# 1 Fórmulas trigonométricas

## Página 131

**1** **Demuestra la fórmula II.2 a partir de la fórmula:**

$$\boldsymbol{cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta}$$

$$cos\ (\alpha - \beta) = cos\ (\alpha + (-\beta)) = cos\ \alpha\ cos\ (-\beta) - sen\ \alpha\ sen\ (-\beta) =$$
$$= cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ (-sen\ \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta$$

**2** **Demuestra II.3 a partir de** $\boldsymbol{tg\ (\alpha + \beta) = \dfrac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta}}$**.**

$$tg\ (\alpha - \beta) = tg\ (\alpha + (-\beta)) = \frac{tg\ \alpha + tg\ (-\beta)}{1 - tg\ \alpha\ tg\ (-\beta)} \overset{(*)}{=} \frac{tg\ \alpha + (-tg\ \beta)}{1 - tg\ \alpha\ (-tg\ \beta)} = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha\ tg\ \beta}$$

(∗) Como $\left.\begin{array}{l} sen\ (-\alpha) = -sen\ \alpha \\ cos\ (-\alpha) = cos\ \alpha \end{array}\right\} \to tg\ (-\alpha) = -tg\ \alpha$

**3** **Demuestra la fórmula II.3 a partir de las siguientes:**

$$\boldsymbol{sen\ (\alpha - \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta}$$
$$\boldsymbol{cos\ (\alpha - \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta}$$

$$tg\ (\alpha - \beta) = \frac{sen\ (\alpha - \beta)}{cos\ (\alpha - \beta)} = \frac{sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta} \overset{(*)}{=} \frac{\dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta} - \dfrac{cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}}{\dfrac{cos\ \alpha\ cos\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta} + \dfrac{sen\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}} = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha\ tg\ \beta}$$

(∗) Dividimos numerador y denominador por $cos\ \alpha\ cos\ \beta$.

**4** **Si** $\boldsymbol{sen\ 12° = 0{,}2}$ **y** $\boldsymbol{sen\ 37° = 0{,}6}$**, halla** $\boldsymbol{cos\ 12°}$**,** $\boldsymbol{tg\ 12°}$**,** $\boldsymbol{cos\ 37°}$ **y** $\boldsymbol{tg\ 37°}$**. Calcula, a partir de ellas, las razones trigonométricas de 49° y de 25°, usando las fórmulas (I) y (II).**

- $sen\ 12° = 0{,}2$

  $cos\ 12° = \sqrt{1 - sen^2\ 12°} = \sqrt{1 - 0{,}04} = 0{,}98$

  $tg\ 12° = \dfrac{0{,}2}{0{,}98} = 0{,}2$

- $sen\ 37° = 0{,}6$

  $cos\ 37° = \sqrt{1 - sen^2\ 37°} = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$

  $tg\ 37° = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

- 49° = 12° + 37°, luego:

  $sen\ 49° = sen\ (12° + 37°) = sen\ 12°\ cos\ 37° + cos\ 12°\ sen\ 37° = 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}98 \cdot 0{,}6 = 0{,}748$

  $cos\ 49° = cos\ (12° + 37°) = cos\ 12°\ cos\ 37° - sen\ 12°\ sen\ 37° = 0{,}98 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}664$

  $tg\ 49° = tg\ (12° + 37°) = \dfrac{tg\ 12° + tg\ 37°}{1 - tg\ 12°\ tg\ 37°} = \dfrac{0{,}2 + 0{,}75}{1 - 0{,}2 \cdot 0{,}75} = 1{,}12$

  $\left(\text{Podría calcularse } tg\ 49° = \dfrac{sen\ 49°}{cos\ 49°}\right)$.

- 25° = 37° – 12°, luego:

$sen\ 25° = sen\ (37° - 12°) = sen\ 37°\ cos\ 12° - cos\ 37°\ sen\ 12° = 0{,}6 \cdot 0{,}98 - 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}428$

$cos\ 25° = cos\ (37° - 12°) = cos\ 37°\ cos\ 12° + sen\ 37°\ sen\ 12° = 0{,}8 \cdot 0{,}98 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}904$

$$tg\ 25° = tg\ (37° - 12°) = \frac{tg\ 37° - tg\ 12°}{1 + tg\ 37°\ tg\ 12°} = \frac{0{,}75 - 0{,}2}{1 + 0{,}75 \cdot 0{,}2} = 0{,}478$$

**5** **Demuestra esta igualdad:**

$$\frac{cos\ (a+b) + cos\ (a-b)}{sen\ (a+b) + sen\ (a-b)} = \frac{1}{tg\ a}$$

$$\frac{cos\ (a+b) + cos\ (a-b)}{sen\ (a+b) + sen\ (a-b)} = \frac{cos\ a\ cos\ b - sen\ a\ sen\ b + cos\ a\ cos\ b + sen\ a\ sen\ b}{sen\ a\ cos\ b + cos\ a\ sen\ b + sen\ a\ cos\ b - cos\ a\ sen\ b} =$$

$$= \frac{2\ cos\ a\ cos\ b}{2\ sen\ a\ cos\ b} = \frac{cos\ a}{sen\ a} = \frac{1}{tg\ a}$$

**6** **Demuestra las fórmulas (III.1) y (III.3) haciendo $\alpha = \beta$ en las fórmulas (I).**

$sen\ 2\alpha = sen\ (\alpha + \alpha) = sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos\ \alpha\ sen\ \alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$

$$tg\ 2\alpha = tg\ (\alpha + \alpha) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \alpha}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \alpha} = \frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\ \alpha}$$

**7** **Halla las razones trigonométricas de 60° usando las de 30°.**

$$sen\ 60° = sen\ (2 \cdot 30°) = 2\ sen\ 30°\ cos\ 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 60° = cos\ (2 \cdot 30°) = cos^2\ 30° - sen^2\ 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$tg\ 60° = tg\ (2 \cdot 30°) = \frac{2\ tg\ 30°}{1 - tg^2\ 30°} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - (\sqrt{3}/3)^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - 3/9} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{2/3} = \sqrt{3}$$

**8** **Halla las razones trigonométricas de 90° usando las de 45°.**

$$sen\ 90° = sen\ (2 \cdot 45°) = 2\ sen\ 45°\ cos\ 45° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$cos\ 90° = cos\ (2 \cdot 45°) = cos^2\ 45° - sen^2\ 45° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

$$tg\ 90° = tg\ (2 \cdot 45°) = \frac{2\ tg\ 45°}{1 - tg^2\ 45°} = \frac{2 \cdot 1}{1 - 1} \to \text{No existe.}$$

**9** **Demuestra que:** $\dfrac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = \dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}$

$$\frac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = \frac{2\ sen\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{2\ sen\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \frac{2\ sen\ \alpha\ (1 - cos\ \alpha)}{2\ sen\ \alpha\ (1 + cos\ \alpha)} = \frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}$$

## Página 132

**Hazlo tú.** **Halla $cos\ 15°$ y $tg\ 15°$.**

$$cos\ 15° = cos\ \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

$$tg\ 15° = \sqrt{\frac{1 - cos\ 30°}{1 + cos\ 30°}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{1 + \sqrt{3}/2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$$

**10 Siguiendo las indicaciones que se dan, demuestra detalladamente las fórmulas IV.1, IV.2 y IV.3.**

- $cos\ \alpha = cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = cos^2 \frac{\alpha}{2} - sen^2 \frac{\alpha}{2}$

  Por la igualdad fundamental:

  $cos^2 \frac{\alpha}{2} + sen^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \rightarrow 1 = cos^2 \frac{\alpha}{2} + sen^2 \frac{\alpha}{2}$

  De aquí:

  a) Sumando ambas igualdades:

  $1 + cos\ \alpha = 2\ cos^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + cos\ \alpha}{2} \rightarrow cos \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}}$

  b) Restando las igualdades (2.ª – 1.ª):

  $1 - cos\ \alpha = 2\ sen^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow sen^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\ \alpha}{2} \rightarrow sen \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}}$

- Por último:

  $tg \frac{\alpha}{2} = \frac{sen\ (\alpha/2)}{cos\ (\alpha/2)} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}$

**11 Sabiendo que *cos* 78° = 0,2, calcula *sen* 78° y *tg* 78°. Averigua las razones trigonométricas de 39° aplicando las fórmulas del ángulo mitad.**

- $cos\ 78° = 0,2$

  $sen\ 78° = \sqrt{1 - cos^2 78°} = \sqrt{1 - 0,2^2} = 0,98$

  $tg\ 78° = \frac{0,98}{0,2} = 4,9$

- $sen\ 39° = sen \frac{78°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 78°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,2}{2}} = 0,63$

  $cos\ 39° = cos \frac{78°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 78°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0,2}{2}} = 0,77$

  $tg\ 39° = tg \frac{78°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 78°}{1 + cos\ 78°}} = \sqrt{\frac{1 - 0,2}{1 + 0,2}} = 0,82$

**12 Halla las razones trigonométricas de 30° a partir de *cos* 60° = 0,5.**

- $cos\ 60° = 0,5$
- $sen\ 30° = sen \frac{60°}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0,5}{2}} = 0,5$

  $cos\ 30° = cos \frac{60°}{2} = \sqrt{\frac{1 + 0,5}{2}} = 0,866$

  $tg\ 30° = tg \frac{60°}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0,5}{1 + 0,5}} = 0,577$

**13 Halla las razones trigonométricas de 45° a partir de *cos* 90° = 0.**

- $cos\ 90° = 0$
- $sen\ 45° = sen \frac{90°}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  $cos\ 45° = cos \frac{90°}{2} = \sqrt{\frac{1 + 0}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  $tg\ 45° = tg \frac{90°}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0}{1 + 0}} = \sqrt{1} = 1$

**14** **Demuestra esta igualdad:** $2\,tg\,\alpha \cdot sen^2\dfrac{\alpha}{2} + sen\,\alpha = tg\,\alpha$

$$2\,tg\,\alpha \cdot sen^2\frac{\alpha}{2} + sen\,\alpha = 2\,tg\,\alpha \cdot \frac{1-cos\,\alpha}{2} + sen\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}(1-cos\,\alpha) + sen\,\alpha = sen\,\alpha\left(\frac{1-cos\,\alpha}{cos\,\alpha}+1\right) =$$

$$= sen\,\alpha\left(\frac{1-cos\,\alpha+cos\,\alpha}{cos\,\alpha}\right) = sen\,\alpha \cdot \frac{1}{cos\,\alpha} = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = tg\,\alpha$$

**15** **Demuestra la siguiente igualdad:**

$$\frac{2\,sen\,\alpha - sen\,2\alpha}{2\,sen\,\alpha + sen\,2\alpha} = tg^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{2\,sen\,\alpha - sen\,2\alpha}{2\,sen\,\alpha + sen\,2\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha - 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha}{2\,sen\,\alpha + 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha\,(1-cos\,\alpha)}{2\,sen\,\alpha\,(1+cos\,\alpha)} = \frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha} = tg^2\frac{\alpha}{2}$$

## Página 133

**16** **Para demostrar las fórmulas (V.3) y (V.4), da los siguientes pasos:**

- **Expresa en función de** $\alpha$ **y** $\beta$**:**

  $cos\,(\alpha+\beta) = \ldots \qquad cos\,(\alpha-\beta) = \ldots$

- **Suma y resta como hemos hecho arriba y obtendrás dos expresiones.**
- **Sustituye en las expresiones anteriores:**

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta = A\\ \alpha-\beta = B\end{array}\right\}$$

- $cos\,(\alpha+\beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta - sen\,\alpha\,sen\,\beta$

  $cos\,(\alpha-\beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\alpha\,sen\,\beta$

  Sumando $\rightarrow$ $cos\,(\alpha+\beta) + cos\,(\alpha-\beta) = 2\,cos\,\alpha\,cos\,\beta$ (1)

  Restando $\rightarrow$ $cos\,(\alpha+\beta) - cos\,(\alpha-\beta) = -2\,sen\,\alpha\,sen\,\beta$ (2)

- Llamando $\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta = A\\ \alpha-\beta = B\end{array}\right\} \rightarrow \alpha = \dfrac{A+B}{2},\ \beta = \dfrac{A-B}{2}$ (al resolver el sistema)
- Luego, sustituyendo en (1) y (2), se obtiene:

  (1) $\rightarrow$ $cos\,A + cos\,B = 2\,cos\dfrac{A+B}{2}\,cos\dfrac{A-B}{2}$ (2) $\rightarrow$ $cos\,A - cos\,B = -2\,sen\dfrac{A+B}{2}\,sen\dfrac{A-B}{2}$

**17** **Transforma en producto y calcula.**

**a)** $sen\,75° - sen\,15°$ **b)** $sen\,75° + sen\,15°$ **c)** $cos\,75° - cos\,15°$

a) $sen\,75° - sen\,15° = 2\,cos\dfrac{75°+15°}{2}\,sen\dfrac{75°-15°}{2} = 2\,cos\,45°\,sen\,30° = 2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $sen\,75° + sen\,15° = 2\,sen\dfrac{75°+15°}{2}\,cos\dfrac{75°-15°}{2} = 2\,sen\,45°\,cos\,30° = 2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

c) $cos\,75° - cos\,15° = -2\,sen\dfrac{75°+15°}{2}\,sen\dfrac{75°-15°}{2} = -2\,sen\,45°\,cos\,30° = -2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

**18** **Expresa en forma de producto el numerador y el denominador de esta fracción y simplifica el resultado:**

$$\frac{sen\,4a + sen\,2a}{cos\,4a + cos\,2a}$$

$$\frac{sen\,4a + sen\,2a}{cos\,4a + cos\,2a} = \frac{2\,sen\dfrac{4a+2a}{2}\,cos\dfrac{4a-2a}{2}}{2\,cos\dfrac{4a+2a}{2}\,cos\dfrac{4a-2a}{a}} = \frac{2\,sen\,3a}{2\,cos\,3a} = tg\,3a$$

# 2 Ecuaciones trigonométricas

## Página 134

**Hazlo tú. Resuelve** $sen\ (\alpha + 30°) = 2\ cos\ \alpha$**.**

$sen\ (\alpha + 30°) = 2\ cos\ \alpha$

$sen\ \alpha\ cos\ 30° + cos\ \alpha\ sen\ 30° = 2\ cos\ \alpha$

$$\frac{1}{2}\, sen\ \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\, cos\ \alpha = 2\ cos\ \alpha$$

Dividimos los dos miembros entre $cos\ \alpha$:

$$\frac{1}{2}\, tg\ \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \ \to\ tg\ \alpha + \sqrt{3} = 4 \ \to\ tg\ \alpha = 4 - \sqrt{3}$$

Soluciones: $\begin{cases} \alpha_1 = 66°\ 12'\ 22'' \\ \alpha_2 = 246°\ 12'\ 22'' \end{cases}$

**Hazlo tú. Resuelve** $cos\ \alpha = sen\ 2\alpha$**.**

$cos\ \alpha = sen\ 2\alpha$

$cos\ \alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha \ \to\ cos\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha = 0 \ \to\ cos\ \alpha\ (1 - 2\ sen\ \alpha) = 0$

Posibles soluciones: $\begin{cases} cos\ \alpha = 0 \ \to\ \alpha_1 = 90°,\ \alpha_2 = 270° \\ 1 - 2\ sen\ \alpha = 0 \ \to\ sen\ \alpha = \dfrac{1}{2} \ \to\ \alpha_3 = 30°,\ \alpha_4 = 150° \end{cases}$

Al comprobarlas sobre la ecuación inicial, vemos que las cuatro soluciones son válidas.

## Página 135

**Hazlo tú. Resuelve** $sen\ 3\alpha - sen\ \alpha = 0$**.**

$sen\ 3\alpha - sen\ \alpha = 0$

$$2\ cos\ \frac{3\alpha + \alpha}{2}\ sen\ \frac{3\alpha - \alpha}{2} = 0 \ \to\ 2\ cos\ 2\alpha\ sen\ \alpha = 0 \ \to\ cos\ 2\alpha\ sen\ \alpha = 0$$

Si $cos\ 2\alpha = 0 \ \to\ \begin{cases} 2\alpha = 90° \ \to\ \alpha_1 = 45° \\ 2\alpha = 270° \ \to\ \alpha_2 = 135° \\ 2\alpha = 90° + 360° = 450° \ \to\ \alpha_3 = 225° \\ 2\alpha = 270° + 360° = 630° \ \to\ \alpha_4 = 315° \end{cases}$

Si $sen\ \alpha = 0 \ \to\ \alpha_5 = 0°,\ \alpha_6 = 180°$

**1 Resuelve.**

**a)** $tg\ \alpha = -\sqrt{3}$ **b)** $sen\ \alpha = cos\ \alpha$ **c)** $sen^2\ \alpha = 1$ **d)** $sen\ \alpha = tg\ \alpha$

a) $x = 120° + k \cdot 360°$ o bien $x = 300° + k \cdot 360°$

Las dos soluciones quedan recogidas en:

$$x = 120° + k \cdot 180° = \frac{2\pi}{3} + k\,\pi \text{ rad} = x \ \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}$$

b) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\,\pi \text{ rad}$ con $k \in \mathbb{Z}$

c) $\left.\begin{array}{l} \text{Si } sen\ x = 1 \ \to\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \text{ rad} \\ \text{Si } sen\ x = -1 \ \to\ x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \text{ rad} \end{array}\right\} \to\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi \text{ rad} \ \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}$

d) En ese caso debe ocurrir que:

$$\left.\begin{array}{l}\text{O bien } sen\, x = 0 \ \rightarrow \ x = k\pi \text{ rad}\\ \text{O bien } cos\, x = 1 \ \rightarrow \ x = 2k\pi \text{ rad}\end{array}\right\} \rightarrow x = k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$$

**2** **Resuelve estas ecuaciones:**

**a)** $2\,cos^2\,\alpha + cos\,\alpha - 1 = 0$

**b)** $2\,sen^2\,\alpha - 1 = 0$

**c)** $tg^2\,\alpha - tg\,\alpha = 0$

**d)** $2\,sen^2\,\alpha + 3\,cos\,\alpha = 3$

a) $cos\,\alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \ \rightarrow \ \alpha_1 = 60°, \ \alpha_2 = 300° \\ -1 \ \rightarrow \ \alpha_3 = 180° \end{cases}$

Las tres soluciones son válidas (se comprueba en la ecuación inicial).

b) $2\,sen^2\,\alpha - 1 = 0 \ \rightarrow \ sen^2\,\alpha = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow \ sen\,\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $sen\,\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow \ \alpha_1 = 45°, \ \alpha_2 = 135°$
- Si $sen\,\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow \ \alpha_3 = -45° = 315°, \ \alpha_4 = 225°$

Todas las soluciones son válidas.

c) $tg^2\,\alpha - tg\,\alpha = 0 \ \rightarrow \ tg\,\alpha\,(tg\,\alpha - 1) = 0 \begin{cases} tg\,\alpha = 0 \ \rightarrow \ \alpha_1 = 0°, \ \alpha_2 = 180° \\ tg\,\alpha = 1 \ \rightarrow \ \alpha_3 = 45°, \ \alpha_4 = 225° \end{cases}$

Todas las soluciones son válidas.

d) $2\,sen^2\,\alpha + 3\,cos\,\alpha = 3 \ \overset{(*)}{\rightarrow} \ 2(1 - cos^2\,\alpha) + 3\,cos\,\alpha = 3$

(*) Como $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \ \rightarrow \ sen^2\,\alpha = 1 - cos^2\,\alpha$

$2 - 2\,cos^2\,\alpha + 3\,cos\,\alpha = 3 \ \rightarrow \ 2\,cos^2\,\alpha - 3\,cos\,\alpha + 1 = 0$

$cos\,\alpha = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \dfrac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$

Entonces:

- Si $cos\,\alpha = 1 \ \rightarrow \ \alpha_1 = 0°$
- Si $cos\,\alpha = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow \ \alpha_2 = 60°, \ \alpha_3 = -60° = 300°$

Las tres soluciones son válidas.

**3** **Transforma en producto** $\boldsymbol{sen\,5\alpha - sen\,3\alpha}$ **y resuelve después la ecuación** $\boldsymbol{sen\,5\alpha - sen\,3\alpha = 0}$**.**

$sen\,5\alpha - sen\,3\alpha = 0 \ \rightarrow \ 2\,cos\,\dfrac{5\alpha + 3\alpha}{2}\,sen\,\dfrac{5\alpha - 3\alpha}{2} = 0 \ \rightarrow \ 2\,cos\,\dfrac{8\alpha}{2}\,sen\,\dfrac{2\alpha}{2} = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ 2\,cos\,4\alpha\,sen\,\alpha = 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} cos\,4\alpha = 0 \\ sen\,\alpha = 0 \end{cases}$

- Si $cos\,4\alpha = 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} 4\alpha = 90° & \rightarrow \ \alpha_1 = 22°\,30' \\ 4\alpha = 270° & \rightarrow \ \alpha_2 = 67°\,30' \\ 4\alpha = 90° + 36° & \rightarrow \ \alpha_3 = 112°\,30' \\ 4\alpha = 270° + 360° & \rightarrow \ \alpha_4 = 157°\,30' \end{cases}$
- Si $sen\,\alpha = 0 \ \rightarrow \ \alpha_5 = 0°, \ \alpha_6 = 180°$

Comprobamos que las seis soluciones son válidas.

**4** **Resuelve.**

**a)** $\boldsymbol{4\cos 2\alpha + 3\cos\alpha = 1}$

**b)** $\boldsymbol{tg\, 2\alpha + 2\cos\alpha = 0}$

**c)** $\boldsymbol{\sqrt{2}\cos(\alpha/2) - \cos\alpha = 1}$

**d)** $\boldsymbol{2\,sen\,\alpha\cos^2\alpha - 6\,sen^3\alpha = 0}$

a) $4\cos 2\alpha + 3\cos\alpha = 1 \to 4(\cos^2\alpha - sen^2\alpha) + 3\cos\alpha = 1 \to$

$\to 4(\cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)) + 3\cos\alpha = 1 \to 4(2\cos^2\alpha - 1) + 3\cos\alpha = 1 \to$

$\to 8\cos^2\alpha - 4 + 3\cos\alpha = 1 \to 8\cos^2\alpha + 3\cos\alpha - 5 = 0 \to$

$$\to \cos\alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{16} = \frac{-3\pm 13}{16} = \begin{cases} 10/16 = 5/8 = 0{,}625 \\ -1 \end{cases}$$

- Si $\cos\alpha = 0{,}625 \to \alpha_1 = 51°\ 19'\ 4{,}13''$, $\alpha_2 = -51°\ 19'\ 4{,}13''$
- Si $\cos\alpha = -1 \to \alpha_3 = 180°$

Al comprobar las soluciones, las tres son válidas.

b) $tg\,2\alpha + 2\cos\alpha = 0 \to \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} + 2\cos\alpha = 0 \to$

$$\to \frac{tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} + \cos\alpha = 0 \to \frac{\dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}}{1-\dfrac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}} + \cos\alpha = 0 \to$$

$$\to \frac{sen\,\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - sen^2\alpha} + \cos\alpha = 0 \to sen\,\alpha\cos\alpha + \cos\alpha(\cos^2\alpha - sen^2\alpha) = 0 \to$$

$\to \cos\alpha(sen\,\alpha + \cos^2\alpha - sen^2\alpha) = 0 \to \cos\alpha(sen\,\alpha + 1 - sen^2\alpha - sen^2\alpha) \to$

$\to \cos\alpha(1 + sen\,\alpha - 2\,sen^2\alpha) = 0 \to$

$$\to \begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ 1 + sen\,\alpha - 2\,sen^2\alpha = 0 \to sen\,\alpha = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-4} = \begin{cases} -1/2 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$$

- Si $\cos\alpha = 0 \to \alpha_1 = 90°$, $\alpha_2 = 270°$
- Si $sen\,\alpha = -\dfrac{1}{2} \to \alpha_3 = 210°$, $\alpha_4 = 330° = -30°$
- Si $sen\,\alpha = 1 \to \alpha_5 = 90° = \alpha_1$

Al comprobar las soluciones, vemos que todas ellas son válidas.

c) $\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} - \cos\alpha = 1 \to \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} - \cos\alpha = 1 \to$

$\to \sqrt{1+\cos\alpha} - \cos\alpha = 1 \to \sqrt{1-\cos\alpha} = 1 + \cos\alpha \to$

$\to 1 + \cos\alpha = 1 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha \to \cos^2\alpha + \cos\alpha = 0 \to \cos\alpha(\cos\alpha + 1) = 0$

- Si $\cos\alpha = 0 \to \alpha_1 = 90°$, $\alpha_2 = 270°$
- Si $\cos\alpha = -1 \to \alpha_3 = 180°$

Al comprobar las soluciones, podemos ver que las únicas válidas son: $\alpha_1 = 90°$ y $\alpha_3 = 180°$

d) $2\,sen\,\alpha\cos^2\alpha - 6\,sen^3\alpha = 0 \to 2\,sen\,\alpha(\cos^2\alpha - 3\,sen^2\alpha) = 0 \to$

$\to 2\,sen\,\alpha(\cos^2\alpha + sen^2\alpha - 4\,sen^2\alpha) = 0 \to 2\,sen\,\alpha(1 - 4\,sen^2\alpha) = 0$

- Si $sen\,\alpha = 0 \to \alpha_1 = 0°$, $\alpha_2 = 180°$
- Si $sen^2\alpha = \dfrac{1}{4} \to sen\,\alpha = \pm\dfrac{1}{2} \to \alpha_3 = 30°$, $\alpha_4 = 150°$, $\alpha_5 = 210°$, $\alpha_6 = 330°$

Comprobamos las soluciones y observamos que son válidas todas ellas.

**5** **Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:**

**a)** $\boldsymbol{sen\ (180° - \alpha) = cos\ (270° - \alpha) + cos\ 180°}$

**b)** $\boldsymbol{sen\ (45° - \alpha) + \sqrt{2}\ sen\ \alpha = 0}$

a) $sen\ (180° - \alpha) = cos\ (270° - \alpha) + cos\ 180°$

$sen\ 180°\ cos\ \alpha - cos\ 180°\ sen\ \alpha = cos\ 270°\ cos\ \alpha + sen\ 270°\ sen\ \alpha - 1$

$sen\ \alpha = -sen\ \alpha - 1 \rightarrow 2\ sen\ \alpha = -1 \rightarrow sen\ \alpha = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \alpha_1 = 210°,\ \alpha_2 = 330°$

b) $sen\ (45° - \alpha) + \sqrt{2}\ sen\ \alpha = 0$

$sen\ 45°\ cos\ \alpha - cos\ 45°\ sen\ \alpha + \sqrt{2}\ sen\ \alpha = 0 \rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} cos\ \alpha - \dfrac{\sqrt{2}}{2} sen\ \alpha + \sqrt{2}\ sen\ \alpha = 0$

$cos\ \alpha - sen\ \alpha + 2\ sen\ \alpha = 0 \rightarrow cos\ \alpha + sen\ \alpha = 0$

Dividimos entre $cos\ \alpha$:

$1 + tg\ \alpha = 0 \rightarrow tg\ \alpha = -1 \rightarrow \alpha_1 = 135°,\ \alpha_2 = 315°$

# 3 Funciones trigonométricas

## Página 137

**1 ¿Verdadero o falso?**

**a) El radián es una medida de longitud equivalente al radio.**

**b) Un radián es un ángulo algo menor que 60°.**

**c) Puesto que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, un ángulo completo (360°) tiene $2\pi$ radianes.**

**d) 180° es algo menos de 3 radianes.**

**e) Un ángulo recto mide $\pi/2$ radianes.**

a) Falso. El radián es una medida angular, no es una medida de longitud.

b) Verdadero, porque un radián tiene 57° 17' 45''.

c) Verdadero, porque cada radián abarca un arco de longitud $r$.

d) Falso. 180° es la mitad de un ángulo completo y equivale, por tanto, a $\pi$ radianes, algo más de 3 radianes.

e) Verdadero. Un ángulo recto es la cuarta parte de un ángulo completo y tiene $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ radianes.

**2 Pasa a radianes los siguientes ángulos:**

**a) 30° b) 72° c) 90°**

**d) 127° e) 200° f) 300°**

**Expresa el resultado en función de $\pi$ y luego en forma decimal. Por ejemplo:**

$$30° = 30 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 0,52 \text{ rad}$$

a) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 30° = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \approx 0,52 \text{ rad}$

b) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 72° = \frac{2\pi}{5} \text{ rad} \approx 1,26 \text{ rad}$

c) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 90° = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \approx 1,57 \text{ rad}$

d) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 127° \approx 2,22 \text{ rad}$

e) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 200° = \frac{10\pi}{9} \text{ rad} \approx 3,49 \text{ rad}$

f) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 300° = \frac{5\pi}{3} \text{ rad} \approx 5,24 \text{ rad}$

**3 Pasa a grados los siguientes ángulos:**

**a) 2 rad b) 0,83 rad c) $\frac{\pi}{5}$ rad**

**d) $\frac{5\pi}{6}$ rad e) 3,5 rad f) $\pi$ rad**

a) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 2 = 114° \ 35' \ 29,6''$

b) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 0,83 = 47° \ 33' \ 19,8''$

c) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{5} = 36°$

d) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = 150°$

e) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 3,5 = 200° \ 32' \ 6,8''$

f) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \pi = 180°$

**4** **Copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno y añade las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de cada uno de los ángulos:**

| GRADOS | 0° | 30° | | 60° | 90° | | 135° | 150° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RADIANES | | | $\frac{\pi}{4}$ | | | $\frac{2}{3}\pi$ | | | $\pi$ |

| GRADOS | 210° | 225° | | 270° | | | 330° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RADIANES | | | $\frac{4}{3}\pi$ | | $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ | | |

La tabla completa está en la página 138 del libro de texto.

## Página 138

**5** **¿Verdadero o falso?**

**a) Las funciones trigonométricas son periódicas.**

**b) Las funciones *sen* y *cos* tienen un periodo de $2\pi$.**

**c) La función *tg x* tiene periodo $\pi$.**

**d) La función *cos x* es como *sen x* desplazada $\pi/2$ a la izquierda.**

a) Verdadero. La forma de sus gráficas se repite a lo largo del eje horizontal, cada $2\pi$ radianes.

b) Verdadero.

$$\left.\begin{array}{l} sen\,(x+2\pi)=sen\,x \\ cos\,(x+2\pi)=cos\,x \end{array}\right\}$$ porque $2\pi$ radianes equivalen a una vuelta completa.

c) Verdadero.

$tg\,(x+\pi)=tg\,x$

Podemos observarlo en la gráfica de la función $tg\,x$ en la página 138 del libro de texto.

d) Verdadero. Se puede observar en las gráficas de la página 138 del libro de texto.

# Ejercicios y problemas resueltos

**Página 139**

## 1. Razones trigonométricas a partir de otras

**Hazlo tú.** **Sabiendo que** $sen\ 54° = 0{,}81$ **halla** $cos\ 108°$, $tg\ 27°$, $sen\ 24°$, $cos\ 99°$.

$sen^2\ 54° + cos^2\ 54° = 1 \ \rightarrow\ 0{,}81^2 + cos^2\ 54° = 1 \ \rightarrow\ cos\ 54° = \sqrt{1-0{,}81^2} = 0{,}59$

$cos\ 108° = cos\ (2 \cdot 54°) = cos^2\ 54° - sen^2\ 54° = 0{,}59^2 - 0{,}81^2 = -0{,}31$

$$tg\ 27° = tg\left(\frac{54°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos\ 54°}{1+cos\ 54°}} = \sqrt{\frac{1-0{,}59}{1+0{,}59}} = 0{,}51$$

$$sen\ 24° = sen\ (54° - 30°) = sen\ 54°\ cos\ 30° - cos\ 54°\ sen\ 30° = 0{,}81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}59 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}41$$

$$cos\ 99° = cos\ (54° + 45°) = cos\ 54°\ cos\ 45° - sen\ 54°\ sen\ 45° = 0{,}59 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}81 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}16$$

## 2. Identidades trigonométricas

**Hazlo tú.** **Demuestra que** $sen\ 2\alpha - tg\ \alpha\ cos\ 2\alpha = tg\ \alpha$.

Aplicamos las fórmulas del ángulo doble y las relaciones fundamentales:

$$sen\ 2\alpha - tg\ \alpha\ cos\ 2\alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha - tg\ \alpha\ (cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) =$$

$$= 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha - \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}(cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) =$$

$$= \frac{2\ sen\ \alpha\ cos^2\ \alpha - sen\ \alpha\ cos^2\ \alpha + sen^3\ \alpha}{cos\ \alpha} =$$

$$= \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}(2\ cos^2\ \alpha - cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha) =$$

$$= \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}(cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha) = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$$

## 3. Simplificación de expresiones trigonométricas

**Hazlo tú.** **Simplifica la expresión** $\dfrac{2\ cos\ (45° + \alpha)\ cos\ (45° - \alpha)}{cos\ 2\alpha}$.

$$\frac{2\ cos\ (45° + \alpha)\ cos\ (45° - \alpha)}{cos\ 2\alpha} = \frac{2\,(cos\ 45°\ cos\ \alpha - sen\ 45°\ sen\ \alpha)\,(cos\ 45°\ cos\ \alpha + sen\ 45°\ sen\ \alpha)}{cos\ 2\alpha} =$$

$$= \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ \alpha\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ \alpha\right)}{cos\ 2\alpha} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{(cos\ \alpha - sen\ \alpha)\,(cos\ \alpha + sen\ \alpha)}{cos\ 2\alpha} =$$

$$= \frac{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha}{cos\ 2\alpha} = \frac{cos\ 2\alpha}{cos\ 2\alpha} = 1$$

**Página 140**

## 4. Resolución de ecuaciones trigonométricas

**Hazlo tú.** **Resuelve estas ecuaciones:**

**a)** $sen^3 x - sen\, x\, cos^2 x = 0$

**b)** $\sqrt{3}\, sen\, x + cos\, x = 2$

**c)** $tg^2 \dfrac{x}{2} = 1 - cos\, x$

**d)** $\dfrac{cos\, 4x + cos\, 2x}{sen\, 4x - sen\, 2x} = 1$

a) Extraemos factor común: $sen\, x(sen^2 x - cos^2 x) = 0$

Igualamos a cero cada factor:

$sen\, x = 0 \;\to\; x = 0° + 360° \cdot k;\; x = 180° + 360° \cdot k$

$sen^2 x - cos^2 x = 0 \;\to\; sen^2 x - (1 - sen^2 x) = 0 \;\to\; 2sen^2 x = 1 \;=\; sen^2 x = \dfrac{1}{2} \;\to\; sen\, x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Si $sen\, x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $x = 45° + 360° \cdot k;\; x = 135° + 360° \cdot k$

Si $sen\, x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $x = 225° + 360° \cdot k;\; x = 315° + 360° \cdot k$

b) Pasamos $cos\, x$ al segundo miembro y elevamos al cuadrado después:

$(\sqrt{3}\, sen\, x)^2 = (2 - cos\, x)^2 \;\to\; 3sen^2 x = 4 - 4\, cos\, x + cos^2 x \;\to$

$\to\; 3(1 - cos^2 x) = 4 - 4cos\, x + cos^2 x \;\to\; 4cos^2 x - 4cos\, x + 1 = 0 \;\to$

$\to\; cos\, x = \dfrac{4 \pm 0}{8} = \dfrac{1}{2} \;\to\; x = 60° + 360° \cdot k;\; x = 300° + 360° \cdot k$

Comprobamos las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

$x = 60° + 360° \cdot k \;\to\; \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} = 2 \;\to$ Vale.

$x = 300° + 360° \cdot k \;\to\; \sqrt{3} \cdot \dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} = 2 \;\to$ No vale.

c) Utilizamos la fórmula de la tangente del ángulo mitad:

$\left(\sqrt{\dfrac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}}\right)^2 = 1 - cos\, x \;\to\; \dfrac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x} = 1 - cos\, x \;\to\; 1 - cos\, x = 1 - cos^2 x \;\to$

$\to\; cos^2 x - cos\, x = 0 \;\to\; cos\, x\,(1 - cos\, x) = 0 \;\to$

$$\to \begin{cases} cos\, x = 0 \;\to\; x = 90° + 360° \cdot k;\; x = 270° + 360° \cdot k \\ cos\, x = 1 \;\to\; x = 0° + 360° \cdot k \end{cases}$$

d) Transformamos las sumas en productos:

$$\frac{2\, cos\, \dfrac{4x + 2x}{2}\, cos\, \dfrac{4x - 2x}{2}}{2\, cos\, \dfrac{4x + 2x}{2}\, sen\, \dfrac{4x - 2x}{2}} = 1 \;\to\; \frac{cos\, x}{sen\, x} = 1 \;\to\; \frac{1}{tg\, x} = 1 \;\to\; tg\, x = 1 \;\to$$

$\to\; x = 45° + 360° \cdot k;\; x = 225° + 360° \cdot k$

# Ejercicios y problemas guiados

## Página 141

### 1. Razones trigonométricas de $(\alpha + \beta)$; $(\alpha - \beta)$; $2\alpha$ y $\alpha/2$

***Si sen*** $\alpha = \frac{3}{5}$, $90° < \alpha < 180°$, ***y cos*** $\beta = -\frac{1}{4}$, $180° < \beta < 270°$, ***hallar:*** $\cos(\alpha + \beta)$; $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$; $\operatorname{tg} 2\alpha$; $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;\rightarrow\; \frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1 \;\rightarrow\; \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$ porque el ángulo está en el segundo cuadrante.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 \;\rightarrow\; \operatorname{sen}^2\beta + \frac{1}{16} = 1 \;\rightarrow\; \operatorname{sen}^2\beta = \frac{15}{16} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \operatorname{sen}\beta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$ porque el ángulo está en el tercer cuadrante.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{-\sqrt{15}/4}{-1/4} = \sqrt{15}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{15}+4}{20}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{-4\sqrt{15}-3}{5}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{24}{7}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} = -\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)}} = -\sqrt{\frac{5}{3}}$$ ya que el ángulo $\frac{\beta}{2}$ está en el segundo cuadrante.

### 2. Identidades trigonométricas

***Demostrar que:*** $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x = (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\cos x - 2\operatorname{sen} x\cos x\operatorname{sen} x =$$

$$= \cos^3 x - \operatorname{sen}^2 x\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x\cos x = \cos^3 x - 3\operatorname{sen}^2 x\cos x$$

### 3. Expresiones algebraicas equivalentes

***Escribir la expresión*** $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$ ***en función de*** $\cos\alpha$ ***y*** $\operatorname{sen}\beta$.

$$\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) =$$

$$= \cos^2\alpha\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta = \cos^2\alpha(1 - \operatorname{sen}^2\beta) - (1 - \cos^2\alpha)\operatorname{sen}^2\beta =$$

$$= \cos^2\alpha - \cos^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta$$

### 4. Simplificación de expresiones trigonométricas

***Simplificar esta expresión:*** $2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\alpha$

$$2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha\left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\right)^2 - \operatorname{sen}\alpha = 2\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2} - \operatorname{sen}\alpha =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha(1+\cos\alpha) - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

## 5. Ecuaciones trigonométricas

***Resolver estas ecuaciones:***

***a)*** $\boldsymbol{cos^2\,(2x + 30°) = \frac{1}{4}}$ ***b)*** $\boldsymbol{4\,sen\,x + 4\,cos^2\,x\;tg\,x + tg\,x = 0}$***, con*** $\boldsymbol{tg\,x \neq 0}$

a) $cos\,(2x + 30°) = \pm\frac{1}{2}$

$$\text{Si } cos\,(2x + 30°) = \frac{1}{2} \to \begin{cases} 2x + 30° = 60° \to x = 15° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 300° \to x = 135° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 60° + 360° \to x = 195° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 300° + 360° \to x = 315° + 360° \cdot k \end{cases}$$

$$\text{Si } cos\,(2x + 30°) = -\frac{1}{2} \to \begin{cases} 2x + 30° = 120° \to x = 45° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 240° \to x = 105° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 120° + 360° \to x = 225° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 240° + 360° \to x = 285° + 360° \cdot k \end{cases}$$

b) Si $tg\,x = 0$ entonces $x = 0° + 360° \cdot k$; $x = 180° + 360° \cdot k$ son soluciones de la ecuación, ya que el seno de estos ángulos también es 0.

Si $tg \neq 0$, dividimos entre esta función en los dos términos de la ecuación:

$$\frac{4\,sen\,x}{tg\,x} + 4\,cos^2\,x + 1 = 0 \to \frac{4\,sen\,x}{\frac{sen\,x}{cos\,x}} + 4\,cos^2\,x + 1 = 0 \to 4\,cos^2\,x + 4\,cos\,x + 1 = 0 \to$$

$$\to cos\,x = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2} \to x = 120° + 360° \cdot k;\; x = 240° + 360° \cdot k$$

## 6. Resolución de sistemas de ecuaciones trigonométricas

***Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en el intervalo [0°, 360°]:***

$$\begin{cases} \boldsymbol{cos\,y - sen\,x = 1} \\ \boldsymbol{4\,sen\,x\,cos\,y + 1 = 0} \end{cases}$$

$cos\,y = 1 + sen\,x$

$4\,sen\,x\,(1 + sen\,x) + 1 = 0 \to 4\,sen^2\,x + 4\,sen\,x + 1 = 0 \to sen\,x = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2}$

- Si $sen\,x = \frac{1}{2} \to cos\,y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, que es imposible.
- Si $sen\,x = -\frac{1}{2} \to cos\,y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Las diferentes posibilidades son:

$$\begin{cases} x = 210° + 360° \cdot k \\ y = 60° + 360° \cdot k \end{cases};\; \begin{cases} x = 210° + 360° \cdot k \\ y = 300° + 360° \cdot k \end{cases};\; \begin{cases} x = 330° + 360° \cdot k \\ y = 60° + 360° \cdot k \end{cases};\; \begin{cases} x = 330° + 360° \cdot k \\ y = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$$

# Ejercicios y problemas propuestos

**Página 142**

## Para practicar

### Fórmulas trigonométricas

**1** **Sabiendo que** $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$ **y** $90° < \alpha < 180°$**, calcula sin hallar el valor de** $\alpha$**:**

**a)** $\mathit{sen}\ 2\alpha$ **b)** $tg\ \frac{\alpha}{2}$ **c)** $\mathit{sen}\ (\alpha + 30°)$

**d)** $\cos\ (60° - \alpha)$ **e)** $\cos\ \frac{\alpha}{2}$ **f)** $tg\ (45° + \alpha)$

$\mathit{sen}^2\ \alpha + \cos^2\alpha = 1 \to \mathit{sen}^2\ \alpha + \frac{9}{16} = 1 \to \mathit{sen}^2\ \alpha = \frac{7}{16} \to \mathit{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ya que el ángulo está en el 2.º cuadrante.

$tg\ \alpha = \frac{\mathit{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{7}/4}{-3/4} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

a) $\mathit{sen}\ 2\alpha = 2\ \mathit{sen}\ \alpha \cos\alpha = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$

b) $tg\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)}} = \sqrt{7}$ ya que $\frac{\alpha}{2}$ está comprendido entre 45° y 90° (está en el 1.er cuadrante).

c) $\mathit{sen}\ (\alpha + 30°) = \mathit{sen}\ \alpha \cos 30° + \cos\alpha\ \mathit{sen}\ 30° = \frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{21}-3}{8}$

d) $\cos\ (60° - \alpha) = \cos 60° \cos\alpha + \mathit{sen}\ 60°\ \mathit{sen}\ \alpha = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{-\sqrt{21}-3}{8}$

e) $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(-\frac{3}{4}\right)}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ porque $\frac{\alpha}{2}$ está comprendido entre 45° y 90° (está en el 1.er cuadrante).

f) $tg\ (45° + \alpha) = \frac{tg\ 45° + tg\ \alpha}{1 - tg\ 45°\ tg\ \alpha} = \frac{1+\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)}{1-1\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)} = \frac{1-\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}$

**2** **Calcula las razones trigonométricas de 22° 30' a partir de las de 45°.**

$\mathit{sen}\ (22°\ 30') = \mathit{sen}\ \frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\cos\ (22°\ 30') = \cos\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$tg\ (22°\ 30') = tg\ \frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{1-\sqrt{2}/2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$

**3** **Si** $\cos 78° = 0,2$ **y** $\mathit{sen}\ 37° = 0,6$ **halla las razones trigonométricas de 41° y de 115°.**

$41° = 78° - 37°$

- $\mathit{sen}\ 78° = \sqrt{1-\cos^2 78°} = \sqrt{1-0,2^2} = 0,98$
- $\cos 37° = \sqrt{1-\mathit{sen}^2\ 37°} = \sqrt{1-0,6^2} = 0,8$

Ahora ya podemos calcular:

- $sen\ 41° = sen\ (78° - 37°) = sen\ 78°\ cos\ 37° - cos\ 78°\ sen\ 37° = 0,98 \cdot 0,8 - 0,2 \cdot 0,6 = 0,664$
- $cos\ 41° = cos\ (78° - 37°) = cos\ 78°\ cos\ 37° + sen\ 78°\ sen\ 37° = 0,2 \cdot 0,8 + 0,98 \cdot 0,6 = 0,748$
- $tg\ 41° = \dfrac{sen\ 41°}{cos\ 41°} = \dfrac{0,664}{0,748} = 0,8877$
- $sen\ 115° = sen\ (78° + 37°) = sen\ 78°\ cos\ 37° + cos\ 78°\ sen\ 37° = 0,98 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,904$
- $cos\ 115° = cos\ (78° + 37°) = cos\ 78°\ cos\ 37° - sen\ 78°\ sen\ 37° = 0,2 \cdot 0,8 - 0,98 \cdot 0,6 = -0,428$
- $tg\ 115° = \dfrac{sen\ 115°}{cos\ 115°} = -\dfrac{0,904}{0,428} = -2,112$

**4 a) Halla el valor exacto de las razones trigonométricas de 75° a partir de las de 30° y 45°.**

**b) Utilizando los resultados del apartado anterior, calcula las razones trigonométricas de: 105°; 165°; 15°; 195° y 135°.**

a) $sen\ 75° = sen\ (30° + 45°) = sen\ 30°\ cos\ 45° + cos\ 30°\ sen\ 45° = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$cos\ 75° = cos\ (30° + 45°) = cos\ 30°\ cos\ 45° - sen\ 30°\ sen\ 45° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$tg\ 75° = tg\ (30° + 45°) = \dfrac{tg\ 30° + tg\ 45°}{1 - tg\ 30°\ tg\ 45°} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \dfrac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} = \sqrt{3} + 2$

b) $sen\ 105° = sen\ (30° + 75°) = sen\ 30°\ cos\ 75° + cos\ 30°\ sen\ 75° = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

$cos\ 105° = cos\ (30° + 75°) = cos\ 30°\ cos\ 75° - sen\ 30°\ sen\ 75° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$tg\ 105° = \dfrac{\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = -\sqrt{3} - 2$

$sen\ 165° = sen\ (90° + 75°) = sen\ 90°\ cos\ 75° + cos\ 90°\ sen\ 75° = cos\ 75° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$cos\ 165° = cos\ (90° + 75°) = cos\ 90°\ cos\ 75° - sen\ 90°\ sen\ 75° = -sen\ 75° = \dfrac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$tg\ 165° = \dfrac{\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\dfrac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \sqrt{3} - 2$

$sen\ 15° = sen\ (90° - 75°) = sen\ 90°\ cos\ 75° - cos\ 90°\ sen\ 75° = cos\ 75° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$cos\ 15° = cos\ (90° - 75°) = cos\ 90°\ cos\ 75° + sen\ 90°\ sen\ 75° = sen\ 75° = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$tg\ 15° = \dfrac{\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = 2 - \sqrt{3}$

$sen\ 195° = sen\ (270° - 75°) = sen\ 270°\ cos\ 75° - cos\ 270°\ sen\ 75° = -cos\ 75° = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$cos\ 195° = cos\ (270° - 75°) = cos\ 270°\ cos\ 75° + sen\ 270°\ sen\ 75° = -sen\ 75° = \dfrac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$tg\ 195° = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}{\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{-\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3}$

$sen\ 135° = sen\ (180° - 45°) = sen\ 180°\ cos\ 45° - cos\ 180°\ sen\ 45° = sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 135° = cos\ (180° - 45°) = cos\ 180°\ cos\ 45° + sen\ 180°\ sen\ 45° = -cos\ 45° = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 135° = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = -1$

**5** **Desarrolla, en función de las razones trigonométricas de $\alpha$, y simplifica las siguientes expresiones:**

**a)** $\boldsymbol{sen\ (45° + \alpha) - cos\ (\alpha - 45°)}$

**b)** $\boldsymbol{\dfrac{cos\ 2\alpha}{cos\ \alpha + sen\ \alpha}}$

**c)** $\boldsymbol{(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 - 2\ sen\ \alpha + cos\ 2\alpha}$

**d)** $\boldsymbol{cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot sen^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} cos^2\ \alpha}$

a) $sen\ (45° + \alpha) - cos\ (\alpha - 45°) = sen\ 45°\ cos\ \alpha + cos\ 45°\ sen\ \alpha - (cos\ \alpha\ cos\ 45° + sen\ \alpha\ sen\ 45°) =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} cos\ \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} sen\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} cos\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} sen\ \alpha = 0$$

b) $\dfrac{cos\ 2\alpha}{cos\ \alpha + sen\ \alpha} = \dfrac{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha}{cos\ \alpha + sen\ \alpha} = \dfrac{(cos\ \alpha + sen\ \alpha)(cos\ \alpha - sen\ \alpha)}{cos\ \alpha + sen\ \alpha} = cos\ \alpha - sen\ \alpha$

c) $(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 - 2\ sen\ \alpha + cos\ 2\alpha = sen^2\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha - 2\ sen\ \alpha + cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha =$

$$= 2(cos^2\ \alpha + sen\ \alpha\ cos\ \alpha - sen\ \alpha)$$

d) $cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot sen^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} cos^2\ \alpha = \left(\pm\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}}\right)^2 \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}}\right)^2 + \frac{1}{4} cos^2\ \alpha =$

$$= \frac{1 + cos\ \alpha}{2} \cdot \frac{1 - cos\ \alpha}{2} + \frac{1}{4} cos^2\ \alpha = \frac{1 - cos^2\ \alpha}{4} + \frac{cos^2\ \alpha}{4} = \frac{1}{4}$$

**6** **Sabiendo que** $\boldsymbol{cos\ \alpha = \frac{-7}{25}\ (180° < \alpha < 270°)}$ **y** $\boldsymbol{tg\ \beta = \frac{4}{3}\ (180° < \beta < 270°)}$**, calcula** $\boldsymbol{tg \frac{\alpha + \beta}{2}}$**.**

Usamos la relación $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$ para calcular $sen\ \alpha$:

$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to sen^2\ \alpha + \frac{49}{625} = 1 \to sen^2\ \alpha = \frac{576}{625} \to sen\ \alpha = -\frac{24}{25}$ porque el ángulo está en el 3.er cuadrante.

$\frac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = \frac{4}{3} \to sen\ \beta = \frac{4}{3} cos\ \beta$

$sen^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \to \frac{16}{9} cos^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \to \frac{25}{9} cos^2\ \beta = 1 \to cos^2\ \beta = \frac{9}{25} \to cos\ \beta = -\frac{3}{5}$ porque también pertenece al tercer cuadrante.

$sen\ \beta = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$

Como $360° < \alpha + \beta < 540°$, dividiendo las desigualdades entre 2 tenemos que $180° < \frac{\alpha + \beta}{2} < 270°$.

Por tanto, $\frac{\alpha + \beta}{2}$ pertenece al tercer cuadrante y la tangente de $\frac{\alpha + \beta}{2}$ es positiva.

Calculamos $cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta = \frac{-7}{25} \cdot \frac{-3}{5} - \frac{-24}{25} \cdot \frac{-4}{5} = -\frac{3}{5}$

Por tanto, $tg \frac{\alpha + \beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ (\alpha + \beta)}{1 + cos\ (\alpha + \beta)}} = \sqrt{\frac{1 - (3/5)}{1 + (-3/5)}} = 2$

**7** **Si $tg\ \frac{\alpha}{2} = -3$ y $\alpha < 270°$, halla $sen\ \alpha$, $cos\ \alpha$ y $tg\ \alpha$.**

$$tg\ \frac{\alpha}{2} = -3 \rightarrow \sqrt{\frac{1-cos\ \alpha}{1+cos\ \alpha}} = -3 \rightarrow \frac{1-cos\ \alpha}{1+cos\ \alpha} = 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - cos\ \alpha = 9 + 9\ cos\ \alpha \rightarrow 10\ cos\ \alpha = -8 \rightarrow cos\ \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$sen\ \alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$tg\ \alpha = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}$$

**8** **Si $tg\ 2\alpha = \sqrt{6}$ y $\alpha < 90°$, halla $sen\ \alpha$, $cos\ \alpha$ y $tg\ \alpha$.**

$$\frac{2\ tg\ \alpha}{1-tg^2\ \alpha} = \sqrt{6} \rightarrow 2\ tg\ \alpha = \sqrt{6} - \sqrt{6}\ tg^2\ \alpha \rightarrow \sqrt{6}\ tg^2\ \alpha + 2\ tg\ \alpha - \sqrt{6} = 0 \rightarrow tg\ \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2\sqrt{6}} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{6}}$$

Como $\alpha$ está en el primer cuadrante, solo puede darse que $tg\ \alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$.

$$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}}\ cos\ \alpha$$

$$\left(\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}}\right)^2 cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow \frac{8-2\sqrt{7}}{6}\ cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{7-\sqrt{7}}{3}\ cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{3}{7-\sqrt{7}} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{\frac{3}{7-\sqrt{7}}}$$

$$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{3}{7-\sqrt{7}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{2(7-\sqrt{7})}}$$

**9** **Expresa en función de $\alpha$ y simplifica esta expresión:**

$$sen^2\ \frac{\alpha}{2} - cos^2\ \frac{\alpha}{2} + 2\ sen\ (90 - \alpha)$$

$$sen^2\ \frac{\alpha}{2} - cos^2\ \frac{\alpha}{2} + 2\ sen\ (90° - \alpha) = \frac{1-cos\ \alpha}{2} - \frac{1+cos\ \alpha}{2} + 2\ (sen\ 90°\ cos\ \alpha - cos\ 90°\ sen\ \alpha) = -cos\ \alpha + 2\ cos\ \alpha = cos\ \alpha$$

**10** **Transforma las siguientes sumas en productos:**

**a)** $sen\ 65° + sen\ 35°$ **b)** $sen\ 65° - sen\ 35°$ **c)** $cos\ 48° + cos\ 32°$

**d)** $cos\ 48° - cos\ 32°$ **e)** $\frac{1}{2} + sen\ 50°$ **f)** $\frac{\sqrt{2}}{2} + cos\ 75°$

a) $sen\ 65° + sen\ 35° = 2\ sen\ \frac{65°+35°}{2}\ cos\ \frac{65°-35°}{2} = 2\ sen\ 50°\ cos\ 15°$

b) $sen\ 65° - sen\ 35° = 2\ cos\ \frac{65°+35°}{2}\ sen\ \frac{65°-35°}{2} = 2\ cos\ 50°\ sen\ 15°$

c) $cos\ 48° + cos\ 32° = 2\ cos\ \frac{48°+32°}{2}\ cos\ \frac{48°-32°}{2} = 2\ cos\ 40°\ cos\ 8°$

d) $cos\ 48° - cos\ 32° = -2\ sen\ \frac{48°+32°}{2}\ sen\ \frac{48°-32°}{2} = -2\ sen\ 40°\ sen\ 8°$

e) $\frac{1}{2} + sen\ 50° = sen\ 30° + sen\ 50° = 2\ sen\ \frac{30°+50°}{2}\ cos\ \frac{30°-50°}{2} = 2\ sen\ 40°\ cos\ (-10°) = 2\ sen\ 40°\ cos\ 10°$

f) $\frac{\sqrt{2}}{2} + cos\ 75° = cos\ 45° + cos\ 75° = 2\ cos\ \frac{45°+75°}{2}\ cos\ \frac{45°-75°}{2} = 2\ cos\ 60°\ cos\ (-15°) = 2\ cos\ 60°\ cos\ 15°$

## Identidades trigonométricas

**11** **Demuestra las siguientes identidades teniendo en cuenta las relaciones fundamentales:**

**a)** $(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 - (sen\ \alpha - cos\ \alpha)^2 = 4\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$

**b)** $sen\ \alpha \cdot cos^2\ \alpha + sen^3\ \alpha = sen\ \alpha$

**c)** $\dfrac{sen\ \alpha}{1 + cos\ \alpha} + \dfrac{sen\ \alpha}{1 - cos\ \alpha} = \dfrac{2}{sen\ \alpha}$

**d)** $\dfrac{cos\ \alpha + sen\ \alpha}{cos\ \alpha - sen\ \alpha} \cdot cos\ 2\alpha = 1 + sen\ 2\alpha$

a) $(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 - (sen\ \alpha - cos\ \alpha)^2 = sen^2\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha - (sen^2\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha) =$

$= sen^2\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha - cos^2\ \alpha = 4\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$

b) $sen\ \alpha \cdot cos^2\ \alpha + sen^3\ \alpha = sen\ \alpha\ (cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha) = sen\ \alpha \cdot 1 = sen\ \alpha$

c) $\dfrac{sen\ \alpha}{1 + cos\ \alpha} + \dfrac{sen\ \alpha}{1 - cos\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha - sen\ \alpha\ cos\ \alpha + sen\ \alpha + sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{(1 + cos\ \alpha)\ (1 - cos\ \alpha)} = \dfrac{2\ sen\ \alpha}{1 - cos^2\ \alpha} = \dfrac{2\ sen\ \alpha}{sen^2\ \alpha} = \dfrac{2}{sen\ \alpha}$

d) $\dfrac{cos\ \alpha + sen\ \alpha}{cos\ \alpha - sen\ \alpha} \cdot cos\ 2\alpha = \dfrac{cos\ \alpha + sen\ \alpha}{cos\ \alpha - sen\ \alpha}\ (cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) = \dfrac{cos\ \alpha + sen\ \alpha}{cos\ \alpha - sen\ \alpha}\ (cos\ \alpha + sen\ \alpha)\ (cos\ \alpha - sen\ \alpha) =$

$= (cos\ \alpha + sen\ \alpha)\ (cos\ \alpha + sen\ \alpha) = cos^2\ \alpha + 2\ cos\ \alpha\ sen\ \alpha + sen^2\ \alpha =$

$= 1 + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha = 1 + sen\ 2\alpha$

**12** **Prueba que son verdaderas las identidades siguientes:**

**a)** $cos\ (x + 60°) - cos\ (x + 120°) = cos\ x$

**b)** $tg\ (x + 45°) - tg\ (x - 45°) = \dfrac{2 + 2\ tg^2\ x}{1 - tg^2\ x}$

a) $cos\ (x + 60°) - cos\ (x + 120°) = cos\ x\ cos\ 60° - sen\ x\ sen\ 60° - (cos\ x\ cos\ 120° - sen\ x\ sen\ 120°) =$

$= cos\ x\ cos\ 60° - sen\ x\ sen\ 60° - cos\ x\ cos\ 120° + sen\ x\ sen\ 120° =$

$= cos\ x\ cos\ 60° - sen\ x\ sen\ 60° - cos\ x \cdot (-cos\ 60°) + sen\ x\ sen\ 60° =$

$= 2\ cos\ x\ cos\ 60° = 2 \cdot \dfrac{1}{2}\ cos\ x = cos\ x$

b) $tg\ (x + 45°) - tg\ (x - 45°) = \dfrac{tg\ x + tg\ 45°}{1 - tg\ x\ tg\ 45°} - \dfrac{tg\ x - tg\ 45°}{1 + tg\ x\ tg\ 45°} = \dfrac{tg\ x + 1}{1 - tg\ x} - \dfrac{tg\ x - 1}{1 + tg\ x} =$

$= \dfrac{1 + 2\ tg\ x + tg^2\ x - (-1 + 2\ tg\ x - tg^2\ x)}{(1 - tg\ x)\ (1 + tg\ x)} = \dfrac{2 + 2\ tg^2\ x}{1 - tg^2\ x}$

**13** **Comprueba que se verifican las dos identidades siguientes:**

**a)** $sen\ \alpha\ sen\ (\alpha + \beta) + cos\ \alpha\ cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \beta$

**b)** $\dfrac{sen\ (\alpha + \beta)}{sen\ (\alpha - \beta)} = \dfrac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{tg\ \alpha - tg\ \beta}$

* ***En b), divide numerador y denominador entre*** $cos\ \alpha\ cos\ \beta$.

a) $sen\ \alpha\ sen\ (\alpha + \beta) + cos\ \alpha\ cos\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha\ (sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta) + cos\ \alpha\ (cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta) =$

$= sen^2\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ cos\ \alpha\ sen\ \beta + cos^2\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \alpha\ sen\ \beta =$

$= (sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha)\ cos\ \beta = cos\ \beta$

b) $\dfrac{sen\ (\alpha + \beta)}{sen\ (\alpha - \beta)} = \dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta}{sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta} = \dfrac{\dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}}{\dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}} = \dfrac{\dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta} + \dfrac{cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}}{\dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta} - \dfrac{cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}} = \dfrac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{tg\ \alpha - tg\ \beta}$

**14** **Demuestra.**

**a)** $tg\ \alpha + \dfrac{1}{tg\ \alpha} = \dfrac{2}{sen\ 2\alpha}$

**b)** $2\ tg\ \alpha\ cos^2\ \dfrac{\alpha}{2} - sen\ \alpha = tg\ \alpha$

a) $tg\ \alpha + \dfrac{1}{tg\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} + \dfrac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \dfrac{sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha}{sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \dfrac{1}{sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \dfrac{2}{2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \dfrac{2}{sen\ 2\alpha}$

b) $2\ tg\ \alpha\ cos^2\ \dfrac{\alpha}{2} - sen\ \alpha = 2\ \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \cdot \dfrac{1 + cos\ \alpha}{2} - sen\ \alpha = \dfrac{2}{2}\ \dfrac{sen\ \alpha + sen\ \alpha\ cos\ \alpha - sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$

**15** **Demuestra.**

**a)** $\boldsymbol{cos\ (\alpha + \beta)\ cos\ (\alpha - \beta) = cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha}$

**b)** $\boldsymbol{sen\ (\alpha + \beta)\ sen\ (\alpha - \beta) = sen^2\ \alpha - sen^2\ \beta}$

a) $cos\ (\alpha + \beta)\ cos\ (\alpha - \beta) = (cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta)\ (cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta) =$

$= cos^2\ \alpha\ cos^2\ \beta + cos\ \alpha\ cos\ \beta\ sen\ \alpha\ sen\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta\ cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen^2\ \alpha\ sen^2\ \beta =$

$= cos^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha\ sen^2\ \beta = (1 - sen^2\ \alpha)\ cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha\ (1 - cos^2\ \beta) =$

$= cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha + sen^2\ \alpha\ cos^2\ \beta = cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha$

b) $sen\ (\alpha + \beta)\ sen\ (\alpha - \beta) = (sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta)\ (sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta) =$

$= sen^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - sen\ \alpha\ cos\ \beta\ cos\ \alpha\ sen\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta\ sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos^2\ \alpha\ sen^2\ \beta =$

$= sen^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - cos^2\ \alpha\ sen^2\ \beta = sen^2\ \alpha\ (1 - sen^2\ \beta) - (1 - sen^2\ \alpha)\ sen^2\ \beta =$

$= sen^2\ \alpha - sen^2\ \alpha\ sen^2\ \beta - sen^2\ \beta + sen^2\alpha\ sen^2\ \beta = sen^2\ \alpha - sen^2\beta$

**16** **Demuestra las siguientes igualdades:**

**a)** $\boldsymbol{\dfrac{2\ sen\ \alpha}{tg\ 2\alpha} + \dfrac{sen^2\ \alpha}{cos\ \alpha} = cos\ \alpha}$

**b)** $\boldsymbol{\dfrac{1 - cos\ 2\alpha}{sen^2\ \alpha + cos\ 2\alpha} = 2\ tg^2\ \alpha}$

**c)** $\boldsymbol{sen\ 2\alpha\ cos\ \alpha - sen\ \alpha\ cos\ 2\alpha = sen\ \alpha}$

**d)** $\boldsymbol{\dfrac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = tg^2\ \dfrac{\alpha}{2}}$

**e)** $\boldsymbol{\dfrac{sen\ 2\alpha}{1 + cos\ 2\alpha} = tg\ \alpha}$

a) $\dfrac{2\ sen\ \alpha}{tg\ 2\alpha} + \dfrac{sen^2\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{2\ sen\ \alpha\,(1 - tg^2\ \alpha)}{2\ tg\ \alpha} + \dfrac{sen^2\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha\ \dfrac{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha}}{\dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}} + \dfrac{sen^2\ \alpha}{cos\ \alpha} =$

$= \dfrac{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha}{cos\ \alpha} + \dfrac{sen^2\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{cos^2\ \alpha}{cos\ \alpha} = cos\ \alpha$

b) $\dfrac{1 - cos\ 2\alpha}{sen^2\ \alpha + cos\ 2\alpha} = \dfrac{1 - (cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha)}{sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha} = \dfrac{1 - cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} = \dfrac{2\ sen^2\alpha}{cos^2\ \alpha} = 2\ tg^2\ \alpha$

c) $sen\ 2\alpha\ cos\ \alpha - sen\ \alpha\ cos\ 2\alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha\ cos\ \alpha - sen\ \alpha\,(cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) =$

$= 2\ sen\ \alpha\ cos^2\ \alpha - sen\ \alpha\ cos^2\ \alpha + sen^3\ \alpha = sen\ \alpha\ cos^2\ \alpha + sen^3\ \alpha =$

$= sen\ \alpha\,(cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha) = sen\ \alpha$

d) $\dfrac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = \dfrac{2\ sen\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \dfrac{2\ sen\ \alpha\,(1 - cos\ \alpha)}{2\ sen\ \alpha\,(1 + cos\ \alpha)} = \dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha} = tg^2\ \dfrac{\alpha}{2}$

e) $\dfrac{sen\ 2\alpha}{1 + cos\ 2\alpha} = \dfrac{2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{1 + cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha} \overset{(*)}{=} \dfrac{2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha} = \dfrac{2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{2\ cos^2\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$

(*) $1 = cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha\ \rightarrow\ -sen^2\ \alpha = cos^2\ \alpha - 1$

**17** **Comprueba, sin utilizar la calculadora, las siguientes igualdades.**

**a)** $\boldsymbol{sen\ 130° + sen\ 50° = 2\ cos\ 40°}$

**b)** $\boldsymbol{cos\ 75° - cos\ 15° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

a) $sen\ 130° + sen\ 50° = 2\ sen\ \dfrac{130° + 50°}{2}\ cos\ \dfrac{130° - 50°}{2} = 2\ sen\ 90°\ cos\ 40° = 2\ cos\ 40°$

b) $cos\ 75° - cos\ 15° = -2\ sen\ \dfrac{75° + 15°}{2}\ sen\ \dfrac{75° - 15°}{2} = -2\ sen\ 45°\ sen\ 30° = -2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

## Página 143

### Ecuaciones trigonométricas

**18** **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

**a)** $\boldsymbol{2\,sen^2\,x = 1}$ **b)** $\boldsymbol{3\,tg^2\,x - 1 = 0}$ **c)** $\boldsymbol{1 - 4\,cos^2\,x = 0}$ **d)** $\boldsymbol{3\,tg\,x + 4 = 0}$

a) $2\,sen^2\,x = 1 \;\to\; sen^2\,x = \dfrac{1}{2} \;\to\; sen\,x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $sen\,x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\to\; x = 45° + 360° \cdot k;\; x = 135° + 360° \cdot k$
- Si $sen\,x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\to\; x = 225° + 360° \cdot k;\; x = 315° + 360° \cdot k$

Es decir, las soluciones son todos los ángulos del tipo $x = 45° + 90° \cdot k$

b) $3\,tg^2\,x - 1 = 0 \;\to\; tg^2\,x = \dfrac{1}{3} \;\to\; tg\,x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

- Si $tg\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \;\to\; x = 30° + 360° \cdot k;\; x = 210° + 360° \cdot k$
- Si $tg\,x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \;\to\; x = 150° + 360° \cdot k;\; x = 330° + 360° \cdot k$

c) $1 - 4\,cos^2\,x = 0 \;\to\; cos^2\,x = \dfrac{1}{4} \;\to\; cos\,x = \pm\dfrac{1}{2}$

- Si $cos\,x = \dfrac{1}{2} \;\to\; x = 60° + 360° \cdot k;\; x = 300° + 360° \cdot k$
- Si $cos\,x = -\dfrac{1}{2} \;\to\; x = 120° + 360° \cdot k;\; x = 240° + 360° \cdot k$

d) $3\,tg\,x + 4 = 0 \;\to\; tg\,x = -\dfrac{4}{3} \;\to\; x = 126°\,52'\,12'' + 360° \cdot k;\; x = 306°\,52'\,12'' + 360° \cdot k$

**19** **Resuelve estas ecuaciones:**

**a)** $\boldsymbol{2\,cos^2\,x - sen^2\,x + 1 = 0}$

**b)** $\boldsymbol{sen^2\,x - sen\,x = 0}$

**c)** $\boldsymbol{2\,cos^2\,x - \sqrt{3}\,cos\,x = 0}$

a) $\left.2\,cos^2\,x \underbrace{- sen^2\,x + 1}_{cos^2\,x} = 0\right\} \;\to\; 2\,cos^2\,x - cos^2\,x = 0$

$cos^2 = 0 \;\to\; cos\,x = 0 \;\to\; \begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{cases}$

Al comprobarlas en la ecuación inicial, las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Lo que podemos expresar como:

$x = 90° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $sen\,x\,(sen\,x - 1) = 0 \;\to\; \begin{cases} sen\,x = 0 \;\to\; x_1 = 0°,\; x_2 = 180° \\ sen\,x = 1 \;\to\; x_3 = 90° \end{cases}$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que las tres son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, de otra forma:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k\pi = k \cdot 180° \\ x_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = 90° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

($x_1$ así incluye las soluciones $x_1$ y $x_2$ anteriores)

c) $cos\, x\,(2\, cos\, x - \sqrt{3}) = 0 \to \begin{cases} cos\, x = 0 \to x_1 = 90°,\ x_2 = 270° \\ cos\, x = \frac{\sqrt{3}}{2} \to x_3 = 30°,\ x_4 = 330° \end{cases}$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 = 30° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 = 330° + k \cdot 360° = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

NOTA: Obsérvese que las dos primeras soluciones podrían escribirse como una sola de la siguiente forma:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

**20 Resuelve.**

**a)** $sen^2\, x - cos^2\, x = 1$ **b)** $cos^2\, x - sen^2\, x = 0$ **c)** $2\, cos^2\, x + sen\, x = 1$ **d)** $3\, tg^2\, x - \sqrt{3}\, tg\, x = 0$

a) $(1 - cos^2\, x) - cos^2\, x = 1 \to 1 - 2\, cos^2\, x = 1 \to cos^2\, x = 0 \to cos\, x = 0 \to \begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{cases}$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $(1 - sen^2\, x) - sen^2\, x = 0 \to 1 - 2\, sen^2\, x = 0 \to sen^2\, x = \frac{1}{2} \to sen\, x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $sen\, x = \frac{\sqrt{2}}{2} \to x_1 = 45°,\ x_2 = 135°$
- Si $sen\, x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \to x_3 = 225°,\ x_4 = 315°$

Comprobamos que todas las soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 45° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_2 = 135° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x_3 = 225° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ x_4 = 315° + k \cdot 360° = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$x = 45° + k \cdot 90° = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $2(1 - sen^2 x) + sen\, x = 1 \;\to\; 2 - 2\,sen^2 x + sen\, x = 1 \;\to\; 2sen^2 x - sen\, x - 1 = 0 \;\to$

$$\to\; sen\, x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \;\to\; x_1 = 90° \\ -1/2 \;\to\; x_2 = 210°,\; x_3 = 330° \end{cases}$$

Las tres soluciones son válidas, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 210° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_3 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $tg\, x\,(3\,tg\, x - \sqrt{3}) = 0 \;\to\; \begin{cases} tg\, x = 0 \;\to\; x_1 = 0°,\; x_2 = 180° \\ tg\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \;\to\; x_3 = 30°,\; x_4 = 210° \end{cases}$

Comprobamos las posibles soluciones en la ecuación inicial y vemos que las cuatro son válidas. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_4 = 210° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Lo que podría expresarse con solo dos soluciones que englobaran las cuatro anteriores:

$x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi$ y $x_2 = 30° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{6} + k\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

**21 Resuelve las siguientes ecuaciones:**

**a)** $\boldsymbol{sen\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}}$

**b)** $\boldsymbol{sen\, 2x - 2\,cos^2 x = 0}$

**c)** $\boldsymbol{cos\, 2x - 3\,sen\, x + 1 = 0}$

**d)** $\boldsymbol{sen\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2}\,sen\, x = 0}$

a) $sen\dfrac{\pi}{6}\,cos\, x - cos\dfrac{\pi}{6}\,sen\, x + cos\dfrac{\pi}{3}\,cos\, x + sen\dfrac{\pi}{3}\,sen\, x = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}cos\, x - \frac{\sqrt{3}}{2}sen\, x + \frac{1}{2}cos\, x + \frac{\sqrt{3}}{2}sen\, x = \frac{1}{2} \;\to\; \frac{1}{2}cos\, x + \frac{1}{2}cos\, x = \frac{1}{2} \;\to\; cos\, x = \frac{1}{2} \begin{cases} x_1 = \pi/3 \\ x_2 = 5\pi/3 \end{cases}$$

Comprobamos y vemos que:

$$x_1 \;\to\; sen\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = sen\left(-\frac{\pi}{6}\right) + cos\, 0 = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 \;\to\; sen\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) = sen\left(-\frac{3\pi}{3}\right) + cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Son válidas las dos soluciones. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2k\,\pi = 60° + k \cdot 360° \\ x_2 = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\,\pi = 300° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $2\,sen\, x\,cos\, x - 2\,cos^2 x = 0 \;\to\; 2\,cos\, x\,(sen\, x - cos\, x) = 0 \;\to$

$$\to \begin{cases} cos\, x = 0 \;\to\; x_1 = 90°,\; x_2 = 270° \\ sen\, x = cos\, x \;\to\; x_3 = 45°,\; x_4 = 225° \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones. Todas son válidas.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_3 = 45° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_4 = 225° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{4} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

También podríamos expresarlas como:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \\ x_2 = 45° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{4} + k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $cos^2\, x - sen^2\, x - 3\, sen\, x + 1 = 0 \to 1 - sen^2\, x - sen^2\, x - 3\, sen\, x + 1 = 0 \to$

$\to 1 - 2\, sen^2\, x - 3\, sen\, x + 1 = 0 \to 2\, sen^2\, x + 3\, sen\, x - 2 = 0 \to$

$\to sen\, x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \dfrac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \to x_1 = 30°,\ x_2 = 150° \\ -2 \to \text{¡Imposible!, } pues\ |sen\, x| \le 1 \end{cases}$

Comprobamos que la dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_2 = 150° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $sen\, \dfrac{\pi}{4}\, cos\, x + cos\, \dfrac{\pi}{4}\, sen\, x - \sqrt{2}\, sen\, x = 0 \to \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, cos\, x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, sen\, x - \sqrt{2}\, sen\, x = 0$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\, cos\, x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, sen\, x = 0 \to cos\, x - sen\, x = 0 \to cos\, x = sen\, x \to x_1 = \dfrac{\pi}{4},\ x_2 = \dfrac{5\pi}{4}$

Al comprobar, podemos ver que ambas soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\,\pi = 45° + k \cdot 360° \\ x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\,\pi = 225° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos agrupar las dos soluciones en: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\,\pi = 45° + k \cdot 180°$ con $k \in \mathbb{Z}$

**22** **Resuelve.**

**a)** $cos^2\, \dfrac{x}{2} + cos\, x - \dfrac{1}{2} = 0$

**b)** $tg^2\, \dfrac{x}{2} + 1 = cos\, x$

**c)** $2\, sen^2\, \dfrac{x}{2} + cos\, 2x = 0$

**d)** $4\, sen^2\, x\, cos^2\, x + 2\, cos^2\, x - 2 = 0$

a) $\dfrac{1 + cos\, x}{2} + cos\, x - \dfrac{1}{2} = 0 \to 1 + cos\, x + 2\, cos\, x - 1 = 0 \to$

$\to 3\, cos\, x = 0 \to cos\, x = 0 \begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{cases}$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270 + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones: $x = 90° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}+1=\cos x \;\rightarrow\; 1-\cos x+1+\cos x=\cos x+\cos^2 x \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; 2=\cos x+\cos^2 x \;\rightarrow\; \cos^2 x+\cos x-2=0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \cos x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}\;\begin{cases}1 \;\rightarrow\; x=0°\\ -2 \;\rightarrow\; \text{¡Imposible, pues } |\cos x|\le 1\end{cases}$$

Luego: $x=k\cdot 360°=2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$

c) $2\cdot\dfrac{1-\cos x}{2}+\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=0 \;\rightarrow\; 1-\cos x+\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; 1-\cos x+\cos^2 x-1+\cos^2 x=0 \;\rightarrow\; 2\cos^2 x-\cos x=0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \cos x\,(2\cos x-1)=0 \;\rightarrow\; \begin{cases}\cos x=0 \;\rightarrow\; x_1=90°,\; x_2=270°\\ \cos x=1/2 \;\rightarrow\; x_3=60°,\; x_4=300°\end{cases}$$

Se comprueba que son válidas todas. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}x_1=90°+k\cdot 360°=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\ x_2=270°+k\cdot 360°=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\\ x_3=60°+k\cdot 360°=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\\ x_4=300°+k\cdot 360°=\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right\}\text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones quedaría:

$$\left.\begin{array}{l}x_1=90°+k\cdot 180°=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x_2=60°+k\cdot 360°=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\\ x_3=300°+k\cdot 360°=\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right\}\text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

d) $4(1-\cos^2 x)\cos^2 x+2\cos^2 x-2=0 \;\rightarrow\; 4\cos^2 x-4\cos^4 x+2\cos^2 x-2=0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; 4\cos^4 x-6\cos^2 x+2=0 \;\rightarrow\; 2\cos^4 x-3\cos^2 x+1=0$$

Sea $\cos^2 x=z \;\rightarrow\; \cos^4 x=z^2$

Así:

$$2z^2-3z+1=0 \;\rightarrow\; z=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm 1}{4}\;\begin{cases}z_1=1 \;\rightarrow\; \cos x=\pm 1\;\begin{cases}x_1=0°\\ x_2=180°\end{cases}\\ z_2=\dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \cos x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\;\begin{cases}x_3=45°,\; x_4=315°\\ x_5=135°,\; x_6=225°\end{cases}\end{cases}$$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que todas son válidas. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}x_1=k\cdot 360°=2k\pi\\ x_2=180°+k\cdot 360°=\pi+2k\pi\\ x_3=45°+k\cdot 360°=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ x_4=315°+k\cdot 360°=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi\\ x_5=135°+k\cdot 360°=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\\ x_6=225°+k\cdot 360°=\dfrac{7\pi}{4}+2k\pi\end{array}\right\}\text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

O, agrupando las soluciones:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 45° + k \cdot 90° = \dfrac{\pi}{4} + k\,\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

**23** **Transforma estas ecuaciones en otras equivalentes cuya incógnita sea $tg\, x$ y resuélvelas:**

**a)** $sen\, x + cos\, x = 0$

**b)** $sen^2\, x - 2\sqrt{3}\ sen\, x\, cos\, x + 3\, cos^2\, x = 0$

**c)** $sen^2\, x + sen\, x\, cos\, x = 0$

a) Dividimos toda la ecuación entre $cos\, x$:

$$\frac{sen\, x}{cos\, x} + \frac{cos\, x}{cos\, x} = 0 \rightarrow tg\, x + 1 = 0 \rightarrow tg\, x = -1 \rightarrow x = 135° + 360° \cdot k;\ x = 315° + 360° \cdot k$$

b) Dividimos toda la ecuación entre $cos^2\, x$:

$$\frac{sen^2\, x}{cos^2\, x} - 2\sqrt{3}\,\frac{sen\, x\, cos\, x}{cos^2\, x} + 3\,\frac{cos^2\, x}{cos^2\, x} = 0 \rightarrow tg^2\, x - 2\sqrt{3}\, tg\, x + 3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow tg\, x = \frac{2\sqrt{3} \pm 0}{2} = \sqrt{3} \rightarrow x = 60° + 360° \cdot k;\ \ x = 240° + 360° \cdot k$$

c) Dividimos toda la ecuación entre $cos^2\, x$:

$$\frac{sen^2\, x}{cos^2\, x} + \frac{sen\, x\, cos\, x}{cos^2 x} = 0 \rightarrow tg^2\, x + tg\, x = 0 \rightarrow tg\, x\,(tg\, x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} tg\, x = 0 \\ tg\, x = -1 \end{cases}$$

- Si $tg\, x = 0 \rightarrow x = 0° + 360° \cdot k;\ \ x = 180° + 360° \cdot k$
- Si $tg\, x = -1 \rightarrow x = 135° + 360° \cdot k;\ \ x = 315° + 360° \cdot k$

**24** **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

**a)** $\sqrt{3}\ cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) + cos\,(x - \pi) = 2$

**b)** $cos\left(\dfrac{5\pi}{6} - x\right) + sen\, x - \sqrt{3}\ cos\, x = 0$

**c)** $sen\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) + cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = 1$

**d)** $cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) - \sqrt{3}\ sen\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 1$

a) $\sqrt{3}\left(cos\,\dfrac{3\pi}{2}\, cos\, x - sen\,\dfrac{3\pi}{2}\, sen\, x\right) + cos\, x\, cos\,\pi + sen\, x\, sen\,\pi = 2 \rightarrow$

$$\rightarrow \sqrt{3}\, sen\, x - cos\, x = 2 \rightarrow \sqrt{3}\, sen\, x - 2 = cos\, x$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$3\, sen^2\, x - 4\sqrt{3}\, sen\, x + 4 = cos^2\, x \rightarrow 3\, sen^2\, x - 4\sqrt{3}\, sen\, x + 4 = 1 - sen^2\, x \rightarrow$$

$$\rightarrow 4\, sen^2\, x - 4\sqrt{3}\, sen\, x + 3 = 0 \rightarrow sen\, x = \frac{4\sqrt{3} \pm 0}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k;\ \ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k$$

Ahora debemos comprobar las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

$$x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \sqrt{3} \cdot cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) = 1 \neq 2 \ \text{ No vale.}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \sqrt{3} \cdot cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{2\pi}{3} - \pi\right) = 2 \ \text{ Vale.}$$

b) $\cos \frac{5\pi}{6} \cos x + \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0 \rightarrow -\frac{\sqrt{3} \cos x}{2} + \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{3}{2} \operatorname{sen} x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos x$$

Dividimos los dos miembros entre $\cos x$:

$\frac{3}{2} \operatorname{tg} x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k;\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi \cdot k$

c) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x + \cos x - \operatorname{sen} x) = 1 \rightarrow 2 \cos x = \frac{2}{\sqrt{2}} \rightarrow$

$\rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k;\ x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi \cdot k$

d) $\cos \frac{\pi}{3} \cos x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} x - \sqrt{3}\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} x\right) = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\cos x}{2} + \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen} x}{2} - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3} \cos x}{2} - \frac{\operatorname{sen} x}{2}\right) = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x - 3 \cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 2 \rightarrow$

$\rightarrow -2 \cos x + 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x = 2 \rightarrow \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 1 + \cos x$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$3 \operatorname{sen}^2 x = 1 + 2 \cos x + \cos^2 x \rightarrow 3 - 3 \cos^2 x = 1 + 2 \cos x + \cos^2 x \rightarrow$

$$\rightarrow 4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

- Si $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k \rightarrow x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi \cdot k$
- Si $\cos x = -1 \rightarrow x = \pi + 2\pi \cdot k$

Ahora debemos comprobar las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

- Si $x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ Vale.
- Si $x = \frac{5\pi}{3} \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) = -2 \neq 1$ No vale.
- Si $x = \pi \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) = 1$ Vale.

**25** **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

**a)** $\cos 2x + 3 \operatorname{sen} x = 2$

**b)** $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1$

**c)** $\cos x \cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$

**d)** $2 \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} 2x$

**e)** $\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \cos x - 1 = 0$

**f)** $\operatorname{sen} 2x \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x$

**g)** $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg} x = 1$

a) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 2 \rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 2 \rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 = 90° \\ 1/2 \rightarrow x_2 = 30°,\ x_3 = 150° \end{cases}$$

Las tres soluciones son válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_3 = 150° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $\dfrac{2\,tg\,x}{1 - tg^2\,x} \cdot tg\,x = 1 \to 2\,tg^2\,x = 1 - tg^2\,x \to tg^2\,x = \dfrac{1}{3} \to tg\,x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \to \begin{cases} x_1 = 30°,\ x_2 = 210° \\ x_3 = 150°,\ x_4 = 330° \end{cases}$

Las cuatro soluciones son válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_2 = 210° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_3 = 150° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_4 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{6} + k\,\pi \\ x_2 = 150° + k \cdot 180° = \dfrac{5\pi}{6} + k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $cos\,x\,(cos^2\,x - sen^2\,x) + 2\,cos^2\,x = 0 \to cos\,x\,(cos^2\,x - 1 + cos^2\,x) + 2\,cos^2\,x = 0 \to$

$\to 2\,cos^3\,x - cos\,x + 2\,cos^2\,x = 0 \to cos\,x\,(2\,cos^2\,x + 2\,cos\,x - 1) = 0 \to$

$$\to \begin{cases} cos\,x = 0 \to x_1 = 90°,\ x_2 = 270° \\ cos\,x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \left< \begin{array}{l} \approx -1,366 \to \text{¡Imposible!, pues } |cos\,x| \le -1 \\ \approx 0,366 \to x_3 = 68°\,31'\,51,1'',\ x_4 = 291°\,28'\,8,9'' \end{array}\right. \end{cases}$$

Las soluciones son todas válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_3 = 68°\,31'\,51,5'' + k \cdot 360° \approx 0,38\pi + 2k\,\pi \\ x_4 = 291°\,28'\,8,9'' + k \cdot 360° \approx 1,62\pi + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupadas, serían:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi \\ x_2 = 68°\,31'\,51,1'' + k \cdot 360° \approx 0,38\pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 291°\,28'\,8,9'' + k \cdot 360° \approx 1,62\pi + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $2\,sen\,x = \dfrac{2\,tg\,x}{1 - tg^2\,x} \to 2\,sen\,x - 2\,sen\,x\,tg^2\,x = 2\,tg\,x \to$

$\to sen\,x - sen\,x\,\dfrac{sen^2\,x}{cos^2\,x} = \dfrac{sen\,x}{cos\,x} \to sen\,x\,cos^2\,x - sen\,x\,sen^2\,x = sen\,x\,cos\,x \to$

$\to sen\,x\,(cos^2\,x - sen^2\,x - cos\,x) = 0 \to sen\,x\,(cos^2\,x - 1 + cos^2 x - cos\,x) = 0 \to$

$$\to \begin{cases} sen\,x = 0 \to x_1 = 0°,\ x_2 = 180° \\ 2\,cos^2\,x - cos\,x - 1 = 0° \to cos\,x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \left< \begin{array}{l} 1 \to x_3 = 0° = x_1 \\ -1/2 \to x_4 = 240°,\ x_5 = 120° \end{array}\right. \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_4 = 240° + k \cdot 360° = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_5 = 120° + k \cdot 360° = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Que, agrupando soluciones, quedaría:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 120° + k \cdot 360° = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_3 = 240° + k \cdot 360° = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

e) $\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}} + \cos x - 1 = 0 \rightarrow \dfrac{3-3\cos x}{2} = (1-\cos x)^2 \rightarrow$

$\rightarrow 3 - 3\cos x = 2(1 + \cos^2 x - 2\cos x) \rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 = 0° \\ -1/2 \rightarrow x_2 = 120°,\ x_3 = 240° \end{cases}$

Al comprobar, vemos que las tres soluciones son válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 120° + k \cdot 360° = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_3 = 240° + k \cdot 360° = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

f) $2\,sen\,x\cos x\cos x = 6\,sen^3\,x \rightarrow 2\,sen\,x\cos^2 x = 6\,sen^3\,x \rightarrow$

$\rightarrow 2\,sen\,x\,(1 - sen^2\,x) = 6\,sen^3\,x \rightarrow 2\,sen\,x - 2\,sen^3\,x = 6\,sen^3\,x \rightarrow$

$\rightarrow sen\,x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 180°$

$sen^2\,x = \dfrac{1}{4} \rightarrow sen\,x = \pm\dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 30°,\ x_4 = 150° \\ x_5 = 210°,\ x_6 = 330° \end{cases}$

Comprobamos que todas las soluciones son válidas.

Damos las soluciones agrupando las dos primeras por un lado y el resto por otro:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 30° + k \cdot 90° = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

g) $\dfrac{tg\,(\pi/4) + tg\,x}{1 - tg\,(\pi/4)\,tg\,x} + tg\,x = 1 \rightarrow \dfrac{1 + tg\,x}{1 - tg\,x} + tg\,x = 1 \rightarrow 1 + tg\,x + tg\,x - tg^2\,x = 1 - tg\,x \rightarrow$

$\rightarrow tg^2\,x - 3\,tg\,x = 0 \rightarrow tg\,x\,(tg\,x - 3) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} tg\,x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 180° \\ tg\,x = 3 \rightarrow x_3 = 71°\,33'\,54,2'',\ x_4 = 251°\,33'\,54,2'' \end{cases}$

Las cuatro soluciones son válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 71°\,33'\,54,2'' + k \cdot 360° \approx \dfrac{2\pi}{5} + 2k\,\pi \\ x_4 = 251°\,33'\,54,2'' + k \cdot 360° \approx \dfrac{7\pi}{5} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 71°\,33'\,54,2'' + k \cdot 180° \approx \dfrac{2\pi}{5} + k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

## Ángulos en radianes

**26 Expresa en grados los siguientes ángulos dados en radianes:**

$$\frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{3};\ \frac{4\pi}{9};\ \frac{3\pi}{5};\ 1{,}5;\ 3{,}2$$

$\dfrac{5\pi}{6}\text{ rad} = \dfrac{5 \cdot 180°}{6} = 150°$ $\quad \dfrac{7\pi}{3}\text{ rad} = \dfrac{7 \cdot 180°}{3} = 420°$ $\quad \dfrac{4\pi}{9}\text{ rad} = \dfrac{4 \cdot 180°}{9} = 80°$

$\dfrac{3\pi}{5}\text{ rad} = \dfrac{3 \cdot 180°}{5} = 108°$ $\quad 1{,}5\text{ rad} = \dfrac{1{,}5 \cdot 180°}{\pi} = 85°\,56'\,37''$ $\quad 3{,}2\text{ rad} = \dfrac{3{,}2 \cdot 180°}{\pi} = 183°\,20'\,47''$

**27 Pasa a radianes los siguientes ángulos. Exprésalos en función de π:**

**135°; 210°; 108°; 72°; 126°; 480°**

$$135° = \frac{135 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{4}\text{ rad}$$

$$210° = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6}\text{ rad}$$

$$108° = \frac{108 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{5}\text{ rad}$$

$$72° = \frac{72 \cdot \pi}{180} = \frac{2\pi}{5}\text{ rad}$$

$$126° = \frac{126 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{10}\text{ rad}$$

$$480° = \frac{480 \cdot \pi}{180} = \frac{8\pi}{3}\text{ rad}$$

**28 Prueba que:**

**a)** $4\,sen\,\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{2}\,cos\,\dfrac{\pi}{4} + cos\,\pi = 2$

**b)** $2\sqrt{3}\,sen\,\dfrac{2\pi}{3} + 4\,sen\,\dfrac{\pi}{6} - 2\,sen\,\dfrac{\pi}{2} = 3$

**c)** $sen\,\dfrac{2\pi}{3} - cos\,\dfrac{7\pi}{6} + tg\,\dfrac{4\pi}{3} + tg\,\dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

a) $4\,sen\,\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{2}\,cos\,\dfrac{\pi}{4} + cos\,\pi = 4 \cdot \dfrac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + (-1) = 2 + 1 - 1 = 2$

b) $2\sqrt{3}\,sen\,\dfrac{2\pi}{3} + 4\,sen\,\dfrac{\pi}{6} - 2\,sen\,\dfrac{\pi}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \dfrac{1}{2} - 2 \cdot 1 = 3 + 2 - 2 = 3$

c) $sen\,\dfrac{2\pi}{3} - cos\,\dfrac{7\pi}{6} + tg\,\dfrac{4\pi}{3} + tg\,\dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + 1 - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

**29** **Halla el valor exacto de cada una de estas expresiones sin utilizar la calculadora:**

a) $5\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 + 2\cos\pi - \cos\frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi$

b) $sen\,\frac{\pi}{4} + sen\,\frac{\pi}{2} + sen\,\pi$

c) $\cos\frac{5\pi}{3} + tg\,\frac{4\pi}{3} - tg\,\frac{7\pi}{6}$

d) $\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + sen\,\frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3}\,sen\,\frac{\pi}{3}$

**Comprueba los resultados con calculadora.**

a) $5 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot (-1) - 0 + 1 = -2$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$

c) $\frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

d) $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 3 = -2$

**30** **Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos e indica, sin pasar a grados, en qué cuadrante está cada uno:**

**a)** 0,8 rad **b)** 3,2 rad **c)** 2 rad **d)** 4,5 rad

**e)** $\pi/8$ rad **f)** $7\pi/4$ rad **g)** $3\pi/5$ rad **h)** $1{,}2\pi$ rad

* *Ten en cuenta que:* $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$; $\pi \approx 3{,}14$; $\frac{3\pi}{2} \approx 4{,}7$; $2\pi \approx 6{,}28$.

Para saber en qué cuadrante está cada uno, podemos usar también los signos de las razones trigonométricas.

a) $sen\,0{,}8 = 0{,}72$ $\cos 0{,}8 = 0{,}50$ $tg\,0{,}8 = 1{,}03 \rightarrow$ Cuadrante I

b) $sen\,3{,}2 = -0{,}06$ $\cos 3{,}2 = -1$ $tg\,3{,}2 = 0{,}06 \rightarrow$ Cuadrante III

c) $sen\,2 = 0{,}91$ $\cos 2 = -0{,}42$ $tg\,2 = -2{,}19 \rightarrow$ Cuadrante II

d) $sen\,4{,}5 = -0{,}98$ $\cos 4{,}5 = -0{,}21$ $tg\,4{,}5 = 4{,}64 \rightarrow$ Cuadrante III

e) $sen\,\frac{\pi}{8} = 0{,}38$ $\cos\frac{\pi}{8} = 0{,}92$ $tg\,\frac{\pi}{8} = 0{,}41 \rightarrow$ Cuadrante I

f) $sen\,\frac{7\pi}{4} = -0{,}71$ $\cos\frac{7\pi}{4} = 0{,}71$ $tg\,\frac{7\pi}{4} = -1 \rightarrow$ Cuadrante IV

g) $sen\,\frac{3\pi}{5} = 0{,}95$ $\cos\frac{3\pi}{5} = -0{,}31$ $tg\,\frac{3\pi}{5} = -3{,}08 \rightarrow$ Cuadrante II

h) $sen\,1{,}2\pi = -0{,}59$ $\cos 1{,}2\pi = -0{,}81$ $tg\,1{,}2\pi = 0{,}73 \rightarrow$ Cuadrante III

**31** **En cada caso halla, en radianes, dos valores para el ángulo $\alpha$ tales que:**

**a)** $sen\,\alpha = 0{,}32$

**b)** $\cos\alpha = 0{,}58$

**c)** $tg\,\alpha = -1{,}5$

**d)** $sen\,\alpha = -0{,}63$

a) $\alpha_1 = 0{,}33$; $\alpha_2 = 2{,}82$

b) $\alpha_1 = 0{,}95$; $\alpha_2 = 5{,}33$

c) $\alpha_1 = -0{,}98$; $\alpha_2 = 2{,}16$

d) $\alpha_1 = -0{,}68$; $\alpha_2 = 3{,}82$

**Página 144**

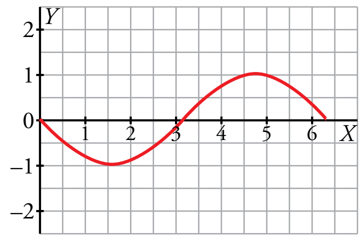
## Para resolver

**32 Representa las siguientes funciones trigonométricas:**

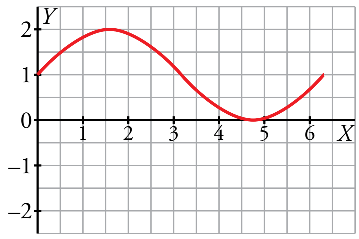
**a)** $y = -sen\ x$ **b)** $y = 1 + sen\ x$ **c)** $y = -cos\ x$ **d)** $y = 1 + cos\ x$

Todas estas funciones son periódicas, de período $2\pi$. Están representadas en el intervalo $[0, 2\pi]$. A partir de aquí, se repite.

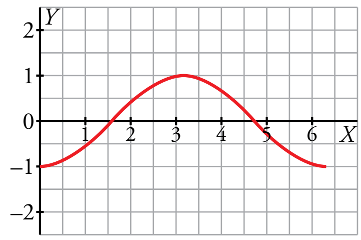
a) $y = -sen\ x$



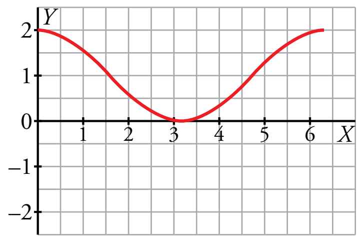

b) $y = 1 + sen\ x$




c) $y = -cos\ x$




d) $y = 1 + cos\ x$



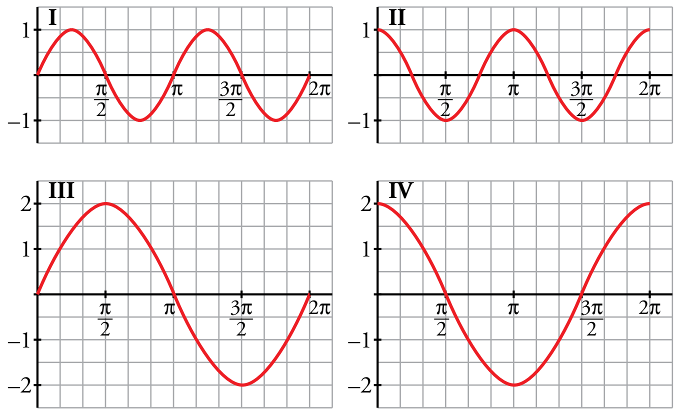

**33 Asocia a cada una de las siguientes funciones la gráfica que le corresponde:**

**a)** $y = 2\ sen\ x$

**b)** $y = cos\ 2x$

**c)** $y = 2\ cos\ x$

**d)** $y = sen\ 2x$




a) Grafica III. b) Gráfica II. c) Gráfica IV. d) Gráfica I.

**34 Halla los puntos de corte de las funciones $y = sen\ x$ e $y = tg\ x$.**

Los puntos de corte serán aquellos cuyas abscisas cumplan $sen\ x = tg\ x$.

Resolvemos la ecuación:

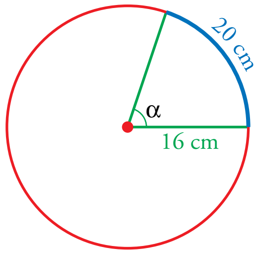
$$sen\ x - tg\ x = 0 \rightarrow sen\ x - \frac{sen\ x}{cos\ x} = 0 \rightarrow sen\ x\left(1 - \frac{1}{cos\ x}\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} sen\ x = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{cos\ x} = 0 \end{cases}$$

- Si $sen\ x = 0 \rightarrow x = 0 + 2\pi \cdot k;\ x = \pi + 2\pi \cdot k$
- Si $1 - \dfrac{1}{cos\ x} = 0 \rightarrow cos\ x = 1 \rightarrow x = 0 + 2\pi \cdot k$

En resumen, $x = \pi \cdot k$

En todos ellos tanto el seno como la tangente valen 0. Por tanto, los puntos de corte de las funciones son de la forma $(\pi \cdot k, 0)$.

**35** **En una circunferencia de 16 cm de radio, un arco mide 20 cm. Halla el ángulo central que corresponde a ese arco en grados y en radianes.**

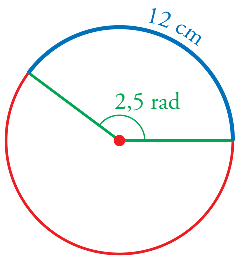



Como la circunferencia completa (100,53 cm) son $2\pi$ *rad*, entonces:

$$\frac{100,53}{20}=\frac{2\pi}{\alpha} \to \alpha=\frac{20\cdot 2\pi}{100,53}=1,25\,rad$$

$$\alpha=\frac{360°}{2\pi}\cdot 1,25=71°\,37'\,11''$$

**36** **En una determinada circunferencia, a un arco de 12 cm de longitud le corresponde un ángulo de 2,5 radianes. ¿Cuál es el radio de esa circunferencia?**




$$\frac{2,5\,rad}{1\,rad}=\frac{12\text{ cm}}{R\text{ cm}} \to R=\frac{12}{2,5}=4,8\text{ cm}$$

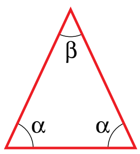
**37** **Halla, en radianes, el ángulo comprendido entre 0 y $2\pi$ tal que sus razones trigonométricas coincidan con las de $\frac{19\pi}{5}$.**

Como $\frac{19}{5}=3,8$, el ángulo $\alpha$ dado verifica $2\pi<\alpha<4\pi$, luego tiene más de una vuelta completa y menos de dos vueltas.

Si le restamos una vuelta $(2\pi)$ obtendremos el ángulo que nos piden.

Tiene las mismas razones trigonométricas que el ángulo $\frac{19\pi}{5}-2\pi=\frac{9\pi}{5}$ y $0<\frac{9\pi}{5}\text{ rad}<2\pi$.

**38**




**Si en este triángulo isósceles sabemos que $cos\,\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$, calcula, sin hallar el ángulo $\alpha$, el valor de $cos\,\beta$.**

Para calcular $cos\,\beta$ necesitamos averiguar primero el valor de $sen\,\alpha$:

$$sen^2\alpha+cos^2\alpha=1 \to sen^2\alpha+\frac{1}{8}=1 \to sen^2\alpha=\frac{7}{8} \to sen\,\alpha=\sqrt{\frac{7}{8}} \text{ ya que es un ángulo agudo.}$$

$$cos\,\beta=cos\,(180°-2\alpha)=cos\,180°\,cos\,2\alpha+sen\,180°\,sen\,2\alpha=-cos\,2\alpha=-(cos^2\alpha-sen^2\alpha)=-\left(\frac{1}{8}-\frac{7}{8}\right)=\frac{3}{4}$$

**39** **En un triángulo $ABC$ conocemos $\hat{B}=45°$ y $cos\,\hat{A}=-\frac{1}{5}$. Calcula, sin hallar los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$, las razones trigonométricas del ángulo $\hat{C}$.**

Calculamos primero las razones trigonométricas de $\hat{A}$ y de $\hat{B}$.

$$sen^2\hat{A}+cos^2\hat{A}=1 \to sen^2\hat{A}+\frac{1}{25}=1 \to sen^2\hat{A}=\frac{24}{25} \to sen^2\hat{A}=\frac{\sqrt{24}}{5} \text{ ya que } \hat{A}<180°.$$

$$sen\,\hat{B}=sen\,45°=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad cos\,\hat{B}=cos\,45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\,\hat{C}=sen\,(180°-(\hat{A}+\hat{B}))=sen\,180°\,cos\,(\hat{A}+\hat{B})-cos\,180°\,sen\,(\hat{A}+\hat{B})=sen\,(\hat{A}+\hat{B})=$$

$$=sen\,\hat{A}\,cos\,\hat{B}+cos\,\hat{A}\,sen\,\hat{B}=\frac{\sqrt{24}}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}{10}$$

$$cos\ \hat{C} = cos\ (180° - (\hat{A} + \hat{B})) = cos\ 180°\ cos\ (\hat{A} + \hat{B}) + sen\ 180°\ sen\ (\hat{A} + \hat{B}) = -cos\ (\hat{A} + \hat{B}) =$$

$$= -(cos\ \hat{A}\ cos\ \hat{B} - sen\ \hat{A}\ sen\ \hat{B}) = -\left(-\frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{24}}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{2}}{10}$$

$$tg\ \hat{C} = \frac{sen\ \widehat{C}}{cos\ \widehat{C}} = \frac{\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}{10}}{\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{2}}{10}} = \frac{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{25-4\sqrt{6}}{23}$$

**40** **Si** $cos\ 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **y** $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, **calcula** $sen\ \alpha$ **y** $cos\ \alpha$, **sin hallar el ángulo** $\alpha$.

$$cos\ 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \to cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \to 1 - sen^2\ \alpha - sen^2\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \to 2sen^2\ \alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \to$$

$\to sen^2\ \alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \to sen\ \alpha = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}$ ya que el ángulo está en el cuarto cuadrante.

$cos\ \alpha = \sqrt{1 - \frac{3-\sqrt{3}}{6}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}$ ya que el ángulo está en el cuarto cuadrante.

**41** **Demuestra estas igualdades:**

a) $\frac{tg\ \alpha}{tg\ 2\alpha - tg\ \alpha} = cos\ 2\alpha$ b) $sen\ 4\alpha = 2\ sen\ 2\alpha\ (1 - 2\ sen^2\ \alpha)$ c) $cos\ 4\alpha + 2\ sen^2\ 2\alpha = 1$

a) $$\frac{tg\ \alpha}{tg\ 2\alpha - tg\ \alpha} = \frac{tg\ \alpha}{\frac{2\ tg\ \alpha}{1-tg^2\ \alpha} - tg\ \alpha} = \frac{tg\ \alpha\ (1-tg^2\ \alpha)}{2\ tg\ \alpha - tg\ \alpha\ (1-tg^2\ \alpha)} = \frac{tg\ \alpha\ (1-tg^2\ \alpha)}{tg\ \alpha + tg^3\ \alpha} =$$

$$= \frac{tg\ \alpha\ (1-tg^2\ \alpha)}{tg\ \alpha\ (1+tg^2\ \alpha)} = \frac{1-\frac{sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha}}{1+\frac{sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha}} = \frac{\frac{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha}}{\frac{cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha}} =$$

$$= \frac{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha} = cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha = cos\ 2\alpha$$

b) $sen\ 4\alpha = sen\ (2\cdot 2\alpha) = 2\ sen\ 2\alpha\ cos\ 2\alpha = 2sen\ 2\alpha\ (cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) =$

$= 2\ sen\ 2\alpha\ (1 - sen^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) = 2\ sen\ 2\alpha\ (1 - 2\ sen^2\ \alpha)$

c) $cos\ 4\alpha + 2\ sen^2\ 2\alpha = cos\ (2\cdot 2\alpha) + 2\ sen^2\ 2\alpha = cos^2\ 2\alpha - sen^2\ 2\alpha + 2\ sen^2\ 2\alpha = cos^2\ 2\alpha + sen^2\ 2\alpha = 1$

**42** **Simplifica:**

a) $\frac{2\ cos\ (45° + \alpha)\ cos\ (45° - \alpha)}{cos\ 2\alpha}$ b) $sen\ \alpha \cdot cos\ 2\alpha - cos\ \alpha \cdot sen\ 2\alpha$

a) $$\frac{2\ cos\ (45°+\alpha)\ cos\ (45°-\alpha)}{cos\ 2\alpha} = \frac{2\ (cos\ 45°\ cos\ \alpha - sen\ 45°\ sen\ \alpha)\ (cos\ 45°\ cos\ \alpha + sen\ 45°\ sen\ \alpha)}{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha} =$$

$$= \frac{2\ (cos^2\ 45°\ cos^2\ \alpha - sen^2\ 45°\ sen^2\ \alpha)}{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha} =$$

$$= \frac{2\cdot[(\sqrt{2}/2)^2\ cos^2\ \alpha - (\sqrt{2}/2)^2\ sen^2\ \alpha]}{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha} =$$

$$= \frac{2\cdot 1/2\ cos^2\ \alpha - 2\cdot 1/2\ sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha} = \frac{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha} = 1$$

b) $sen\ \alpha \cdot cos\ (2\alpha) - cos\ \alpha \cdot sen\ (2\alpha) = sen\ \alpha\ (cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) - cos\ \alpha\ 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha =$

$= sen\ \alpha\ cos^2\ \alpha - sen^3\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos^2\ \alpha = -sen^3\ \alpha - sen\ \alpha\ cos^2\ \alpha =$

$= -sen\ \alpha\ (sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha) = -sen\ \alpha$

**43** **Resuelve estas ecuaciones:**

**a)** $\dfrac{sen\ 5x + sen\ 3x}{cos\ x + cos\ 3x} = 1$

**b)** $\dfrac{sen\ 3x + sen\ x}{cos\ 3x - cos\ x} = \sqrt{3}$

**c)** $sen\ 3x - sen\ x = cos\ 2x$

**d)** $sen\ 3x - cos\ 3x = sen\ x - cos\ x$

a) $$\dfrac{2\ sen\ \dfrac{5x+3x}{2}\ cos\ \dfrac{5x-3x}{2}}{2\ cos\ \dfrac{3x+x}{2}\ cos\ \dfrac{3x-x}{2}} = 1 \rightarrow \dfrac{2\ sen\ 4x\ cos\ x}{2\ cos\ 2x\ cos\ x} = 1 \rightarrow \dfrac{sen\ 4x}{cos\ 2x} = 1 \rightarrow \dfrac{sen\ (2 \cdot 2x)}{cos\ 2x} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \dfrac{2\ sen\ 2x\ cos\ 2x}{cos\ 2x} = 1 \rightarrow 2\ sen\ 2x = 1 \rightarrow sen\ 2x = \dfrac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = 30° \rightarrow x_1 = 15° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 150° \rightarrow x_2 = 75° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 390° \rightarrow x_3 = 195° + k \cdot 360° = \dfrac{13\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 510° \rightarrow x_4 = 255° + k \cdot 360° = \dfrac{17\pi}{12} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Al comprobar, vemos que todas las soluciones son válidas.

b) $$\dfrac{2\ sen\ \dfrac{3x+x}{2}\ cos\ \dfrac{3x-x}{2}}{-2\ sen\ \dfrac{3x+x}{2}\ sen\ \dfrac{3x-x}{2}} = \sqrt{3} \rightarrow \dfrac{2\ sen\ 2x\ cos\ x}{-2\ sen\ 2x\ sen\ x} = \dfrac{cos\ x}{-sen\ x} = -\dfrac{1}{tg\ x} = \sqrt{3} \rightarrow tg\ x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 150° \\ x_2 = 330° \end{array}\right.$$

Ambas soluciones son válidas, luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 150° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $2\ cos\ \dfrac{3x+x}{2}\ sen\ \dfrac{3x-x}{2} = cos\ 2x$

$2\ cos\ 2x\ sen\ x = cos\ 2x \rightarrow 2\ sen\ x = 1 \rightarrow sen\ x = \dfrac{1}{2} \rightarrow x_1 = 30°,\ x_2 = 150°$

Comprobando, vemos que las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = 150° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $sen\ 3x - sen\ x = cos\ 3x - cos\ x \rightarrow 2\ cos\ 2x\ sen\ x = -2\ sen\ 2x\ sen\ x \rightarrow$ (Dividimos entre $2\ sen\ x$)

$$\rightarrow cos\ 2x = -sen\ 2x \rightarrow \dfrac{sen\ 2x}{cos\ 2x} = -1 \rightarrow tg\ 2x = -1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = 315° \rightarrow x_1 = 157{,}5° + k \cdot 360° \\ 2x = 135° \rightarrow x_2 = 67{,}5° + k \cdot 360° \\ 2x = 675° \rightarrow x_3 = 337{,}5° + k \cdot 360° \\ 2x = 495° \rightarrow x_4 = 247{,}5° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos comprobar que las cuatro soluciones son válidas. Agrupándolas:

$x = 67{,}5° + k \cdot 90°$ con $k \in \mathbb{Z}$

**44** **a) Demuestra que** $\boldsymbol{sen\ 3x = 3\ sen\ x\ cos^2 x - sen^3 x}$. **b) Resuelve la ecuación** $\boldsymbol{sen\ 3x - 2\ sen\ x = 0}$.

a) $sen\ 3x = sen\ (2x + x) = sen\ 2x\ cos\ x + cos\ 2x\ sen\ x = 2\ sen\ x\ cos\ x\ cos\ x + (cos^2 x - sen^2 x)\ sen\ x =$

$= 2\ sen\ x\ cos^2 x + sen\ x\ cos^2 x - sen^3 x = 3\ sen\ x\ cos^2 x - sen^3 x$

b) $sen\ 3x - 2\ sen\ x = 0 \ \rightarrow$ por el resultado del apartado anterior:

$$3\ sen\ x\ cos^2 x - sen^3 x - 2\ sen\ x = 0 \ \rightarrow\ 3\ sen\ x\ (1 - sen^2 x) - sen^3 x - 2\ sen\ x = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 3\ sen\ x - 3\ sen^3 x - sen^3 x - 2\ sen\ x = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 4\ sen^3 x - sen\ x = 0 \ \rightarrow\ sen\ x\ (4\ sen^2 x - 1) = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} sen\ x = 0 \ \rightarrow\ x_1 = 0°,\ x_2 = 150° \\ sen\ x = \pm\dfrac{1}{2} \ \rightarrow\ x_3 = 30°,\ x_4 = 150°,\ x_5 = 210°,\ x_6 = 330° \end{cases}$$

Todas las soluciones son válidas y se pueden expresar como:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180° = k\pi \\ x_2 &= 30° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x_3 &= 150° + k \cdot 180° = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{aligned}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

**45** **Demuestra las siguientes igualdades:**

**a)** $\boldsymbol{sen^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) - sen^2\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) = sen\ \alpha \cdot sen\ \beta}$ **b)** $\boldsymbol{cos^2\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) - cos^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = sen\ \alpha \cdot sen\ \beta}$

a) El primer miembro de la igualdad es una diferencia de cuadrados, luego podemos factorizarlo como una suma por una diferencia:

$$\left[sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] \cdot \left[sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] \overset{(*)}{=} \left[2\ sen\ \frac{\alpha}{2}\ cos\ \frac{\beta}{2}\right] \cdot \left[2\ cos\ \frac{\alpha}{2}\ sen\ \frac{\beta}{2}\right] =$$

$$= 4\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + cos\ \beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - cos\ \beta}{2}} =$$

$$= \sqrt{(1 - cos\ \beta)(1 + cos\ \beta)(1 + cos\ \alpha)(1 - cos\ \beta)} =$$

$$= \sqrt{(1 - cos^2\ \alpha)(1 - cos^2\ \beta)} = \sqrt{sen^2\ \alpha \cdot sen^2\ \beta} = sen\ \alpha\ sen\ \beta$$

(∗) Transformamos la suma y la diferencia en productos, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = \beta$$

b) Procedemos de manera análoga al apartado anterior, pero ahora:

$$\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} = -\beta$$

$$cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \left[cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] \cdot \left[cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] =$$

$$= \left[2\ cos\ \frac{\alpha}{2}\ cos\ \frac{-\beta}{2}\right] \cdot \left[-2\ sen\ \frac{\alpha}{2}\ sen\ \frac{-\beta}{2}\right] = \left[2\ cos\ \frac{\alpha}{2}\ cos\ \frac{\beta}{2}\right] \cdot \left[2\ sen\ \frac{\alpha}{2}\ sen\ \frac{\beta}{2}\right] =$$

$$= 4\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + cos\ \beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - cos\ \beta}{2}} = \sqrt{(1 - cos^2\ \alpha)(1 - cos^2\ \beta)} = \sqrt{sen^2\ \alpha \cdot sen^2\ \beta} = sen\ \alpha\ sen\ \beta$$

NOTA: También podríamos haberlo resuelto aplicando el apartado anterior como sigue:

$$cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 1 - sen^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - 1 + sen^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$= sen^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \overset{(*)}{=} sen\ \alpha\ sen\ \beta$$

(∗) Por el apartado anterior.

**46 Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante:**

a) $\begin{cases} x + y = 120° \\ sen\ x - sen\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} sen\ x + cos\ y = 1 \\ x + y = 90° \end{cases}$ c) $\begin{cases} sen^2\ x + cos^2\ y = 1 \\ cos^2\ x - sen^2\ y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} sen\ x + cos\ y = 1 \\ 4\ sen\ x\ cos\ y = 1 \end{cases}$

a) De la segunda ecuación: $2\ cos\ \dfrac{x+y}{2}\ sen\ \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2}$

Como:

$x + y = 120° \to 2\ cos\ 60°\ sen\ \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2} \to 2 \cdot \dfrac{1}{2}\ sen\ \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2} \to$

$\to sen\ \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{x-y}{2} = 30° \to x - y = 60°$

Así: $x + y = 120°$

$x - y = 60°$

$2x = 180° \to x = 90° \to y = 30°$

Luego la solución es (90°, 30°)

b) $x + y = 90° \to$ complementarios $\to sen\ x = cos\ y$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$cos\ y + cos\ y = 1 \to 2\ cos\ y = 1 \to cos\ y = \dfrac{1}{2} \to y = 60° \to x = 90° - y = 90° - 60° = 30°$

Luego la solución es: (30°, 60°)

c) Como $\begin{cases} cos^2\ y = 1 - sen^2\ y \\ cos^2\ x = 1 - sen^2 x \end{cases}$

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} sen^2\ x + 1 - sen^2\ y = 1 \\ 1 - sen^2\ x - sen^2\ y = 1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} sen^2\ x - sen^2\ y = 0 \\ -sen^2\ x - sen^2\ y = 0 \end{array}\right\}$$

$$-2\ sen^2\ y = 0 \to sen\ y = 0 \to y = 0°$$

Sustituyendo en la segunda ecuación (por ejemplo) del sistema inicial, se obtiene:

$$cos^2\ x - 0 = 1 \to cos^2\ x = 1 = \begin{cases} cos\ x = 1 \to x = 0° \\ cos\ x = -1 \to x = 180° \in 2.^{\text{o}} \text{ cuadrante} \end{cases}$$

Luego la solución es: (0°, 0°)

d) $\left.\begin{array}{l} sen\ x + cos\ y = 1 \\ 4\ sen\ x\ cos\ y = 1 \end{array}\right\}\ cos\ y = 1 - sen\ x$

$4\ sen\ x\ (1 - sen\ x) = 1 \to 4\ sen^2\ x - 4\ sen\ x + 1 = 0 \to sen\ x = \dfrac{4 \pm 0}{8} = \dfrac{1}{2} \to cos\ y = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Las diferentes posibilidades son:

$\begin{cases} x = 30° + 360° \cdot k \\ y = 60° + 360° \cdot k \end{cases}$

$\begin{cases} x = 30° + 360° \cdot k \\ y = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$

$\begin{cases} x = 150° + 360° \cdot k \\ y = 60° + 360° \cdot k \end{cases}$

$\begin{cases} x = 150° + 360° \cdot k \\ y = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$

**47** **Sin desarrollar las razones trigonométricas de la suma o de la diferencia de ángulos, averigua para qué valores de $x$ se verifica cada una de estas igualdades:**

**a)** $sen\ (x-60°) = sen\ 2x$

**b)** $cos\ (x-45°) = cos\ (2x+60°)$

**c)** $sen\ (x+60°) = cos\ (x+45°)$

**d)** $cos\ (2x-30°) = cos\ (x+45°)$

a) $sen\,(x-60°) = sen\,2x \;\rightarrow\; sen\,2x - sen\,(x-60°) = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; 2\,cos\,\frac{2x+x-60°}{2}\,sen\,\frac{2x-(x-60°)}{2} = 0 \;\rightarrow\; cos\,\frac{3x-60°}{2}\,sen\,\frac{x+60°}{2} = 0$$

• Si $cos\,\dfrac{3x-60°}{2} = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{3x-60°}{2} = 90° \;\rightarrow\; x = 80° + 360°\cdot k \\[2mm] \dfrac{3x-60°}{2} = 270° \;\rightarrow\; x = 200° + 360°\cdot k \end{cases}$

Si sumamos 360° encontramos otra solución:

$\dfrac{3x-60°}{2} = 90° + 360° \;\rightarrow\; x = 320° + 360°\cdot k$

• Si $sen\,\dfrac{x+60°}{2} = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{x+60}{2} = 0° \;\rightarrow\; x = 300° + 360°\cdot k \\[2mm] \dfrac{x+60°}{2} = 180° \;\rightarrow\; x = 300° + 360°\cdot k \end{cases}$

b) $cos\,(x-45°) = cos\,(2x+60°) \;\rightarrow\; cos\,(2x+60°) - cos\,(x-45°) = \;\; 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; -2\,sen\,\frac{2x+60°+x-45°}{2}\,sen\,\frac{2x+60°-(x-45°)}{2} = 0 \;\rightarrow\; sen\,\frac{3x+15°}{2}\,sen\,\frac{x+105°}{2} = 0$$

• Si $sen\,\dfrac{3x+15°}{2} = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{3x+15°}{2} = 0° \;\rightarrow\; x = 355° + 360°\cdot k \\[2mm] \dfrac{3x+15°}{2} = 180° \;\rightarrow\; x = 115° + 360°\cdot k \end{cases}$

Si sumamos 360° encontramos otra solución: $\dfrac{3x+15°}{2} = 0° + 360° \;\rightarrow\; x = 235° + 360°\cdot k$

• Si $sen\,\dfrac{x+105°}{2} = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{x+105°}{2} = 0° \;\rightarrow\; x = 255° + 360°\cdot k \\[2mm] \dfrac{x+105°}{2} = 180° \;\rightarrow\; x = 255° + 360°\cdot k \end{cases}$

c) $sen\,(x+60°) = cos\,(x+45°)$

Como $cos\,x = sen\,(x+90°)$, podemos sustituir en el segundo miembro obteniendo:

$sen\,(x+60°) = sen\,(x+45°+90°) \;\rightarrow\; sen\,(x+60°) = sen\,(x+135°) \;\rightarrow\; sen\,(x+135°) - sen\,(x+60°) = 0$

$$-2\,cos\,\frac{x+135°+x+60°}{2}\,sen\,\frac{x+135°-(x+60°)}{2} = 0 \;\rightarrow\; cos\,\frac{2x+195°}{2}\,sen\,\frac{75°}{2} = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{2x+195°}{2} = 90° \;\rightarrow\; x = 352°\,30' + 360°\cdot k \\[2mm] \dfrac{2x+195°}{2} = 270° \;\rightarrow\; x = 172°\,30' + 360°\cdot k \end{cases}$$

d) $cos\,(2x-30°) = cos\,(x+45°) \;\rightarrow\; cos\,(2x-30°) - cos\,(x+45°) = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; -2\,sen\,\frac{2x-30°+x+45°}{2}\,sen\,\frac{2x-30°-(x+45°)}{2} = 0 \;\rightarrow\; sen\,\frac{3x+15°}{2}\,sen\,\frac{x-75°}{2} = 0$$

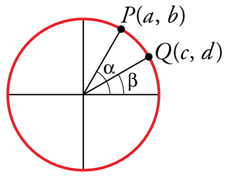
• Si $sen\,\dfrac{3x+15°}{2} = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{3x+15°}{2} = 0° \;\rightarrow\; x = 355° + 360°\cdot k \\[2mm] \dfrac{3x+15°}{2} = 180° \;\rightarrow\; x = 115° + 360°\cdot k \end{cases}$

Si sumamos 360° encontramos otra solución: $\dfrac{3x+15°}{2} = 0 + 360° \;\rightarrow\; x = 235° + 360°\cdot k$

• Si $sen\,\dfrac{x-75°}{2} = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{x-75°}{2} = 0° \;\rightarrow\; x = 75° + 360°\cdot k \\[2mm] \dfrac{x-75°}{2} = 180° \;\rightarrow\; x = 75° + 360°\cdot k \end{cases}$

**48** **En una circunferencia goniométrica dibujamos los ángulos $\alpha$ y $\beta$. Llamamos $\gamma = \alpha - \beta$.**

**a) ¿Cuál de estas expresiones es igual a $sen\ \gamma$?**




**I. $ac + bd$ II. $bc - ad$ III. $ad - bc$ IV. $ab + cd$**

**b) ¿Alguna de ellas es igual a $cos\ \gamma$?**

a) $sen\ \gamma = sen\ (\alpha - \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta = ad - bc$ (III)

b) $cos\ \gamma = cos\ (\alpha - \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta = bd + ac$ (I)

**Página 145**

## Cuestiones teóricas

**49** **¿Cuál de las siguientes condiciones deben cumplir $x$ e $y$ para que se verifique $cos\ (x + y) = 2\ cos\ x\ cos\ y$?**

**(I) $x = y$ (II) $x - y = \pi$ (III) $x + y = \pi$ (IV) $x - y = \dfrac{\pi}{2}$**

$cos\ (x + y) = cos\ x\ cos\ y - sen\ x\ sen\ y$

Si $cos\ (x + y) = 2\ cos\ x\ cos\ y \to cos\ x\ cos\ y - sen\ x\ sen\ y = 2\ cos\ x\ cos\ y \to -sen\ x\ sen\ y = cos\ x\ cos\ y$

Dividiendo entre $cos\ x\ cos\ y$ se obtiene que $\dfrac{-sen\ x\ sen\ y}{cos\ x\ cos\ y} = 1$, es decir, $-tg\ x\ tg\ y = 1$ y esto ocurre solo cuando se cumple (IV) porque despejando $y$ tenemos: $y = x + \dfrac{\pi}{2}$, luego:

$$\left.\begin{array}{l} sen\ y = sen\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = cos\ x \\ cos\ y = cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -sen\ x \end{array}\right\} \to tg\ y = \frac{sen\ y}{cos\ y} = \frac{cos\ x}{-sen\ x} = -\frac{1}{\dfrac{sen\ x}{cos\ x}} = -\frac{1}{tg\ x}$$

**50** **Expresa $sen\ 4\alpha$ y $cos\ 4\alpha$ en función de $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$.**

$sen\ 4\alpha = sen\ (2 \cdot 2\alpha) = 2\ sen\ 2\alpha\ cos\ \alpha = 2 \cdot 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha\ (cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) = 4\ cos^3\ \alpha\ sen\ \alpha - 4\ cos\ \alpha\ sen^3\ \alpha$

$cos\ 4\ \alpha = cos\ (2 \cdot 2\alpha) = cos^2\ \alpha - sen^2\ 2\alpha = (cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha)^2 - (2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha)^2 =$

$= cos^4\ \alpha - 2\ cos^2\ \alpha\ sen^2\ \alpha + sen^4\ \alpha - 4\ sen^2\ \alpha\ cos^2\ \alpha = cos^4\ \alpha - 6\ cos^2\ \alpha\ sen^2\ \alpha + sen^4\ \alpha$

**51** **Al duplicarse un ángulo, ¿se duplica su seno? Prueba si se cumple $sen\ 2x = 2\ sen\ x$ para cualquier valor de $x$.**

La afirmación es falsa porque, por ejemplo, $sen\ 60° = \sqrt{3}\ sen\ 30° \neq 2\ sen\ 30°$.

Veamos ahora si existe algún ángulo que cumpla la relación $sen\ 2x = 2\ sen\ x$.

$2\ sen\ x\ cos\ x = 2\ sen\ x = sen\ x\ cos\ x - sen\ x = 0 \to sen\ x\ (cos\ x - 1) = 0$

- Si $sen\ x = 0 \to x = 0° + 360° \cdot k,\ x = 180° + 360° \cdot k$
- Si $cos\ x = 1 \to x = 0° + 360° \cdot k$ (solución botenida anteriormente)

Por tanto, los únicos ángulos que cumplen la relación dada son de la forma $180° \cdot k$.

**52** **Justifica que en un triángulo $ABC$, rectángulo en $A$, se verifica la siguiente igualdad:**

**$sen\ 2B = sen\ 2C$**

Como el triángulo es rectángulo en $\hat{A}$, se tiene que $\hat{B} = 90° - \hat{C}$ y, por tanto,

$sen\ \hat{B} = sen\ (90° - \hat{C}) = cos\ \hat{C}$ y $cos\ \hat{B} = cos\ (90° - \hat{C}) = sen\ \hat{C}$

Luego, $sen\ 2\hat{B} = 2\ sen\ \hat{B}\ cos\ \hat{B} = 2\ cos\ \hat{C}\ sen\ \hat{C} = sen\ 2\hat{C}$

**53** **¿Para qué valores de $\alpha$ y $\beta$ se verifica la igualdad $sen\ (\alpha + \beta) = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \beta$?**

Como $sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta$, $sen\ (\alpha + \beta) = 2sen\ \alpha\ cos\ \beta \to$

$\to sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \beta \to cos\ \alpha\ sen\ \beta = sen\ \alpha\ cos\ \beta$

Esta relación es cierta, obviamente si $\alpha = \beta$.

Por otro lado, dividiendo entre $cos\,\alpha\, cos\,\beta$ se tiene que $\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{sen\,\beta}{cos\,\alpha}$, luego los ángulos $\alpha$ y $\beta$ deben tener la misma tangente.

Esto ocurre cuando $\beta = \alpha + 180° \cdot k$ por la periodicidad de la función $y = tg\, x$.

Si $cos\,\alpha = 0$ entonces $0 = sen\,\alpha\, cos\,\beta \to cos\,\beta = 0$ ya que $sen\,\alpha = \pm 1$.

Por tanto, la relación también es cierta si $\alpha$ y $\beta$ son simultáneamente de la forma $90° + 360° \cdot k$ o $270° + 360° \cdot k$.

En resumen, se verifica la igualdad cuando $\beta = \alpha + 180° \cdot k$.

**54** **¿Qué relación existe entre las gráficas de $y = sen\, x$ e $y = cos\, x$ y la de cada una de las funciones siguientes?:**

**a)** $y = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $y = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **c)** $y = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **d)** $y = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

La relación que existe es que la gráfica de la función $y = cos\, x$ está desplazada horizontalmente hacia la izquierda $\frac{\pi}{2}$ unidades respecto de $sen\, x$.

a) Coincide con la gráfica de la función $y = cos\, x$.

b) Es la gráfica de la función $y = -sen\, x$.

c) Coincide con la gráfica de la función $y = sen\, x$.

d) Coincide con la gráfica de la función $y = cos\, x$.

(Además de comprobarse mediante la representación gráfica, puede probarse fácilmente usando las fórmulas de las razones trigonométricas de la suma o diferencia de ángulos).

**55** **¿En qué puntos del intervalo $[0, 4\pi]$ corta al eje $X$ cada una de las siguientes funciones?:**

**a)** $y = cos\,\frac{x}{2}$ **b)** $y = sen\,(x - \pi)$ **c)** $y = cos\,(x + \pi)$

Los puntos de corte con el eje $X$ son aquellos para los que $y = 0$.

a) $$cos\,\frac{x}{2} = 0 \to \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \to x = \pi \\ \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{2} \to x = 3\pi \end{cases}$$

b) $$sen\,(x - \pi) = 0 \to \begin{cases} x - \pi = -\pi \to x = 0 \\ x - \pi = 0 \to x = \pi \\ x - \pi = \pi \to x = 2\pi \\ x - \pi = 2\pi \to x = 3\pi \\ x - \pi = 3\pi \to x = 4\pi \end{cases}$$

c) $$y = cos\,(x + \pi) = 0 \to \begin{cases} x + \pi = \frac{3\pi}{2} \to x = \frac{\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{5\pi}{2} \to x = \frac{3\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{7\pi}{2} \to x = \frac{5\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{9\pi}{2} \to x = \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

## Para profundizar

**56** **Demuestra que si $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, se verifica: $tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha \cdot tg\,\beta \cdot tg\,\gamma$**

$$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,(360° - (\alpha + \beta)) = tg\,\alpha + tg\,\beta + \frac{tg\,360° - tg\,(\alpha + \beta)}{1 + tg\,360° \cdot tg\,(\alpha + \beta)} =$$

$$= tg\,\alpha + tg\,\beta - tg\,(\alpha + \beta) = tg\,\alpha + tg\,\beta - \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta - tg^2\,\alpha\, tg\,\beta - tg\,\alpha\, tg^2\,\beta - tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta} =$$

$$= \frac{-tg^2\,\alpha\, tg\,\beta - tg\,\alpha\, tg^2\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta} = tg\,\alpha\, tg\,\beta\,\frac{-tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta} = tg\,\alpha\, tg\,\beta\,[-tg\,(\alpha + \beta)] =$$

$$= tg\,\alpha\, tg\,\beta\, tg\,(360° - (\alpha + \beta)) = tg\,\alpha\, tg\,\beta\, tg\,\gamma$$

**57** **Prueba si existe algún triángulo isósceles en el que el coseno del ángulo distinto sea igual a la suma de los cosenos de los ángulos iguales.**

Si llamamos $x$ a cada uno de los ángulos iguales, entonces el ángulo desigual es $180° - 2x$.

Se trata de ver si la siguiente ecuación tiene solución: $\cos(180° - 2x) = 2\cos x$

Veámoslo:

$$\cos 180° \cos 2x + \text{sen}\, 180° \,\text{sen}\, 2x = 2\cos x \to -\cos 2x = 2\cos x \to -\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 2\cos x \to$$

$$\to -\cos^2 x + 1 - \cos^2 x = 2\cos x \to 2\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0 \to$$

$$\to \cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Si $\cos x = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} \to x = 68° \, 31' \, 45''$ tiene cada uno de los ángulos iguales y el ángulo desigual tiene $180° - 2 \cdot 68° \, 31' \, 45'' = 42° \, 56' \, 30''$

$\cos x = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2} > 1$ que no es posible porque el coseno de un ángulo no puede ser mayor que 1.

Luego no existe ningún triángulo con esas condiciones.

**58** **Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$:**

a) $\begin{cases} \cos x + \cos y = -1/2 \\ \cos x \cos y = -1/2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = \pi/2 \\ \sqrt{3}\cos x - \cos y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \text{sen}\, x + \text{sen}\, y = \sqrt{3}/2 \\ \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 y = 3/4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \text{sen}\, x \cdot \cos y = 1/4 \\ \cos x \cdot \text{sen}\, y = 1/4 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \cos x + \cos y = -\dfrac{1}{2} \\ \cos x \cdot \cos y = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \cos y = -\dfrac{1}{2} - \cos x \\ \cos x \left(-\dfrac{1}{2} - \cos x\right) = -\dfrac{1}{2} \to -\dfrac{1}{2}\cos x - \cos^2 x = -\dfrac{1}{2} \to \cos x + 2\cos^2 x = 1 \end{array}$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \to \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} \dfrac{-1-3}{4} = -1 \\ \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Si $\cos x = -1 \to x = \pi$

  $\cos y = -\dfrac{1}{2} - (-1) = \dfrac{1}{2} \begin{cases} y = \pi/3 \\ y = 5\pi/3 \end{cases}$

- Si $\cos x = \dfrac{1}{2} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ x = \dfrac{5\pi}{3} \to \cos y = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = -1 \to y = \pi \end{cases}$

  Soluciones: $\left(\pi, \dfrac{\pi}{3}\right), \left(\pi, \dfrac{5\pi}{3}\right), \left(\dfrac{\pi}{3}, \pi\right), \left(\dfrac{5\pi}{3}, \pi\right)$

b) $y = \dfrac{\pi}{2} - x$

$$\sqrt{3}\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 \to \sqrt{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\cos x - \text{sen}\frac{\pi}{2}\,\text{sen}\, x = 1 \to \sqrt{3}\cos x = \text{sen}\, x + 1$$

Elevamos al cuadrado:

$$3\cos^2 x = \text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\, x + 1 \to 3(1 - \text{sen}^2 x) = \text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\, x + 1 \to 4\,\text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\, x - 2 = 0 \to$$

$$\to 2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 1 = 0 \to \text{sen}\, x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

- Si $\text{sen}\, x = \dfrac{1}{2} \to x = \dfrac{\pi}{6},\ x = \dfrac{5\pi}{6}$

  $x = \dfrac{\pi}{6} \to y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$ y $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ vale.

  $x = \dfrac{5\pi}{6} \to y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{3}$ no puede ser porque no está en el intervalo dado.

- Si $\text{sen}\, x = -1 \to x = \dfrac{3\pi}{2} \to y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\pi}{2} = -\pi$ tampoco es posible por el mismo motivo.

c) Elevamos al cuadrado la primera ecuación:

$sen^2\, x + 2\, sen\, x\, sen\, y + sen^2\, y = \frac{3}{4} \rightarrow 2\, sen\, x\, sen\, y + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow sen\, x\, sen\, y = 0$

Si $sen\, x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pi$

Además, $sen\, y = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{3},\ y = \frac{2\pi}{3}$

Sustituimos en el sistema para comprobarlas porque pueden aparecer soluciones falsas al elevar al cuadrado.

$\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{2\pi}{3}\right)$ Valen.

Si $sen\, y = 0 \rightarrow y = 0,\ y = \pi$

Además, $sen\, x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{2\pi}{3}$

Sustituimos en el sistema para comprobarlas porque pueden aparecer soluciones falsas al elevar al cuadrado.

$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \left(\frac{2\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ Valen.

d) Elevamos al cuadrado la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$sen^2\, x\, cos^2\, y = \frac{1}{16} \rightarrow cos^2\, y = \frac{1}{16\, sen^2 x}$$

$$cos^2\, x\, sen^2\, y = \frac{1}{16} \rightarrow cos^2\, x\,(1 - cos^2\, y) = \frac{1}{16} \rightarrow cos^2\, x\left(1 - \frac{1}{16\, sen^2\, x}\right) = \frac{1}{16} \rightarrow$$

$$\rightarrow (1 - sen^2\, x)\left(1 - \frac{1}{16\, sen^2\, x}\right) = \frac{1}{16} \rightarrow 1 - \frac{1}{16\, sen^2\, x} - sen^2\, x + \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \frac{1}{16\, sen^2\, x} - sen^2\, x = 0 \rightarrow 16\, sen^2\, x - 1 - 16\, sen^4\, x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16\, sen^4\, x - 16\, sen^2\, x + 1 = 0 \rightarrow sen^2\, x = \frac{16 + \sqrt{192}}{32} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$$

- Si $sen\, x = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \rightarrow cos\, y = \frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

  $x = 75°,\ x = 105°,\ y = 75°,\ y = 285°$

  Ahora comprobamos las soluciones porque al elevar al cuadrado pueden aparecer resultados falsos:

  $(75°, 75°) \rightarrow$ Vale.

  $(75°, 285°) \rightarrow$ No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

  $(105°, 75°) \rightarrow$ No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

  $(105°, 285°) \rightarrow$ Vale.

- Si $sen\, x = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \rightarrow cos\, y = -\frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

  $x = 285°,\ x = 255°,\ y = 105°,\ y = 255°$

  Ahora comprobamos las soluciones porque al elevar al cuadrado pueden aparecer resultados falsos:

  $(285°, 105°) \rightarrow$ Vale.

  $(285°, 255°) \rightarrow$ No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

  $(255°, 105°) \rightarrow$ No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

  $(255°, 255°) \rightarrow$ Vale.

**59 Demuestra que:**

**a)** $sen\, x = \dfrac{2\, tg\, (x/2)}{1 + tg^2\, (x/2)}$ **b)** $cos\, x = \dfrac{1 - tg^2\, (x/2)}{1 + tg^2\, (x/2)}$ **c)** $tg\, x = \dfrac{2\, tg\, (x/2)}{1 - tg^2\, (x/2)}$

a) Desarrollamos y operamos en el segundo miembro de la igualdad:

$$\frac{2\, tg\, \frac{x}{2}}{1 + tg^2\, \frac{x}{2}} = \frac{2\sqrt{\frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}}}{1 + \frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}} = \frac{2\sqrt{\frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}}}{\frac{1 + cos\, x + 1 - cos\, x}{1 + cos\, x}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}}}{\frac{2}{1 + cos\, x}} = (1 + cos\, x)\sqrt{\frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}} =$$

$$= \sqrt{(1 + cos\, x)^2\, \frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}} = \sqrt{(1 + cos\, x)\,(1 - cos\, x)} = \sqrt{1 - cos^2\, x} = \sqrt{sen^2\, x} = sen\, x$$

b) $$\frac{1 - tg^2\, \frac{x}{2}}{1 + tg^2\, \frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}}{1 + \frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}} = \frac{\frac{1 + cos\, x - 1 + cos\, x}{1 + cos\, x}}{\frac{1 + cos\, x + 1 - cos\, x}{1 + cos\, x}} = \frac{2\, cos\, x}{2} = cos\, x$$

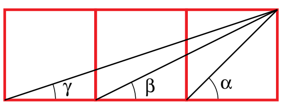
c) $$\frac{2\, tg\, \frac{x}{2}}{1 - tg^2\, \frac{x}{2}} = \frac{2\sqrt{\frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}}}{1 - \frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}} = \frac{2\sqrt{\frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}}}{\frac{1 + cos\, x - 1 + cos\, x}{1 + cos\, x}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}}}{\frac{2\, cos\, x}{1 + cos\, x}} = \frac{1 + cos\, x}{cos\, x}\sqrt{\frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}} =$$

$$= \frac{1}{cos\, x} \cdot \sqrt{(1 + cos\, x)^2\, \frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}} = \frac{1}{cos\, x} \cdot \sqrt{(1 + cos\, x)\,(1 - cos\, x)} =$$

$$= \frac{1}{cos\, x}\sqrt{1 - cos^2\, x} = \frac{1}{cos\, x} \cdot \sqrt{sen^2\, x} = \frac{1}{cos\, x} \cdot sen\, x = tg\, x$$

**60 Demuestra que, en la siguiente figura, $\alpha = \beta + \gamma$:**




Supongamos que los cuadrados tienen lado $l$.

Por una parte,

$$tg\, \alpha = \frac{l}{l} = 1$$

Por otro lado,

$$tg\, (\beta + \gamma) = \frac{tg\, \beta + tg\, \gamma}{1 - tg\, \beta\, tg\, \gamma} = \frac{\frac{l}{2l} + \frac{l}{3l}}{1 - \frac{l}{2l} \cdot \frac{l}{3l}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$$

Así, $\alpha$ y $\beta + \gamma$ son dos ángulos comprendidos entre 0° y 90° cuyas tangentes coinciden. Por tanto, los ángulos tienen que ser iguales, es decir, $\alpha = \beta + \gamma$.

# Autoevaluación

## Página 145

**1** **Si $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ y $\alpha < \pi$, halla:**

**a)** $\sin \alpha$ **b)** $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$ **c)** $tg \frac{\alpha}{2}$ **d)** $sen\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$

a) $sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1 \rightarrow sen^2 \alpha + \frac{1}{16} = 1 \rightarrow sen^2 \alpha = \frac{15}{16} \rightarrow sen\, \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ya que el ángulo está en el 2.º cuadrante.

b) $cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = cos\frac{\pi}{3}\, cos\, \alpha - sen\frac{\pi}{3}\, sen\, \alpha = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-3\sqrt{5} - 1}{8}$

c) $tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ porque $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$

d) $sen\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = sen\frac{\pi}{6}\, cos\, \alpha - cos\frac{\pi}{6}\, sen\, \alpha = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-3\sqrt{5}-1}{8}$

**2** **Demuestra cada una de estas igualdades:**

**a)** $tg\, 2\alpha = \dfrac{2\, tg\, \alpha}{1 - tg^2 \alpha}$

**b)** $sen\, (\alpha + \beta)\cdot sen\, (\alpha - \beta) = sen^2 \alpha - sen^2 \beta$

a) $tg\, 2\alpha = \dfrac{sen\, 2\alpha}{cos\, 2\alpha} = \dfrac{2sen\, \alpha\, cos\, \alpha}{cos^2 \alpha - sen^2 \alpha} = \dfrac{\frac{2sen\, \alpha\, cos\, \alpha}{cos^2 \alpha}}{1 - \frac{sen^2 \alpha}{cos^2 \alpha}} = \dfrac{2tg\, \alpha}{1 - tg^2 \alpha}$

b) $sen\, (\alpha + \beta)\cdot sen\, (\alpha - \beta) = (sen\, \alpha\, cos\, \beta + cos\, \alpha\, sen\, \beta)\, (sen\, \alpha\, cos\, \beta - cos\, \alpha\, sen\, \beta) =$

$= sen^2 \alpha\, cos^2 \beta - cos^2 \alpha\, sen^2 \beta = sen^2 \alpha\, (1 - sen^2 \beta) - (1 - sen^2 \alpha)\, sen^2 \beta =$

$= sen^2 \alpha - sen^2 \alpha\, sen^2 \beta - sen^2 \beta + sen^2 \alpha\, sen^2 \beta = sen^2 \alpha - sen^2 \beta$

**3** **Resuelve:**

**a)** $cos\, 2x - cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$ **b)** $2\, tg\, x\, cos^2 \frac{x}{2} - sen\, x = 1$

a) $cos\, 2x - cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$

$cos^2 x - sen^2 x - (-sen\, x) = 1 \rightarrow 1 - sen^2 x - sen^2 x + sen\, x - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -2\, sen^2 x + sen\, x = 0 \rightarrow sen\, x(-2\, sen\, x + 1) = 0 \; \begin{cases} sen\, x = 0 \rightarrow x = 0°,\; x = 180° \\ sen\, x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30°,\; x = 150° \end{cases}$

Soluciones:

$x_1 = 360°\cdot k;\; x_2 = 180° + 360°\cdot k;\; x_3 = 30° + 360°\cdot k;\; x_4 = 150° + 360°\cdot k,$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $2tg\, x\, cos^2 \frac{x}{2} - sen\, x = 1 \rightarrow 2tg\, x\, \frac{1 + cos\, x}{2} - sen\, x = 1 \rightarrow tg\, x + tg\, x\, cos\, x - sen\, x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow tg\, x + \frac{sen\, x}{cos\, x}\, cos\, x - sen\, x = 1 \rightarrow tg\, x = 1 \; \left.\begin{matrix} x_1 = 45° + 360°\cdot k \\ x_2 = 225° + 360°\cdot k \end{matrix}\right\}$ con $k \in \mathbb{Z}$

**4** **Simplifica:**

**a)** $\dfrac{sen\ 60° + sen\ 30°}{cos\ 60° + cos\ 30°}$ **b)** $\dfrac{sen^2\ \alpha}{1 - cos\ \alpha}\left(1 + tg^2\ \dfrac{\alpha}{2}\right)$

a) $\dfrac{sen\ 60° + sen\ 30°}{cos\ 60° + cos\ 30°} = \dfrac{2\ sen\ \dfrac{60° + 30°}{2}\ cos\ \dfrac{60° - 30°}{2}}{2\ cos\ \dfrac{60° + 30°}{2}\ cos\ \dfrac{60° - 30°}{2}} = \dfrac{sen\ 45°}{cos\ 45°} = tg\ 45° = 1$

b) $\dfrac{sen^2\ \alpha}{1 - cos\ \alpha}\left(1 - tg^2\ \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{sen^2\ \alpha}{1 - cos\ \alpha}\left(1 + \dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}\right) = \dfrac{sen^2\ \alpha}{1 - cos\ \alpha}\left(\dfrac{2}{1 + cos\ \alpha}\right) = \dfrac{2sen^2\ \alpha}{1 - cos^2\ \alpha} = \dfrac{2sen^2\ \alpha}{sen^2\ \alpha} = 2$

**5** **Expresa en grados:** $\dfrac{3\pi}{4}$ **rad,** $\dfrac{5\pi}{2}$ **rad, 2 rad.**

$\dfrac{3\pi}{4}$ rad = 135° $\dfrac{5\pi}{2}$ rad = 450° 2 rad = 114° 35' 30''

**6** **Expresa en radianes dando el resultado en función de** $\pi$ **y como número decimal.**

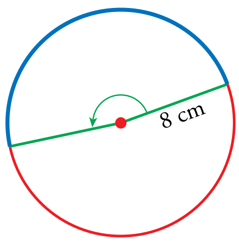
**a) 60°** **b) 225°** **c) 330°**

a) $60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad = 1,05 rad

b) $225° = \dfrac{5\pi}{4}$ rad = 3,93 rad

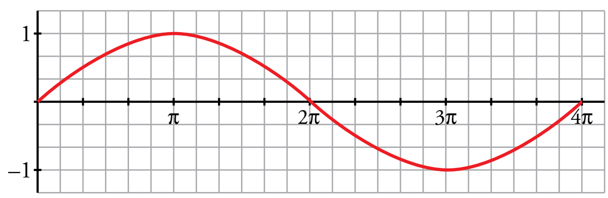
c) $330° = \dfrac{11\pi}{6}$ rad = 5,76 rad

**7** **En una circunferencia de 16 cm de diámetro dibujamos un ángulo de 3 rad. ¿Qué longitud tendrá el arco correspondiente?**




$l = 8 \cdot 3 = 24$ cm

**8** **Asocia a esta gráfica una de las siguientes expresiones y di cuál es su periodo:**




**a)** $y = \dfrac{sen\ x}{2}$ **b)** $y = sen\ 2x$ **c)** $y = sen\ \dfrac{x}{2}$

La función representada es de periodo $4\pi$ y se corresponde con la del apartado c).

Podemos comprobarlo estudiando algunos puntos. Por ejemplo:

$x = \pi \rightarrow y = sen\ \dfrac{\pi}{2} = 1$

$x = 2\pi \rightarrow y = sen\ \dfrac{2\pi}{2} = sen\ \pi = 0$

$x = 3\pi \rightarrow y = sen\ \dfrac{3\pi}{2} = -1$

$x = 4\pi \rightarrow y = sen\ \dfrac{4\pi}{2} = sen\ 2\pi = 0$