circunferencia, entonces:

- $\bullet \text{dist}(P, r_1) = \text{dist}(P, r_3) \rightarrow \frac{|3x - 4y|}{5} = |y| \rightarrow 5|y| = |3x - 4y|$

- $\left\{ \begin{array}{l} 5y = 3x - 4y \rightarrow 9y = 3x \rightarrow x = 3y \\ 5y = -3x + 4y \rightarrow y = -3x \leftarrow \text{No vale; la bisectriz que buscamos es la otra.} \end{array} \right.$

- $\bullet \text{dist}(P, r_2) = \text{dist}(P, r_3) \rightarrow \frac{|4x + 3y - 50|}{5} = |y| \rightarrow 5|y| = |4x + 3y - 50|$

- $\left\{ \begin{array}{l} 5y = 4x + 3y - 50 \rightarrow y = 2x - 25 \leftarrow \text{No vale; es la otra bisectriz.} \\ 5y = -4x - 3y + 50 \rightarrow 2x + 4y = 25 \end{array} \right.$

El punto de corte de las dos bisectrices es el incentro, es decir, el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

$$\left. \begin{array}{l} x = 3y \\ 2x + 4y = 25 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6y + 4y = 25 \rightarrow 10y = 25 \rightarrow y = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} \\ x = 3y = \frac{15}{2} \end{array}$$

El centro es  $P\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$ .

El radio es  $\text{dist}(P, r_3) = y = \frac{5}{2} = \text{radio}$

La ecuación es:  $\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ ; o bien:

$$x^2 - 15x + \frac{225}{4} + y^2 - 5y + \frac{25}{4} = \frac{25}{4}$$

$$x^2 + y^2 - 15x - 5y + \frac{225}{4} = 0 \rightarrow 4x^2 + 4y^2 - 60x - 20y + 225 = 0$$

**53 Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por  $(-3, 2)$  y  $(4, 1)$  y es tangente al eje  $OX$ .**

Si  $P(x, y)$  es el centro de la circunferencia, y llamamos a los puntos  $A(-3, 2)$  y  $B(4, 1)$ ; la distancia de  $P$  a los dos puntos y al eje  $OX$  ha de ser la misma. Además, esta distancia es igual al radio de la circunferencia.

$$\left. \begin{array}{l} \text{dist}[P, \text{eje } OX] = |y| \\ \text{dist}(P, A) = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} \\ \text{dist}(P, B) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} \end{array} \right\} \text{ han de ser iguales.}$$

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1$$

$$14x - 2y - 4 = 0 \rightarrow 7x - y - 2 = 0 \rightarrow y = 7x - 2$$

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = |y|$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = y^2$$

$$x^2 + 6x - 4(7x - 2) + 13 = 0$$

$$x^2 + 6x - 28x + 8 + 13 = 0 \rightarrow x^2 - 22x + 21 = 0$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 84}}{2} = \frac{22 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{22 \pm 20}{2} \begin{cases} x = 21 \rightarrow y = 145 \\ x = 1 \rightarrow y = 5 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

1.<sup>a</sup>) Centro  $(21, 145)$  y radio 145:

$$(x - 21)^2 + (y - 145)^2 = 21025; \text{ o bien: } x^2 + y^2 - 42x - 290y + 441 = 0$$

2.ª) Centro (1, 5) y radio 5:

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 25; \text{ o bien: } x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$$

**54** Determina la ecuación de la circunferencia de radio 10 que, en el punto (7, 2), es tangente a la recta  $3x - 4y - 13 = 0$ .

El centro pertenece a la recta perpendicular a la dada que pasa por (7, 2).

— Una recta perpendicular a  $3x - 4y - 13 = 0$  es de la forma  $4x + 3y + k = 0$ . Como (7, 2) pertenece a la recta:  $28 + 6 + k = 0 \rightarrow k = -34$ . El centro pertenece a la recta:

$$4x + 3y - 34 = 0 \rightarrow y = \frac{-4x + 34}{3}$$

— El centro es  $C\left(x, \frac{-4x + 34}{3}\right)$ .

La distancia de  $C$  al punto (7, 2) es igual al radio, que es 10, es decir:

$$\sqrt{(x - 7)^2 + \left(\frac{-4x + 34}{3} - 2\right)^2} = 10$$

$$(x - 7)^2 + \left(\frac{-4x + 34}{3}\right)^2 = 100$$

$$x^2 - 14x + 49 + \frac{16x^2 - 224x + 784}{9} = 100$$

$$9x^2 - 126x + 441 + 16x^2 - 224x + 784 = 900$$

$$25x^2 - 350x + 325 = 0 \rightarrow x^2 - 14x + 13 = 0$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 52}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{14 \pm 12}{2} \begin{cases} x = 13 \rightarrow y = -6 \\ x = 1 \rightarrow y = 10 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

1.ª) Centro (13, -6) y radio 10:

$$(x - 13)^2 + (y + 6)^2 = 100 \rightarrow x^2 + y^2 - 26x + 12y + 105 = 0$$

2.ª) Centro (1, 10) y radio 10:

$$(x - 1)^2 + (y - 10)^2 = 100 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 20y + 1 = 0$$

**55** Halla la ecuación de la parábola de vértice en el punto (2, 3) y que pasa por el punto (4, 5).

Hay dos posibilidades:

$$1) (y - 3)^2 = 2p(x - 2)$$

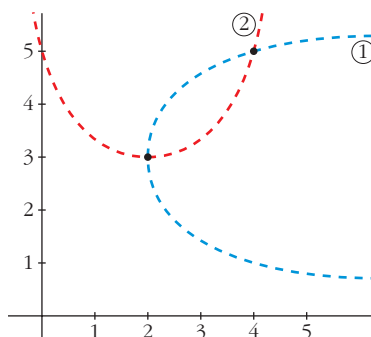
$$\text{Como pasa por (4, 5)} \rightarrow 4 = 4p \rightarrow p = 1$$

$$(y - 3)^2 = 2(x - 2)$$

$$2) (x - 2)^2 = 2p'(y - 3)$$

Como pasa por (4, 5)  $\rightarrow 4 = 4p' \rightarrow p' = 1$

$$(x - 2)^2 = 2(y - 3)$$



**56** Halla los vértices, los focos y la excentricidad de las cónicas siguientes:

a)  $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

b)  $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

c)  $x^2 + 9y^2 + 36y + 27 = 0$

a)  $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

$$9x^2 - 36x + 36 + 16y^2 + 96y + 144 - 36 - 144 + 36 = 0$$

$$(3x - 6)^2 + (4y + 12)^2 - 144 = 0$$

$$[3(x - 2)]^2 + [4(y + 3)]^2 = 144$$

$$9(x - 2)^2 + 16(y + 3)^2 = 144$$

$$\frac{(x - 2)^2}{16} + \frac{(y + 3)^2}{9} = 1$$

Es una **elipse** de **centro** (2, -3).

$$a = 4, \quad b = 3, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7}$$

**Vértices:** (6, -3); (-2, -3); (2, 0) y (2, -6)

**Focos:**  $(2 + \sqrt{7}, -3)$  y  $(2 - \sqrt{7}, -3)$

**Excentricidad:**  $exc = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0,66$

b)  $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

$$x^2 - 2x + 1 - 4y^2 - 1 - 3 = 0$$

$$(x - 1)^2 - 4y^2 = 4$$

$$\frac{(x - 1)^2}{4} - y^2 = 1$$

Es una **hipérbola** de **centro** (1, 0).

$$a = 2, b = 1, c = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

**Vértices:** (3, 0) y (-1, 0)

**Focos:**  $(\sqrt{5} + 1, 0)$  y  $(-\sqrt{5} + 1, 0)$

**Excentricidad:**  $exc = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12$

c)  $x^2 + 9y^2 + 36x + 27 = 0$

$$x^2 + 9(y^2 + 4y) + 27 = 0$$

$$x^2 + 9(y + 2)^2 - 36 + 27 = 0$$

$$x^2 + 9(y + 2)^2 = 9$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y + 2)^2}{1} = 1$$

Es una **elipse** con  $a = 3$ ,  $b = 1$ ,  $c = \sqrt{8}$ .

**Vértices:** (-3, 0), (3, 0), (0, -1), (0, 1)

**Focos:**  $(-\sqrt{10}, 0)$ ,  $(\sqrt{10}, 0)$

**Excentricidad:**  $exc = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{8}}{3} \approx 0,94$

## AUTOEVALUACIÓN

- 1. Halla la ecuación de la bisectriz de los ángulos formados por las siguientes rectas:**

$$r_1: x = 3$$

$$r_2: 3x - 4y + 1 = 0$$

Los puntos  $X(x, y)$  deben cumplir:  $dist(X, r_1) = dist(X, r_2)$

$$\left. \begin{aligned} dist(X, r_1) &= |x - 3| \\ dist(X, r_2) &= \frac{|3x - 4y + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \end{aligned} \right\} |x - 3| = \frac{|3x - 4y + 1|}{5}$$

Eliminando los valores absolutos obtenemos dos ecuaciones, las que corresponden a las dos bisectrices, perpendiculares entre sí:

$$5(x - 3) = 3x - 4y + 1 \rightarrow 2x + 4y - 16 = 0 \rightarrow x + 2y - 8 = 0$$

$$-5(x - 3) = 3x - 4y + 1 \rightarrow 8x - 4y - 14 = 0 \rightarrow 4x - 2y - 7 = 0$$

- 2. Escribe la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto  $C(1, -3)$  y pasa por el punto  $A(5, 0)$ .**

La ecuación de la circunferencia es de la forma  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = r^2$ . Para determinar  $r^2$ , sustituimos  $A(5, 0)$  en la ecuación:

$$(5 - 1)^2 + 3^2 = r^2 \rightarrow r^2 = 25$$

La ecuación de la circunferencia es, por tanto,  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$ . O, en su forma simplificada,  $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ .

- 3. Consideramos la circunferencia  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  y la recta  $r: 3x - 4y + k = 0$ . Calcula los valores que debe tomar  $k$  para que  $r$  sea interior, tangente o exterior a la circunferencia.**

Hallamos primero el centro,  $O_C$ , y el radio,  $R$ , de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1 \rightarrow O_C = (1, 0) \text{ y } R = 1$$

Calculamos la distancia del centro de la circunferencia,  $O_C$ , a la recta  $r: 3x - 4y + k = 0$ :

$$d = dist(O_C, r) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3 + k|}{5}$$



- Para que  $r$  sea interior a la circunferencia, ha de ser  $d < R = 1$ .

$$\frac{|3+k|}{5} < 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{3+k}{5} < 1 \rightarrow k < 2 \\ -\frac{3+k}{5} < 1 \rightarrow \frac{3+k}{5} > -1 \rightarrow k > -8 \end{array} \right\} \text{ Es decir, } k \in (-8, 2).$$

- Para que  $r$  sea tangente a la circunferencia, ha de ser  $d = R = 1$ .

$$\frac{|3+k|}{5} = 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{3+k}{5} = 1 \rightarrow k = 2 \\ -\frac{3+k}{5} = 1 \rightarrow k = -8 \end{array} \right.$$

- Para que  $r$  sea exterior a la circunferencia, ha de ser  $d > R = 1$ .

$$\frac{|3+k|}{5} > 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{3+k}{5} > 1 \rightarrow k > 2 \\ -\frac{3+k}{5} > 1 \rightarrow \frac{3+k}{5} < -1 \rightarrow k < -8 \end{array} \right\} \text{ Es decir,}$$

$$k \in (-\infty, -8) \cup (2, +\infty).$$

**4. Dados los puntos  $F(3, 2)$  y  $F'(1, -2)$  y la recta  $r: x + y - 1 = 0$ , obtén las ecuaciones de:**

**a) La elipse de focos  $F$  y  $F'$  cuya constante es 6.**

**b) La hipérbola de focos  $F$  y  $F'$  cuya constante es 2.**

**c) La parábola de foco  $F$  y directriz  $r$ .**

• *No es necesario que simplifiques la expresión de la ecuación.*

a) Elipse de focos  $F(3, 2)$  y  $F'(1, -2)$  y constante  $k = 6$ .

- Semieje mayor,  $a: k = 6 = 2a \rightarrow a = 3$

- Semidistancia focal,  $c = \frac{|FF'|}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$

- Semieje menor,  $b: b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 5 = 4 \rightarrow b = 2$

Por tanto, la ecuación de la elipse es  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

b) Hipérbola de focos  $F(3, 2)$  y  $F'(1, -2)$  y constante  $k = 2$ .

- Semieje  $a: k = 2 = 2a \rightarrow a = 1$

- Semidistancia focal,  $c = \frac{|FF'|}{2} = \sqrt{5}$

- $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 5 - 1 = 4 \rightarrow b = 2$

Por tanto, la ecuación de la hipérbola es  $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$ .

c) Parábola de foco  $F(3, 2)$  y recta directriz  $r: x + y - 1 = 0$ .

En una parábola de ecuación  $y^2 = 2px$ ,  $p = \text{dist}(F, r)$ :

$$p = \frac{|3 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es  $y = 4\sqrt{2}x$ .

**5. Describe las siguientes cónicas. Obtén sus elementos y dibújalas:**

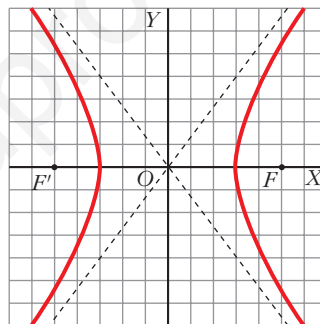
a)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

b)  $\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

a)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Es una hipérbola en la que:

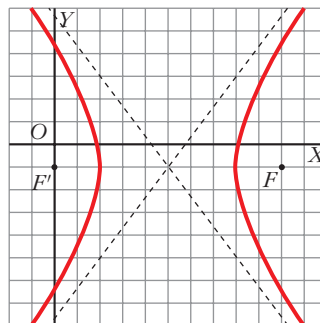
- $a = 3$ ,  $b = 4$
- Asíntotas:  $y = \frac{4}{3}x$ ,  $y = -\frac{4}{3}x$
- Semidistancia focal:  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$
- Focos:  $F(5, 0)$  y  $F'(-5, 0)$
- Vértices:  $V(3, 0)$  y  $V'(-3, 0)$



b)  $\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

Es una hipérbola igual a la del apartado anterior pero centrada en el punto  $(5, -1)$ .

- $a = 3$ ,  $b = 4$ ,  $c = 5$
- Asíntotas:  $y = \frac{4}{3}x - \frac{23}{3}$ ,  $y = -\frac{4}{3}x + \frac{17}{3}$
- Focos:  $F(10, -1)$ ,  $F'(0, -1)$
- Vértices:  $V(8, -1)$ ,  $V'(2, -1)$



**6. Obtén la ecuación de la elipse de focos  $F(-4, 0)$  y  $F'(4, 0)$  y excentricidad 0,8.**

$F(-4, 0)$   $F'(4, 0)$   $exc = 0,8$

$$c = \frac{|FF'|}{2} = 4$$

$$exc = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0,8 \rightarrow a = 5$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow b = 3$$

La ecuación de la elipse es  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

- 7. Halla los focos, la excentricidad y las asíntotas de la hipérbola  $9x^2 - 16y^2 = 144$ . Dibújala.**

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 16 \rightarrow a = 4$$

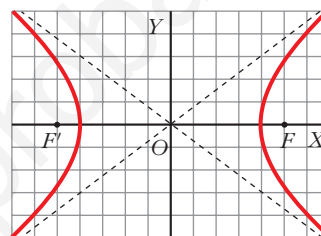
$$b^2 = 9 \rightarrow b = 3$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5$$

Los focos son  $F(5, 0)$  y  $F'(-5, 0)$ .

$$\text{Excentricidad: } exc = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Asíntotas: } y = \frac{3}{4}x \text{ e } y = -\frac{3}{4}x$$



- 8. Escribe la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta  $x = 3$ , y como vértice, el origen de coordenadas.**

$$d: x = 3$$

En una parábola  $y^2 = 2px$ , la recta directriz es  $x = -\frac{p}{2}$ .

$$\text{Por tanto, } 3 = -\frac{p}{2} \rightarrow p = -6$$

La ecuación de la parábola es  $y^2 = -12x$ .

- 9. Halla el eje radical a las circunferencias:**

$$C_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 4x - 18y + 21 = 0$$

**Representa las circunferencias y su eje radical.**

Sea  $P(x, y)$  un punto del eje radical de ambas circunferencias. Como las potencias de  $P$  a  $C_1$  y de  $P$  a  $C_2$  deben coincidir:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = x^2 + y^2 - 4x - 18y + 21 \rightarrow 16y = 20 \rightarrow y = \frac{5}{4}$$

El eje radical de las circunferencias es  $y = \frac{5}{4}$ .

Para hacer la representación, calculamos el centro y el radio de cada circunferencia:

$$C_1 \begin{cases} A = -4 \\ B = -2 \\ C = 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} O_{C_1} &= (2, 1) \\ r &= \sqrt{4 + 1 - 1} = 2 \end{aligned}$$

$$C_2 \begin{cases} A = -4 \\ B = -18 \\ C = 21 \end{cases} \quad \begin{aligned} O_{C_2} &= (2, 9) \\ r' &= \sqrt{4 + 81 - 21} = 8 \end{aligned}$$

