

Teorema del binomio de Newton

NOTACION FACTORIAL. Las identidades siguientes indican el significado de «factorial de n » escrito $n!$, o bien $[n$.

$$2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n, \quad (r-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1)$$

DESARROLLO DE $(a+x)^n$

A) Para valores de n enteros y positivos.

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 \\ + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1} + \dots + x^n$$

Este desarrollo constituye el teorema del binomio, o fórmula del binomio de Newton.

El término r del desarrollo de $(a+x)^n$ es

$$\text{término } r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1}$$

B) Para valores de n negativos y fraccionarios.

El teorema del binomio es válido también para valores de n negativos y fraccionarios siempre que el binomio sea de la forma $(a+x)^n$, siendo el valor absoluto de x menor que a . No obstante, cuando n es un número negativo o fraccionario el desarrollo es ilimitado.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular:

$$a) \frac{7!}{4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$$

$$b) \frac{6!3!}{5!} = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6)(1 \cdot 2 \cdot 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 36$$

$$c) \frac{m!}{(m-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-2)(m-1)m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-2)(m-1)} = m \quad \text{Por ejemplo, } \frac{15!}{14!} = 15$$

$$d) \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-3)(n-2)(n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-3)(n-2)} = n(n-1). \quad \text{Por ejemplo, } \frac{18!}{16!} = 18 \cdot 17 = 306$$

$$e) \frac{(p-2)!}{(p-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-4)(p-3)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-4)} = (p-3)(p-2)$$

$$f) \frac{a!(a+b-2)!}{(a-2)!(a+b)!} = \frac{[a(a-1)(a-2)!](a+b-2)!}{(a-2)![(a+b)(a+b-1)(a+b-2)!]} = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$

DESARROLLO DEL BINOMIO CON EXPONENTE ENTERO Y POSITIVO

Desarrollar por la fórmula del binomio:

$$2. (a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} ax^2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

$$3. (a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a^2x^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} ax^3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4$$

$$= a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$$

$$4. (a+x)^5 = a^5 + 5a^4x + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} a^3x^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^2x^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} ax^4 + x^5$$

$$= a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5$$

Obsérvese que en el desarrollo de $(a+x)^n$:

- 1) El exponente de a + el exponente de $x = n$ (es decir, el grado de cada término es n).
- 2) El número de términos es $n + 1$, cuando n es un número entero y positivo.
- 3) Hay *dos* términos medios cuando n es un número entero, impar y positivo.
- 4) Hay *un* término medio cuando n es un número entero, par y positivo.
- 5) Los coeficientes de los términos que equidistan de los extremos son iguales. Dichos coeficientes se pueden disponer de la forma siguiente:

$$\begin{array}{rccccccc} (a+x)^0 & & & & & & 1 \\ (a+x)^1 & & & & & & 1 & 1 \\ (a+x)^2 & & & & & & 1 & 2 & 1 \\ (a+x)^3 & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ (a+x)^4 & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ (a+x)^5 & & & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ (a+x)^6 & & & & & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ \text{etc.} & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Esta disposición de números recibe el nombre de *triángulo de Pascal*. El primero y el último término son iguales a 1 y los demás se obtienen sumando los dos números a su derecha e izquierda de la fila anterior.

$$5. (x-y^2)^6 = x^6 + 6x^5(-y^2) + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} x^4(-y^2)^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3(-y^2)^3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^2(-y^2)^4$$

$$+ \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x(-y^2)^5 + (-y^2)^6$$

$$= x^6 - 6x^5y^2 + 15x^4y^4 - 20x^3y^6 + 15x^2y^8 - 6xy^{10} + y^{12}$$

En el desarrollo de un binomio de la forma $(a - b)^n$, siendo n un número entero y positivo, los términos son alternativamente positivos y negativos.

6. $(3a^3 - 2b)^4 = (3a^3)^4 + 4(3a^3)^3(-2b) + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} (3a^3)^2(-2b)^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} (3a^3)(-2b)^3 + (-2b)^4$
 $= 81a^{12} - 216a^9b + 216a^6b^2 - 96a^3b^3 + 16b^4$
7. $(x - 1)^7 = x^7 + 7x^6(-1) + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} x^5(-1)^2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^4(-1)^3 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^3(-1)^4$
 $+ \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^2(-1)^5 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x(-1)^6 + (-1)^7$
 $= x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$
8. $(1 - 2x)^5 = 1 + 5(-2x) + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} (-2x)^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} (-2x)^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (-2x)^4 + (-2x)^5$
 $= 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5$
9. $(\frac{x}{3} + \frac{2}{y})^4 = (\frac{x}{3})^4 + 4(\frac{x}{3})^3(\frac{2}{y}) + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} (\frac{x}{3})^2(\frac{2}{y})^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\frac{x}{3})(\frac{2}{y})^3 + (\frac{2}{y})^4$
 $= \frac{x^4}{81} + \frac{8x^3}{27y} + \frac{8x^2}{3y^2} + \frac{32x}{3y^3} + \frac{16}{y^4}$
10. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^6 = (x^{1/2})^6 + 6(x^{1/2})^5(y^{1/2}) + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} (x^{1/2})^4(y^{1/2})^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} (x^{1/2})^3(y^{1/2})^3$
 $+ \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (x^{1/2})^2(y^{1/2})^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (x^{1/2})(y^{1/2})^5 + (y^{1/2})^6$
 $= x^3 + 6x^{5/2}y^{1/2} + 15x^2y + 20x^{3/2}y^{3/2} + 15xy^2 + 6x^{1/2}y^{5/2} + y^3$
11. $(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^4 = (x^{1/2} - x^{-1/2})^4$
 $= (x^{1/2})^4 + 4(x^{1/2})^3(-x^{-1/2}) + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} (x^{1/2})^2(-x^{-1/2})^2$
 $+ \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} (x^{1/2})(-x^{-1/2})^3 + (-x^{-1/2})^4 = x^2 - 4x + 6 - 4x^{-1} + x^{-2}$
12. $(a^{-2} + b^{3/2})^4 = (a^{-2})^4 + 4(a^{-2})^3(b^{3/2}) + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} (a^{-2})^2(b^{3/2})^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} (a^{-2})(b^{3/2})^3 + (b^{3/2})^4$
 $= a^{-8} + 4a^{-6}b^{3/2} + 6a^{-4}b^3 + 4a^{-2}b^{9/2} + b^6$
13. $(e^x - e^{-x})^7 = (e^x)^7 + 7(e^x)^6(-e^{-x}) + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} (e^x)^5(-e^{-x})^2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} (e^x)^4(-e^{-x})^3$
 $+ \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (e^x)^3(-e^{-x})^4 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (e^x)^2(-e^{-x})^5$
 $+ \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} (e^x)(-e^{-x})^6 + (-e^{-x})^7$
 $= e^{7x} - 7e^{5x} + 21e^{3x} - 35e^x + 35e^{-x} - 21e^{-3x} + 7e^{-5x} - e^{-7x}$

$$14. (a + b - c)^3 = [(a + b) - c]^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2(-c) + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}(a + b)(-c)^2 + (-c)^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2c - 6abc - 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 - c^3$$

$$15. (x^2 + x - 3)^3 = [x^2 + (x - 3)]^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2(x - 3) + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}(x^2)(x - 3)^2 + (x - 3)^3$$

$$= x^6 + (3x^5 - 9x^4) + (3x^4 - 18x^3 + 27x^2) + (x^3 - 9x^2 + 27x - 27)$$

$$= x^6 + 3x^5 - 6x^4 - 17x^3 + 18x^2 + 27x - 27$$

En los Problemas 16-21 escribir el término indicado de cada desarrollo aplicando la fórmula

$$\text{término } r \text{ de } (a + x)^n = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)}{(r-1)!} a^{n-r+1} x^{r-1}$$

16. Sexto término de $(x + y)^{15}$. $n = 15$, $r = 6$, $n - r + 2 = 11$, $r - 1 = 5$, $n - r + 1 = 10$

$$6.^\circ \text{ término} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^{10} y^5 = 3003x^{10}y^5$$

17. Quinto término de $(a - \sqrt{b})^9$. $n = 9$, $r = 5$, $n - r + 2 = 6$, $r - 1 = 4$, $n - r + 1 = 5$

$$5.^\circ \text{ término} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^5 (-\sqrt{b})^4 = 126a^5b^2$$

18. Cuarto término de $(x^2 - y^2)^{11}$. $n = 11$, $r = 4$, $n - r + 2 = 9$, $r - 1 = 3$, $n - r + 1 = 8$

$$4.^\circ \text{ término} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} (x^2)^8 (-y^2)^3 = -165x^{16}y^6$$

19. Nueve término de $(\frac{x}{2} + \frac{1}{x})^{12}$. $n = 12$, $r = 9$, $n - r + 2 = 5$, $r - 1 = 8$, $n - r + 1 = 4$

$$9.^\circ \text{ término} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} (\frac{x}{2})^4 (\frac{1}{x})^8 = \frac{495}{16x^4}$$

20. Decimotercero término de $(1 - \frac{1}{x})^{20}$. $n = 20$, $r = 13$, $n - r + 2 = 4$, $r - 1 = 17$, $n - r + 1 = 3$

$$13.^\circ \text{ término} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \dots 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 17} (-\frac{1}{x})^{17} = -\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3x^{17}} = -\frac{1140}{x^{17}}$$

21. Término medio (4.º) de $(x^{1/3} - \frac{1}{2}x^{-2})^6$. $n = 6$, $r = 4$, $n - r + 2 = 4$, $r - 1 = 3$, $n - r + 1 = 3$

$$4.^\circ \text{ término} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} (x^{1/3})^3 (-\frac{1}{2}x^{-2})^3 = 20(x)(-\frac{1}{8}x^{-6}) = -\frac{5}{2x^5}$$

22. Hallar el término en x^2 del desarrollo de $(x^3 + \frac{a}{x})^{10}$

De $(x^3)^{10-r+1}(x^{-1})^{r-1} = x^2$ se obtiene $3(10-r+1) - 1(r-1) = 2$ de donde $r = 8$

Para el 8.º término: $n = 10$, $r = 8$, $n - r + 2 = 4$, $r - 1 = 7$, $n - r + 1 = 3$

$$8.^\circ \text{ término} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} (x^3)^3 (\frac{a}{x})^7 = 120a^7x^2$$

23. Hallar el término independiente de x en el desarrollo de $(x^2 - \frac{1}{x})^9$

De $(x^2)^{9-r+1}(x^{-1})^{r-1} = x^0$, se obtiene $2(9-r+1) - 1(r-1) = 0$; de donde $r = 7$

Para el 7.º término: $n = 9$, $r = 7$, $n - r + 2 = 4$, $r - 1 = 6$, $n - r + 1 = 3$

$$7.º \text{ término} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} (x^2)^3 (-x^{-1})^6 = 84$$

24. Calcular $(1,03)^{10}$ con cinco cifras significativas.

$$\begin{aligned} (1,03)^{10} &= (1 + 0,03)^{10} = 1 + 10(0,03) + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} (0,03)^2 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} (0,03)^3 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (0,03)^4 + \dots \\ &= 1 + 0,3 + 0,0405 + 0,00324 + 0,00017 + \dots = 1,3439 \end{aligned}$$

Obsérvese que el desarrollo de $(1 + 0,03)^{10}$ consta de 11 términos.

25. Calcular $(0,99)^{15}$ con cuatro cifras decimales.

$$\begin{aligned} (0,99)^{15} &= (1 - 0,01)^{15} = 1 + 15(-0,01) + \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} (-0,01)^2 + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} (-0,01)^3 \\ &\quad + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (-0,01)^4 + \dots \\ &= 1 - 0,15 + 0,0105 - 0,000455 + 0,000014 - \dots = 0,8601 \end{aligned}$$

26. Hallar la suma de los coeficientes del desarrollo de a) $(1+x)^{10}$, b) $(1-x)^{10}$.

a) Si $1, c_1, c_2, \dots, c_{10}$ son los coeficientes, tenemos la identidad

$$(1+x)^{10} = 1 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{10}x^{10}. \quad \text{Hagamos } x = 1$$

Entonces $(1+1)^{10} = 1 + c_1 + c_2 + \dots + c_{10} = \text{suma de los coeficientes} = 2^{10} = 1024$

b) Hagamos $x = 1$. Entonces $(1-x)^{10} = (1-1)^{10} = 0 = \text{suma de los coeficientes}$.

DESARROLLO CON EXPONENTE FRACCIONARIO Y NEGATIVO

En los Problemas 27-28 escribir los cuatro primeros términos del desarrollo.

$$\begin{aligned} 27. (a-x)^{1/3} &= a^{1/3} + \frac{1}{3} a^{-2/3}(-x) + \frac{(1/3)(-2/3)}{1 \cdot 2} a^{-5/3}(-x)^2 + \frac{(1/3)(-2/3)(-5/3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{-8/3}(-x)^3 + \dots \\ &= a^{1/3} - \frac{1}{3} a^{-2/3}x + \frac{1}{9} a^{-5/3}x^2 - \frac{5}{81} a^{-8/3}x^3 - \dots \quad |x| < |a| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28. (1+x)^{3/2} &= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{(3/2)(1/2)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(3/2)(1/2)(-1/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \quad |x| < 1 \\ &= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \dots \end{aligned}$$

29. Calcular $\sqrt{26}$ con seis cifras significativas.

$$\begin{aligned}\sqrt{26} &= (5^2 + 1)^{1/2} = (5^2)^{1/2} + \frac{1}{2}(5^2)^{-1/2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{1 \cdot 2}(5^2)^{-3/2} \\ &\quad + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(5^2)^{-5/2} + \dots \\ &= 5 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5^3}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5^5}\right) - \dots = 5 + \frac{1}{10} - \frac{1}{1000} + \frac{1}{50\,000} - \dots \\ &= 5 + 0,1 - 0,001 + 0,00002 - \dots = 5,09902\end{aligned}$$

Nota. Es incorrecto calcular $\sqrt{26}$ desarrollando $(1 + 5^2)^{1/2}$. ¿Por qué?

30. Calcular $\sqrt[3]{998}$ con seis cifras significativas.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{998} &= (10^3 - 2)^{1/3} = (10^3)^{1/3} + \frac{1}{3}(10^3)^{-2/3}(-2) + \frac{(1/3)(-2/3)}{1 \cdot 2}(10^3)^{-5/3}(-2)^2 + \dots \\ &= 10 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10^2}\right) - \frac{4}{9}\left(\frac{1}{10^5}\right) - \dots = 10 - 0,006667 - 0,000004 - \dots = 9,99333\end{aligned}$$

31. Escribir el sexto término del desarrollo de $(1 - x^2)^{1/2}$.

$$\begin{aligned}n &= 1/2, r = 6, n - r + 2 = -7/2, r - 1 = 5, n - r + 1 = -9/2 \\ \text{6.º término} &= \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2)(-7/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (-x^2)^5 = -\frac{7}{256}x^{10}\end{aligned}$$

En los Problemas 32-36 escribir los cuatro primeros términos del desarrollo.

$$\begin{aligned}32. (a + x)^{-1} &= a^{-1} + (-1)a^{-2}x + \frac{(-1)(-2)}{1 \cdot 2}a^{-3}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{-4}x^3 + \dots \\ &= a^{-1} - a^{-2}x + a^{-3}x^2 - a^{-4}x^3 + \dots \quad \text{válido para } |x| < |a|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}33. (1 - x)^{-2} &= 1 + (-2)(-x) + \frac{(-2)(-3)}{1 \cdot 2}(-x)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(-x)^3 + \dots \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \quad \text{válido para } |x| < 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}34. (1 - x)^{-4} &= 1 + (-4)(-x) + \frac{(-4)(-5)}{1 \cdot 2}(-x)^2 + \frac{(-4)(-5)(-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(-x)^3 + \dots \\ &= 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}35. (2 + x)^{-3} &= 2^{-3} + (-3)(2^{-4})x + \frac{(-3)(-4)}{1 \cdot 2}(2^{-5})x^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(2^{-6})x^3 + \dots \\ &= \frac{1}{8} - \frac{3}{16}x + \frac{3}{16}x^2 - \frac{5}{32}x^3 + \dots \quad \text{válido para } |x| < 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}36. (9 + x)^{-1/2} &= 9^{-1/2} + (-1/2)(9^{-3/2})x + \frac{(-1/2)(-3/2)}{1 \cdot 2}(9^{-5/2})x^2 \\ &\quad + \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(9^{-7/2})x^3 + \dots = \frac{1}{3} - \frac{x}{54} + \frac{x^2}{648} - \frac{5x^3}{34\,992} + \dots\end{aligned}$$

37. Escribir el quinto término del desarrollo de $(\sqrt{x/y} - \sqrt{y/x})^{-4}$.

$$n = -4, r = 5, n - r + 2 = -7, r - 1 = 4, n - r + 1 = -8$$

$$5.^\circ \text{ término} = \frac{(-4)(-5)(-6)(-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{x^{1/2}}{y^{1/2}}\right)^{-8} \left(-\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}\right)^4 = 35x^{-6}y^6$$

38. Escribir los cuatro primeros términos del desarrollo de $(1 + \frac{1}{n})^n$.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!} \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \dots$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

39. Calcular los cocientes siguientes:

$$a) \frac{6!}{3!} \quad b) \frac{8!}{5!} \quad c) \frac{10!}{6!4!} \quad d) \frac{12!}{7!3!2!} \quad e) \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} \quad f) \frac{n!}{(n-3)!3!} \quad g) \frac{(n-1)!4!}{(n+2)!}$$

40. Desarrollar por la fórmula del binomio.

$$a) \left(x + \frac{1}{2}\right)^6 \quad c) (y+3)^4 \quad e) (x^2 - y^3)^4 \quad g) \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{y}\right)^4$$

$$b) (x-2)^5 \quad d) \left(x + \frac{1}{x}\right)^5 \quad f) (a-2b)^6 \quad h) (y^{1/2} + y^{-1/2})^6$$

41. Escribir el término indicado en los siguientes desarrollos.

$$a) \text{ Quinto término de } (a-b)^7 \quad e) \text{ Séptimo término de } \left(a - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{10}$$

$$b) \text{ Séptimo término de } \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^9 \quad f) \text{ Decimosexto término de } (2 - 1/x)^{18}$$

$$c) \text{ Término medio de } \left(y - \frac{1}{y}\right)^8 \quad g) \text{ Sexto término de } (x^2 - 2y)^{11}$$

$$d) \text{ Octavo término de } \left(\frac{x^2}{2} - 2y\right)^{16} \quad h) \text{ Onceavo término de } \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$$

42. Hallar el término independiente del desarrollo de $(\sqrt{x} + \frac{1}{3x^2})^{10}$.

43. Hallar el término en x^3 del desarrollo de $(x^{2/3} + \frac{1}{x})^{12}$.

44. Calcular $(0,98)^6$ con cinco cifras decimales.

45. Calcular $(1,1)^{10}$ con una aproximación de una centésima.

46. Escribir los cuatro primeros términos de los desarrollos siguientes:

$$a) (1+2x)^{-1} \quad c) (a+x)^{-1/2} \quad e) (1+x)^{1/3} \quad g) (4+x)^{1/2}$$

$$b) (1-y)^{-3} \quad d) (1+r)^{-6} \quad f) (1-3y)^{-1/3} \quad h) \left(1 + \frac{1}{5}\right)^{-2/3}$$

47. Calcular con la aproximación indicada:

a) $\sqrt{17}$; con cuatro cifras significativas

c) $\sqrt[5]{34}$; con aproximación de una centésima

b) $\sqrt[3]{28}$; con tres cifras decimales

d) $\sqrt[5]{1,01}$; con cinco cifras decimales

48. Escribir el decimosexto término del desarrollo de $(x + \frac{2}{x})^{-5}$.

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

39. a) 120 b) 336 c) 210 d) 7920 e) $2n(2n + 1)$ f) $\frac{n(n-1)(n-2)}{5}$ g) $\frac{24}{n(n+1)(n+2)}$

40. a) $x^6 + 3x^5 + \frac{15}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{15}{16}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{1}{64}$

b) $x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$

c) $y^4 + 12y^3 + 54y^2 + 108y + 81$

d) $x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}$

e) $x^8 - 4x^6y^3 + 6x^4y^6 - 4x^2y^9 + y^{12}$

f) $a^6 - 12a^5b + 60a^4b^2 - 160a^3b^3 + 240a^2b^4 - 192ab^5 + 64b^6$

g) $\frac{x^4}{16} + \frac{3x^3}{2y} + \frac{27x^2}{2y^2} + \frac{54x}{y^3} + \frac{81}{y^4}$

h) $y^3 + 6y^2 + 15y + 20 + 15y^{-1} + 6y^{-2} + y^{-3}$

41. a) $35a^3b^4$

c) 70

e) $210a$

g) $-14784x^{12}y^5$

b) 84

d) $-2860x^{18}y^7$

f) $-\frac{6528}{x^{15}}$

h) $\frac{1001}{x}$

42. 5

43. $792x^3$

44. 0,88584

45. 2,59

46. a) $1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \dots$ $|x| < \frac{1}{2}$

e) $1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \dots$

b) $1 + 3y + 6y^2 + 10y^3 + \dots$ $|y| < 1$

f) $1 + y + 2y^2 + \frac{14}{3}y^3 + \dots$

c) $a^{-1/2} - \frac{1}{2}a^{-3/2}x + \frac{2}{8}a^{-5/2}x^2 - \frac{5}{16}a^{-7/2}x^3 + \dots$

g) $2 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64} + \frac{x^3}{512} - \dots$

d) $1 - 6r + 21r^2 - 56r^3 + \dots$

h) $1 - \frac{2}{3s} + \frac{5}{9s^2} - \frac{40}{81s^3} + \dots$ $|s| > 1$

47. a) 4,123

b) 3,037

c) 2,02

d) 1,00199

48. $\frac{4032}{x^{15}}$