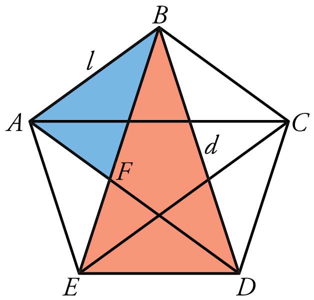
Resuelve

Página 29

El pentágono estrellado

Observa el pentágono estrellado que se muestra a continuación:



1. Demuestra que los triángulos ABF y EBD son semejantes (es decir, demuestra que sus ángulos son respectivamente iguales).

2. Si llamamos l al lado del pentágono y d a su diagonal, basándote en la semejanza de los triángulos que acabas de demostrar, halla la relación $\frac{d}{l}$ y comprueba que es el número áureo:

$$\frac{d}{l} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$$

El ángulo $\hat{B} = 36°$ en el triángulo ABF, y $\hat{B} = 36°$ en el triángulo EBD. Por otra parte los triángulos DAB y EBD son iguales, luego el ángulo $\hat{A}$ en el triángulo ABF, y $\hat{D}$ en el triángulo EBD son iguales. Por tanto los triángulos son semejantes.

El lado $AF = d - l$.

Por la semejanza de los triángulos ABF y EBD; $\frac{BD}{BF} = \frac{ED}{AF}$; es decir, $\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$

Operando, $d(d-l) = l^2$, por tanto $d^2 - dl - l^2 = 0$.

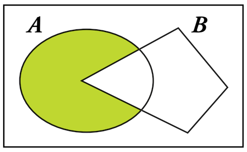
Las soluciones posibles para d son $d = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} = l\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Como d no puede ser negativa, $d = l\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y $\frac{d}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

1 Lenguaje matemático: conjuntos y símbolos

Página 31

1 **¿Verdadero o falso?**



a) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A - B$.

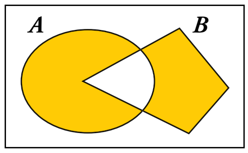
Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B.

b) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A \cap B'$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B, ya que B' es el complementario de B.

c) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$$(A - B) \cup (B - A)$$



Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, o está en A y no está en B, o está en B y no está en A.

d) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$$(A \cup B) - (A \cap B)$$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, tiene que estar en A o en B, pero no puede estar en los dos a la vez $(A \cap B)$.

e) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto, o está en A y no está en B, o está en B y no está en A.

f) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

Verdadero, porque todos los números enteros son racionales.

g) $[x \in (\dot{3})$ y $x \in (\dot{2})] \Leftrightarrow x \in (\dot{6})$

$(\dot{n})$ es el conjunto de los múltiplos de n.

Verdadero, porque si un número es a la vez múltiplo de 2 y de 3, entonces es múltiplo de $2 \cdot 3 = 6$.

h) $(\dot{3}) \cap (\dot{2}) = (\dot{6})$

Es la misma afirmación anterior.

i) $x \in A - B \Rightarrow x \in A \cap B'$

Verdadero, porque los elementos de $A - B$ están en A y no están en B, luego están en A y en B'.

j) $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ es lo mismo que decir $A \subset B$.

Verdadero, porque la implicación indica que todo elemento de A es un elemento de B.

k) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$

Tenemos que comprobar que las dos siguientes afirmaciones son ciertas:

$(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subset B$ que es la afirmación del apartado j)

$A \subset B \Rightarrow x \in \text{A} \Rightarrow x \in \text{B}$, pero si B contiene a A, es porque todos los elementos de A están en B, luego son equivalentes y es verdadera la afirmación.

l) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow B \subset A$

Falso, porque puede existir algún elemento de B que no esté en A.

m) $x \in (0, 1) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ **y** $0 < x < 1$

Verdadero, porque los intervalos representan conjuntos de números reales y el intervalo (0, 1) está formado por los números comprendidos entre 0 y 1 que son mayores que 0 y menores que 1, luego son afirmaciones equivalentes.

n) $\sqrt{2} \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **pero** $\sqrt{2}/2 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Verdadero, porque $\sqrt{2}$ es un número real que no es racional y es mayor que 1, sin embargo $\sqrt{2}/2$ también es irracional, pero está entre 0 y 1.

ñ) $0,5 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Falso, porque 0,5 es racional.

o) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **es el conjunto de los números irracionales positivos menores que 1.**

Verdadero, porque son los números reales que no son racionales, es decir, irracionales, y además tienen que ser mayores que cero, por tanto positivos, y menores que 1.

p) $\{x \in \mathbb{Z} \,/\, -2 < x \le 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Verdadero, porque los únicos números enteros mayores que –2 y menores o iguales que 5 son los del conjunto indicado.

q) El conjunto de los números enteros mayores que –5 y menores que 7 es $\mathbb{Z} \cap (-5, 7)$**.**

Verdadero, porque, de los números enteros mayores que –5 y menores que 7, están en el intervalo (–5, 7) y además son enteros.

r) (*x* es un número real pero no es racional) $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

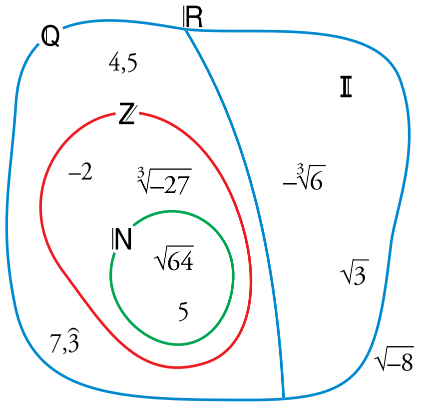
Verdadero, porque $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es el conjunto de todos los números reales menos los racionales, que es equivalente a decir los números reales que no son racionales.

2 Números reales. La recta real

Página 32

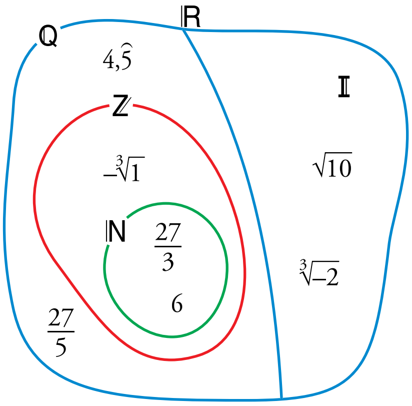
Reflexiona y resuelve

Observa cómo se sitúan estos números en los conjuntos numéricos:



Ahora, en tu cuaderno, sitúa los siguientes números en un diagrama similar:

$-\sqrt[3]{1}$; $4,\widehat{5}$; 6; $\sqrt{10}$; $\sqrt[4]{-16}$; $\sqrt[3]{-2}$; $27/5$; $27/3$



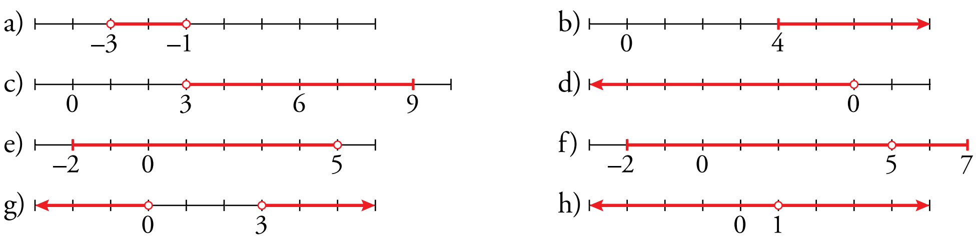
$6, \frac{27}{3} \in \mathbb{N}$ $\quad -\sqrt[3]{1} \in \mathbb{Z}$ $\quad 4,\widehat{5}, \frac{27}{5} \in \mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{10}, \sqrt[3]{-2} \in \mathbb{R}$ $\quad \sqrt[4]{-16}$ no es real

Página 33

1 Representa los siguientes conjuntos:

a) $(-3, -1)$ **b)** $[4, +\infty)$ **c)** $(3, 9]$ **d)** $(-\infty, 0)$

e) $\{x / -2 \le x < 5\}$ **f)** $[-2, 5) \cup (5, 7]$ **g)** $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ **h)** $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



2 Averigua y representa para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones:

a) $|x| = 5$ **b)** $|x| \le 5$ **c)** $|x - 4| = 2$

d) $|x - 4| \le 2$ **e)** $|x - 4| > 2$ **f)** $|x + 4| > 5$

a) 5 y –5

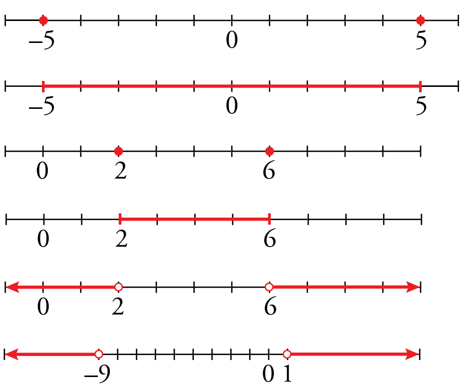
b) $-5 \le x \le 5$; $[-5, 5]$

c) 6 y 2

d) $2 \le x \le 6$; $[2, 6]$

e) $x < 2$ o $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

f) $x < -9$ o $x > 1$; $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$



3 Radicales. Propiedades

Página 34

1 Simplifica.

a) $\sqrt[9]{x^{12}}$ **b)** $\sqrt[12]{x^8}$ **c)** $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ **e)** $\sqrt[9]{64}$ **f)** $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[9]{x^{12}} = \sqrt[3]{x^4}$ Se dividen índice y exponente entre 3.

b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2 ¿Cuál es mayor, $\sqrt[4]{31}$ o $\sqrt[3]{13}$?

Reducimos a índice común: $\sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{29791}$; $\sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{28561}$

Por tanto, es mayor $\sqrt[4]{31}$.

3 Reduce a índice común.

a) $\sqrt[12]{a^5}$ **y** $\sqrt[18]{a^7}$

b) $\sqrt[3]{51}$ **y** $\sqrt[9]{132\,650}$

a) $\sqrt[12]{a^5} = \sqrt[36]{a^{15}}$; $\sqrt[18]{a^7} = \sqrt[36]{a^{14}}$

b) $\sqrt[3]{51} = \sqrt[9]{132\,651}$; $\sqrt[9]{132\,650}$

4 Simplifica.

a) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}\right)^8$ **b)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ **c)** $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$

a) $\left(\sqrt[8]{k}\right)^8 = k$

b) $\sqrt[15]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[6]{x^6} = x$

Página 35

5 Reduce.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$ **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{4}$ **e)** $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5}$ **f)** $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3}$

a) $\sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

d) $\sqrt[12]{8^3} \cdot \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{(2^3)^3 \cdot (2^2)^4} = \sqrt[12]{2^{17}} = 2\sqrt[12]{2^5}$

e) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{5^5} = 5\sqrt[4]{5}$

f) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{(3^4)^2}\,\sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{3^{11}} = 3\sqrt[6]{3^5}$

6 **Simplifica.**

a) $\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt[3]{a \cdot b}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}}$

a) $\sqrt[15]{\dfrac{x^3}{x^5}} = \sqrt[15]{\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt[15]{x^{-2}}$

b) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3\,b^3}{a^2\,b^2}} = \sqrt[6]{a\,b}$

c) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{a^4}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{a}} = \sqrt[6]{a^{-1}}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{a^3\,b^5\,c}{a^2\,b^6\,c^6}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{bc^5}} = \dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{a}{bc}}$

7 **Reduce.**

a) $\dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt{3}}$

a) $\sqrt{\dfrac{3^4}{3^3}} = \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[6]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

c) $\sqrt[10]{\dfrac{2^8}{2^5}} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

8 **Suma y simplifica.**

a) $5\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$ **b)** $\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$

d) $\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$ **e)** $\sqrt{50a} - \sqrt{18a}$ **f)** $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250}$

a) $10\sqrt{x}$

b) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3^3} - \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^3} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot a} - \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot a} = 5\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = 2\sqrt{2a}$

f) Se factorizan los radicandos y se sacan factores de la raíz:

$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} = 0$

Página 36

9 **Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.**

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}}$ **f)** $\dfrac{4}{\sqrt{18}}$ **g)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}}$ **h)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}}$ **j)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}}$

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}} = \dfrac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\sqrt{\dfrac{7}{3}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}} = \dfrac{1}{a\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a^2}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}} = \dfrac{3}{\sqrt{2 \cdot 5^2}} = \dfrac{3}{5\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{10}$

f) $\dfrac{4}{\sqrt{18}} = \dfrac{4}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \dfrac{4}{3\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{6} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{5}}{5}$

h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}} = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{10} = \dfrac{\sqrt[3]{25}}{10}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}} = \dfrac{3\sqrt[3]{2 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \dfrac{3\sqrt[3]{6}}{6} = \dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}$

j) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 5^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2 \cdot 5}}{2 \cdot 5} = \dfrac{2\sqrt[3]{10}}{10} = \dfrac{\sqrt[3]{10}}{5}$

10 **Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **b)** $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ **c)** $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

e) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ **f)** $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ **g)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **h)** $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$

b) $\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=\dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$

c) $\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}=\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(a-1)}=\sqrt{a}+1$

d) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

e) $\dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12-5}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}$

f) $\dfrac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{18-12}=\dfrac{18+12+12\sqrt{6}}{6}=\dfrac{30+12\sqrt{6}}{6}=5+2\sqrt{6}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{(2-1)+2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2-1)}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}$

4 Logaritmos. Propiedades

Página 39

1 Halla.

a) $\log_2 16$ **b)** $\log_2 0{,}25$ **c)** $\log_9 1$ **d)** $\log_{10} 0{,}1$

e) $\log_4 64$ **f)** $\log_7 49$ **g)** $\ln e^4$ **h)** $\ln e^{-1/4}$

i) $\log_5 0{,}04$ **j)** $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right)$

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

b) $\log_2 0{,}25 = \log_2 2^{-2} = -2$

c) $\log_9 1 = 0$

d) $\log_{10} 0{,}1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$

e) $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$

f) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$

g) $\ln e^4 = 4$

h) $\ln e^{-1/4} = -\frac{1}{4}$

i) $\log_5 0{,}04 = \log_5 5^{-2} = -2$

j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right) = \log_6 6^{-3} = -3$

2 Halla la parte entera de…

a) $\log_2 60$. **b)** $\log_5 700$. **c)** $\log_{10} 43\,000$. **d)** $\log_{10} 0{,}084$.

e) $\log_9 60$. **f)** $\ln e$. **g)** $\log_{20} 450\,000$. **h)** $\log_{5,4} 900$.

a) $2^5 = 32 \ ; \ 2^6 = 64 \ ; \ 32 < 60 < 64$

$5 < \log_2 60 < 6 \Rightarrow \log_2 60 = 5, \ldots$

b) $5^4 = 625 \ ; \ 5^5 = 3\,125 \ ; \ 625 < 700 < 3\,125$

$4 < \log_5 700 < 5 \Rightarrow \log_5 700 = 4, \ldots$

c) $10^4 = 10\,000 \ ; \ 10^5 = 100\,000 \ ; \ 10\,000 < 43\,000 < 100\,000$

$4 < \log_{10} 43\,000 < 5 \Rightarrow \log_{10} 43\,000 = 4, \ldots$

d) $10^{-2} = 0{,}01 \ ; \ 10^{-1} = 0{,}1 \ ; \ 0{,}01 < 0{,}084 < 0{,}1$

$-2 < \log_{10} 0{,}084 < -1 \Rightarrow \log_{10} 0{,}084 = -1, \ldots$

e) $9^1 = 9 \ ; \ 9^2 = 81 \ ; \ 9 < 60 < 81$

$1 < \log_9 60 < 2 \Rightarrow \log_9 60 = 1, \ldots$

f) $\ln e = 1$

g) $\log_{20} 450\,000; \ 20^4 = 160\,000; \ 20^5 = 3\,200\,000$

Como $20^4 = 160\,000 < 450\,000 < 3\,200\,000 = 20^5 \Rightarrow 4 < \log_{20} 450\,000 < 5$.

La parte entera de $\log_{20} 450\,000$ es 4.

h) $\log_{5,4} 900 = 4{,}0337$

$5{,}4^4 = 850{,}31; \ 5{,}4^5 = 4\,591{,}7$

Como $5{,}4^4 = 850{,}31 < 900 < 4\,591{,}7 = 5{,}4^5 \Rightarrow 4 < \log_{5,4} 900 < 5$.

La parte entera de $\log_{5,4} 900$ es 4.

3 **Aplica la propiedad ⑧ para obtener los siguientes logaritmos con la ayuda de la calculadora:**

a) $\boldsymbol{log_2 \ 1\,500}$ **b)** $\boldsymbol{log_5 \ 200}$ **c)** $\boldsymbol{log_{100} \ 200}$ **d)** $\boldsymbol{log_{100} \ 40}$

En cada caso, comprueba el resultado utilizando la potenciación.

a) $\dfrac{log\,1500}{log\,2} = 10{,}55;\ \ 2^{10{,}55} \approx 1\,500$

b) $\dfrac{log\,200}{log\,5} = 3{,}29;\ \ 5^{3{,}29} \approx 200$

c) $\dfrac{log\,200}{log\,100} = 1{,}15;\ \ 100^{1{,}15} \approx 200$

d) $\dfrac{log\,40}{log\,100} = 0{,}80;\ \ 100^{0{,}80} \approx 40$

4 **Calcula sabiendo que** $\boldsymbol{log_5 A = 1{,}8}$ **y** $\boldsymbol{log_5 B = 2{,}4}$**.**

a) $\boldsymbol{log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}}}$ **b)** $\boldsymbol{log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2}}$

a) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}} = \dfrac{1}{3}\,[2\,log_5 A - log_5 25 - log_5 B] = \dfrac{1}{3}\,[2 \cdot 1{,}8 - 2 - 2{,}4] = \dfrac{-0{,}8}{3} \approx -0{,}27$

b) $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = log_5 5 + \dfrac{3}{2}\,log_5 A - 2\,log_5 B = 1 + \dfrac{3}{2} \cdot 1{,}8 - 2 \cdot 2{,}4 = 1 + 2{,}7 - 4{,}8 = -1{,}1$

5 **Averigua la relación que hay entre** $\boldsymbol{x}$ **e** $\boldsymbol{y}$**, sabiendo que se verifica:**

$$\boldsymbol{ln\,y = 2x - ln\,5}$$

$ln\,y = 2x - ln\,5 \ \rightarrow\ ln\,y = ln\,e^{2x} - ln\,5$

$ln\,y = ln\,\dfrac{e^{2x}}{5} \ \rightarrow\ y = \dfrac{e^{2x}}{5}$

5 Expresión decimal de los números reales. Números aproximados

Página 41

1 ¿Verdadero o falso?

I. El precio de esta vivienda es, aproximadamente, de 390 000 €, con un error menor que 10 000 €.

II. El precio del menú del día es, aproximadamente, de 12 €, con un error menor que 1 €.

En I el error absoluto es mucho mayor que en II, pero el error relativo es menor.

I. E.R. $< \dfrac{10000}{390000} = 2{,}5641 \cdot 10^{-2} = 0{,}025641 \to$ E.R. $< 2{,}6\,\%$

II. E.R. $< \dfrac{1}{12} = 8{,}3333 \cdot 10^{-2} = 0{,}08333 \to$ E.R. $< 8{,}3\,\%$

El error absoluto nos lo dicen y es mayor en I que en II. Hemos calculado el error relativo en cada caso y vemos que es verdadera la afirmación.

2 Di una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes mediciones:

a) Daniel le dice a su hermana María que la superficie de su casa es de 96,4 m^2.

b) Por la gripe se han perdido 37 millones de horas de trabajo.

c) Juana gana unos 19 000 € al año.

a) E.A. $< 0{,}05$ m^2; E.R. $< \dfrac{0{,}05}{96{,}4} = 5{,}1867 \cdot 10^{-4} = 0{,}00051867 \to$ E.R. $< 0{,}05\,\%$

b) E.A. < 0,5 millones de horas = 500 000 horas

E.R. $< \dfrac{0{,}5}{37} < 0{,}014 = 1{,}4\,\%$

c) — Si suponemos que los tres ceros finales se han utilizado para poder expresar la cantidad (es decir, que se trata de 19 mil , redondeando a los “miles de euros”), entonces:

E.A. < 0,5 miles de € = 500 € E.R. $< \dfrac{0{,}5}{19} < 0{,}027 = 2{,}7\,\%$

— Si suponemos que es 19 000 € exactamente:

E.A. < 0,5 € E.R. $< \dfrac{0{,}5}{19000} < 0{,}000027 = 0{,}0027\,\%$

Página 42

3 Calcula en notación científica sin usar la calculadora:

a) $(800\,000 : 0{,}0002) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{12}$

b) $0{,}486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7}$

a) $(800\,000 : 0{,}0002) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{12} = \left((8 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^{-4})\right) \cdot 5 \cdot 10^{11} =$

$= (4 \cdot 10^9) \cdot 5 \cdot 10^{11} = 20 \cdot 10^{20} = 2 \cdot 10^{21}$

b) $0{,}486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7} = 48{,}6 \cdot 10^{-7} + 0{,}93 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-7} =$

$= 43{,}53 \cdot 10^{-7} = 4{,}353 \cdot 10^{-6}$

4 Opera con la calculadora:

a) $(3{,}87 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{-9}) : (3{,}941 \cdot 10^{-6})$

b) $8{,}93 \cdot 10^{-10} + 7{,}64 \cdot 10^{-10} - 1{,}42 \cdot 10^{-9}$

a) $(3{,}87 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{-9}) : (3{,}941 \cdot 10^{-6}) \approx 5{,}85 \cdot 10^{12}$

b) $8{,}93 \cdot 10^{-10} + 7{,}64 \cdot 10^{-10} - 1{,}42 \cdot 10^{-9} = 2{,}37 \cdot 10^{-10}$

7 Fórmula del binomio de Newton

Página 45

1 Desarrolla:

a) $(x+3)^5$ **b)** $(2x-x^2)^4$ **c)** $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)^6$

a) $(x+3)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 \cdot 3 + \binom{5}{2}x^3\,3^2 + \binom{5}{3}x^2\,3^3 + \binom{5}{4}x \cdot 3^4 + \binom{5}{5}3^5 =$

$= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$

b) $(2x-x^2)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 - \binom{4}{1}(2x)^3 \cdot x^2 + \binom{4}{2}(2x)^2 \cdot (x^2)^2 - \binom{4}{3}2x \cdot (x^2)^3 + \binom{4}{4}(x^2)^4 =$

$= x^8 - 8x^7 + 24x^6 - 32x^5 + 16x^4$

c) $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)^6 = \binom{6}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^5\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{6}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \binom{6}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 +$

$+ \binom{6}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{6}{5}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^5 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{x}\right)^6 =$

$= \frac{15}{4x^2} + \frac{15}{16}x^2 + \frac{3}{x^4} + \frac{3}{16}x^4 + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{64}x^6 + \frac{5}{2}$

2 Calcula el coeficiente de x^5 en el desarrollo del binomio:

$$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{x}\right)^7$$

Obtenemos el término $k+1$ de la expresión $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{x}\right)^7$:

$$\binom{7}{k}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{7-k}\left(-\frac{3}{x}\right)^k$$

El grado de x en este término es $2(7-k)-k$, que tiene que ser igual a 5:

$$2(7-k)-k=5 \Rightarrow k=3$$

El término de grado 5 es $\binom{7}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)^4\left(-\frac{3}{x}\right)^3 = -\frac{945}{16}x^5$.

El coeficiente pedido es $-\frac{945}{16}$.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 46

1. Intervalos y valor absoluto

Hazlo tú. ¿Para qué valores de x se verifica $|3x-7|<5$?

$|3x-7|<5$

Seguimos el razonamiento del apartado a) del ejercicio 1 de esta página:

$3x-7<5 \ \rightarrow\ x<4$

$3x-7>-5;\ 3x>-2 \ \rightarrow\ x>\frac{2}{3}$

Los valores que verifican la expresión son los del intervalo $\left(\frac{2}{3}, 4\right)$.

3. Operaciones con radicales

Hazlo tú. Simplifica:

a) $\sqrt{32}+\frac{1}{2}\sqrt{50}-\frac{5}{6}\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{8ab}\cdot\sqrt[3]{a^2b}$

a) Factorizamos y sacamos factores de las raíces:

$$\sqrt{32}+\frac{1}{2}\sqrt{50}-\frac{5}{6}\sqrt{2}=\sqrt{2^5}+\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 5^2}-\frac{5}{6}\sqrt{2}=2^2\sqrt{2}+\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{5}{6}\sqrt{2}=\frac{17}{3}\sqrt{2}$$

b) Reducimos los radicales a índice común y sacamos factores de las raíces:

$$\sqrt{8ab}\cdot\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[6]{8^3a^3b^3}\cdot\sqrt[6]{(a^2)^2b^2}=2\sqrt{2}\sqrt[6]{a^3b^3}\sqrt[6]{a^4b^2}=2\sqrt{2}\sqrt[6]{a^7b^5}=2\sqrt{2}\,a\sqrt[6]{ab^5}$$

Página 47

4. Racionalización de denominadores

Hazlo tú. Racionaliza:

a) $\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}}$ **b)** $\frac{11}{2\sqrt{5}+3}$

a) Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[4]{5}$:

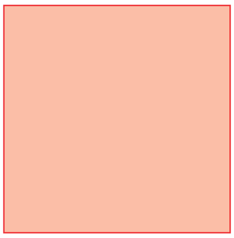
$$\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5}}=\frac{2\sqrt[4]{5}}{5}$$

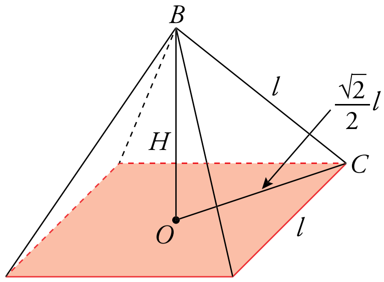
b) Multiplicamos numerador y denominador por $2\sqrt{5}-3$:

$$\frac{11}{2\sqrt{5}+3}=\frac{11\,(2\sqrt{5}-3)}{(2\sqrt{5}+3)\,(2\sqrt{5}-3)}=\frac{11\,(2\sqrt{5}-3)}{4\cdot 5-9}=2\sqrt{5}-3$$

5. Problemas con radicales

Hazlo tú. El volumen de una pirámide cuadrangular regular, cuyas caras laterales son triángulos equiláteros, es $\frac{256}{3}\sqrt{2}$. Halla la longitud de su arista.





La arista de la cara triangular es igual a la arista de la base.

$V_{Pirámide} = \frac{1}{3}A_{base} \cdot H = \frac{1}{3}l^2 \cdot H = \frac{256}{3}\sqrt{2}$

La distancia $\overline{OC}$ es la mitad de la diagonal del cuadrado $\overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}l$.

La arista es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos la altura H y el lado $\overline{OC}$.

Por ser la arista igual al lado de la base, $H^2 = l^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}l\right)^2 = \frac{1}{2}l^2$

$V_{Pirámide} = \frac{1}{3}l^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}l = \frac{1}{6}\sqrt{2}\,l^3$

Por tanto, $\frac{1}{6}\sqrt{2}\,l^3 = \frac{256}{3}\sqrt{2} \Rightarrow l^3 = 256 \cdot 2 = 512 \Rightarrow l = \sqrt[3]{512} = 8$

Página 48

7. Logaritmos. Propiedades

Hazlo tú. Calcula x en estos casos:

a) $log_7\, x = -2$ b) $ln\, 3^{x-1} = 5$ c) $2\, log\, x - log\, 4 = 2\, log\, 3$

a) $log_7\, x = -2$

Usamos la definición de logaritmo: 2 es el exponente que tiene que tener la base 7, para que nos dé x:

$x = 7^{-2}$; $x = \frac{1}{49}$

b) $ln\, 3^{x-1} = 5$

Aplicamos la propiedad de los logaritmos: $log_a\, m^n = n log_a\, m$.

$(x-1)\, ln\, 3 = 5 \to x - 1 = \frac{5}{ln\, 3} \to x = \frac{5}{ln\, 3} + 1 \to x = 5{,}5512$

c) $2 log\, x - log\, 4 = 2 log\, 3$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$log\, x^2 - log\, 4 = log\, 3^2$

$log\, \frac{x^2}{4} = log\, 9$; $\frac{x^2}{4} = 9$

Soluciones: $x = -6$, $x = 6$

Pero como no se pueden tomar logaritmos de números negativos, la única solución válida es $x = 6$.

8. Logaritmos. Demostración de una propiedad

Hazlo tú. **Demuestra que:** $\boldsymbol{log_a (P/Q) = log_a P - log_a Q}$

$log_a \frac{P}{Q} = log_a P - log_a Q$

Llamamos $log_a P = x$; $log_a Q = y$

Expresamos P y Q como potencias usando la definición de logaritmo:

$P = a^x$; $Q = a^y$

Demostración:

$log_a \frac{P}{Q} = log_a \frac{a^x}{a^y} = log_a a^{x-y} = x - y = log_a P - log_a Q$

9. Factoriales y números combinatorios

Hazlo tú. **Calcula** $\boldsymbol{m}$ **en esta expresión:** $\boldsymbol{\binom{m}{2} = 3!}$

$\binom{m}{2} = 3!$

$\frac{m(m-1)}{2 \cdot 1} = 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\frac{m^2 - m}{2} = 6$; $m^2 - m = 12$; $m^2 - m - 12 = 0$; $m = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2}$ $\begin{cases} m = 4 \\ m = -3 \end{cases}$

Como m tiene que ser positivo, $m = 4$.

Ejercicios y problemas guiados

Página 49

1. Simplificación de radicales

Simplificar esta expresión:

$$\sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}}{\sqrt{108}}}}$$

$$\sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{2^2 3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 3^3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{1}{6}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{3^2}{6}}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{6}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{3\cdot 2}} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$

2. Valor de un exponente

Calcular x para que se cumpla la igualdad:

$$3^{x-1} = 173$$

$log_3 3^{x-1} = log_3 173;\ \ (x-1)log_3 3 = log_3 173$

$x - 1 = log_3 173 = 4{,}69;\ \ x = 4{,}69 + 1 = 5{,}69$

3. Extracción de factores de un radical

Extraer fuera del radical los factores que sea posible.

$$\sqrt{4a^2 cd + 8abcd + 4b^2 cd}$$

$$\sqrt{4a^2 cd + 8abcd + 4b^2 cd} = \sqrt{cd(4a^2 + 8ab + 4b^2)} = \sqrt{cd(2a+2b)^2} = (2a+2b)\sqrt{cd} = 2(a+b)\sqrt{cd}$$

4. Propiedades de los logaritmos

Averiguar la relación que existe entre M, x e y si sabemos que:

$$ln\ M = \frac{1}{4}(2\ ln\ x + 3\ ln\ y - 5\ ln\ 2)$$

$$ln\ M = \frac{1}{4}(2\ ln\ x + 3\ ln\ y - 5\ ln\ 2) = \frac{1}{4}(ln\ x^2 + ln\ y^3 - ln\ 2^5) = \frac{1}{4}\ ln\frac{x^2\cdot y^3}{2^5} = ln\sqrt[4]{\frac{x^2\cdot y^3}{2^5}}$$

$$M = \sqrt[4]{\frac{x^2\cdot y^3}{2^5}}$$

5. Cotas de error absoluto y relativo

Acotar el error que se comete al tomar 1,62 como aproximación del número de oro, ϕ.

E.A. $< 0{,}005$

E.R. $< \dfrac{0{,}005}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 3{,}0902\cdot 10^{-3} = 0{,}003$

Corresponde a un error relativo menor que 0,3 %.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 50

Para practicar

Números racionales e irracionales

1 **Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, pertenecen:**

$\mathbf{5;\ -7;\ \frac{5}{4};\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ 4,\widehat{7};\ \frac{\pi}{2}}$

$5,\ \sqrt{\frac{18}{2}} \in \mathbb{N}$ $\qquad -7 \in \mathbb{Z}$ $\qquad \frac{5}{4},\ 4,\widehat{7} \in \mathbb{Q}$ $\qquad -\sqrt{3},\ \sqrt[3]{-5},\ \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$

2 **¿Cuáles de estos números son irracionales? Expresa como fracción los que sea posible.**

a) $\mathbf{3,181818...}$ **b)** $\mathbf{\sqrt{1,\widehat{7}}}$ **c)** $\mathbf{\sqrt{8}}$

d) $\mathbf{1,020020002...}$ **e)** $\mathbf{-4,0333...}$ **f)** $\mathbf{\sqrt[3]{81}}$

g) $\mathbf{1,3999...}$ **h)** $\mathbf{2\pi}$

a) $3,181818... = \frac{318-3}{99} = \frac{315}{99} = \frac{35}{11}$

b) $\sqrt{1,\widehat{7}} = \sqrt{\frac{17-1}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

c) $\sqrt{8}$ Irracional.

d) $1,020020002...$ Irracional.

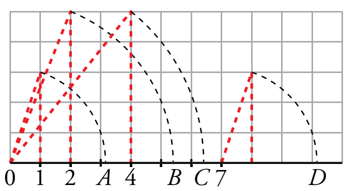
e) $-4,0333... = -\frac{403-40}{90} = -\frac{121}{30}$

f) $\sqrt[3]{81}$ Irracional.

g) $1,3999... = \frac{139-13}{90} = \frac{7}{5}$

h) 2π Irracional.

3



¿Qué números irracionales representan los puntos: *A*, *B*, *C* y *D*? Justifica la respuesta.

$A = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ $\qquad B = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$ $\qquad C = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$ $\qquad D = 7 + \sqrt{1^2+3^2} = 7 + \sqrt{10}$

Intervalos y valor absoluto

4 **Representa gráficamente y expresa como intervalo o como semirrecta los números que cumplen la condición dada en cada caso.**

a) ***x*** **es menor que –5.** **b) 3 es menor o igual que** ***x*****.**

c) ***x*** **está comprendido entre –5 y 1.** **d)** ***x*** **está entre –2 y 0, ambos incluidos.**

e) ***x*** **es mayor o igual que –3 y menor que 2.**

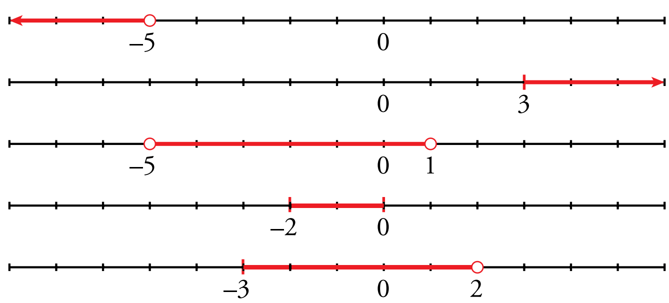
a) $x < -5$; $(-\infty, -5)$

b) $3 \le x$; $[3, +\infty)$

c) $-5 < x < 1$; $(-5, 1)$

d) $-2 \le x \le 0$; $[-2, 0]$

e) $[-3, 2)$; $-3 \le x < 2$



5 **Escribe la desigualdad que verifica todo número x que pertenece a estos intervalos o semirrectas:**

a) $[-2, 7]$ **b)** $[13, +\infty)$ **c)** $(-\infty, 0)$

d) $(-3, 0]$ **e)** $[3/2, 6)$ **f)** $(0, +\infty)$

a) $-2 \le x \le 7$ b) $x \ge 13$ c) $x < 0$

d) $-3 < x \le 0$ e) $\frac{3}{2} \le x < 6$ f) $0 < x < +\infty$

6 **Expresa como un único intervalo.**

a) $[-3, 2] \cap [0, 5]$ **b)** $[2, +\infty) \cap (0, 10)$

a) $[0, 2]$ b) $[2, 10)$

7 **Expresa en forma de intervalo los números que cumplen cada una de estas expresiones:**

a) $|x| < 7$ **b)** $|x| \ge 5$ **c)** $|2x| < 8$

d) $|x - 1| \le 6$ **e)** $|x + 2| > 9$ **f)** $|x - 5| \ge 1$

a) $(-7, 7)$ b) $[-\infty, -5] \cup [5, +\infty]$ c) $(-4, 4)$

d) $[-5, 7]$ e) $(-11, 7)$ f) $(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$

8 **Escribe mediante intervalos los posibles valores de x para que se pueda calcular la raíz en cada caso.**

a) $\sqrt{x-4}$ **b)** $\sqrt{2x+1}$ **c)** $\sqrt{-x}$

d) $\sqrt{3-2x}$ **e)** $\sqrt{-x-1}$ **f)** $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$

a) $x - 4 \ge 0 \Rightarrow x \ge 4;\ [4, +\infty)$

b) $2x + 1 \ge 0 \Rightarrow 2x \ge -1 \Rightarrow x \ge -\frac{1}{2};\ \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$

c) $-x \ge 0 \Rightarrow x \le 0;\ (-\infty, 0]$

d) $3 - 2x \ge 0 \Rightarrow 3 \ge 2x \Rightarrow x \le ;\ \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

e) $-x - 1 \ge 0 \Rightarrow -1 \ge x;\ (-\infty, -1]$

f) $1 + \frac{x}{2} \ge 0 \Rightarrow 2 + x \ge 0 \Rightarrow x \ge -2;\ [-2, +\infty)$

9 **Expresa como un único intervalo.**

a) $(1, 6] \cup [2, 5)$ **b)** $[-1, 3) \cup (0, 3]$ **c)** $(1, 6] \cap [2, 7)$ **d)** $[-1, 3) \cap (0, 4)$

a) $(1, 6] \cup [2, 5) = (1, 6]$ b) $[-1, 3) \cup (0, 3] = [-1, 3]$

c) $(1, 6] \cap [2, 7) = [2, 6]$ d) $[-1, 3) \cap (0, 4) = (0, 3)$

10 **Escribe en forma de intervalo los siguientes entornos:**

a) Centro –1 y radio 2 **b) Centro 2 y radio 1/3**

a) $(-1 -2, -1 + 2) = (-3, 1)$ b) $\left(2-\frac{1}{3}, 2+\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

11 **Describe como entornos los siguientes intervalos:**

a) $(-1, 2)$ **b)** $(1,3;\ 2,9)$ **c)** $(-2,2;\ 0,2)$ **d)** $(-4;\ -2,8)$

a) $C = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2};\ R = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow$ Entorno de centro $\frac{1}{2}$ y radio $\frac{3}{2}$.

b) $C = \frac{1,3+2,9}{2} = 2,1;\ R = 2,9 - 2,1 = 0,8 \rightarrow$ Entorno de centro 2,1 y radio 0,8.

c) $C = \frac{-2,2+0,2}{2} = -1;\ R = 0,2 - (-1) = 1,2 \rightarrow$ Entorno de centro –1 y radio 1,2.

d) $C = \frac{-4+(-2,8)}{2} = -3,4;\ r = -2,8 - (-3,4) = 0,6 \rightarrow$ Entorno de centro –3,4 y radio 0,6.

Radicales

12 **Introduce los factores dentro de cada raíz.**

a) $2\sqrt[3]{3}$ **b)** $4\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ **c)** $\dfrac{2}{x}\sqrt{\dfrac{3x}{8}}$

d) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{25}{9}}$ **e)** $2\sqrt[4]{4}$ **f)** $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

a) $\sqrt[3]{3\cdot 2^3}=\sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{4^3}{4}}=\sqrt[3]{4^2}=\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{\dfrac{2^2\cdot 3x}{x^2\cdot 2^3}}=\sqrt{\dfrac{3}{2x}}$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{3^3\cdot 5^2}{5^3\cdot 3^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}$

e) $\sqrt[4]{2^4\cdot 2^2}=\sqrt[4]{2^6}=\sqrt{2^3}=\sqrt{8}$

f) $\sqrt[3]{\dfrac{3\cdot 5}{5^3}}=\sqrt[3]{\dfrac{3}{5^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{3}{25}}$

13 **Saca de la raíz el factor que puedas.**

a) $\sqrt[3]{16}$ **b)** $4\sqrt{8}$ **c)** $\sqrt{1000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$ **e)** $\sqrt{\dfrac{125a^2}{16b}}$ **f)** $\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}}$

g) $\sqrt{\dfrac{16}{a^3}}$ **h)** $\sqrt{4a^2+4}$ **i)** $\sqrt{\dfrac{a}{9}+\dfrac{a}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^4}=2\sqrt[3]{2}$ b) $4\sqrt{2^3}=4\cdot 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2^3\cdot 5^3}=10\sqrt{10}$

d) $\sqrt[3]{2^3\cdot a^5}=2a\sqrt[3]{a^2}$ e) $\sqrt{\dfrac{5^3\cdot a^2}{2^4\cdot b}}=\dfrac{5a}{4}\sqrt{\dfrac{5}{b}}$ f) $\sqrt{\dfrac{13}{36}}=\dfrac{1}{6}\sqrt{13}$

g) $\dfrac{4}{a}\sqrt{\dfrac{1}{a}}$ h) $\sqrt{4(a^2+1)}=2\sqrt{a^2+1}$ i) $\sqrt{\dfrac{25a}{16\cdot 9}}=\dfrac{5\sqrt{a}}{12}$

14 **Simplifica los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[3]{24}$ **b)** $\sqrt[6]{27}$ **c)** $\sqrt[3]{-108}$

d) $\sqrt[12]{64y^3}$ **e)** $\sqrt[4]{\dfrac{81}{64}}$ **f)** $\sqrt[8]{625}:\sqrt[4]{25}$

g) $\sqrt[6]{0{,}027}$ **h)** $\sqrt[8]{0{,}0016}$ **i)** $\sqrt[4]{1+\dfrac{9}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=2\sqrt[3]{3}$ b) $\sqrt[6]{3^3}=3^{3/6}=3^{1/2}=\sqrt{3}$ c) $-\sqrt[3]{3^3\cdot 2^2}=-3\sqrt[3]{2^2}$

d) $\sqrt[12]{2^6\cdot y^3}=\sqrt[4]{2^2\cdot y}=\sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[4]{y}=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{y}$

e) $\sqrt[4]{\dfrac{3^4}{2^6}}=\dfrac{3}{\sqrt{2^3}}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

f) $\sqrt[8]{5^4}:\sqrt[4]{5^2}=\sqrt{5}:\sqrt{5}=1$

g) $\sqrt[6]{0{,}027}=\sqrt[6]{10^{-3}3^3}=\sqrt[6]{\dfrac{3^3}{10^3}}=\sqrt{\dfrac{3}{10}}$

h) $\sqrt[6]{0{,}0016}=\sqrt[8]{10^{-4}2^4}=\sqrt[8]{\dfrac{2^4}{10^4}}=\sqrt{\dfrac{2}{10}}$

i) $\sqrt[4]{1+\dfrac{9}{16}}=\sqrt[4]{\dfrac{25}{16}}=\sqrt[4]{\dfrac{5^2}{2^4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

15 **Reduce a índice común y ordena de menor a mayor.**

a) $\sqrt[4]{5},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{6},\ \sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{6},\ \sqrt[5]{10}$ **d)** $\sqrt[4]{20},\ \sqrt[3]{9},\ \sqrt[6]{100}$

a) $\sqrt[12]{5^3},\ \sqrt[12]{3^4},\ \sqrt[12]{2^6};\ \sqrt[12]{125};\ \sqrt[12]{81};\ \sqrt[12]{64}\ \rightarrow\ \sqrt{2}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[4]{5}$

b) $\sqrt[6]{216},\ \sqrt[6]{16}\ \rightarrow\ \sqrt[3]{4}<\sqrt{6}$

c) $\sqrt[20]{7776},\ \sqrt[20]{10000}\ \rightarrow\ \sqrt[4]{6}<\sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[12]{20^3},\ \sqrt[12]{9^4},\ \sqrt[12]{100^2}$; tenemos $\sqrt[12]{10000};\ \sqrt[12]{6561};\ \sqrt[12]{8000}\ \rightarrow\ \sqrt[3]{9}<\sqrt[6]{100}<\sqrt[4]{20}$

16 **Realiza la operación y simplifica, si es posible.**

a) $4\sqrt{27}\cdot 5\sqrt{6}$ **b)** $2\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt{\frac{27}{8}}$ **c)** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}$

d) $(\sqrt[3]{12})^2$ **e)** $(\sqrt[6]{32})^2$ **f)** $\sqrt[3]{24}:\sqrt[3]{3}$

a) $20\sqrt{27\cdot 6}=20\sqrt{3^3\cdot 2\cdot 2}=20\sqrt{2\cdot 3^4}=180\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{\frac{4\cdot 27}{3\cdot 8}}=2\sqrt{\frac{9}{2}}=6\sqrt{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt{\frac{2}{8}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

d) $\left(\sqrt[3]{2^2\cdot 3}\right)^2=\sqrt[3]{2^4\cdot 3^2}=2\sqrt[3]{2\cdot 3^2}=2\sqrt[3]{18}$

e) $\left(\sqrt[6]{2^5}\right)^3=\sqrt[6]{2^{15}}=\sqrt{2^5}=2^2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

f) $\sqrt[3]{2^3\cdot 3}:\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}:\sqrt[3]{3}=2$

17 **Efectúa y simplifica, si es posible.**

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}\cdot\sqrt{a}$ **c)** $\left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ **d)** $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}:\sqrt{\sqrt[3]{4}}$

a) $\sqrt[6]{2^2\cdot 3^3}=\sqrt[6]{108}$

b) $\sqrt[3]{a}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{a}$

c) $\left(\sqrt[6]{\frac{2^5}{2^9}}\right)^3=\left(\sqrt[6]{\frac{1}{2^4}}\right)^3=\sqrt[6]{\frac{1}{2^{12}}}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 3}}:\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}=\sqrt[6]{2^2\cdot 3}:\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{3}$

18 **Expresa con una única raíz.**

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$ **b)** $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$ **c)** $\left(\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}\right):\sqrt{a}$

a) $\sqrt[12]{4}=\sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[12]{2^4\cdot 2^3}=\sqrt[12]{2^7}=\sqrt[12]{128}$

c) $\sqrt[20]{\frac{a^{15}\cdot a^{16}}{a^{10}}}=\sqrt[20]{a^{21}}=a\sqrt[20]{a}$

Página 51

19 **Racionaliza los denominadores y simplifica.**

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$ **b)** $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ **c)** $\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}$

d) $\frac{3}{3+\sqrt{3}}$ **e)** $\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$ **f)** $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{2\sqrt[3]{2^2}}{2}=\sqrt[3]{4}$

c) $\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$

d) $\frac{3(3-\sqrt{3})}{9-3}=\frac{9-3\sqrt{3}}{6}=\frac{3(3-\sqrt{3})}{2\cdot 3}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$ Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{6}$

$$\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{72}-\sqrt{8})\sqrt{6}}{6}=\frac{(\sqrt{2^3 3^2}-\sqrt{2^3})\sqrt{6}}{6}=\frac{4\sqrt{12}}{6}=\frac{8\sqrt{3}}{6}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

f) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ Multiplicamos numerador y denominador por $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}=5\sqrt{3}+5\sqrt{2}$$

20 **Calcula y simplifica.**

a) $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\frac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16}+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}-\frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $-\sqrt{54}+3\sqrt{24}-\sqrt{150}+\sqrt{294}$

a) $25\sqrt{5}+18\sqrt{5}-14\sqrt{5}+6\sqrt{5}=35\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{2^4}+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-\frac{21}{5}\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=2\sqrt[3]{2}+7\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-\frac{21}{5}\cdot 5\sqrt[3]{2}=-15\sqrt[3]{2}$

c) $-\sqrt{2\cdot 3^3}+3\sqrt{2^3\cdot 3}-\sqrt{2\cdot 3\cdot 5^2}+\sqrt{2\cdot 3\cdot 7^2}=-3\sqrt{2\cdot 3}+2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3}-5\sqrt{2\cdot 3}+7\sqrt{2\cdot 3}=5\sqrt{6}$

21 **Simplifica las siguientes expresiones:**

a) $\sqrt{18}+\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{72}$ **b)** $\sqrt{\frac{2}{5}}-4\sqrt{\frac{18}{125}}+\frac{7}{2}\sqrt{\frac{8}{45}}$ **c)** $\frac{7}{5}\sqrt[3]{81a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{3^3}+\sqrt{2^3\cdot 3^2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+6\sqrt{2}=9\sqrt{2}-\sqrt{3}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}}-4\sqrt{\frac{2\cdot 3^2}{5^3}}+\frac{7}{2}\sqrt{\frac{2^3}{3^2\cdot 5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}-4\frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{7}{2}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}=$

$=\sqrt{\frac{2}{5}}-\frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}=\left(1-\frac{12}{5}+\frac{7}{3}\right)\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{14}{15}\sqrt{\frac{2}{5}}$

c) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{3^4a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\frac{7}{3}3\sqrt[3]{3a}-2a\sqrt[3]{3a}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\left(\frac{21}{5}-2a-\frac{1}{5}\right)\sqrt[3]{3a}=(4-2a)\sqrt[3]{3a}$

22 **Efectúa y simplifica.**

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-1)$ **b)** $(\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{5}+\sqrt{6})$ **c)** $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2$ **d)** $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\sqrt{3}$

a) $\sqrt{12}-\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}-\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{3}=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

b) $5-6=-1$

c) $20+18-12\sqrt{10}=38-12\sqrt{10}$

d) $(2-1)\sqrt{3}=\sqrt{3}$

23 **Racionaliza y simplifica.**

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ **b)** $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ **c)** $\frac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$ **e)** $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ **f)** $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}-2}{3\cdot 2}=\frac{2(\sqrt{6}-1)}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{6}-1}{3}$

b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2^2\cdot 3}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{6+\sqrt{6}}{6}=1+\frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2(3-5)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-4}=-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$

d) $\frac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\frac{3(\sqrt{5}+2)}{5-4}=3(\sqrt{5}+2)=3\sqrt{5}+6$

e) $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}\cdot\frac{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}=\frac{13\sqrt{10}(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{5-9\cdot 2}=\frac{65\sqrt{2}+78\sqrt{5}}{-13}=-5\sqrt{2}-6\sqrt{5}$

f) $\frac{(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2)}{(3\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}-2)}=\frac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{27-4}=\frac{9\sqrt{2\cdot 3^2}-4\sqrt{2}}{23}=\frac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23}=\frac{23\sqrt{2}}{23}=\sqrt{2}$

24 **Efectúa y simplifica.**

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

a) $\dfrac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

b) $\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5}=\dfrac{2\sqrt{7}(-2\sqrt{5})}{2}=-2\sqrt{35}$

Logaritmos

25 **Expresa como potencia de la base y calcula aplicando la definición de logaritmo.**

a) $\log_2 1024$ **b)** $\log 0{,}001$ **c)** $\log_2 \dfrac{1}{64}$

d) $\log_{\sqrt{3}} 3$ **e)** $\log_3 \sqrt{3}$ **f)** $\log_2 \sqrt{8}$

g) $\log_{1/2} \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ **h)** $\log_\pi 1$ **i)** $\ln \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$

a) $\log_2 2^{10}=10$ b) $\log 10^{-3}=-3$ c) $\log_2 2^{-6}=-6$

d) $\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^2=2$ e) $\log_3 3^{1/2}=\dfrac{1}{2}$ f) $\log_2 2^{3/2}=\dfrac{3}{2}$

g) $\log_{1/2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1/2}=-\dfrac{1}{2}$ h) 0 i) $\ln e^{-1/3}=-\dfrac{1}{3}$

26 **Calcula la base de estos logaritmos:**

a) $\log_x 125=3$ **b)** $\log_x \dfrac{1}{9}=-2$ **c)** $\log_x \dfrac{1}{4}=2$

d) $\log_x 2=\dfrac{1}{2}$ **e)** $\log_x 0{,}04=-2$ **f)** $\log_x 4=-\dfrac{1}{2}$

a) $x^3=125 \rightarrow x=5$ b) $x^{-2}=\dfrac{1}{9} \rightarrow x=3$ c) $x^2=\dfrac{1}{4} \rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

d) $x^{1/2}=2 \rightarrow x=4$ e) $x^{-2}=0{,}04 \rightarrow x=5$ f) $x^{-1/2}=4 \rightarrow x=\dfrac{1}{16}$

27 **Calcula el valor de x en estas igualdades:**

a) $\log 3^x=2$ **b)** $\log x^2=-2$ **c)** $7^x=115$

d) $5^{-x}=3$ **e)** $\log_7 3x=0{,}5$ **f)** $3^{2+x}=172$

a) $x=\dfrac{2}{\log 3}=4{,}19$ b) $2\log x=-2 \rightarrow x=\dfrac{1}{10}$ c) $x=\dfrac{\log 115}{\log 7}=2{,}438$

d) $x=-\dfrac{\log 3}{\log 5}=-0{,}683$ e) $7^{0,5}=3x \rightarrow x=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ f) $2+x=\log_3 172 \rightarrow x=\log_3 172-2$

28 **Halla con la calculadora y comprueba el resultado mediante potenciación.**

a) $\log \sqrt{148}$ **b)** $\ln (2{,}3 \cdot 10^{11})$ **c)** $\ln (7{,}2 \cdot 10^{-5})$

d) $\log_3 42{,}9$ **e)** $\log_5 1{,}95$ **f)** $\log_2 0{,}034$

a) 1,085

b) $\ln (2{,}3 \cdot 10^{11}) \approx 26{,}16 \rightarrow e^{26,161} \approx 2{,}3 \cdot 10^{11}$

c) $\ln (7{,}2 \cdot 10^{-5}) \approx -9{,}54 \rightarrow e^{-9,54} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-5}$

d) $3{,}42 \rightarrow 3^{3,42} \approx 42{,}9$

e) $0{,}41 \rightarrow 5^{0,41} \approx 1{,}95$

f) $-4{,}88 \rightarrow 2^{-4,88} \approx 0{,}034$

29 **Desarrolla las siguientes expresiones:**

a) $\log \dfrac{a^2 \sqrt[5]{b^3}}{100c^4}$ **b)** $\ln \dfrac{\sqrt[4]{x^3} \cdot e^5}{\sqrt{y}}$

a) $\log a^2 \sqrt[5]{b^3} - \log 100c^4 = \log a^2 + \log \sqrt[5]{b^3} - \log 10^2 - \log c^4 = 2\log a + \dfrac{3}{5}\log b - 2 - 4\log c$

b) $\ln \dfrac{\sqrt[4]{x^3} e^5}{\sqrt{y}} = \ln \sqrt[4]{x^3} e^5 - \ln \sqrt{y} = \ln \sqrt[4]{x^3} + \ln e^5 - \ln \sqrt{y} = \dfrac{3}{4} \ln x + 5 - \dfrac{1}{2} \ln y$

30 **Halla el valor de x en estas expresiones aplicando las propiedades de los logaritmos:**

a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13$

b) $\log x = \log 36 - \log 9$

c) $\ln x = 3 \ln 5 - 2 \ln 10$

d) $\log x = 3 \log 2 - \dfrac{1}{2} \log 25$

a) $\ln x = \ln (17 \cdot 13) \Rightarrow x = 17 \cdot 13 = 221$

b) $\log x = \log \dfrac{36}{9} \Rightarrow x = \dfrac{36}{9} = 4$

c) $\ln x = \ln 5^3 - \ln 10^2;\ \ln x = \ln \dfrac{5^3}{10^2};\ x = \dfrac{5^3}{5^2 \cdot 2^2};\ x = \dfrac{5}{2^2} = \dfrac{5}{4}$

d) $\log x = \log 2^3 - \log 25^{1/2};\ \log x = \log 2^3 - \log 5;\ \log x = \log \dfrac{8}{5};\ x = \dfrac{8}{5}$

31 **Si $\log k = x$, escribe en función de x.**

a) $\log 100k$

b) $\log \dfrac{k}{1000}$

c) $\log k^3$

d) $\log \sqrt[3]{10k}$

e) $\log \dfrac{1}{k}$

f) $(\log k)^{1/2}$

a) $\log 100 + \log k = 2 + x$

b) $\log k - \log 1\,000 = x - 3$

c) $3\log k = 3x$

d) $\dfrac{1}{3}(\log 10 + \log k) = \dfrac{1}{3}(1 + x)$

e) $\log 1 - \log k = 0 - x = -x$

f) $\sqrt{x}$

32 **Averigua, en cada caso, la relación entre x, y, z.**

a) $\log z = 2 \log x - \log y$

b) $\log z = 2 - \log x - \dfrac{1}{2} \log y$

c) $\log z = 1 - \dfrac{1}{2} (\log x - \log y)$

d) $\ln z = 1 - 2 \ln x + 2 \ln y$

a) $\log z = \log x^2 - \log y;\ \log z = \log \dfrac{x^2}{y};\ z = \dfrac{x^2}{y}$

b) $\log z = \log 10^2 - \log x - \log \sqrt{y};\ \log z = \log \dfrac{100}{x\sqrt{y}};\ z = \dfrac{100}{x\sqrt{y}}$

c) $\log z = \log 10 - \dfrac{1}{2} \log \dfrac{x}{y};\ \log z = \log 10 - \log \sqrt{\dfrac{x}{y}};\ \log z = \log \dfrac{10}{\sqrt{\dfrac{x}{y}}};\ z = \dfrac{10\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

d) $\ln z = \ln e - \ln x^2 + \ln y^2;\ \ln z = \ln \dfrac{e \cdot y^2}{x^2};\ z = \dfrac{e \cdot y^2}{x^2}$

Notación científica y errores

33 **Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.**

a) $\dfrac{(3,12\cdot 10^{-5}+7,03\cdot 10^{-4})\,8,3\cdot 10^{8}}{4,32\cdot 10^{3}}$

b) $\dfrac{(12,5\cdot 10^{7}-8\cdot 10^{9})\,(3,5\cdot 10^{-5}+185)}{9,2\cdot 10^{6}}$

c) $\dfrac{5,431\cdot 10^{3}-6,51\cdot 10^{4}+385\cdot 10^{2}}{8,2\cdot 10^{-3}-2\cdot 10^{-4}}$

a) $1,41\cdot 10^2$; E.A. $< 0,005\cdot 10^2 = 0,5$

E.R. $< \dfrac{0,5}{141} < 0,00355$

b) $-1,58\cdot 10^5$; E.A. $< 0,005\cdot 10^5 = 5\cdot 10^2$

E.R. $< \dfrac{5\cdot 10^2}{1,58\cdot 10^5} < 3,16\cdot 10^{-3}$

c) $-2,65\cdot 10^6$; E.A. $< 0,005\cdot 10^6 = 5\cdot 10^3$

E.R. $< \dfrac{5\cdot 10^3}{2,65\cdot 10^6} < 1,89\cdot 10^{-3}$

34 **Expresa en notación científica y calcula:** $\dfrac{60\,000^3\cdot 0,00002^4}{100^2\cdot 72\,000\,000\cdot 0,0002^5}$

$$\frac{(6\cdot 10^4)^3\cdot (2\cdot 10^{-5})^4}{10^4\cdot 7,2\cdot 10^7\cdot (2\cdot 10^{-4})^5}=150$$

Página 52

35 **Ordena de mayor a menor los números de cada apartado. Para ello, pasa a notación científica los que no lo estén.**

a) $3,27\cdot 10^{13}$; $85,7\cdot 10^{12}$; $453\cdot 10^{11}$

b) $1,19\cdot 10^{-9}$; $0,05\cdot 10^{-7}$; $2000\cdot 10^{-12}$

a) $8,57\cdot 10^{13} > 4,53\cdot 10^{13} > 3,27\cdot 10^{13}$

b) $5\cdot 10^{-9} > 2\cdot 10^{-9} > 1,19\cdot 10^{-9}$

36 **Si** $A = 3,24\cdot 10^6$; $B = 5,1\cdot 10^{-5}$; $C = 3,8\cdot 10^{11}$ **y** $D = 6,2\cdot 10^{-6}$, **calcula** $\left(\dfrac{A}{B}+C\right)\cdot D$. **Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.**

$$\left(\frac{A}{B}+C\right)\cdot D=\left(\frac{3,24\cdot 10^6}{5,1\cdot 10^{-5}}+3,8\cdot 10^{11}\right)\cdot 6,2\cdot 10^{-6}=\left(\frac{3,24}{5,1}10^{11}+3,8\cdot 10^{11}\right)\cdot 6,2\cdot 10^{-6}=$$

$$=\left(\frac{3,24}{5,1}+3,8\right)10^{11}\cdot 6,2\cdot 10^{-6} = 4,4353\cdot 6,2\cdot 10^5 = 2,7499\cdot 10^6$$

Como queremos tres cifras significativas, la solución que damos es: $S = 2,75\cdot 10^6$

E.A. $< 5\,000$

E.R. $< \dfrac{5000}{2,74\cdot 10^6} = 1,8248\cdot 10^{-3} = 0,0018248$, que corresponde a un 0,18 %.

Factoriales y números combinatorios

37 **Calcula.**

a) $\dfrac{8!}{5!}$ **b)** $\dfrac{10!}{9!}$ **c)** $\dfrac{5!+4!}{12}$

a) $\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=8\cdot7\cdot6=336$

b) 10

c) $\dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1+4\cdot3\cdot2\cdot1}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\dfrac{4\cdot3\cdot2\cdot1\,(5+1)}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\dfrac{6}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}=$

$=\dfrac{1}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot5}=\dfrac{1}{3326400}$

38 **Calcula.**

a) $\dbinom{8}{4}$ **b)** $\dbinom{12}{7}$ **c)** $\dbinom{37}{35}$ **d)** $\dbinom{84}{1}$

a) $\dfrac{8!}{4!4!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70$

b) $\dfrac{12!}{7!5!}=\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=792$

c) $\dfrac{37!}{35!2!}=\dfrac{37\cdot36}{2}=666$

d) $\dfrac{84!}{83!1!}=\dfrac{84\cdot83!}{83!1!}=84$

39 **Aplica las propiedades de los números combinatorios para obtener n.**

a) $\dbinom{6}{n+2}=1$ **b)** $\dbinom{8}{n-3}=8$ **c)** $\dbinom{9}{2}=\dbinom{9}{n}$

d) $\dbinom{13}{n-1}=\dbinom{13}{n+2}$ **e)** $\dbinom{10}{n}+\dbinom{10}{n+1}=\dbinom{11}{7}$ **f)** $\dbinom{n}{7}=\dbinom{n}{9}$

a) $n+2=6 \to n=4;\ n+2=0 \to n=-2$

b) $n-3=1 \to n=4;\ n-3=7 \to n=10$

c) $n=2$ o $n=9-2=7$

d) $n-1+n+2=13;\ 2n+1=13 \to n=6$

e) $n=6$

f) $n=7+9=16$

Binomio de Newton

40 **Desarrolla.**

a) $(a^2-3b)^7$ **b)** $\left(\dfrac{a}{3}+2b\right)^5$

a) $\dbinom{7}{0}(a^2)^7+\dbinom{7}{1}(a^2)^6(-3b)+\dbinom{7}{2}(a^2)^5(-3b)^2+\dbinom{7}{3}(a^2)^4(-3b)^3+$

$+\dbinom{7}{4}(a^2)^3(-3b)^4+\dbinom{7}{5}(a^2)^2(-3b)^5+\dbinom{7}{6}(a^2)(-3b)^6+\dbinom{7}{7}(-3b)^7=$

$=a^{14}-21a^{12}b+189a^{10}b^2-945a^8b^3+2835a^6b^4-5103a^4b^5+5103a^2b^6-2187b^7$

b) $\dbinom{5}{0}\left(\dfrac{a}{3}\right)^5+\dbinom{5}{1}\left(\dfrac{a}{3}\right)^4 2b+\dbinom{5}{2}\left(\dfrac{a}{3}\right)^3(2b)^2+\dbinom{5}{3}\left(\dfrac{a}{3}\right)^2(2b)^3+\dbinom{5}{4}\left(\dfrac{a}{3}\right)(2b)^4+\dbinom{5}{5}(2b)^5=$

$=\dfrac{1}{243}a^5+\dfrac{10}{81}a^4b+\dfrac{40}{27}a^3b^2+\dfrac{80}{9}a^2b^3+\dfrac{80}{3}ab^4+32b^5$

41 **Halla el noveno término del desarrollo de $(x^2-y^2)^{12}$.**

Término noveno: $\dbinom{12}{8}(x^2)^4(-y^2)^8=495x^8y^{16}$

42 **Halla el término central del desarrollo de $\left(\sqrt{a}+\dfrac{b}{2}\right)^6$.**

Término central: $\dbinom{6}{3}(\sqrt{a})^3\left(\dfrac{b}{2}\right)^3=\dfrac{20}{8}a^{3/2}b^3=\dfrac{5}{2}a^{3/2}b^3$

43 Calcula el coeficiente de x^5 en el desarrollo de $\left(\frac{2}{x} - x^3\right)^7$.

El término $k + 1$ del desarrollo es: $\binom{7}{k}\left(\frac{2}{x}\right)^{7-k}(-x^3)^k$

La potencia de x en este término es: $x^{-(7-k)+3k}$

Como queremos que el exponente de x sea 5: $-(7-k) + 3k = 5$; $k = 4$

$\binom{7}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^4(-x^3)^3 = -560x^5$. El coeficiente de x^5 es -560.

44 Calcula el quinto término del desarrollo de $\left(\frac{1}{x^2} - 2x\right)^8$.

Término quinto: $\binom{8}{4}\left(\frac{1}{x^2}^4(-2x)\right)^4 = \frac{1120}{x^4}$

45 Calcula el coeficiente del sexto término del desarrollo de $\left(\frac{x}{2} + 3x^2\right)^8$.

Término sexto: $\binom{8}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^3(3x^2)^5 = 1701x^{13}$

El coeficiente sexto es 1 701.

Para resolver

46 El volumen de un cubo es $6\sqrt{6}$ cm³. Halla:

a) Su arista.

b) La diagonal de una cara.

c) La diagonal del cubo.

Da, en cada caso, el valor exacto.

a) $V_{Cubo} = a^3 = 6\sqrt{6} \rightarrow a = \sqrt[3]{6\sqrt{6}}$; $a = \sqrt[3]{\sqrt{6^2 \cdot 6}} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt{6}$ cm

b) $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = \sqrt{6}\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$ cm

c) $D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3} = \sqrt{6}\sqrt{3} = 3\sqrt{2}$ cm

47 La superficie de un tetraedro es $9\sqrt{3}$ cm². Calcula su arista y su volumen. Da el valor exacto.

Un tetraedro tiene 4 caras iguales. La superficie de cada cara es: $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm²

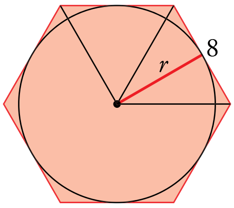
Cada cara es un triángulo equilátero, en el que $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$

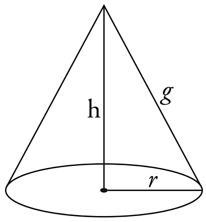
$A_{Cara} = \frac{1}{2}b \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,a^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = 3$ cm

$V_{Tetraedro} = \frac{1}{3}A_{Base} \cdot h = \frac{1}{3}\frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a = \frac{9}{8}a$ cm³ $= \frac{27}{8}$ cm³

48 **En un prisma hexagonal de lado 8 dm, y altura 12 dm, se inscribe un cono. Calcula su área lateral con una cifra decimal y da una cota del error absoluto y una cota del error relativo cometidos.**

Vamos a calcular el radio de la base del cono inscrito en el hexágono regular.





$r = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ dm

La altura del cono coincide con la del prisma hexagonal, h = 12 dm

La generatriz del cono es $g = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 12^2} = 8\sqrt{3}$ dm

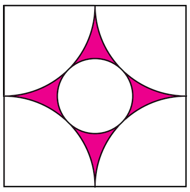
La superficie lateral del cono es:

$A_{Lateral} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 96\pi = 301{,}59 \text{ dm}^2$

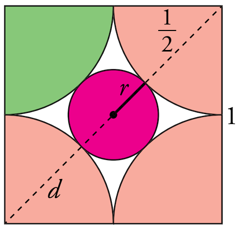
$A_{Lateral} = 301{,}6 \text{ dm}^2$

E.A. < 0,05 dm²

E.R. $< \dfrac{0{,}05}{301{,}59} = 1{,}6579 \cdot 10^{-4} = 0{,}00016579$, que equivale a un 0,02 %.

49 

Halla el área de la parte coloreada de esta figura en el que el lado del cuadrado mide 1 m. Expresa el área en decímetros cuadrados con tres cifras significativas y acota el error cometido.



El área pedida es el área del cuadrado, menos cuatro veces el área verde y menos el área roja.

Cuatro veces el área verde es el área de un círculo de radio $\frac{1}{2}$, es decir, $4A_{Verde} = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi$

Llamamos d a la diagonal del cuadrado: $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Calculamos el radio: $r = \dfrac{d}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}$

El área roja es el área del círculo de radio $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}$.

$A_{Roja} = \pi\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}\pi - \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\pi$

$$\textit{Área pedida} = A_{Cuadrado} - 4A_{Verde} - A_{Roja} = 1 - \frac{1}{4}\pi - \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi - \pi + 1 = 7{,}9849 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 = 7{,}98 \text{ dm}^2$$

E.A. < 0,005 dm²

E.R. $< \dfrac{0{,}005}{7{,}9849 \cdot 10^{-2}} = 6{,}2618 \cdot 10^{-2} = 0{,}062618$, que equivale al 6,26 %.

50 **Un hilo de cobre, cuya resistividad es $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega$m, mide 2 m de largo y tiene un diámetro de 0,2 mm. Calcula su resistencia aplicando la fórmula $R = \rho\ l/S$, donde l es la longitud del hilo y S el área de la sección del mismo.**

$S = \pi \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}12566$

La resistencia es: $R = \dfrac{\rho \cdot l}{S} = \dfrac{1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 2}{0{,}12566} = 2{,}7057 \cdot 10^{-7}\ \Omega$

51 **Si conocemos la longitud de onda de una radiación luminosa, podemos calcular su frecuencia (número de vibraciones por minuto) mediante la fórmula $v = c/\lambda$ donde c es la velocidad de la luz y λ su longitud de onda. Calcula la frecuencia de una radiación roja (λ = 7 000 Å; 1 Å = 10^{-10} m). Acota el error cometido.**

$v = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{7000 \cdot 10^{-10}} = 4{,}2857 \cdot 10^{14}$ vibraciones por segundo

$4{,}2857 \cdot 10^{14} \cdot 60 = 2{,}5714 \cdot 10^{16}$ vibraciones por minuto

E.A. $< 5 \cdot 10^{11}$ vibraciones por minuto

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^{11}}{2{,}5714 \cdot 10^{16}} = 1{,}9445 \cdot 10^{-5} = 0{,}000019445$, que equivale al 0,002 %.

52 **La longitud de una barra metálica después de calentarla es $l = l_0(1 + kt)$ donde l_0 es la longitud a 0 °C, t la temperatura final y k el coeficiente de dilatación lineal. Si una barra de plomo mide 1 m a 800 °C, ¿cuál es su longitud a 200 °C? (En el plomo $k = 3 \cdot 10^{-5}$).**

Calculamos l_0 a partir de la longitud de la barra a 800 °C:

$l = l_0(1 + kt) = l_0(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 800) = l_0\left(\dfrac{128}{125}\right)$, luego $l_0 = \dfrac{125}{128}$

Calculamos ahora la longitud de la barra a 200 ºC:

$l = l_0(1 + kt) = \dfrac{125}{128}(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 200) = \dfrac{125}{128} \cdot \dfrac{503}{500} = \dfrac{503}{512} = 0{,}98242$ m

53 **La estrella R136a1, descubierta recientemente, está a 165 000 años-luz y tiene una masa actual equivalente a 265 veces la masa del Sol. Expresa la distancia en kilómetros y la masa en kilogramos. Da, en cada caso, cotas del error absoluto y del error relativo.**

Un año luz es aproximadamente $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km.

La distancia de la estrella R136a1 a la Tierra es: $d = 165\,000 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} = 1{,}5609 \cdot 10^{18}$ km

E.A. $< 5 \cdot 10^{13}$ km

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^{13}}{1{,}5609 \cdot 10^{18}} = 3{,}2033 \cdot 10^{-5} = 0{,}000032$, que equivale al 0,0032 %.

La masa del Sol es, aproximadamente, $1{,}9891 \cdot 10^{30}$ kg.

La masa de la estrella R136a1 es: $m = 265 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30} = 5{,}2711 \cdot 10^{32}$ kg

E.A. $< 5 \cdot 10^{27}$ kg

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^{27}}{5{,}2711 \cdot 10^{32}} = 9{,}4857 \cdot 10^{-6} = 0{,}0000094857$, que equivale al 0,00095 %.

54 **Calcula k en cada caso.**

a) $\dfrac{12(k-2)!}{k!} = 1$ **b)** $\dbinom{k}{k-2} = 10$ **c)** $3\dbinom{k}{4} = 5\dbinom{k}{2}$ **d)** $\dfrac{(k+6)!}{(k+4)!} = 72$

a) $\dfrac{12(k-2)!}{k(k-1)(k-2)!} = 1$; $\dfrac{12}{k(k-1)} = 1$; $12 = k^2 - k$; $k = 4$, $k = -3$

Como k no puede ser negativo, $k = 4$.

b) $\dfrac{k(k-1)(k-2)!}{(k-2)!2!} = 10$; $\dfrac{k(k-1)}{2} = 10$; $k^2 - k = 20$; $k = 5$, $k = -4$

Como k no puede ser negativo, $k = 5$.

c) $k \geq 4$

$$3\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)!}{4!(k-4)!} = 5\frac{k(k-1)(k-2)!}{2!(k-2)!} \to 3\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!} = 5\frac{k(k-1)}{2!} \to$$

$$\to 3\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{24} - 5\frac{k(k-1)}{2} = 0$$

Simplificamos dividiendo entre $k(k-1)$, que nunca vale cero puesto que $k \geq 4$:

$$3\frac{(k-2)(k-3)}{24} - \frac{5}{2} = 0 \to \frac{(k-2)(k-3)-20}{8} = 0; \ \frac{k^2-5k-14}{8} = 0 \begin{cases} k = 7 \\ k = -2 \end{cases}$$

Como tiene que ser $k \geq 4$, la solución es $k = 7$.

d) $\frac{(k+6)(k+5)(k+4)!}{(k+4)!} = 72 \to (k+6)(k+5) = 72 \begin{cases} k = 3 \\ k = -14 \end{cases}$

Como $k > 0$, la solución es $k = 3$.

Página 53

Cuestiones teóricas

55 Explica si estas frases son verdaderas o falsas:

a) Hay números irracionales que son enteros.

b) Todo número irracional es real.

c) Todos los números decimales son racionales.

d) Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.

a) F b) V c) F d) V

56 Si $x \neq 0$, explica si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) x^{-2} es negativo si lo es x.

b) $\sqrt[3]{x}$ tiene el mismo signo que x.

c) Si $x > 0$ entonces $\sqrt{x} < x$.

a) Falsa, $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ siempre es positivo por ser el exponente par, independientemente del signo de x.

b) Verdadera, porque el índice de la raíz es impar.

c) Falsa, $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

57 ¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Explica por qué:

a) $\log m + \log n = \log (m+n)$

b) $\log m - \log n = \frac{\log m}{\log n}$

c) $\log m - \log n = \log \frac{m}{n}$

d) $\log x^2 = \log x + \log x$

e) $\log (a^2 - b^2) = \log (a+b) + \log (a-b)$

a) Falso. $\log m + \log n = \log (m \cdot n) \neq \log (m+n)$

b) Falso. $\log m - \log n = \log \left(\frac{m}{n}\right) \neq \frac{\log m}{\log n}$

c) Verdadero. Por una propiedad de los logaritmos.

d) Verdadero. $\log x^2 = \log (x \cdot x) = \log x + \log x$

e) Verdadero. $\log (a^2 - b^2) = \log [(a+b) \cdot (a-b)] = \log (a+b) + \log (a-b)$

Para profundizar

58 Halla el valor de esta expresión: $(8^{n+1} + 8^n)^2 : (4^n - 4^{n-1})^3$

$$\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3} = \frac{(8^n(8+1))^2}{(4^{n-1}(4-1))^3} = \frac{8^{2n}\cdot 9^2}{4^{3n-3}\cdot 3^3} = \frac{2^{3\cdot 2n}\cdot 3^4}{2^{2(3n-3)}\cdot 3^3} = 2^{6n-6n+6}\cdot 3 = 2^6\cdot 3 = 192$$

59 Determina el valor de p y q para que se verifique: $2^p \cdot 5^q = \dfrac{1}{125\,000}$

$$2^p\cdot 5^q = \frac{1}{125\,000} = \frac{1}{2^3 5^6} = 2^{-3}5^{-6}$$

Luego $p = -3$ y $q = -6$.

60 ¿Cuál es el número de cifras de $4^{16} \cdot 5^{25}$?

$4^{16}\cdot 5^{25} = 2^{32}\cdot 5^{25} = 2^{32-25}\cdot 10^{25} = 2^7\cdot 10^{25}$

$2^7 = 128$, luego tiene $3 + 25 = 28$ cifras.

61 Demuestra que $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n} = 2^n$.

Desarrollamos $(1+1)^n$ por el binomio de Newton:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$$

Por otra parte, $(1+1)^n = 2^n$, luego $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n} = 2^n$.

62 Comprueba si es verdadera o falsa cada una de las siguientes expresiones:

a) $|a| < b$ equivale a $-b < a < b$

b) $|-a| = -|a|$

c) $|a+b| = |a| + |b|$

d) $|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$

a) Verdadera (siempre que $b > 0$).

b) Falsa; pues $|-a| \ge 0$ y $-|a| \le 0$. (Solo sería cierta para $a = 0$).

c) Falsa. Solo es cierta cuando a y b tienen el mismo signo.

En general, $|a+b| \le |a| + |b|$.

d) Verdadera.

63 Si se resta una unidad al cuadrado de un número impar, ¿se obtiene siempre un múltiplo de 8?

$(2x+1)^2 - 1 = 4x^2 + 4x = 4x(x+1)$

Esta expresión es múltiplo de 4 por ser 4 factor común.

Además, o x es par, o $x+1$ es par, luego uno de los factores que aparecen en la expresión es múltiplo de 2.

El producto será, por tanto, múltiplo de $4\cdot 2 = 8$.

64 Si $x > 0$, $y > 0$, demuestra que $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} > \dfrac{1}{x+y}$.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} > \frac{1}{x+y}$$

Multiplicamos las dos fracciones por $x+y$ que es positivo por ser $x > 0$ e $y > 0$.

Tenemos que probar que $\dfrac{(x+y)^2}{xy} > 1$

$$\frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{x^2+2xy+y^2}{xy} = 2 + \frac{x^2+y^2}{xy} > 2 > 1$$

Luego es cierta la desigualdad.

Autoevaluación

1 Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ pertenecen:

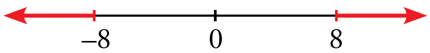
$$-\frac{58}{45};\ \frac{51}{17};\ \frac{\pi}{3};\ \sqrt[4]{-3};\ \sqrt[3]{-8};\ \sqrt[5]{2^3};\ 1{,}0\widehat{7}$$

$\mathbb{N}$: $\frac{51}{17}$ $\mathbb{Z}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$ $\mathbb{Q}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$; $-\frac{58}{45}$; $1{,}0\widehat{7}$ $\mathbb{R}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$; $-\frac{58}{45}$; $1{,}0\widehat{7}$; $\frac{\pi}{3}$; $\sqrt[5]{2^3}$

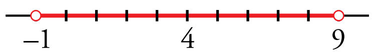
2 Expresa en forma de intervalo y haz la representación en cada caso.

a) $|x| \geq 8$ **b)** $|x-4| < 5$

a) $(-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$



b) $(-1, 9)$



3 Simplifica.

a) $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2}$ **b)** $a\sqrt{a^{-1}} : \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$

a) $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = 5\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $a \cdot a^{-1/2} : a^{-2/3} = a^{1/2 + 2/3} = a^{7/6}$

4 Dos esferas metálicas de 1 000 kg cada una se atraen con una fuerza de $8{,}35 \cdot 10^{-9}$ N. ¿A qué distancia se encuentran sus centros? Aplica la Ley de Gravitación Universal:

$$F = G\frac{M\,m}{r^2} \quad \text{donde} \quad G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}$$

Acota el error cometido.

Sustituímos en la fórmula: $8{,}35 \cdot 10^{-9} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{1000 \cdot 1000}{r^2}$;

$8{,}35 \cdot 10^{-9} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1000 \cdot 1000}{r^2}$;

$8{,}35 \cdot 10^{-9}r^2 = 6{,}67 \cdot 10^{-5}$; $r^2 = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-5}}{8{,}35 \cdot 10^{-9}} = 7\,988$;

$r = \sqrt{7\,988} = 89{,}376$ m

Sus centros se encuentran aproximadamente a 89,376 m.

La cota del error absoluto es E.A. < 0,0005 m

E.R. $< \frac{0{,}0005}{89{,}376} = 5{,}5943 \cdot 10^{-6} = 0{,}0000055943$, que corresponde al 0,00056 %.

5 Calcula m en esta expresión: $\frac{m!}{(m-1)!} = \binom{m}{2}$

$\frac{m!}{(m-1)!} = \binom{m}{2} \;\to\; m \geq 2$

$\frac{m(m-1)!}{(m-1)!} = \frac{m(m-1)(m-2)!}{(m-2)!\,2!}$;

$m = \frac{m(m-1)}{2}$; $2m = m^2 - m$ $\begin{cases} m = 3 \\ m = 0 \end{cases}$

Como $m \geq 2$, la solución es $m = 3$.

6 **Efectúa, racionalizando previamente.**

$$\frac{4+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}-\frac{2}{3-\sqrt{3}}$$

$$\frac{4+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\frac{(4+\sqrt{6})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{18}}{6}=\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$$

$$\frac{2}{3-\sqrt{3}}=\frac{2(3+\sqrt{3})}{3^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{6+2\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}-\frac{6+2\sqrt{3}}{6}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-6}{6}$$

7 **Aplica la definición de logaritmo y obtén x.**

a) $\log_3 x=-\frac{1}{4}$ **b)** $\ln\frac{x}{3}=-1$ **c)** $\log_x 512=3$

a) $x=3^{-(1/4)} \rightarrow x=0{,}76$

b) $\frac{x}{3}=e^{-1} \rightarrow x=3\cdot e^{-1}=1{,}10$

c) $x^3=512 \rightarrow x=8$

8 **Aplica las propiedades de los logaritmos y halla A.**

$$\log A=2\log 3+0{,}5\log 4-3\log 2$$

$$\log A=\log\frac{3^2\cdot 4^{0,5}}{2^3} \rightarrow A=\frac{9\cdot 2}{8}=\frac{9}{4}$$

9 **Calcula x en cada caso.**

a) $2{,}5^x=0{,}0087$ **b)** $e^{-x}=425$

a) $x\log 2{,}5=\log 0{,}0087 \rightarrow x=\frac{\log 0{,}0087}{\log 2{,}5}=-5{,}18$

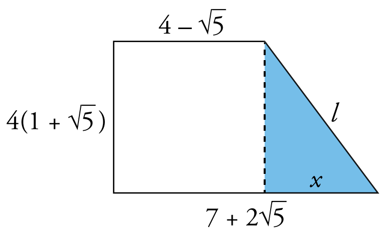
b) $-x\ln e=\ln 425 \rightarrow x=-\ln 425=-6{,}05$

10 **En un trapecio rectángulo, la base menor mide $4-\sqrt{5}$ cm, la base mayor, $7+2\sqrt{5}$ cm y la altura, $4(1+\sqrt{5})$ cm. Comprueba que el perímetro del trapecio es $10(2+\sqrt{5})$ cm.**

$x=(7+2\sqrt{5})-(4-\sqrt{5})=3+3\sqrt{5}=3(1+\sqrt{5})$

$l^2=\left[4(1+\sqrt{5})\right]^2+\left[3(1+\sqrt{5})\right]^2=16(1+\sqrt{5})^2+9(1+\sqrt{5})^2=25(1+\sqrt{5})^2$

$l=\sqrt{25(1+\sqrt{5})^2}=5(1+\sqrt{5})$ cm



Perímetro $=4-\sqrt{5}+7+2\sqrt{5}+4(1+\sqrt{5})+5(1+\sqrt{5})=$

$=4-\sqrt{5}+7+2\sqrt{5}+4+4\sqrt{5}+5+5\sqrt{5}=$

$=20+10\sqrt{5}=10(2\sqrt{5})\text{cm}$