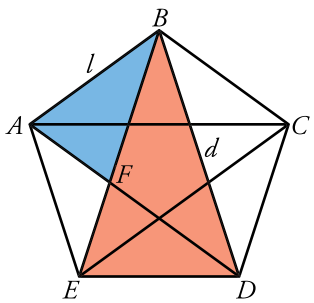
Resuelve

Página 29

El pentágono estrellado

Observa el pentágono estrellado que se muestra a continuación:



1. Demuestra que los triángulos *ABF* y *EBD* son semejantes (es decir, demuestra que sus ángulos son respectivamente iguales).

2. Si llamamos *l* al lado del pentágono y *d* a su diagonal, basándote en la semejanza de los triángulos que acabas de demostrar, halla la relación $\frac{d}{l}$ y comprueba que es el número áureo:

$$\frac{d}{l} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$$

El ángulo $\hat{B} = 36°$ en el triángulo *ABF*, y $\hat{B} = 36°$ en el triángulo *EBD*. Por otra parte los triángulos *DAB* y *EBD* son iguales, luego el ángulo $\hat{A}$ en el triángulo *ABF*, y $\hat{D}$ en el triángulo *EBD* son iguales. Por tanto los triángulos son semejantes.

El lado $AF = d - l$.

Por la semejanza de los triángulos *ABF* y *EBD*; $\frac{BD}{BF} = \frac{ED}{AF}$; es decir, $\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$

Operando, $d(d-l) = l^2$, por tanto $d^2 - dl - l^2 = 0$.

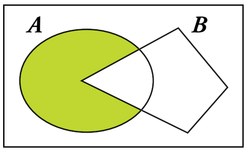
Las soluciones posibles para d son $d = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} = l\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Como d no puede ser negativa, $d = l\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y $\frac{d}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

1 Lenguaje matemático: conjuntos y símbolos

Página 31

1 **¿Verdadero o falso?**



a) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A - B$.

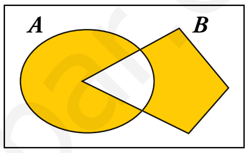
Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B.

b) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A \cap B'$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B, ya que B' es el complementario de B.

c) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$$(A - B) \cup (B - A)$$



Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, o está en A y no está en B, o está en B y no está en A.

d) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$$(A \cup B) - (A \cap B)$$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, tiene que estar en A o en B, pero no puede estar en los dos a la vez $(A \cap B)$.

e) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto, o está en A y no está en B, o está en B y no está en A.

f) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

Verdadero, porque todos los números enteros son racionales.

g) $[x \in (\dot{3})$ y $x \in (\dot{2})] \Leftrightarrow x \in (\dot{6})$

$(\dot{n})$ es el conjunto de los múltiplos de n.

Verdadero, porque si un número es a la vez múltiplo de 2 y de 3, entonces es múltiplo de $2 \cdot 3 = 6$.

h) $(\dot{3}) \cap (\dot{2}) = (\dot{6})$

Es la misma afirmación anterior.

i) $x \in A - B \Rightarrow x \in A \cap B'$

Verdadero, porque los elementos de $A - B$ están en A y no están en B, luego están en A y en B'.

j) $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ es lo mismo que decir $A \subset B$.

Verdadero, porque la implicación indica que todo elemento de A es un elemento de B.

k) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$

Tenemos que comprobar que las dos siguientes afirmaciones son ciertas:

$(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subset B$ que es la afirmación del apartado j)

$A \subset B \Rightarrow x \in \text{A} \Rightarrow x \in \text{B}$, pero si B contiene a A, es porque todos los elementos de A están en B, luego son equivalentes y es verdadera la afirmación.

l) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow B \subset A$

Falso, porque puede existir algún elemento de B que no esté en A.

m) $x \in (0, 1) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ **y** $0 < x < 1$

Verdadero, porque los intervalos representan conjuntos de números reales y el intervalo (0, 1) está formado por los números comprendidos entre 0 y 1 que son mayores que 0 y menores que 1, luego son afirmaciones equivalentes.

n) $\sqrt{2} \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **pero** $\sqrt{2}/2 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Verdadero, porque $\sqrt{2}$ es un número real que no es racional y es mayor que 1, sin embargo $\sqrt{2}/2$ también es irracional, pero está entre 0 y 1.

ñ) $0{,}5 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Falso, porque 0,5 es racional.

o) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **es el conjunto de los números irracionales positivos menores que 1.**

Verdadero, porque son los números reales que no son racionales, es decir, irracionales, y además tienen que ser mayores que cero, por tanto positivos, y menores que 1.

p) $\{x \in \mathbb{Z} \,/\, -2 < x \le 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Verdadero, porque los únicos números enteros mayores que –2 y menores o iguales que 5 son los del conjunto indicado.

q) El conjunto de los números enteros mayores que –5 y menores que 7 es $\mathbb{Z} \cap (-5, 7)$.

Verdadero, porque, de los números enteros mayores que –5 y menores que 7, están en el intervalo (–5, 7) y además son enteros.

r) **(x es un número real pero no es racional)** $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

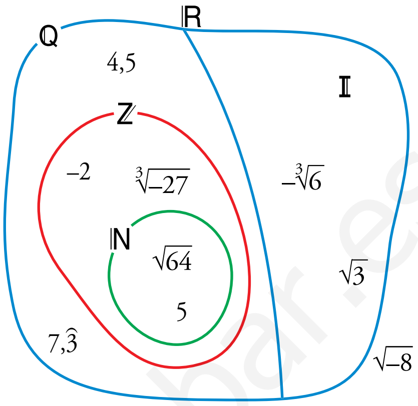
Verdadero, porque $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es el conjunto de todos los números reales menos los racionales, que es equivalente a decir los números reales que no son racionales.

2 Números reales. La recta real

Página 32

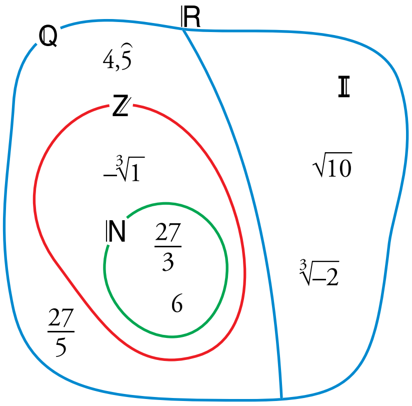
Reflexiona y resuelve

Observa cómo se sitúan estos números en los conjuntos numéricos:



Ahora, en tu cuaderno, sitúa los siguientes números en un diagrama similar:

$-\sqrt[3]{1}$; $4,\hat{5}$; 6; $\sqrt{10}$; $\sqrt[4]{-16}$; $\sqrt[3]{-2}$; $27/5$; $27/3$



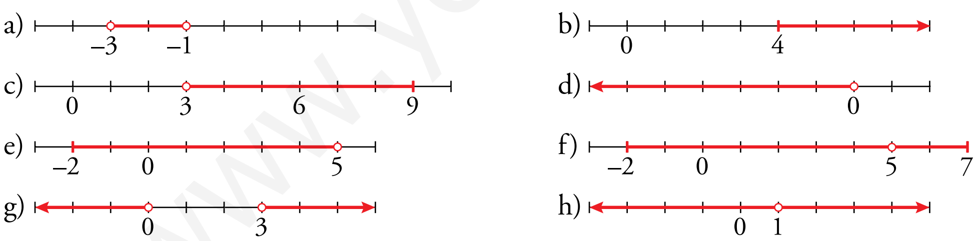
$6, \frac{27}{3} \in \mathbb{N}$ $\quad -\sqrt[3]{1} \in \mathbb{Z}$ $\quad 4,\hat{5}, \frac{27}{5} \in \mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{10}, \sqrt[3]{-2} \in \mathbb{R}$ $\quad \sqrt[4]{-16}$ no es real

Página 33

1 **Representa los siguientes conjuntos:**

a) $(-3, -1)$ **b)** $[4, +\infty)$ **c)** $(3, 9]$ **d)** $(-\infty, 0)$

e) $\{x / -2 \le x < 5\}$ **f)** $[-2, 5) \cup (5, 7]$ **g)** $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ **h)** $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

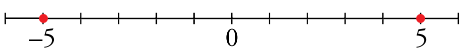


2 **Averigua y representa para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones:**

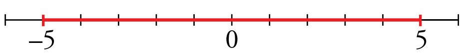
a) $|x| = 5$ **b)** $|x| \le 5$ **c)** $|x - 4| = 2$

d) $|x - 4| \le 2$ **e)** $|x - 4| > 2$ **f)** $|x + 4| > 5$

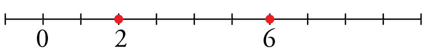
a) 5 y –5



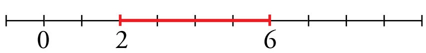
b) $-5 \le x \le 5$; $[-5, 5]$



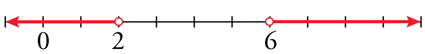
c) 6 y 2



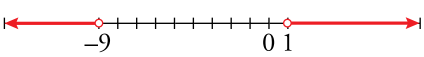
d) $2 \le x \le 6$; $[2, 6]$



e) $x < 2$ o $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$



f) $x < -9$ o $x > 1$; $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$



3 Radicales. Propiedades

Página 34

1 Simplifica.

a) $\sqrt[9]{x^{12}}$ **b)** $\sqrt[12]{x^8}$ **c)** $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ **e)** $\sqrt[9]{64}$ **f)** $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[9]{x^{12}} = \sqrt[3]{x^4}$ Se dividen índice y exponente entre 3.

b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2 ¿Cuál es mayor, $\sqrt[4]{31}$ o $\sqrt[3]{13}$?

Reducimos a índice común: $\sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{29791}$; $\sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{28561}$

Por tanto, es mayor $\sqrt[4]{31}$.

3 Reduce a índice común.

a) $\sqrt[12]{a^5}$ **y** $\sqrt[18]{a^7}$

b) $\sqrt[3]{51}$ **y** $\sqrt[9]{132\,650}$

a) $\sqrt[12]{a^5} = \sqrt[36]{a^{15}}$; $\sqrt[18]{a^7} = \sqrt[36]{a^{14}}$

b) $\sqrt[3]{51} = \sqrt[9]{132651}$; $\sqrt[9]{132650}$

4 Simplifica.

a) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}\right)^8$ **b)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ **c)** $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$

a) $\left(\sqrt[8]{k}\right)^8 = k$

b) $\sqrt[15]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[6]{x^6} = x$

Página 35

5 Reduce.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$ **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{4}$ **e)** $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5}$ **f)** $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3}$

a) $\sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

d) $\sqrt[12]{8^3} \cdot \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{(2^3)^3 \cdot (2^2)^4} = \sqrt[12]{2^{17}} = 2\sqrt[12]{2^5}$

e) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{5^5} = 5\sqrt[4]{5}$

f) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{(3^4)^2}\ \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{3^{11}} = 3\sqrt[6]{3^5}$

6 **Simplifica.**

a) $\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt[3]{a \cdot b}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}}$

a) $\sqrt[15]{\dfrac{x^3}{x^5}} = \sqrt[15]{\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt[15]{x^{-2}}$

b) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3\, b^3}{a^2\, b^2}} = \sqrt[6]{a\, b}$

c) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{a^4}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{a}} = \sqrt[6]{a^{-1}}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{a^3\, b^5\, c}{a^2\, b^6\, c^6}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{bc^5}} = \dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{a}{bc}}$

7 **Reduce.**

a) $\dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt{3}}$

a) $\sqrt{\dfrac{3^4}{3^3}} = \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[6]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

c) $\sqrt[10]{\dfrac{2^8}{2^5}} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

8 **Suma y simplifica.**

a) $5\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$ **b)** $\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$

d) $\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$ **e)** $\sqrt{50a} - \sqrt{18a}$ **f)** $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250}$

a) $10\sqrt{x}$

b) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3^3} - \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^3} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot a} - \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot a} = 5\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = 2\sqrt{2a}$

f) Se factorizan los radicandos y se sacan factores de la raíz:

$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} = 0$

Página 36

9 **Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.**

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}}$ **f)** $\dfrac{4}{\sqrt{18}}$ **g)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}}$ **h)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}}$ **j)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}}$

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}} = \dfrac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\sqrt{\dfrac{7}{3}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}} = \dfrac{1}{a\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a^2}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}} = \dfrac{3}{\sqrt{2 \cdot 5^2}} = \dfrac{3}{5\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{10}$

f) $\dfrac{4}{\sqrt{18}} = \dfrac{4}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \dfrac{4}{3\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{6} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{5}}{5}$

h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}} = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{10} = \dfrac{\sqrt[3]{25}}{10}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}} = \dfrac{3\sqrt[3]{2 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \dfrac{3\sqrt[3]{6}}{6} = \dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}$

j) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 5^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2 \cdot 5}}{2 \cdot 5} = \dfrac{2\sqrt[3]{10}}{10} = \dfrac{\sqrt[3]{10}}{5}$

10 **Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ b) $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ c) $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ d) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

e) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ f) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$

b) $\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=\dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$

c) $\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}=\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(a-1)}=\sqrt{a}+1$

d) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

e) $\dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12-5}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}$

f) $\dfrac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{18-12}=\dfrac{18+12+12\sqrt{6}}{6}=\dfrac{30+12\sqrt{6}}{6}=5+2\sqrt{6}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{(2-1)+2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2-1)}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}$

4 Logaritmos. Propiedades

Página 39

1 Halla.

a) $\log_2 16$ **b)** $\log_2 0{,}25$ **c)** $\log_9 1$ **d)** $\log_{10} 0{,}1$
e) $\log_4 64$ **f)** $\log_7 49$ **g)** $\ln e^4$ **h)** $\ln e^{-1/4}$
i) $\log_5 0{,}04$ **j)** $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right)$

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

b) $\log_2 0{,}25 = \log_2 2^{-2} = -2$

c) $\log_9 1 = 0$

d) $\log_{10} 0{,}1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$

e) $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$

f) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$

g) $\ln e^4 = 4$

h) $\ln e^{-1/4} = -\frac{1}{4}$

i) $\log_5 0{,}04 = \log_5 5^{-2} = -2$

j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right) = \log_6 6^{-3} = -3$

2 Halla la parte entera de…

a) $\log_2 60$. **b)** $\log_5 700$. **c)** $\log_{10} 43\,000$. **d)** $\log_{10} 0{,}084$.
e) $\log_9 60$. **f)** $\ln e$. **g)** $\log_{20} 450\,000$. **h)** $\log_{5,4} 900$.

a) $2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $32 < 60 < 64$

$5 < \log_2 60 < 6 \Rightarrow \log_2 60 = 5,\ldots$

b) $5^4 = 625$; $5^5 = 3\,125$; $625 < 700 < 3\,125$

$4 < \log_5 700 < 5 \Rightarrow \log_5 700 = 4,\ldots$

c) $10^4 = 10\,000$; $10^5 = 100\,000$; $10\,000 < 43\,000 < 100\,000$

$4 < \log_{10} 43\,000 < 5 \Rightarrow \log_{10} 43\,000 = 4,\ldots$

d) $10^{-2} = 0{,}01$; $10^{-1} = 0{,}1$; $0{,}01 < 0{,}084 < 0{,}1$

$-2 < \log_{10} 0{,}084 < -1 \Rightarrow \log_{10} 0{,}084 = -1,\ldots$

e) $9^1 = 9$; $9^2 = 81$; $9 < 60 < 81$

$1 < \log_9 60 < 2 \Rightarrow \log_9 60 = 1,\ldots$

f) $\ln e = 1$

g) $\log_{20} 450\,000$; $20^4 = 160\,000$; $20^5 = 3\,200\,000$

Como $20^4 = 160\,000 < 450\,000 < 3\,200\,000 = 20^5 \Rightarrow 4 < \log_{20} 450\,000 < 5$.

La parte entera de $\log_{20} 450\,000$ es 4.

h) $\log_{5,4} 900 = 4{,}0337$

$5{,}4^4 = 850{,}31$; $5{,}4^5 = 4\,591{,}7$

Como $5{,}4^4 = 850{,}31 < 900 < 4\,591{,}7 = 5{,}4^5 \Rightarrow 4 < \log_{5,4} 900 < 5$.

La parte entera de $\log_{5,4} 900$ es 4.

3 **Aplica la propiedad ⑧ para obtener los siguientes logaritmos con la ayuda de la calculadora:**

a) $\log_2 1\,500$ **b)** $\log_5 200$ **c)** $\log_{100} 200$ **d)** $\log_{100} 40$

En cada caso, comprueba el resultado utilizando la potenciación.

a) $\dfrac{\log 1500}{\log 2} = 10,55;\ \ 2^{10,55} \approx 1\,500$

b) $\dfrac{\log 200}{\log 5} = 3,29;\ \ 5^{3,29} \approx 200$

c) $\dfrac{\log 200}{\log 100} = 1,15;\ \ 100^{1,15} \approx 200$

d) $\dfrac{\log 40}{\log 100} = 0,80;\ \ 100^{0,80} \approx 40$

4 **Calcula sabiendo que** $\log_5 A = 1,8$ **y** $\log_5 B = 2,4$.

a) $\log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}}$ **b)** $\log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$

a) $\log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}} = \dfrac{1}{3}\,[2 \log_5 A - \log_5 25 - \log_5 B] = \dfrac{1}{3}\,[2 \cdot 1,8 - 2 - 2,4] = \dfrac{-0,8}{3} \approx -0,27$

b) $\log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = \log_5 5 + \dfrac{3}{2} \log_5 A - 2 \log_5 B = 1 + \dfrac{3}{2} \cdot 1,8 - 2 \cdot 2,4 = 1 + 2,7 - 4,8 = -1,1$

5 **Averigua la relación que hay entre** x **e** y, **sabiendo que se verifica:**

$\ln y = 2x - \ln 5$

$\ln y = 2x - \ln 5 \ \rightarrow\ \ln y = \ln e^{2x} - \ln 5$

$\ln y = \ln \dfrac{e^{2x}}{5} \ \rightarrow\ y = \dfrac{e^{2x}}{5}$

5 Expresión decimal de los números reales. Números aproximados

Página 41

1 ¿Verdadero o falso?

I. El precio de esta vivienda es, aproximadamente, de 390 000 €, con un error menor que 10 000 €.

II. El precio del menú del día es, aproximadamente, de 12 €, con un error menor que 1 €.

En I el error absoluto es mucho mayor que en II, pero el error relativo es menor.

I. E.R. $< \frac{10000}{390000} = 2{,}5641 \cdot 10^{-2} = 0{,}025641 \to$ E.R. $< 2{,}6\,\%$

II. E.R. $< \frac{1}{12} = 8{,}3333 \cdot 10^{-2} = 0{,}08333 \to$ E.R. $< 8{,}3\,\%$

El error absoluto nos lo dicen y es mayor en I que en II. Hemos calculado el error relativo en cada caso y vemos que es verdadera la afirmación.

2 Di una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes mediciones:

a) Daniel le dice a su hermana María que la superficie de su casa es de 96,4 m².

b) Por la gripe se han perdido 37 millones de horas de trabajo.

c) Juana gana unos 19 000 € al año.

a) E.A. $< 0{,}05$ m^2; E.R. $< \frac{0{,}05}{96{,}4} = 5{,}1867 \cdot 10^{-4} = 0{,}00051867 \to$ E.R. $< 0{,}05\,\%$

b) E.A. $< 0{,}5$ millones de horas $= 500\,000$ horas

E.R. $< \frac{0{,}5}{37} < 0{,}014 = 1{,}4\,\%$

c) — Si suponemos que los tres ceros finales se han utilizado para poder expresar la cantidad (es decir, que se trata de 19 mil , redondeando a los "miles de euros"), entonces:

E.A. $< 0{,}5$ miles de € $= 500$ €   E.R. $< \frac{0{,}5}{19} < 0{,}027 = 2{,}7\,\%$

— Si suponemos que es 19 000 € exactamente:

E.A. $< 0{,}5$ €   E.R. $< \frac{0{,}5}{19000} < 0{,}000027 = 0{,}0027\,\%$

Página 42

3 Calcula en notación científica sin usar la calculadora:

a) $(800\,000 : 0{,}0002) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{12}$

b) $0{,}486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7}$

a) $(800\,000 : 0{,}0002) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{12} = \left((8 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^{-4})\right) \cdot 5 \cdot 10^{11} =$

$= (4 \cdot 10^9) \cdot 5 \cdot 10^{11} = 20 \cdot 10^{20} = 2 \cdot 10^{21}$

b) $0{,}486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10–9 - 6 \cdot 10^{-7} = 48{,}6 \cdot 10^{-7} + 0{,}93 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-7} =$

$= 43{,}53 \cdot 10^{-7} = 4{,}353 \cdot 10^{-6}$

4 Opera con la calculadora:

a) $(3{,}87 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{-9}) : (3{,}941 \cdot 10^{-6})$

b) $8{,}93 \cdot 10^{-10} + 7{,}64 \cdot 10^{-10} - 1{,}42 \cdot 10^{-9}$

a) $(3{,}87 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{-9}) : (3{,}941 \cdot 10^{-6}) \approx 5{,}85 \cdot 10^{12}$

b) $8{,}93 \cdot 10^{-10} + 7{,}64 \cdot 10^{-10} - 1{,}42 \cdot 10^{-9} = 2{,}37 \cdot 10^{-10}$

7 Fórmula del binomio de Newton

Página 45

1 Desarrolla:

a) $(x+3)^5$ **b)** $(2x-x^2)^4$ **c)** $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)^6$

a) $(x+3)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 \cdot 3 + \binom{5}{2}x^3\, 3^2 + \binom{5}{3}x^2\, 3^3 + \binom{5}{4}x \cdot 3^4 + \binom{5}{5}3^5 =$

$= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$

b) $(2x-x^2)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 - \binom{4}{1}(2x)^3 \cdot x^2 + \binom{4}{2}(2x)^2 \cdot (x^2)^2 - \binom{4}{3}2x \cdot (x^2)^3 + \binom{4}{4}(x^2)^4 =$

$= x^8 - 8x^7 + 24x^6 - 32x^5 + 16x^4$

c) $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)^6 = \binom{6}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^5\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{6}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \binom{6}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 +$

$+ \binom{6}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{6}{5}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^5 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{x}\right)^6 =$

$= \frac{15}{4x^2} + \frac{15}{16}x^2 + \frac{3}{x^4} + \frac{3}{16}x^4 + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{64}x^6 + \frac{5}{2}$

2 Calcula el coeficiente de x^5 en el desarrollo del binomio:

$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{x}\right)^7$

Obtenemos el término $k+1$ de la expresión $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{x}\right)^7$:

$$\binom{7}{k}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{7-k}\left(-\frac{3}{x}\right)^k$$

El grado de x en este término es $2(7-k)-k$, que tiene que ser igual a 5:

$$2(7-k)-k = 5 \Rightarrow k = 3$$

El término de grado 5 es $\binom{7}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)^4\left(-\frac{3}{x}\right)^3 = -\frac{945}{16}x^5$.

El coeficiente pedido es $-\frac{945}{16}$.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 46

1. Intervalos y valor absoluto

Hazlo tú. **¿Para qué valores de x se verifica $|3x-7|<5$?**

$|3x-7|<5$

Seguimos el razonamiento del apartado a) del ejercicio 1 de esta página:

$3x-7<5 \ \rightarrow\ x<4$

$3x-7>-5;\ 3x>-2\ \rightarrow\ x>\dfrac{2}{3}$

Los valores que verifican la expresión son los del intervalo $\left(\dfrac{2}{3}, 4\right)$.

3. Operaciones con radicales

Hazlo tú. **Simplifica:**

a) $\sqrt{32}+\dfrac{1}{2}\sqrt{50}-\dfrac{5}{6}\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{8ab}\cdot\sqrt[3]{a^2b}$

a) Factorizamos y sacamos factores de las raíces:

$$\sqrt{32}+\frac{1}{2}\sqrt{50}-\frac{5}{6}\sqrt{2}=\sqrt{2^5}+\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot5^2}-\frac{5}{6}\sqrt{2}=2^2\sqrt{2}+\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{5}{6}\sqrt{2}=\frac{17}{3}\sqrt{2}$$

b) Reducimos los radicales a índice común y sacamos factores de las raíces:

$$\sqrt{8ab}\cdot\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[6]{8^3a^3b^3}\cdot\sqrt[6]{(a^2)^2b^2}=2\sqrt{2}\sqrt[6]{a^3b^3}\sqrt[6]{a^4b^2}=2\sqrt{2}\sqrt[6]{a^7b^5}=2\sqrt{2}\,a\sqrt[6]{ab^5}$$

Página 47

4. Racionalización de denominadores

Hazlo tú. **Racionaliza:**

a) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{5^3}}$ **b)** $\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3}$

a) Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[4]{5}$:

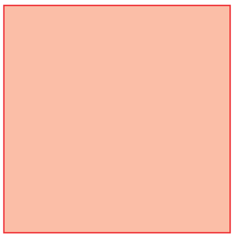
$$\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5}}=\frac{2\sqrt[4]{5}}{5}$$

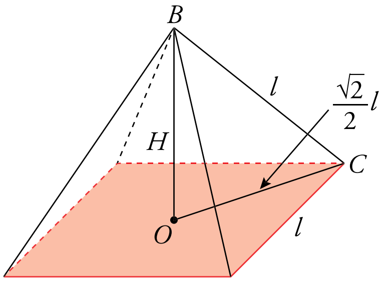
b) Multiplicamos numerador y denominador por $2\sqrt{5}-3$:

$$\frac{11}{2\sqrt{5}+3}=\frac{11\,(2\sqrt{5}-3)}{(2\sqrt{5}+3)\,(2\sqrt{5}-3)}=\frac{11\,(2\sqrt{5}-3)}{4\cdot5-9}=2\sqrt{5}-3$$

5. Problemas con radicales

Hazlo tú. El volumen de una pirámide cuadrangular regular, cuyas caras laterales son triángulos equiláteros, es $\frac{256}{3}\sqrt{2}$. Halla la longitud de su arista.





La arista de la cara triangular es igual a la arista de la base.

$V_{Pirámide} = \frac{1}{3}A_{base} \cdot H = \frac{1}{3}l^2 \cdot H = \frac{256}{3}\sqrt{2}$

La distancia $\overline{OC}$ es la mitad de la diagonal del cuadrado $\overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}l$.

La arista es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos la altura H y el lado $\overline{OC}$.

Por ser la arista igual al lado de la base, $H^2 = l^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}l\right)^2 = \frac{1}{2}l^2$

$V_{Pirámide} = \frac{1}{3}l^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}l = \frac{1}{6}\sqrt{2}\,l^3$

Por tanto, $\frac{1}{6}\sqrt{2}\,l^3 = \frac{256}{3}\sqrt{2} \Rightarrow l^3 = 256 \cdot 2 = 512 \Rightarrow l = \sqrt[3]{512} = 8$

Página 48

7. Logaritmos. Propiedades

Hazlo tú. Calcula x en estos casos:

a) $log_7\, x = -2$ **b) $ln\, 3^{x-1} = 5$** **c) $2\, log\, x - log\, 4 = 2\, log\, 3$**

a) $log_7\, x = -2$

Usamos la definición de logaritmo: 2 es el exponente que tiene que tener la base 7, para que nos dé x:

$x = 7^{-2};\ x = \frac{1}{49}$

b) $ln\, 3^{x-1} = 5$

Aplicamos la propiedad de los logaritmos: $log_a\, m^n = n log_a\, m$.

$(x-1)\, ln\, 3 = 5 \to x - 1 = \frac{5}{ln\, 3} \to x = \frac{5}{ln\, 3} + 1 \to x = 5{,}5512$

c) $2 log\, x - log\, 4 = 2 log\, 3$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$log\, x^2 - log\, 4 = log\, 3^2$

$log\, \frac{x^2}{4} = log\, 9;\ \frac{x^2}{4} = 9$

Soluciones: $x = -6,\ x = 6$

Pero como no se pueden tomar logaritmos de números negativos, la única solución válida es $x = 6$.

8. Logaritmos. Demostración de una propiedad

Hazlo tú. **Demuestra que:** $\boldsymbol{log_a (P/Q) = log_a P - log_a Q}$

$log_a \dfrac{P}{Q} = log_a P - log_a Q$

Llamamos $log_a P = x$; $log_a Q = y$

Expresamos P y Q como potencias usando la definición de logaritmo:

$P = a^x$; $Q = a^y$

Demostración:

$log_a \dfrac{P}{Q} = log_a \dfrac{a^x}{a^y} = log_a a^{x-y} = x - y = log_a P - log_a Q$

9. Factoriales y números combinatorios

Hazlo tú. **Calcula** $\boldsymbol{m}$ **en esta expresión:** $\boldsymbol{\dbinom{m}{2} = 3!}$

$\dbinom{m}{2} = 3!$

$\dfrac{m(m-1)}{2 \cdot 1} = 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\dfrac{m^2 - m}{2} = 6$; $m^2 - m = 12$; $m^2 - m - 12 = 0$; $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2}$ $\begin{cases} m = 4 \\ m = -3 \end{cases}$

Como m tiene que ser positivo, $m = 4$.

Ejercicios y problemas guiados

Página 49

1. Simplificación de radicales

Simplificar esta expresión:

$$\sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}}{\sqrt{108}}}}$$

$$\sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{2^2 3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 3^3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\frac{1}{6}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{3^2}{6}}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{6}} = \sqrt[4]{\frac{3^2}{3 \cdot 2}} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$

2. Valor de un exponente

Calcular x para que se cumpla la igualdad:

$$3^{x-1} = 173$$

$log_3 3^{x-1} = log_3 173;\ \ (x-1) log_3 3 = log_3 173$

$x - 1 = log_3 173 = 4{,}69;\ \ x = 4{,}69 + 1 = 5{,}69$

3. Extracción de factores de un radical

Extraer fuera del radical los factores que sea posible.

$$\sqrt{4a^2 cd + 8abcd + 4b^2 cd}$$

$$\sqrt{4a^2 cd + 8abcd + 4b^2 cd} = \sqrt{cd(4a^2 + 8ab + 4b^2)} = \sqrt{cd(2a+2b)^2} = (2a+2b)\sqrt{cd} = 2(a+b)\sqrt{cd}$$

4. Propiedades de los logaritmos

Averiguar la relación que existe entre M, x e y si sabemos que:

$$\ln M = \frac{1}{4}(2 \ln x + 3 \ln y - 5 \ln 2)$$

$$\ln M = \frac{1}{4}(2 \ln x + 3 \ln y - 5 \ln 2) = \frac{1}{4}(\ln x^2 + \ln y^3 - \ln 2^5) = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 \cdot y^3}{2^5} = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2 \cdot y^3}{2^5}}$$

$$M = \sqrt[4]{\frac{x^2 \cdot y^3}{2^5}}$$

5. Cotas de error absoluto y relativo

Acotar el error que se comete al tomar 1,62 como aproximación del número de oro, ϕ.

E.A. $< 0{,}005$

E.R. $< \dfrac{0{,}005}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 3{,}0902 \cdot 10^{-3} = 0{,}003$

Corresponde a un error relativo menor que 0,3 %.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 50

Para practicar

Números racionales e irracionales

1 **Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, pertenecen:**

$5;\ -7;\ \dfrac{5}{4};\ \sqrt{\dfrac{18}{2}};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ 4,\widehat{7};\ \dfrac{\pi}{2}$

$5,\ \sqrt{\dfrac{18}{2}} \in \mathbb{N}$ $\qquad -7 \in \mathbb{Z}$ $\qquad \dfrac{5}{4},\ 4,\widehat{7} \in \mathbb{Q}$ $\qquad -\sqrt{3},\ \sqrt[3]{-5},\ \dfrac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$

2 **¿Cuáles de estos números son irracionales? Expresa como fracción los que sea posible.**

a) 3,181818… **b)** $\sqrt{1,\widehat{7}}$ **c)** $\sqrt{8}$

d) 1,020020002… **e)** –4,0333… **f)** $\sqrt[3]{81}$

g) 1,3999… **h)** 2π

a) $3,181818\ldots = \dfrac{318-3}{99} = \dfrac{315}{99} = \dfrac{35}{11}$

b) $\sqrt{1,\widehat{7}} = \sqrt{\dfrac{17-1}{9}} = \sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{4}{3}$

c) $\sqrt{8}$ Irracional.

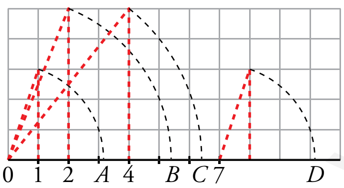
d) 1,020020002… Irracional.

e) $-4,0333\ldots = -\dfrac{403-40}{90} = -\dfrac{121}{30}$

f) $\sqrt[3]{81}$ Irracional.

g) $1,3999\ldots = \dfrac{139-13}{90} = \dfrac{7}{5}$

h) 2π Irracional.

3 

¿Qué números irracionales representan los puntos: *A*, *B*, *C* y *D*? Justifica la respuesta.

$A = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ $\qquad B = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$ $\qquad C = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$ $\qquad D = 7 + \sqrt{1^2+3^2} = 7+\sqrt{10}$

Intervalos y valor absoluto

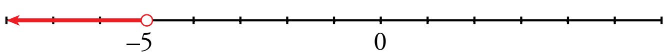
4 **Representa gráficamente y expresa como intervalo o como semirrecta los números que cumplen la condición dada en cada caso.**

a) ***x*** **es menor que –5.** **b)** **3 es menor o igual que *x*.**

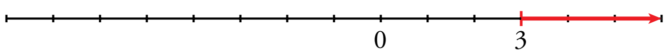
c) ***x*** **está comprendido entre –5 y 1.** **d)** ***x*** **está entre –2 y 0, ambos incluidos.**

e) ***x*** **es mayor o igual que –3 y menor que 2.**

a) $x < -5$; $(-\infty, -5)$



b) $3 \le x$; $[3, +\infty)$



c) $-5 < x < 1$; $(-5, 1)$

d) $-2 \le x \le 0$; $[-2, 0]$

e) $[-3, 2)$; $-3 \le x < 2$

5 **Escribe la desigualdad que verifica todo número x que pertenece a estos intervalos o semirrectas:**

a) $[-2, 7]$ **b)** $[13, +\infty)$ **c)** $(-\infty, 0)$

d) $(-3, 0]$ **e)** $[3/2, 6)$ **f)** $(0, +\infty)$

a) $-2 \le x \le 7$ b) $x \ge 13$ c) $x < 0$

d) $-3 < x \le 0$ e) $\frac{3}{2} \le x < 6$ f) $0 < x < +\infty$

6 **Expresa como un único intervalo.**

a) $[-3, 2] \cap [0, 5]$ **b)** $[2, +\infty) \cap (0, 10)$

a) $[0, 2]$ b) $[2, 10)$

7 **Expresa en forma de intervalo los números que cumplen cada una de estas expresiones:**

a) $|x| < 7$ **b)** $|x| \ge 5$ **c)** $|2x| < 8$

d) $|x - 1| \le 6$ **e)** $|x + 2| > 9$ **f)** $|x - 5| \ge 1$

a) $(-7, 7)$ b) $[-\infty, -5] \cup [5, +\infty]$ c) $(-4, 4)$

d) $[-5, 7]$ e) $(-11, 7)$ f) $(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$

8 **Escribe mediante intervalos los posibles valores de x para que se pueda calcular la raíz en cada caso.**

a) $\sqrt{x-4}$ **b)** $\sqrt{2x+1}$ **c)** $\sqrt{-x}$

d) $\sqrt{3-2x}$ **e)** $\sqrt{-x-1}$ **f)** $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$

a) $x - 4 \ge 0 \Rightarrow x \ge 4$; $[4, +\infty)$

b) $2x + 1 \ge 0 \Rightarrow 2x \ge -1 \Rightarrow x \ge -\frac{1}{2}$; $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$

c) $-x \ge 0 \Rightarrow x \le 0$; $(-\infty, 0]$

d) $3 - 2x \ge 0 \Rightarrow 3 \ge 2x \Rightarrow x \le$; $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

e) $-x - 1 \ge 0 \Rightarrow -1 \ge x$; $(-\infty, -1]$

f) $1 + \frac{x}{2} \ge 0 \Rightarrow 2 + x \ge 0 \Rightarrow x \ge -2$; $[-2, +\infty)$

9 **Expresa como un único intervalo.**

a) $(1, 6] \cup [2, 5)$ **b)** $[-1, 3) \cup (0, 3]$ **c)** $(1, 6] \cap [2, 7)$ **d)** $[-1, 3) \cap (0, 4)$

a) $(1, 6] \cup [2, 5) = (1, 6]$ b) $[-1, 3) \cup (0, 3] = [-1, 3]$

c) $(1, 6] \cap [2, 7) = [2, 6]$ d) $[-1, 3) \cap (0, 4) = (0, 3)$

10 **Escribe en forma de intervalo los siguientes entornos:**

a) Centro –1 y radio 2 **b) Centro 2 y radio 1/3**

a) $(-1 -2, -1 + 2) = (-3, 1)$ b) $\left(2-\frac{1}{3}, 2+\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

11 **Describe como entornos los siguientes intervalos:**

a) $(-1, 2)$ **b)** $(1{,}3; 2{,}9)$ **c)** $(-2{,}2; 0{,}2)$ **d)** $(-4; -2{,}8)$

a) $C = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$; $R = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ → Entorno de centro $\frac{1}{2}$ y radio $\frac{3}{2}$.

b) $C = \frac{1{,}3+2{,}9}{2} = 2{,}1$; $R = 2{,}9 - 2{,}1 = 0{,}8$ → Entorno de centro 2,1 y radio 0,8.

c) $C = \frac{-2{,}2+0{,}2}{2} = -1$; $R = 0{,}2 - (-1) = 1{,}2$ → Entorno de centro –1 y radio 1,2.

d) $C = \frac{-4+(-2{,}8)}{2} = -3{,}4$; $r = -2{,}8 - (-3{,}4) = 0{,}6$ → Entorno de centro –3,4 y radio 0,6.

Radicales

12 Introduce los factores dentro de cada raíz.

a) $2\sqrt[3]{3}$ **b)** $4\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ **c)** $\frac{2}{x}\sqrt{\frac{3x}{8}}$

d) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{25}{9}}$ **e)** $2\sqrt[4]{4}$ **f)** $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

a) $\sqrt[3]{3\cdot 2^3}=\sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[3]{\frac{4^3}{4}}=\sqrt[3]{4^2}=\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{\frac{2^2\cdot 3x}{x^2\cdot 2^3}}=\sqrt{\frac{3}{2x}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{3^3\cdot 5^2}{5^3\cdot 3^2}}=\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

e) $\sqrt[4]{2^4\cdot 2^2}=\sqrt[4]{2^6}=\sqrt{2^3}=\sqrt{8}$

f) $\sqrt[3]{\frac{3\cdot 5}{5^3}}=\sqrt[3]{\frac{3}{5^2}}=\sqrt[3]{\frac{3}{25}}$

13 Saca de la raíz el factor que puedas.

a) $\sqrt[3]{16}$ **b)** $4\sqrt{8}$ **c)** $\sqrt{1000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$ **e)** $\sqrt{\frac{125a^2}{16b}}$ **f)** $\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}$

g) $\sqrt{\frac{16}{a^3}}$ **h)** $\sqrt{4a^2+4}$ **i)** $\sqrt{\frac{a}{9}+\frac{a}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^4}=2\sqrt[3]{2}$

b) $4\sqrt{2^3}=4\cdot 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2^3\cdot 5^3}=10\sqrt{10}$

d) $\sqrt[3]{2^3\cdot a^5}=2a\sqrt[3]{a^2}$

e) $\sqrt{\frac{5^3\cdot a^2}{2^4\cdot b}}=\frac{5a}{4}\sqrt{\frac{5}{b}}$

f) $\sqrt{\frac{13}{36}}=\frac{1}{6}\sqrt{13}$

g) $\frac{4}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}$

h) $\sqrt{4(a^2+1)}=2\sqrt{a^2+1}$

i) $\sqrt{\frac{25a}{16\cdot 9}}=\frac{5\sqrt{a}}{12}$

14 Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{24}$ **b)** $\sqrt[6]{27}$ **c)** $\sqrt[3]{-108}$

d) $\sqrt[12]{64y^3}$ **e)** $\sqrt[4]{\frac{81}{64}}$ **f)** $\sqrt[8]{625}:\sqrt[4]{25}$

g) $\sqrt[6]{0,027}$ **h)** $\sqrt[8]{0,0016}$ **i)** $\sqrt[4]{1+\frac{9}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=2\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{3^3}=3^{3/6}=3^{1/2}=\sqrt{3}$

c) $-\sqrt[3]{3^3\cdot 2^2}=-3\sqrt[3]{2^2}$

d) $\sqrt[12]{2^6\cdot y^3}=\sqrt[4]{2^2\cdot y}=\sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[4]{y}=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{y}$

e) $\sqrt[4]{\frac{3^4}{2^6}}=\frac{3}{\sqrt{2^3}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

f) $\sqrt[8]{5^4}:\sqrt[4]{5^2}=\sqrt{5}:\sqrt{5}=1$

g) $\sqrt[6]{0,027}=\sqrt[6]{10^{-3}3^3}=\sqrt[6]{\frac{3^3}{10^3}}=\sqrt{\frac{3}{10}}$

h) $\sqrt[6]{0,0016}=\sqrt[8]{10^{-4}2^4}=\sqrt[8]{\frac{2^4}{10^4}}=\sqrt{\frac{2}{10}}$

i) $\sqrt[4]{1+\frac{9}{16}}=\sqrt[4]{\frac{25}{16}}=\sqrt[4]{\frac{5^2}{2^4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

15 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor.

a) $\sqrt[4]{5},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{6},\ \sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{6},\ \sqrt[5]{10}$ **d)** $\sqrt[4]{20},\ \sqrt[3]{9},\ \sqrt[6]{100}$

a) $\sqrt[12]{5^3},\ \sqrt[12]{3^4},\ \sqrt[12]{2^6};\ \sqrt[12]{125};\ \sqrt[12]{81};\ \sqrt[12]{64}\ \to\ \sqrt{2}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[4]{5}$

b) $\sqrt[6]{216},\ \sqrt[6]{16}\ \to\ \sqrt[3]{4}<\sqrt{6}$

c) $\sqrt[20]{7776},\ \sqrt[20]{10000}\ \to\ \sqrt[4]{6}<\sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[12]{20^3},\ \sqrt[12]{9^4},\ \sqrt[12]{100^2}$; tenemos $\sqrt[12]{10000};\ \sqrt[12]{6561};\ \sqrt[12]{8000}\ \to\ \sqrt[3]{9}<\sqrt[6]{100}<\sqrt[4]{20}$

16 **Realiza la operación y simplifica, si es posible.**

a) $4\sqrt{27}\cdot 5\sqrt{6}$ **b)** $2\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt{\frac{27}{8}}$ **c)** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}$

d) $(\sqrt[3]{12})^2$ **e)** $(\sqrt[6]{32})^2$ **f)** $\sqrt[3]{24}:\sqrt[3]{3}$

a) $20\sqrt{27\cdot 6} = 20\sqrt{3^3\cdot 2\cdot 2} = 20\sqrt{2\cdot 3^4} = 180\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{\frac{4\cdot 27}{3\cdot 8}} = 2\sqrt{\frac{9}{2}} = 6\sqrt{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

d) $\left(\sqrt[3]{2^2\cdot 3}\right)^2 = \sqrt[3]{2^4\cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{2\cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{18}$

e) $\left(\sqrt[6]{2^5}\right)^3 = \sqrt[6]{2^{15}} = \sqrt{2^5} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

f) $\sqrt[3]{2^3\cdot 3}:\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}:\sqrt[3]{3} = 2$

17 **Efectúa y simplifica, si es posible.**

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}\cdot\sqrt{a}$ **c)** $\left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ **d)** $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}:\sqrt{\sqrt[3]{4}}$

a) $\sqrt[6]{2^2\cdot 3^3} = \sqrt[6]{108}$

b) $\sqrt[3]{a}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt{a} = \sqrt{a}$

c) $\left(\sqrt[6]{\frac{2^5}{2^9}}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2^4}}\right)^3 = \sqrt[6]{\frac{1}{2^{12}}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 3}}:\sqrt{\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt[6]{2^2\cdot 3}:\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3}$

18 **Expresa con una única raíz.**

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$ **b)** $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$ **c)** $\left(\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}\right):\sqrt{a}$

a) $\sqrt[12]{4} = \sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[12]{2^4\cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128}$

c) $\sqrt[20]{\frac{a^{15}\cdot a^{16}}{a^{10}}} = \sqrt[20]{a^{21}} = a\sqrt[20]{a}$

Página 51

19 **Racionaliza los denominadores y simplifica.**

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$ **b)** $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ **c)** $\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}$

d) $\frac{3}{3+\sqrt{3}}$ **e)** $\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$ **f)** $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2\cdot 3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{2\sqrt[3]{2^2}}{2} = \sqrt[3]{4}$

c) $\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$

d) $\frac{3(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{9-3\sqrt{3}}{6} = \frac{3(3-\sqrt{3})}{2\cdot 3} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$ Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{6}$

$$\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{72}-\sqrt{8})\sqrt{6}}{6} = \frac{(\sqrt{2^3 3^2}-\sqrt{2^3})\sqrt{6}}{6} = \frac{4\sqrt{12}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

f) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ Multiplicamos numerador y denominador por $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 5\sqrt{3}+5\sqrt{2}$$

20 **Calcula y simplifica.**

a) $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\frac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16}+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}-\frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $-\sqrt{54}+3\sqrt{24}-\sqrt{150}+\sqrt{294}$

a) $25\sqrt{5}+18\sqrt{5}-14\sqrt{5}+6\sqrt{5}=35\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{2^4}+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-\frac{21}{5}\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=2\sqrt[3]{2}+7\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-\frac{21}{5}\cdot 5\sqrt[3]{2}=-15\sqrt[3]{2}$

c) $-\sqrt{2\cdot 3^3}+3\sqrt{2^3\cdot 3}-\sqrt{2\cdot 3\cdot 5^2}+\sqrt{2\cdot 3\cdot 7^2}=-3\sqrt{2\cdot 3}+2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3}-5\sqrt{2\cdot 3}+7\sqrt{2\cdot 3}=5\sqrt{6}$

21 **Simplifica las siguientes expresiones:**

a) $\sqrt{18}+\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{72}$ **b)** $\sqrt{\frac{2}{5}}-4\sqrt{\frac{18}{125}}+\frac{7}{2}\sqrt{\frac{8}{45}}$ **c)** $\frac{7}{5}\sqrt[3]{81a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{3^3}+\sqrt{2^3\cdot 3^2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+6\sqrt{2}=9\sqrt{2}-\sqrt{3}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}}-4\sqrt{\frac{2\cdot 3^2}{5^3}}+\frac{7}{2}\sqrt{\frac{2^3}{3^2\cdot 5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}-4\frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{7}{2}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}=$

$=\sqrt{\frac{2}{5}}-\frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}=\left(1-\frac{12}{5}+\frac{7}{3}\right)\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{14}{15}\sqrt{\frac{2}{5}}$

c) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{3^4a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\frac{7}{3}3\sqrt[3]{3a}-2a\sqrt[3]{3a}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\left(\frac{21}{5}-2a-\frac{1}{5}\right)\sqrt[3]{3a}=(4-2a)\sqrt[3]{3a}$

22 **Efectúa y simplifica.**

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-1)$ **b)** $(\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{5}+\sqrt{6})$ **c)** $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2$ **d)** $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\sqrt{3}$

a) $\sqrt{12}-\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}-\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{3}=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

b) $5-6=-1$

c) $20+18-12\sqrt{10}=38-12\sqrt{10}$

d) $(2-1)\sqrt{3}=\sqrt{3}$

23 **Racionaliza y simplifica.**

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ **b)** $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ **c)** $\frac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$ **e)** $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ **f)** $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}-2}{3\cdot 2}=\frac{2(\sqrt{6}-1)}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{6}-1}{3}$

b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2^2\cdot 3}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{6+\sqrt{6}}{6}=1+\frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2(3-5)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-4}=-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$

d) $\frac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\frac{3(\sqrt{5}+2)}{5-4}=3(\sqrt{5}+2)=3\sqrt{5}+6$

e) $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}\cdot\frac{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}=\frac{13\sqrt{10}(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{5-9\cdot 2}=\frac{65\sqrt{2}+78\sqrt{5}}{-13}=-5\sqrt{2}-6\sqrt{5}$

f) $\frac{(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2)}{(3\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}-2)}=\frac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{27-4}=\frac{9\sqrt{2\cdot 3^2}-4\sqrt{2}}{23}=\frac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23}=\frac{23\sqrt{2}}{23}=\sqrt{2}$

24 **Efectúa y simplifica.**

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

a) $\dfrac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+5\sqrt{2}$

b) $\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} = \dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5} = \dfrac{2\sqrt{7}(-2\sqrt{5})}{2} = -2\sqrt{35}$

Logaritmos

25 **Expresa como potencia de la base y calcula aplicando la definición de logaritmo.**

a) $log_2\, 1\,024$ b) $log\, 0{,}001$ c) $log_2 \dfrac{1}{64}$

d) $log_{\sqrt{3}}\, 3$ e) $log_3 \sqrt{3}$ f) $log_2 \sqrt{8}$

g) $log_{1/2} \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ h) $log_\pi\, 1$ i) $ln \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$

a) $log_2\, 2^{10} = 10$ b) $log\, 10^{-3} = -3$ c) $log_2\, 2^{-6} = -6$

d) $log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^2 = 2$ e) $log_3\, 3^{1/2} = \dfrac{1}{2}$ f) $log_2\, 2^{3/2} = \dfrac{3}{2}$

g) $log_{1/2} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1/2} = -\dfrac{1}{2}$ h) 0 i) $ln\, e^{-1/3} = -\dfrac{1}{3}$

26 **Calcula la base de estos logaritmos:**

a) $log_x\, 125 = 3$ b) $log_x \dfrac{1}{9} = -2$ c) $log_x \dfrac{1}{4} = 2$

d) $log_x\, 2 = \dfrac{1}{2}$ e) $log_x\, 0{,}04 = -2$ f) $log_x\, 4 = -\dfrac{1}{2}$

a) $x^3 = 125 \rightarrow x = 5$ b) $x^{-2} = \dfrac{1}{9} \rightarrow x = 3$ c) $x^2 = \dfrac{1}{4} \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

d) $x^{1/2} = 2 \rightarrow x = 4$ e) $x^{-2} = 0{,}04 \rightarrow x = 5$ f) $x^{-1/2} = 4 \rightarrow x = \dfrac{1}{16}$

27 **Calcula el valor de x en estas igualdades:**

a) $log\, 3^x = 2$ b) $log\, x^2 = -2$ c) $7^x = 115$

d) $5^{-x} = 3$ e) $log_7\, 3x = 0{,}5$ f) $3^{2+x} = 172$

a) $x = \dfrac{2}{log\, 3} = 4{,}19$ b) $2 log\, x = -2 \rightarrow x = \dfrac{1}{10}$ c) $x = \dfrac{log\, 115}{log\, 7} = 2{,}438$

d) $x = -\dfrac{log\, 3}{log\, 5} = -0{,}683$ e) $7^{0,5} = 3x \rightarrow x = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ f) $2 + x = log_3\, 172 \rightarrow x = log_3\, 172 - 2$

28 **Halla con la calculadora y comprueba el resultado mediante potenciación.**

a) $log \sqrt{148}$ b) $ln\, (2{,}3 \cdot 10^{11})$ c) $ln\, (7{,}2 \cdot 10^{-5})$

d) $log_3\, 42{,}9$ e) $log_5\, 1{,}95$ f) $log_2\, 0{,}034$

a) 1,085 b) $ln\, (2{,}3 \cdot 10^{11}) \approx 26{,}16 \rightarrow e^{26{,}161} \approx 2{,}3 \cdot 10^{11}$

c) $ln\, (7{,}2 \cdot 10^{-5}) \approx -9{,}54 \rightarrow e^{-9{,}54} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-5}$ d) $3{,}42 \rightarrow 3^{3{,}42} \approx 42{,}9$

e) $0{,}41 \rightarrow 5^{0{,}41} \approx 1{,}95$ f) $-4{,}88 \rightarrow 2^{-4{,}88} \approx 0{,}034$

29 **Desarrolla las siguientes expresiones:**

a) $log\ \dfrac{a^2\sqrt[5]{b^3}}{100c^4}$ **b)** $ln\ \dfrac{\sqrt[4]{x^3}\cdot e^5}{\sqrt{y}}$

a) $log\ a^2\sqrt[5]{b^3} - log\ 100c^4 = log\ a^2 + log\sqrt[5]{b^3} - log\ 10^2 - log\ c^4 = 2log\ a + \dfrac{3}{5}log\ b - 2 - 4log\ c$

b) $ln\dfrac{\sqrt[4]{x^3}\,e^5}{\sqrt{y}} = ln\sqrt[4]{x^3}\,e^5 - ln\sqrt{y} = ln\sqrt[4]{x^3} + ln\ e^5 - ln\sqrt{y} = \dfrac{3}{4}ln\ x + 5 - \dfrac{1}{2}ln\ y$

30 **Halla el valor de x en estas expresiones aplicando las propiedades de los logaritmos:**

a) $ln\ x = ln\ 17 + ln\ 13$ **b)** $log\ x = log\ 36 - log\ 9$

c) $ln\ x = 3\ ln\ 5 - 2\ ln\ 10$ **d)** $log\ x = 3\ log\ 2 - \dfrac{1}{2}\ log\ 25$

a) $ln\ x = ln\ (17 \cdot 13) \Rightarrow x = 17 \cdot 13 = 221$

b) $log\ x = log\ \dfrac{36}{9} \Rightarrow x = \dfrac{36}{9} = 4$

c) $ln\ x = ln\ 5^3 - ln\ 10^2;\ ln\ x = ln\ \dfrac{5^3}{10^2};\ x = \dfrac{5^3}{5^2 \cdot 2^2};\ x = \dfrac{5}{2^2} = \dfrac{5}{4}$

d) $log\ x = log\ 2^3 - log\ 25^{1/2};\ log\ x = log\ 2^3 - log\ 5;\ log\ x = log\ \dfrac{8}{5};\ x = \dfrac{8}{5}$

31 **Si $log\ k = x$, escribe en función de x.**

a) $log\ 100k$ **b)** $log\ \dfrac{k}{1000}$

c) $log\ k^3$ **d)** $log\ \sqrt[3]{10k}$

e) $log\ \dfrac{1}{k}$ **f)** $(log\ k)^{1/2}$

a) $log\ 100 + log\ k = 2 + x$ b) $log\ k - log\ 1\,000 = x - 3$

c) $3log\ k = 3x$ d) $\dfrac{1}{3}(log\ 10 + log\ k) = \dfrac{1}{3}(1 + x)$

e) $log\ 1 - log\ k = 0 - x = -x$ f) $\sqrt{x}$

32 **Averigua, en cada caso, la relación entre x, y, z.**

a) $log\ z = 2\ log\ x - log\ y$

b) $log\ z = 2 - log\ x - \dfrac{1}{2}\ log\ y$

c) $log\ z = 1 - \dfrac{1}{2}\ (log\ x - log\ y)$

d) $ln\ z = 1 - 2\ ln\ x + 2\ ln\ y$

a) $log\ z = log\ x^2 - log\ y;\ log\ z = log\ \dfrac{x^2}{y};\ z = \dfrac{x^2}{y}$

b) $log\ z = log\ 10^2 - log\ x - log\ \sqrt{y};\ log\ z = log\ \dfrac{100}{x\sqrt{y}};\ z = \dfrac{100}{x\sqrt{y}}$

c) $log\ z = log\ 10 - \dfrac{1}{2}log\dfrac{x}{y};\ log\ z = log\ 10 - log\sqrt{\dfrac{x}{y}};\ log\ z = log\dfrac{10}{\sqrt{\dfrac{x}{y}}};\ z = \dfrac{10\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

d) $ln\ z = ln\ e - ln\ x^2 + ln\ y^2;\ ln\ z = ln\dfrac{e \cdot y^2}{x^2};\ z = \dfrac{e \cdot y^2}{x^2}$

Notación científica y errores

33 **Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.**

a) $\dfrac{(3,12 \cdot 10^{-5} + 7,03 \cdot 10^{-4})\, 8,3 \cdot 10^{8}}{4,32 \cdot 10^{3}}$

b) $\dfrac{(12,5 \cdot 10^{7} - 8 \cdot 10^{9})\,(3,5 \cdot 10^{-5} + 185)}{9,2 \cdot 10^{6}}$

c) $\dfrac{5,431 \cdot 10^{3} - 6,51 \cdot 10^{4} + 385 \cdot 10^{2}}{8,2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}$

a) $1,41 \cdot 10^2$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^2 = 0,5$

E.R. $< \dfrac{0,5}{141} < 0,00355$

b) $-1,58 \cdot 10^5$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^2$

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^2}{1,58 \cdot 10^5} < 3,16 \cdot 10^{-3}$

c) $-2,65 \cdot 10^6$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^3$

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^3}{2,65 \cdot 10^6} < 1,89 \cdot 10^{-3}$

34 **Expresa en notación científica y calcula:** $\dfrac{60\,000^3 \cdot 0,00002^4}{100^2 \cdot 72\,000\,000 \cdot 0,0002^5}$

$$\frac{(6 \cdot 10^4)^3 \cdot (2 \cdot 10^{-5})^4}{10^4 \cdot 7,2 \cdot 10^7 \cdot (2 \cdot 10^{-4})^5} = 150$$

Página 52

35 **Ordena de mayor a menor los números de cada apartado. Para ello, pasa a notación científica los que no lo estén.**

a) $3,27 \cdot 10^{13}$; $85,7 \cdot 10^{12}$; $453 \cdot 10^{11}$

b) $1,19 \cdot 10^{-9}$; $0,05 \cdot 10^{-7}$; $2000 \cdot 10^{-12}$

a) $8,57 \cdot 10^{13} > 4,53 \cdot 10^{13} > 3,27 \cdot 10^{13}$

b) $5 \cdot 10^{-9} > 2 \cdot 10^{-9} > 1,19 \cdot 10^{-9}$

36 **Si** $A = 3,24 \cdot 10^6$; $B = 5,1 \cdot 10^{-5}$; $C = 3,8 \cdot 10^{11}$ **y** $D = 6,2 \cdot 10^{-6}$, **calcula** $\left(\dfrac{A}{B} + C\right) \cdot D$. **Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.**

$$\left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D = \left(\frac{3,24 \cdot 10^6}{5,1 \cdot 10^{-5}} + 3,8 \cdot 10^{11}\right) \cdot 6,2 \cdot 10^{-6} = \left(\frac{3,24}{5,1} 10^{11} + 3,8 \cdot 10^{11}\right) \cdot 6,2 \cdot 10^{-6} =$$

$$= \left(\frac{3,24}{5,1} + 3,8\right) 10^{11} \cdot 6,2 \cdot 10^{-6} = 4,4353 \cdot 6,2 \cdot 10^5 = 2,7499 \cdot 10^6$$

Como queremos tres cifras significativas, la solución que damos es: $S = 2,75 \cdot 10^6$

E.A. $< 5\,000$

E.R. $< \dfrac{5000}{2,74 \cdot 10^6} = 1,8248 \cdot 10^{-3} = 0,0018248$, que corresponde a un 0,18 %.

Factoriales y números combinatorios

37 **Calcula.**

a) $\dfrac{8!}{5!}$ b) $\dfrac{10!}{9!}$ c) $\dfrac{5!+4!}{12}$

a) $\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=8\cdot7\cdot6=336$

b) 10

c) $\dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1+4\cdot3\cdot2\cdot1}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\dfrac{4\cdot3\cdot2\cdot1\,(5+1)}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\dfrac{6}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}=$

$=\dfrac{1}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot5}=\dfrac{1}{3326400}$

38 **Calcula.**

a) $\dbinom{8}{4}$ b) $\dbinom{12}{7}$ c) $\dbinom{37}{35}$ d) $\dbinom{84}{1}$

a) $\dfrac{8!}{4!4!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70$

b) $\dfrac{12!}{7!5!}=\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=792$

c) $\dfrac{37!}{35!2!}=\dfrac{37\cdot36}{2}=666$

d) $\dfrac{84!}{83!1!}=\dfrac{84\cdot83!}{83!1!}=84$

39 **Aplica las propiedades de los números combinatorios para obtener *n*.**

a) $\dbinom{6}{n+2}=1$ b) $\dbinom{8}{n-3}=8$ c) $\dbinom{9}{2}=\dbinom{9}{n}$

d) $\dbinom{13}{n-1}=\dbinom{13}{n+2}$ e) $\dbinom{10}{n}+\dbinom{10}{n+1}=\dbinom{11}{7}$ f) $\dbinom{n}{7}=\dbinom{n}{9}$

a) $n+2=6 \;\to\; n=4;\;\; n+2=0 \;\to\; n=-2$

b) $n-3=1 \;\to\; n=4;\;\; n-3=7 \;\to\; n=10$

c) $n=2$ o $n=9-2=7$

d) $n-1+n+2=13;\;\; 2n+1=13 \;\to\; n=6$

e) $n=6$

f) $n=7+9=16$

Binomio de Newton

40 **Desarrolla.**

a) $(a^2-3b)^7$ b) $\left(\dfrac{a}{3}+2b\right)^5$

a) $\dbinom{7}{0}(a^2)^7+\dbinom{7}{1}(a^2)^6(-3b)+\dbinom{7}{2}(a^2)^5(-3b)^2+\dbinom{7}{3}(a^2)^4(-3b)^3+$

$+\dbinom{7}{4}(a^2)^3(-3b)^4+\dbinom{7}{5}(a^2)^2(-3b)^5+\dbinom{7}{6}(a^2)(-3b)^6+\dbinom{7}{7}(-3b)^7=$

$=a^{14}-21a^{12}b+189a^{10}b^2-945a^8b^3+2835a^6b^4-5103a^4b^5+5103a^2b^6-2187b^7$

b) $\dbinom{5}{0}\left(\dfrac{a}{3}\right)^5+\dbinom{5}{1}\left(\dfrac{a}{3}\right)^4 2b+\dbinom{5}{2}\left(\dfrac{a}{3}\right)^3(2b)^2+\dbinom{5}{3}\left(\dfrac{a}{3}\right)^2(2b)^3+\dbinom{5}{4}\left(\dfrac{a}{3}\right)(2b)^4+\dbinom{5}{5}(2b)^5=$

$=\dfrac{1}{243}a^5+\dfrac{10}{81}a^4b+\dfrac{40}{27}a^3b^2+\dfrac{80}{9}a^2b^3+\dfrac{80}{3}ab^4+32b^5$

41 **Halla el noveno término del desarrollo de $(x^2-y^2)^{12}$.**

Término noveno: $\dbinom{12}{8}(x^2)^4(-y^2)^8=495x^8y^{16}$

42 **Halla el término central del desarrollo de $\left(\sqrt{a}+\dfrac{b}{2}\right)^6$.**

Término central: $\dbinom{6}{3}(\sqrt{a})^3\left(\dfrac{b}{2}\right)^3=\dfrac{20}{8}a^{3/2}b^3=\dfrac{5}{2}a^{3/2}b^3$

43 **Calcula el coeficiente de x^5 en el desarrollo de $\left(\frac{2}{x} - x^3\right)^7$.**

El término $k + 1$ del desarrollo es: $\binom{7}{k}\left(\frac{2}{x}\right)^{7-k}(-x^3)^k$

La potencia de x en este término es: $x^{-(7-k)+3k}$

Como queremos que el exponente de x sea 5: $-(7 - k) + 3k = 5$; $k = 4$

$\binom{7}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^4(-x^3)^3 = -560x^5$. El coeficiente de x^5 es -560.

44 **Calcula el quinto término del desarrollo de $\left(\frac{1}{x^2} - 2x\right)^8$.**

Término quinto: $\binom{8}{4}\left(\frac{1}{x^2}^4(-2x)\right)^4 = \frac{1120}{x^4}$

45 **Calcula el coeficiente del sexto término del desarrollo de $\left(\frac{x}{2} + 3x^2\right)^8$.**

Término sexto: $\binom{8}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^3(3x^2)^5 = 1701x^{13}$

El coeficiente sexto es 1 701.

Para resolver

46 **El volumen de un cubo es $6\sqrt{6}$ cm³. Halla:**

a) Su arista.

b) La diagonal de una cara.

c) La diagonal del cubo.

Da, en cada caso, el valor exacto.

a) $V_{Cubo} = a^3 = 6\sqrt{6} \rightarrow a = \sqrt[3]{6\sqrt{6}}$; $a = \sqrt[3]{\sqrt{6^2 \cdot 6}} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt{6}$ cm

b) $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = \sqrt{6}\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$ cm

c) $D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3} = \sqrt{6}\sqrt{3} = 3\sqrt{2}$ cm

47 **La superficie de un tetraedro es $9\sqrt{3}$ cm². Calcula su arista y su volumen. Da el valor exacto.**

Un tetraedro tiene 4 caras iguales. La superficie de cada cara es: $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm²

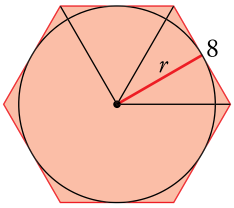
Cada cara es un triángulo equilátero, en el que $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$

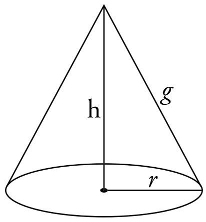
$A_{Cara} = \frac{1}{2}b \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,a^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = 3$ cm

$V_{Tetraedro} = \frac{1}{3}A_{Base} \cdot h = \frac{1}{3}\frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a = \frac{9}{8}a \text{ cm}^3 = \frac{27}{8} \text{ cm}^3$

48 **En un prisma hexagonal de lado 8 dm, y altura 12 dm, se inscribe un cono. Calcula su área lateral con una cifra decimal y da una cota del error absoluto y una cota del error relativo cometidos.**

Vamos a calcular el radio de la base del cono inscrito en el hexágono regular.





$r = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ dm

La altura del cono coincide con la del prisma hexagonal, $h = 12$ dm

La generatriz del cono es $g = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 12^2} = 8\sqrt{3}$ dm

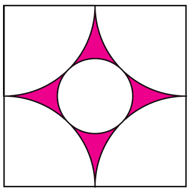
La superficie lateral del cono es:

$A_{Lateral} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 96\pi = 301{,}59$ dm^2

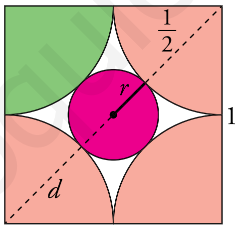
$A_{Lateral} = 301{,}6$ dm^2

E.A. $< 0{,}05$ dm^2

E.R. $< \dfrac{0{,}05}{301{,}59} = 1{,}6579 \cdot 10^{-4} = 0{,}00016579$, que equivale a un 0,02 %.

49 

Halla el área de la parte coloreada de esta figura en el que el lado del cuadrado mide 1 m. Expresa el área en decímetros cuadrados con tres cifras significativas y acota el error cometido.



El área pedida es el área del cuadrado, menos cuatro veces el área verde y menos el área roja.

Cuatro veces el área verde es el área de un círculo de radio $\frac{1}{2}$, es decir, $4A_{Verde} = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi$

Llamamos d a la diagonal del cuadrado: $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Calculamos el radio: $r = \dfrac{d}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}$

El área roja es el área del círculo de radio $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}$.

$$A_{Roja} = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi$$

$$\textit{Área pedida} = A_{Cuadrado} - 4A_{Verde} - A_{Roja} = 1 - \frac{1}{4}\pi - \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi - \pi + 1 = 7{,}9849 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 = 7{,}98 \text{ dm}^2$$

E.A. $< 0{,}005$ dm^2

E.R. $< \dfrac{0{,}005}{7{,}9849 \cdot 10^{-2}} = 6{,}2618 \cdot 10^{-2} = 0{,}062618$, que equivale al 6,26 %.

50 **Un hilo de cobre, cuya resistividad es $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega$m, mide 2 m de largo y tiene un diámetro de 0,2 mm. Calcula su resistencia aplicando la fórmula $R = \rho\ l/S$, donde l es la longitud del hilo y S el área de la sección del mismo.**

$S = \pi \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}12566$

La resistencia es: $R = \dfrac{\rho \cdot l}{S} = \dfrac{1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 2}{0{,}12566} = 2{,}7057 \cdot 10^{-7}\ \Omega$

51 **Si conocemos la longitud de onda de una radiación luminosa, podemos calcular su frecuencia (número de vibraciones por minuto) mediante la fórmula $v = c/\lambda$ donde c es la velocidad de la luz y λ su longitud de onda. Calcula la frecuencia de una radiación roja (λ = 7 000 Å; 1 Å = 10^{-10} m). Acota el error cometido.**

$v = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{7000 \cdot 10^{-10}} = 4{,}2857 \cdot 10^{14}$ vibraciones por segundo

$4{,}2857 \cdot 10^{14} \cdot 60 = 2{,}5714 \cdot 10^{16}$ vibraciones por minuto

E.A. $< 5 \cdot 10^{11}$ vibraciones por minuto

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^{11}}{2{,}5714 \cdot 10^{16}} = 1{,}9445 \cdot 10^{-5} = 0{,}000019445$, que equivale al 0,002 %.

52 **La longitud de una barra metálica después de calentarla es $l = l_0(1 + kt)$ donde l_0 es la longitud a 0 °C, t la temperatura final y k el coeficiente de dilatación lineal. Si una barra de plomo mide 1 m a 800 °C, ¿cuál es su longitud a 200 °C? (En el plomo $k = 3 \cdot 10^{-5}$).**

Calculamos l_0 a partir de la longitud de la barra a 800 °C:

$l = l_0(1 + kt) = l_0(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 800) = l_0\left(\dfrac{128}{125}\right)$, luego $l_0 = \dfrac{125}{128}$

Calculamos ahora la longitud de la barra a 200 ºC:

$l = l_0(1 + kt) = \dfrac{125}{128}(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 200) = \dfrac{125}{128} \cdot \dfrac{503}{500} = \dfrac{503}{512} = 0{,}98242$ m

53 **La estrella R136a1, descubierta recientemente, está a 165 000 años-luz y tiene una masa actual equivalente a 265 veces la masa del Sol. Expresa la distancia en kilómetros y la masa en kilogramos. Da, en cada caso, cotas del error absoluto y del error relativo.**

Un año luz es aproximadamente $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km.

La distancia de la estrella R136a1 a la Tierra es: $d = 165\,000 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} = 1{,}5609 \cdot 10^{18}$ km

E.A. $< 5 \cdot 10^{13}$ km

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^{13}}{1{,}5609 \cdot 10^{18}} = 3{,}2033 \cdot 10^{-5} = 0{,}000032$, que equivale al 0,0032 %.

La masa del Sol es, aproximadamente, $1{,}9891 \cdot 10^{30}$ kg.

La masa de la estrella R136a1 es: $m = 265 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30} = 5{,}2711 \cdot 10^{32}$ kg

E.A. $< 5 \cdot 10^{27}$ kg

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^{27}}{5{,}2711 \cdot 10^{32}} = 9{,}4857 \cdot 10^{-6} = 0{,}0000094857$, que equivale al 0,00095 %.

54 **Calcula k en cada caso.**

a) $\dfrac{12(k-2)!}{k!} = 1$ **b)** $\dbinom{k}{k-2} = 10$ **c)** $3\dbinom{k}{4} = 5\dbinom{k}{2}$ **d)** $\dfrac{(k+6)!}{(k+4)!} = 72$

a) $\dfrac{12(k-2)!}{k(k-1)(k-2)!} = 1;\ \dfrac{12}{k(k-1)} = 1;\ 12 = k^2 - k;\ k = 4,\ k = -3$

Como k no puede ser negativo, $k = 4$.

b) $\dfrac{k(k-1)(k-2)!}{(k-2)!2!} = 10;\ \dfrac{k(k-1)}{2} = 10;\ k^2 - k = 20;\ k = 5,\ k = -4$

Como k no puede ser negativo, $k = 5$.

c) $k \geq 4$

$$3\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)!}{4!(k-4)!} = 5\frac{k(k-1)(k-2)!}{2!(k-2)!} \rightarrow 3\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!} = 5\frac{k(k-1)}{2!} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{24} - 5\frac{k(k-1)}{2} = 0$$

Simplificamos dividiendo entre $k(k-1)$, que nunca vale cero puesto que $k \geq 4$:

$$3\frac{(k-2)(k-3)}{24} - \frac{5}{2} = 0 \rightarrow \frac{(k-2)(k-3)-20}{8} = 0; \quad \frac{k^2-5k-14}{8} = 0 \begin{cases} k=7 \\ k=-2 \end{cases}$$

Como tiene que ser $k \geq 4$, la solución es $k = 7$.

d) $\dfrac{(k+6)(k+5)(k+4)!}{(k+4)!} = 72 \rightarrow (k+6)(k+5) = 72 \begin{cases} k=3 \\ k=-14 \end{cases}$

Como $k > 0$, la solución es $k = 3$.

Página 53

Cuestiones teóricas

55 **Explica si estas frases son verdaderas o falsas:**

a) Hay números irracionales que son enteros.

b) Todo número irracional es real.

c) Todos los números decimales son racionales.

d) Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.

a) F b) V c) F d) V

56 **Si $x \neq 0$, explica si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:**

a) x^{-2} es negativo si lo es x.

b) $\sqrt[3]{x}$ tiene el mismo signo que x.

c) Si $x > 0$ entonces $\sqrt{x} < x$.

a) Falsa, $x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ siempre es positivo por ser el exponente par, independientemente del signo de x.

b) Verdadera, porque el índice de la raíz es impar.

c) Falsa, $\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4}$

57 **¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Explica por qué:**

a) $log\, m + log\, n = log\,(m+n)$

b) $log\, m - log\, n = \dfrac{log\, m}{log\, n}$

c) $log\, m - log\, n = log\, \dfrac{m}{n}$

d) $log\, x^2 = log\, x + log\, x$

e) $log\,(a^2 - b^2) = log\,(a+b) + log\,(a-b)$

a) Falso. $log\, m + log\, n = log\,(m \cdot n) \neq log\,(m+n)$

b) Falso. $log\, m - log\, n = log\left(\dfrac{m}{n}\right) \neq \dfrac{log\, m}{log\, n}$

c) Verdadero. Por una propiedad de los logaritmos.

d) Verdadero. $log\, x^2 = log\,(x \cdot x) = log\, x + log\, x$

e) Verdadero. $log\,(a^2 - b^2) = log\,[(a+b) \cdot (a-b)] = log\,(a+b) + log\,(a-b)$

Para profundizar

58 **Halla el valor de esta expresión: $(8^{n+1} + 8^n)^2 : (4^n - 4^{n-1})^3$**

$$\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3} = \frac{(8^n(8+1))^2}{(4^{n-1}(4-1))^3} = \frac{8^{2n}\cdot 9^2}{4^{3n-3}\cdot 3^3} = \frac{2^{3\cdot 2n}\cdot 3^4}{2^{2(3n-3)}\cdot 3^3} = 2^{6n-6n+6}\cdot 3 = 2^6\cdot 3 = 192$$

59 **Determina el valor de p y q para que se verifique: $2^p \cdot 5^q = \dfrac{1}{125\,000}$**

$$2^p \cdot 5^q = \frac{1}{125\,000} = \frac{1}{2^3 5^6} = 2^{-3}5^{-6}$$

Luego $p = -3$ y $q = -6$.

60 **¿Cuál es el número de cifras de $4^{16} \cdot 5^{25}$?**

$4^{16} \cdot 5^{25} = 2^{32} \cdot 5^{25} = 2^{32-25} \cdot 10^{25} = 2^7 \cdot 10^{25}$

$2^7 = 128$, luego tiene $3 + 25 = 28$ cifras.

61 **Demuestra que $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$.**

Desarrollamos $(1 + 1)^n$ por el binomio de Newton:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$$

Por otra parte, $(1 + 1)^n = 2^n$, luego $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n} = 2^n$.

62 **Comprueba si es verdadera o falsa cada una de las siguientes expresiones:**

a) $|a| < b$ equivale a $-b < a < b$

b) $|-a| = -|a|$

c) $|a + b| = |a| + |b|$

d) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

a) Verdadera (siempre que $b > 0$).

b) Falsa; pues $|-a| \ge 0$ y $-|a| \le 0$. (Solo sería cierta para $a = 0$).

c) Falsa. Solo es cierta cuando a y b tienen el mismo signo.

En general, $|a + b| \le |a| + |b|$.

d) Verdadera.

63 **Si se resta una unidad al cuadrado de un número impar, ¿se obtiene siempre un múltiplo de 8?**

$(2x + 1)^2 - 1 = 4x^2 + 4x = 4x(x + 1)$

Esta expresión es múltiplo de 4 por ser 4 factor común.

Además, o x es par, o $x + 1$ es par, luego uno de los factores que aparecen en la expresión es múltiplo de 2.

El producto será, por tanto, múltiplo de $4 \cdot 2 = 8$.

64 **Si $x > 0$, $y > 0$, demuestra que $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{x+y}$.**

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}>\frac{1}{x+y}$$

Multiplicamos las dos fracciones por $x + y$ que es positivo por ser $x > 0$ e $y > 0$.

Tenemos que probar que $\dfrac{(x+y)^2}{xy} > 1$

$$\frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{x^2+2xy+y^2}{xy} = 2+\frac{x^2+y^2}{xy} > 2 > 1$$

Luego es cierta la desigualdad.

Autoevaluación

1 Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ pertenecen:

$$-\frac{58}{45};\ \frac{51}{17};\ \frac{\pi}{3};\ \sqrt[4]{-3};\ \sqrt[3]{-8};\ \sqrt[5]{2^3};\ 1{,}0\widehat{7}$$

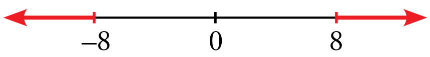
$\mathbb{N}$: $\frac{51}{17}$ $\quad$ $\mathbb{Z}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$ $\quad$ $\mathbb{Q}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$; $-\frac{58}{45}$; $1{,}0\widehat{7}$ $\quad$ $\mathbb{R}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$; $-\frac{58}{45}$; $1{,}0\widehat{7}$; $\frac{\pi}{3}$; $\sqrt[5]{2^3}$

2 Expresa en forma de intervalo y haz la representación en cada caso.

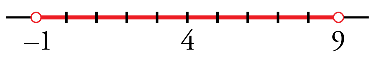
a) $|x| \geq 8$

b) $|x-4| < 5$

a) $(-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$



b) $(-1, 9)$



3 Simplifica.

a) $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2}$

b) $a\sqrt{a^{-1}} : \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$

a) $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = 5\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $a \cdot a^{-1/2} : a^{-2/3} = a^{1/2 + 2/3} = a^{7/6}$

4 Dos esferas metálicas de 1 000 kg cada una se atraen con una fuerza de $8{,}35 \cdot 10^{-9}$ N. ¿A qué distancia se encuentran sus centros? Aplica la Ley de Gravitación Universal:

$$F = G\frac{M\,m}{r^2} \quad \text{donde} \quad G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}$$

Acota el error cometido.

Sustituímos en la fórmula: $8{,}35 \cdot 10^{-9} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{1000 \cdot 1000}{r^2}$;

$8{,}35 \cdot 10^{-9} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1000 \cdot 1000}{r^2}$;

$8{,}35 \cdot 10^{-9}r^2 = 6{,}67 \cdot 10^{-5}$; $r^2 = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-5}}{8{,}35 \cdot 10^{-9}} = 7\,988$;

$r = \sqrt{7\,988} = 89{,}376$ m

Sus centros se encuentran aproximadamente a 89,376 m.

La cota del error absoluto es E.A. < 0,0005 m

E.R. $< \frac{0{,}0005}{89{,}376} = 5{,}5943 \cdot 10^{-6} = 0{,}0000055943$, que corresponde al 0,00056 %.

5 Calcula m en esta expresión: $\frac{m!}{(m-1)!} = \binom{m}{2}$

$\frac{m!}{(m-1)!} = \binom{m}{2} \to m \geq 2$

$\frac{m(m-1)!}{(m-1)!} = \frac{m(m-1)(m-2)!}{(m-2)!2!}$;

$m = \frac{m(m-1)}{2}$; $2m = m^2 - m \begin{cases} m = 3 \\ m = 0 \end{cases}$

Como $m \geq 2$, la solución es $m = 3$.

6 **Efectúa, racionalizando previamente.**

$$\frac{4+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}-\frac{2}{3-\sqrt{3}}$$

$$\frac{4+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\frac{(4+\sqrt{6})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{18}}{6}=\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$$

$$\frac{2}{3-\sqrt{3}}=\frac{2(3+\sqrt{3})}{3^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{6+2\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}-\frac{6+2\sqrt{3}}{6}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-6}{6}$$

7 **Aplica la definición de logaritmo y obtén x.**

a) $\log_3 x=-\frac{1}{4}$ **b)** $\ln \frac{x}{3}=-1$ **c)** $\log_x 512=3$

a) $x=3^{-(1/4)} \to x=0{,}76$

b) $\frac{x}{3}=e^{-1} \to x=3\cdot e^{-1}=1{,}10$

c) $x^3=512 \to x=8$

8 **Aplica las propiedades de los logaritmos y halla A.**

$$\log A=2\log 3+0{,}5\log 4-3\log 2$$

$$\log A=\log\frac{3^2\cdot 4^{0,5}}{2^3} \to A=\frac{9\cdot 2}{8}=\frac{9}{4}$$

9 **Calcula x en cada caso.**

a) $2{,}5^x=0{,}0087$ **b)** $e^{-x}=425$

a) $x\log 2{,}5=\log 0{,}0087 \to x=\frac{\log 0{,}0087}{\log 2{,}5}=-5{,}18$

b) $-x\ln e=\ln 425 \to x=-\ln 425=-6{,}05$

10 **En un trapecio rectángulo, la base menor mide $4-\sqrt{5}$ cm, la base mayor, $7+2\sqrt{5}$ cm y la altura, $4(1+\sqrt{5})$ cm. Comprueba que el perímetro del trapecio es $10(2+\sqrt{5})$ cm.**

$x=(7+2\sqrt{5})-(4-\sqrt{5})=3+3\sqrt{5}=3(1+\sqrt{5})$

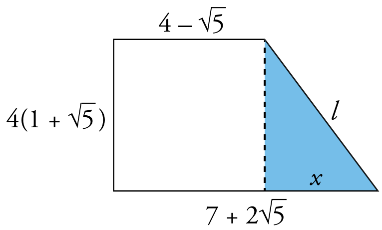
$l^2=\left[4(1+\sqrt{5})\right]^2+\left[3(1+\sqrt{5})\right]^2=16(1+\sqrt{5})^2+9(1+\sqrt{5})^2=25(1+\sqrt{5})^2$

$l=\sqrt{25(1+\sqrt{5})^2}=5(1+\sqrt{5})$ cm

Perímetro $=4-\sqrt{5}+7+2\sqrt{5}+4(1+\sqrt{5})+5(1+\sqrt{5})=$

$=4-\sqrt{5}+7+2\sqrt{5}+4+4\sqrt{5}+5+5\sqrt{5}=$

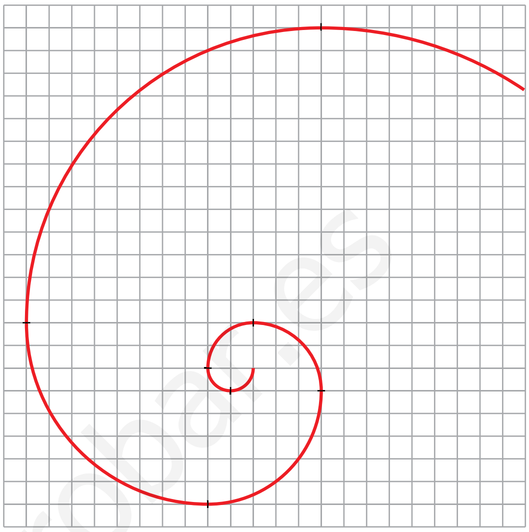
$=20+10\sqrt{5}=10(2\sqrt{5})$cm



Resuelve

Página 55

Una hermosa curva



La curva de la derecha está construida con ocho arcos de circunferencia. Los siete primeros son de un cuarto de circunferencia. El octavo, es solo un trocito.

a) Localiza los centros y averigua los radios de los ocho arcos dibujados.

¿Ves la relación de los radios con la sucesión de Fibonacci?

b) Reproduce la curva en tu cuaderno completando el octavo tramo y añadiendo el noveno.

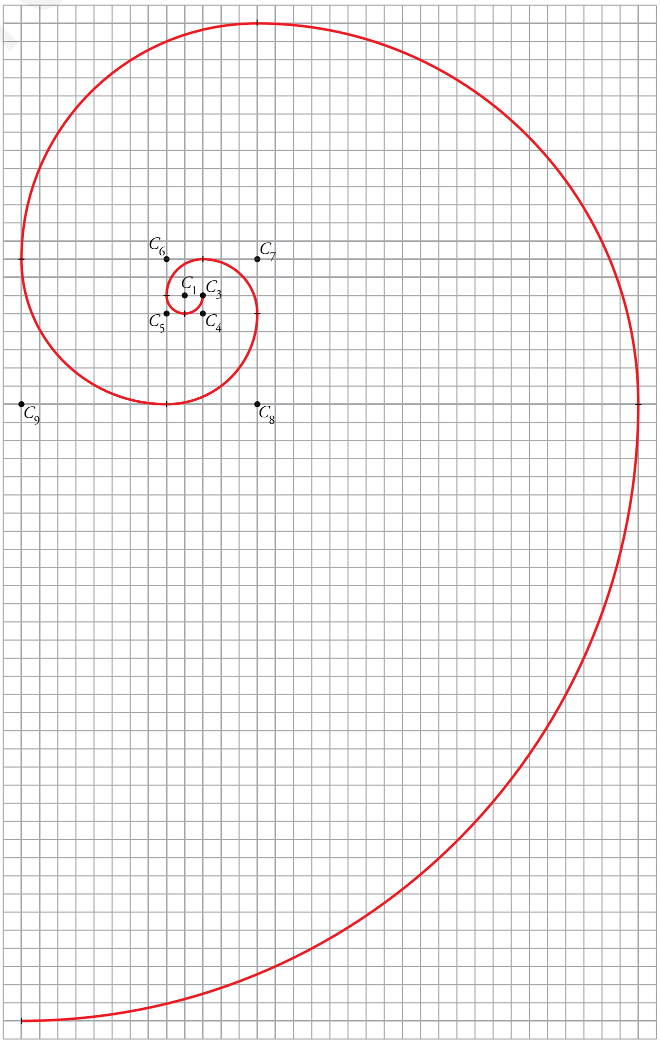
¿Qué radio tiene este último?

c) Como ves, esta curva se podría ir ampliando indefinidamente. Di cuáles serían los radios de los siguientes cinco tramos (10.º, 11.º, …).

a) Los dos primeros centros de arcos de circunferencia coinciden $C_1 = C_2$ y están representados como un único centro. El centro del tercer arco es C_3 y así sucesivamente.

Los radios de los arcos de circunferencias coinciden con los términos de Fibonacci. Es decir, si llamamos r_i al radio de centro C_i, $r_1 = r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 3$, $r_5 = 5$, $r_6 = 8$, $r_7 = 13$, $r_8 = 21$.

b)



El último radio es $r_9 = 34$.

c) $r_{10} = 55$, $r_{11} = 89$, $r_{12} = 144$, $r_{13} = 233$, $r_{14} = 377$

1 Concepto de sucesión

Página 57

1 Obtén los seis primeros términos de cada una de las siguientes sucesiones:

$a_n = n^2 + 2n$ $\quad b_n = (-1)^{n+1}\, n^2$ $\quad c_n = (-1)^n\,(2n+1)$

$d_n = (-2)^n$ $\quad e_1 = 3,\ e_2 = -1,\ e_n = e_{n-2} + 2e_{n-1}$ $\quad f_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}$

$g_n = \dfrac{n^2+1}{n^2+2n}$ $\quad h_n = n! - (n-1)!$ $\quad i_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

$a_n = n^2 + 2n \to a_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3,\ a_2 = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8,\ a_3 = 3^2 + 2 \cdot 3 = 15,$

$a_4 = 4^2 + 2 \cdot 4 = 24,\ a_5 = 5^2 + 2 \cdot 5 = 35,\ a_6 = 6^2 + 2 \cdot 6 = 48$

$b_n = (-1)^{n+1} n^2 \to b_1 = (-1)^{1+1} \cdot 1^2 = 1,\ b_2 = (-1)^{1+2} \cdot 2^2 = -4,\ b_3 = (-1)^{1+3} \cdot 3^2 = 9,$

$b_4 = (-1)^{1+4} \cdot 4^2 = -16,\ b_5 = (-1)^{1+5} \cdot 5^2 = 25,\ b_6 = (-1)^{1+6} \cdot 6^2 = -36$

$c_n = (-1)^n(2n+1) \to c_1 = (-1)^1(2 \cdot 1 + 1) = -3,\ c_2 = (-1)^2(2 \cdot 2 + 1) = 5,\ c_3 = (-1)^3(2 \cdot 3 + 1) = -7,$

$c_4 = (-1)^4(2 \cdot 4 + 1) = 9,\ c_5 = (-1)^5(2 \cdot 5 + 1) = -11,\ c_6 = (-1)^6(2 \cdot 6 + 1) = 13$

$d_n = (-2)^n \to d_1 = (-2)^1 = -2,\ d_2 = (-2)^2 = 4,\ d_3 = (-2)^3 = -8,$

$d_4 = (-2)^4 = 16,\ d_5 = (-2)^5 = -32,\ d_6 = (-2)^6 = 64$

$e_1 = 3,\ e_2 = -1,\ e_3 = 3 + 2 \cdot (-1) = 1,\ e_4 = -1 + 2 \cdot 1 = 1,\ e_5 = 1 + 2 \cdot 1 = 3,\ e_6 = 1 + 2 \cdot 3 = 7$

$f_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1} \to f_1 = \dfrac{(-1)^1}{2 \cdot 1 - 1} = -1,\ f_2 = \dfrac{(-1)^2}{2 \cdot 2 - 1} = \dfrac{1}{3},\ f_3 = \dfrac{(-1)^3}{2 \cdot 3 - 1} = -\dfrac{1}{5},$

$f_4 = \dfrac{(-1)^4}{2 \cdot 4 - 1} = \dfrac{1}{7},\ f_5 = \dfrac{(-1)^5}{2 \cdot 5 - 1} = -\dfrac{1}{9},\ f_6 = \dfrac{(-1)^6}{2 \cdot 6 - 1} = \dfrac{1}{11}$

$g_n = \dfrac{n^2+1}{n^2+2n} \to g_1 = \dfrac{1^2+1}{1^2+2 \cdot 1} = \dfrac{2}{3},\ g_2 = \dfrac{2^2+1}{2^2+2 \cdot 2} = \dfrac{5}{8},\ g_3 = \dfrac{3^2+1}{3^2+2 \cdot 3} = \dfrac{2}{3},$

$g_4 = \dfrac{4^2+1}{4^2+2 \cdot 4} = \dfrac{17}{24},\ g_5 = \dfrac{5^2+1}{5^2+2 \cdot 5} = \dfrac{26}{35},\ g_6 = \dfrac{6^2+1}{6^2+2 \cdot 6} = \dfrac{37}{48}$

$h_n = n! - (n-1)! \to h_1 = 1! - (1-1)! = 0,\ h_2 = 2! - (2-1)! = 1,\ h_3 = 3! - (3-1)! = 4,$

$h_4 = 4! - (4-1)! = 18,\ h_5 = 5! - (5-1)! = 96,\ h_6 = 6! - (6-1)! = 600$

$i_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to i_1 = \left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1 = 2,\ i_2 = \left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4},\ i_3 = \left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{64}{27},$

$i_4 = \left(1+\dfrac{1}{4}\right)^4 = \dfrac{625}{256},\ i_5 = \left(1+\dfrac{1}{5}\right)^5 = \dfrac{7776}{3125},\ i_6 = \left(1+\dfrac{1}{6}\right)^6 = \dfrac{117649}{46656}$

2 Da el término general o el criterio de recurrencia (o ambas cosas) de las siguientes sucesiones:

a) 3, 8, 13, 18, 23, …

b) 1, 8, 27, 64, 125, …

c) 0, 3, 8, 15, 24, …

d) 1, –3, 5, –7, 9, …

e) 1, –2, 6, –24, 120, …

f) 1, 4, 8, 11, 22, 25, …

g) $\frac{2}{4}, \frac{5}{9}, \frac{8}{16}, \frac{11}{25}, \frac{14}{36}, \dots$

h) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

i) 1, 3, 4, 7, 11, 18, …

j) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$

a) Cada término es 5 unidades mayor que el término anterior de la sucesión. $a_n = 5n - 2$

Por recurrencia: $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 5$.

b) Cada término es el cubo del lugar que ocupa en la sucesión. $b_n = n^3$

c) Cada término es una unidad menor que el cuadrado del lugar que ocupa. $c_n = n^2 - 1$

d) Son los números impares con los signos + y – alternativamente. $d_n = (-1)^{n+1}(2n - 1)$

e) Son los números factoriales con los signos + y – alternativamente. $e_n = (-1)^{n+1}n!$

Por recurrencia: $e_1 = 1$, $e_n = e_{n-1} \cdot (-n)$.

f) El primer término impar es 1 y los demás términos impares se obtienen sumando a este un múltiplo de 7.

El primer término par es 4 y los demás términos pares se obtienen sumando a este un múltiplo de 7.

$f_1 = 1$, $f_2 = 4$. Para n impar, $f_n = f_1 + 7(n - 2)$. Para n par, $f_n = f_1 + 7(n - 3)$.

g) Cada numerador es 3 unidades mayor que el numerador anterior. Cada denominador es el cuadrado del número natural siguiente al lugar que ocupa. $g_n = \frac{3n-1}{(n+1)^2}$

h) Los denominadores son los números naturales. Cada numerador es una unidad inferior a su denominador. $h_n = \frac{n-1}{n}$

i) Por recurrencia: $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $i_n = i_{n-1} + i_{n-2}$.

j) Son los inversos de los números naturales con los signos + y – alternativamente. $j_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

2 Algunas sucesiones especialmente interesantes

Página 59

1 En las siguientes sucesiones identifica las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas. Añade dos términos y escribe su término general:

a) 3, 7, 11, 15, 19, … **b) 3, 4, 6, 9, 13, 18, …** **c) 3, 6, 12, 24, 48, …**

d) 1, 3, 9, 27, 81, … **e) 5, –5, 5, –5, 5, …** **f) 10, 7, 4, 1, –2, …**

g) 100; 50; 25; 12,5; … **h) 12, 12, 12, 12, …** **i) 3, –5, 7, –9, 11, …**

j) 2 840; 284; 28,4; … **k) 90, –30, 10, –10/3, 10/9, …** **l) 17,4; 15,8; 14,2; 12,6; …**

a) Progresión aritmética en la que $a_1 = 3$ y $d = 4$.

$a_6 = 23$, $a_7 = 27$. Término general: $a_n = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$

b) No es una progresión.

$b_7 = 24$, $b_8 = 31$. Término general: $b_n = 3 + \dfrac{n(n-1)}{2}$

c) Progresión geométrica en la que $c_1 = 3$ y $r = 2$.

$c_6 = 96$, $c_7 = 192$. Término general: $c_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

d) Progresión geométrica en la que $d_1 = 1$ y $r = 3$.

$d_6 = 243$, $d_7 = 729$. Término general: $d_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$

e) Progresión geométrica en la que $e_1 = 5$ y $r = -1$.

$e_6 = -5$, $e_7 = 5$. Término general: $e_n = 5 \cdot (-1)^{n-1}$

f) Progresión aritmética en la que $f_1 = 10$ y $d = -3$.

$f_6 = -5$, $f_7 = -8$. Término general: $f_n = 10 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 13$

g) Progresión geométrica en la que $g_1 = 100$ y $r = \dfrac{1}{2}$.

$g_5 = 6{,}25$, $g_6 = 3{,}125$. Término general: $g_n = 100 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

h) Es a la vez una progresión aritmética de diferencia $d = 0$ y una progresión geométrica de razón $r = 1$.

$h_5 = 12$, $h_6 = 12$. Término general: $h_n = 12$

i) No es una progresión.

$i_6 = -13$, $i_7 = 15$. Término general: $i_n = (-1)^{n+1}(2n+1)$

j) Progresión geométrica en la que $j_1 = 2\,840$ y $r = \dfrac{1}{10}$.

$j_4 = 2{,}84$, $j_5 = 0{,}284$. Término general: $j_n = 2\,840 \cdot \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$

k) Progresión geométrica en la que $k_1 = 90$ y $r = -\dfrac{1}{3}$.

$k_6 = \dfrac{-10}{27}$, $k_7 = \dfrac{10}{81}$. Término general: $k_n = 90 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

l) Progresión aritmética en la que $l_1 = 17{,}4$ y $d = -1{,}6$.

$l_5 = 11$, $l_6 = 10{,}4$. Término general: $l_n = 17{,}4 + (n-1) \cdot (-1{,}6) = -1{,}6n + 19$

2 **En 1a) halla S_{20}.**

$a_{20} = 4 \cdot 20 - 1 = 79;\ \ S_{20} = \dfrac{(3+79)\cdot 20}{2} = 820$

3 **En 1f) halla S_{15}.**

$f_{15} = -3 \cdot 15 + 13 = -32;\ \ S_{15} = \dfrac{(10+(-32))\cdot 15}{2} = -165$

4 **En 1d) halla S_{10}.**

$d_{10} = 3^9 = 19\,683;\ \ S_{10} = \dfrac{19\,683\cdot 3 - 1}{3-1} = 29\,524$

5 **En 1k) halla S_{10}.**

$$k_{10} = 90 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^9 = -\frac{10}{2187};\ \ S_{10} = \frac{-\dfrac{10}{2187}\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right) - 90}{-\dfrac{1}{3} - 1} = \frac{147\,620}{2187}$$

6 **¿En cuáles de las sucesiones del ejercicio 1 puedes hallar la suma de los infinitos términos? Hazlo.**

En las de los apartados g), j) y k) porque las razones son, en valor absoluto, menores que 1.

En el caso del apartado g), $S_\infty = \dfrac{100}{1-\dfrac{1}{2}} = 200$.

En el caso del apartado j), $S_\infty = \dfrac{2\,840}{1-\dfrac{1}{10}} = \dfrac{28\,400}{9}$.

En el caso del apartado k), $S_\infty = \dfrac{90}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)} = \dfrac{135}{2}$.

7 **Calcula:**

a) $1^2 + 2^2 + \ldots + 30^2$

b) $1^3 + 2^3 + \ldots + 15^3$

c) $20^2 + 21^2 + \ldots + 30^2$

d) $16^3 + 17^3 + \ldots + 30^3$

a) $\dfrac{30\cdot(30+1)\cdot(60+1)}{6} = \dfrac{30\cdot 31\cdot 61}{6} = 9\,455$

b) $\dfrac{15^2\cdot 16^2}{4} = 14\,400$

c) $20^2 + 21^2 + \ldots + 30^2 = (1^2 + 2^2 + \ldots + 30^2) - (1^2 + 2^2 + \ldots + 19^2) = \dfrac{30\cdot 31\cdot 61}{6} - \dfrac{19\cdot 20\cdot 39}{6} = 6\,985$

d) $16^3 + 17^3 + \ldots + 30^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + 30^3) - (1^3 + 2^3 + \ldots + 15^3) = \dfrac{30^2\cdot 31^2}{4} - \dfrac{15^2\cdot 16^2}{4} = 201\,825$

8 **Calcula:**

$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 20^3$

Ten en cuenta que, por ejemplo, $6^3 = (2 \cdot 3)^3 = 8 \cdot 3^3$ y que $20^3 = (2 \cdot 10)^3 = 8 \cdot 10^3$.

$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 20^3 = (2 \cdot 1)^3 + (2 \cdot 2)^3 + (2 \cdot 3)^3 + \ldots + (2 \cdot 10)^3 =$

$= 2^3 \cdot 1^3 + 2^3 \cdot 2^3 + 2^3 \cdot 2^3 + \ldots + 2^3 \cdot 10^3 =$

$= 2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3) = 8 \cdot \dfrac{10^2\cdot 11^2}{4} = 8\cdot 3025 = 24\,200$

Página 60

9 Calcula el 6.º término de la sucesión de Fibonacci, $f_6 = 8$, aplicando la fórmula.

$$f_6 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^6\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(9+4\sqrt{5})-(9-4\sqrt{5})\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 8\sqrt{5} = 8$$

(Hemos usado el binomio de Newton en cada una de las potencias sextas.)

10 Observa que, para valores "algo grandes" de n, el número ϕ^{-n} es "pequeño". Por tanto, podemos hallar los términos avanzados de la sucesión de Fibonacci, de forma aproximada, prescindiendo del sustraendo:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \phi^{-n}) \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n$$

Por ejemplo, para calcular $f_{13} = 233$ procederíamos así: $f_{13} \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{13}$. Hazlo y comprueba que el error cometido es menor que 0,001. Calcula de este modo f_{20}.

El error cometido es igual a $\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{13}\right| \approx 8{,}5837 \times 10^{-4}$, que es inferior a 0,001.

$$f_{20} \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{20} = 6765$$

11 La *sucesión de Lucas* se define así: $l_1 = 1$, $l_2 = 3$, $l_n = l_{n-2} + l_{n-1}$

Como ves, es muy parecida a la de Fibonacci y también tiene relación con el mundo vegetal.

a) Halla sus 11 primeros términos.

b) $l_1 + l_2 + \ldots + l_n = l_{n+2} - 3$. Compruébalo para $n = 6$.

c) Esta sucesión se relaciona con la de Fibonacci así:

$$f_n = \frac{l_{n-1} + l_{n+1}}{5}$$

Compruébalo hallando los 10 primeros términos de la sucesión de Fibonacci a partir de la de Lucas.

a) $l_1 = 1$, $l_2 = 3$, $l_3 = 4$, $l_4 = 7$, $l_5 = 11$, $l_6 = 18$, $l_7 = 29$, $l_8 = 47$, $l_9 = 76$, $l_{10} = 123$, $l_{11} = 199$

b) $1 + 3 + 4 + 7 + 11 + 18 = 44$

$47 - 3 = 44$

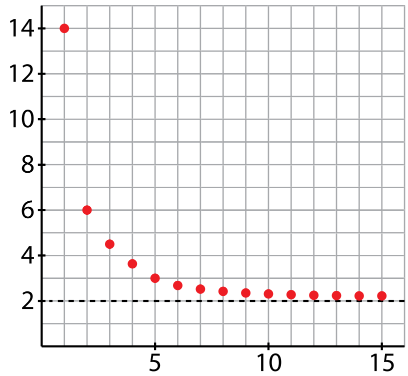
c) $f_2 = \frac{l_1 + l_3}{5} = \frac{1+4}{5} = 1$, $f_3 = \frac{3+7}{5} = 2$, $f_4 = \frac{4+11}{5} = 3$, $f_5 = \frac{7+18}{5} = 5$, $f_6 = \frac{11+29}{5} = 8$,

$f_7 = \frac{18+47}{5} = 13$, $f_8 = \frac{29+76}{5} = 21$, $f_9 = \frac{47+123}{5} = 34$, $f_{10} = \frac{76+199}{5} = 55$

3 Límite de una sucesión

Página 61

1 **Representa la sucesión** $a_n = \dfrac{4n+10}{2n-1}$ **y asigna un valor a su límite.**



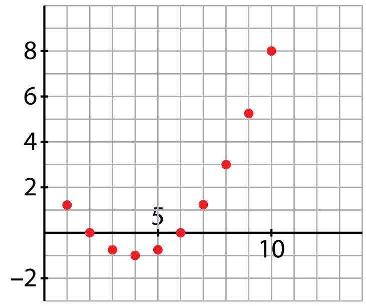
$a_1 = 14$, $a_2 = 6$, $a_3 = 4{,}4$; $a_4 \approx 3{,}71$;

$a_5 \approx 3{,}33$; …, $a_{10} \approx 2{,}63$; …;

$a_{100} \approx 2{,}06$; …; $a_{1\,000} \approx 2{,}006$; …

$\text{lím } a_n = 2$

2 **Representa la sucesión** $b_n = \dfrac{n^2}{4} - 2n + 3$ **y asigna un valor a su límite.**



$b_1 = 1{,}25$; $b_2 = 0$; $b_3 = -0{,}75$;

$b_4 = -1$; $b_5 = -0{,}75$; $b_6 = 0$;

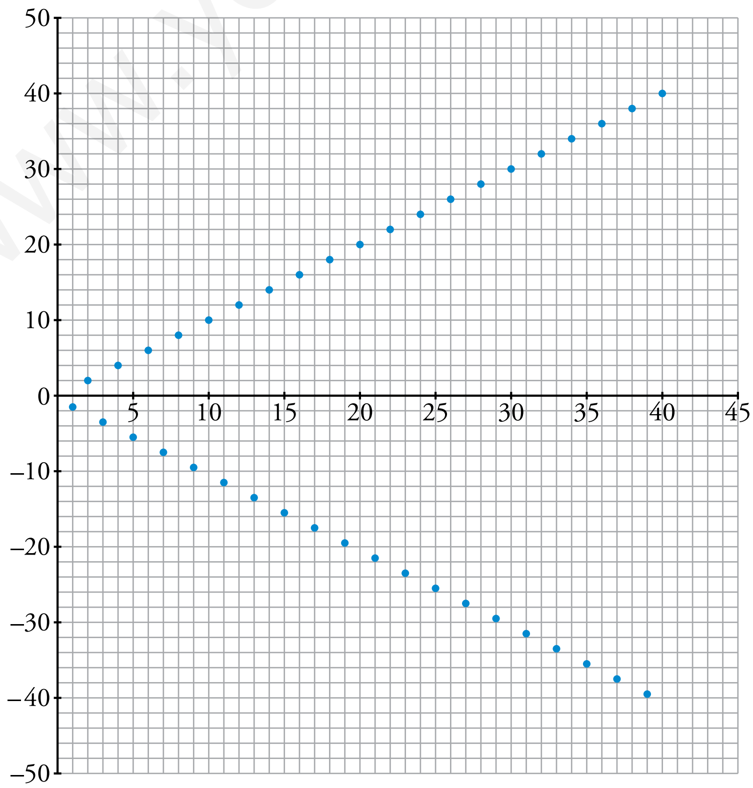
$b_7 = 1{,}25$; $b_8 = 3$; $b_9 = 5{,}25$; $b_{10} = 8, \dots,$

$b_{100} = 2\,303, \dots$

$\text{lím } b_n = +\infty$

3 **Representa la sucesión** $c_n = (-1)^n \cdot n$ **y describe su comportamiento.**

¿Podríamos afirmar que $\text{lím } c_n = l$ **o que** $\text{lím } c_n = +\infty$**? ¿O acaso que** $\text{lím } c_n = -\infty$**?**



Se trata de una sucesión oscilante porque su representación gráfica da saltos hacia arriba y hacia abajo. No tiene límite porque los términos no se acercan a ningún valor concreto. Tampoco tiene límte $+\infty$ porque los términos impares (que son negativos) se hacen cada vez más pequeños. Análogamente, tampoco tiene límite $-\infty$.

Página 63

4 Estudia el comportamiento de estas sucesiones para términos muy avanzados e indica su límite:

a) $a_n = \dfrac{2n-3}{6}$ **b)** $b_n = \dfrac{2n-3}{n+5}$ **c)** $c_n = 3 - 2^n$ **d)** $d_n = 5 - \dfrac{1}{n^3}$

a) $a_{10} \approx 2{,}83$; $a_{1\,000} \approx 332{,}83$ is preceded by $a_{100} \approx 32{,}83$; … $\lim a_n = +\infty$

b) $b_{10} \approx 1{,}133$; $b_{100} \approx 1{,}876$; $b_{1\,000} \approx 1{,}987$; … $\lim b_n = 2$

c) $c_{10} = -1\,021$; $c_{100} \approx -1{,}27 \cdot 103$; … $\lim c_n = -\infty$

d) $d_{10} = 4{,}999$; $d_{100} = 4{,}999999$; … $\lim d_n = 5$

5 Di, razonadamente, cuáles de las siguientes sucesiones tienen límite:

a) $a_n = -\dfrac{2}{n^2}$ **b)** $b_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+4}$ **c)** $c_n = (-1)^n n^2$ **d)** $d_n = (-1)^n \dfrac{2}{n^2}$

a) $a_{10} = -0{,}02$; $a_{100} = -0{,}0002$; $a_{1\,000} = -0{,}000002$; … $\lim a_n = 0$.

b) $b_{10} \approx 0{,}714$; $b_{11} \approx -0{,}733$; $b_{100} \approx 0{,}962$; $b_{101} \approx -0{,}962$; …

Los términos pares son positivos y tienden a 1; los términos impares son negativos y tienden a –1. La sucesión no tiene límite.

c) $c_1 = -1$, $c_2 = 4$, $c_3 = -9$, $c_4 = 16$, $c_5 = -25$; …

Los términos impares son negativos y tienden a $-\infty$; los términos pares son positivos y tienden a $+\infty$. Es una sucesión oscilante. No tiene límite.

d) $d_1 = -2$; $d_2 = 0{,}5$; …; $d_{100} = 0{,}0002$; $d_{101} = -0{,}000196$; … $\lim d_n = 0$.

4 Algunos límites importantes

Página 65

1 a) Calcula $\left(1-\frac{1}{80}\right)^{80}$ y comprueba que "se parece mucho" a $e^{-1}=\frac{1}{e}$. Haz lo mismo con $\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1000}$.

¿Podemos suponer que $lím \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{e}$?

b) Calcula $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots-\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}$ y comprueba que es aproximadamente igual a e^{-1}.

¿Podemos suponer también que la sucesión $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}$ tiende a e^{-1}?

a) $a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$

$$a_{80}=\left(1-\frac{1}{80}\right)^{80}=\left(\frac{79}{80}\right)^{80}\approx 0{,}36557$$

$$a_{1\,000}=\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1\,000}=\left(\frac{999}{1000}\right)^{1\,000}\approx 0{,}36770$$

$$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0{,}36788$$

Observamos que los resultados se acercan cada vez más a $\frac{1}{e}$.

Comprobándolo con algún término más avanzado, sí podríamos suponerlo.

b) $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}-\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}=\frac{16\,481}{44\,800}\approx 0{,}36788$

Sí podemos suponerlo. Además, esta sucesión se acerca mucho más rápido a $\frac{1}{e}$ que la del apartado a), puesto que el término décimo de la sucesión ya es casi $\frac{1}{e}$.

2 Teniendo en cuenta que el término general de la sucesión de Fibonacci para n "grande" es:

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n-\phi^{-n})\approx\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$$

demuestra que $lím \frac{f_{n+1}}{f_n}=\phi$.

Para n "grande", $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}=\dfrac{\frac{\phi^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}}=\dfrac{\sqrt{5}\,\phi^{n+1}}{\sqrt{5}\,\phi^n}=\phi$, luego $lím \dfrac{f_{n+1}}{f_n}=\phi$.

3 Sabiendo que f_n es el término general de la sucesión de Fibonacci, calcula los siguientes límites:

a) $lím \dfrac{f_n}{f_{n+2}}$

b) $lím \dfrac{f_n}{f_{n+3}}$

Razonando de forma análoga al problema anterior, $lím \dfrac{f_n}{f_{n+2}}=\dfrac{1}{\phi^2}=\phi^{-2}$ y $lím \dfrac{f_n}{f_{n+3}}=\dfrac{1}{\phi^3}=\phi^{-3}$.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 66

2. Los cuadrados van contracorriente

Hazlo tú. Halla la suma:

–1 + 2 + … + 7 – 8 + 9 + … + 26 – 27 + 28 + … + 63 – 64 + 65 + … + 999 – 1 000

(suma de los 1 000 primeros naturales pero con los cubos perfectos con signo menos).

Calculamos la suma de los mil primeros números naturales sabiendo que forman una progresión aritmética.

$$S_{1\,000} = \frac{(1+1000)\cdot 1000}{2} = 500\,500$$

Ahora debemos restar dos veces la suma de los primeros 10 cubos perfectos:

$$Sc_{10} = 1^3 + 2^3 + \ldots + 10^3 = \frac{10^2 \cdot 11^2}{4} = 3025$$

Por tanto, la suma pedida es $S_{1\,000} - 2 \cdot Sc_{10} = 500\,500 - 2 \cdot 3\,025 = 494\,450$.

Página 67

3. Término general

Hazlo tú. Halla el término general de estas sucesiones:

a) $\frac{2}{-1}, \frac{5}{1}, \frac{10}{3}, \frac{17}{5}, \ldots$

b) 5,23; 5,2323; 5,232323; …

c) $\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{-2}{5}, \ldots$

a) No es una progresión aritmética ni geométrica.

Los numeradores son una unidad mayor que los cuadrados perfectos.

Los denominadores forman una progresión aritmética de diferencia $d = 2$.

$$a_n = \frac{n^2+1}{-1+(n-1)\cdot 2} = \frac{n^2+1}{2n-3}$$

b) Podemos escribir así los términos de la sucesión:

$$b_1 = 5 + \frac{23}{100}, \quad b_2 = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000}, \quad b_3 = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000} + \frac{23}{1\,000\,000}$$

Luego $b_n = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \ldots + \frac{23}{100^n} = 5 + 23 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots + \frac{1}{100^n}\right) =$

$$= 5 + 23 \cdot \left(\frac{\frac{1}{100} - \frac{1}{100^{n+1}}}{1 - \frac{1}{100}}\right) = 5 + 23 \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{100^n}}{100 - 1}\right) = 5 + 23 \cdot \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{99 \cdot 100^n}\right) = 5 + \frac{23}{99} - \frac{23}{99 \cdot 100^n}$$

c) Se trata de una progresión aritmética de diferencia $d = \frac{-3}{5}$.

$$c_n = \frac{7}{5} + (n-1)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{10-3n}{5}$$

4. Límite de sucesiones

Hazlo tú. Estudia los límites de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \frac{5n+7}{2n-1}$ **b)** $b_n = \frac{(-1)\,n^2+4}{n+2}$

a) $a_{100} = \frac{5 \cdot 100 + 7}{2 \cdot 100 - 1} = \frac{507}{199} \approx 2{,}5477$

$a_{1\,000} = \frac{5 \cdot 1000 + 7}{2 \cdot 1000 - 1} = \frac{5\,007}{1999} \approx 2{,}5048$

$a_{10\,000} = \frac{5 \cdot 10\,000 + 7}{2 \cdot 10\,000 - 1} = \frac{50\,007}{19\,999} \approx 2{,}5005$

Observamos que los términos independientes del numerador y del denominador se hacen insignificantes comparados con los múltiplos de n.

Por tanto, $lím \frac{5n+7}{2n-1} = lím \frac{5n}{2n} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

b) $b_{100} = \frac{(-1) \cdot 100^2 + 4}{100+2} = -98$

$b_{1\,000} = \frac{(-1) \cdot 1000^2 + 4}{1000+2} = -998$

$b_{10\,000} = \frac{(-1) \cdot 10\,000^2 + 4}{10\,000+2} = -9\,998$

De forma similar al apartado anterior, los términos independientes son insignificantes comparados con los otros términos.

Por tanto, $lím \frac{(-1)\,n^2+4}{n+2} = lím \frac{(-1)\,n^2}{n} = lím\,(-1)\,n = -\infty$

Ejercicios y problemas guiados

Página 68

1. Paso de decimal periódico a fracción

Utilizar las sucesiones para pasar el número periódico $5,4\overset{\frown}{7}$ a fracción.

- $5,477\ldots = 5,4 + 0,07 + 0,007 + 0,0007 + \ldots$
- $a_1 = \frac{7}{100},\ a_2 = \frac{7}{1000},\ a_3 = \frac{7}{10\,000};\ r = \frac{1}{10};\ S_\infty = \frac{\frac{7}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{7}{90}$
- $5,4 = \frac{54}{10} = \frac{27}{5}$
- $5,477\ldots = \frac{27}{5} + \frac{7}{90} = \frac{493}{90}$

2. Intereses bancarios

Se hace un depósito de 5 000 € en un banco que paga un interés del 4 % anual. ¿Cuántos años se ha de dejar para superar los 8 000 €?

- En n años el capital se multiplicará por $1,04^n$.
- $8\,000 = 5\,000 \cdot 1,04^n \to \frac{8\,000}{5\,000} = 1,04^n \to 1,6 = 1,04^n \to$

$$\to \log 1,6 = n \cdot \log 1,04 \to n = \frac{\log 1,6}{\log 1,04} \approx 11,984$$

Por tanto, superará los 8 000 € a los 12 años.

3. Límites de sucesiones

Hallar el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\frac{4}{3},\ 7,\ -10,\ -\frac{13}{3},\ -\frac{16}{5},\ \ldots$

b) $\sqrt{3},\ \sqrt{3\sqrt{3}},\ \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}},\ \ldots$

a) $\frac{4}{3}, \frac{7}{1}, \frac{10}{-1}, \frac{13}{-3}, \frac{16}{-5}, \ldots$

Los numeradores forman una progresión aritmética de diferencia $d = 3$.

Los denominadores forman una progresión aritmética de diferencia $d = -2$.

$$a_n = \frac{4+(n-1)\cdot 3}{3+(n-1)\cdot(-2)} = \frac{3n+1}{-2n+5}$$

$$a_{1\,000} = \frac{3\cdot 1000+1}{-2\cdot 1000+5} = -\frac{3001}{1995} \approx -1,5043 \qquad a_{10\,000} = \frac{3\cdot 10\,000+1}{-2\cdot 10\,000+5} = -\frac{30\,001}{19\,995} \approx -1,5004$$

$$\text{lím } \frac{3n+1}{-2n+5} = -\frac{3}{2} = -1,5$$

b) $b_1 = \sqrt{3} = 3^{1/2} \qquad b_2 = \sqrt{3\sqrt{3}} = (3 \cdot 3^{1/2})^{1/2} = 3^{1/2+1/4} \qquad b_3 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = (3\cdot(3\cdot 3^{1/2})^{1/2})^{1/2} = 3^{1/2+1/4+1/8}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ es la suma de los elementos de una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$.

La suma es $S_\infty = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$.

Luego $\text{lím } b_n = 3^1 = 3$.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 69

Para practicar

Criterio para formar sucesiones

1 **Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son estos:**

a) $a_n = 3 + \dfrac{2}{10^n}$ **b)** $b_n = \dfrac{n^2 - 1}{n}$ **c)** $c_n = \dfrac{3n - 1}{n + 1}$

d) $d_n = 2^{-n}$ **e)** $e_n = n!$ **f)** $f_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n - n}{2}$

a) $a_1 = 3{,}2$; $a_2 = 3{,}02$; $a_3 = 3{,}002$; $a_4 = 3{,}0002$; $a_5 = 3{,}00002$

b) $b_1 = 0$; $b_2 = \dfrac{3}{2}$; $b_3 = \dfrac{8}{3}$; $b_4 = \dfrac{15}{4}$; $b_5 = \dfrac{24}{5}$

c) $c_1 = 1$; $c_2 = \dfrac{5}{3}$; $c_3 = 2$; $c_4 = \dfrac{11}{5}$; $c_5 = \dfrac{7}{3}$

d) $d_1 = \dfrac{1}{2}$; $d_2 = \dfrac{1}{4}$; $d_3 = \dfrac{1}{8}$; $d_4 = \dfrac{1}{16}$; $d_5 = \dfrac{1}{32}$

e) $e_1 = 1$; $e_2 = 2$; $e_3 = 6$; $e_4 = 24$; $e_5 = 120$

f) $f_1 = -1$; $f_2 = 0$; $f_3 = -3$; $f_4 = 0$; $f_5 = -5$

2 **Escribe el término general de estas sucesiones:**

a) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dots$ **b)** $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dots$

c) $\dfrac{1}{5}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{9}{9}, \dfrac{16}{11}, \dots$ **d)** $0, \dfrac{3}{5}, \dfrac{8}{10}, \dfrac{15}{17}, \dfrac{24}{26}, \dots$

e) **2, 5, 10, 17, 26, …** **f)** **1, 3, 6, 10, 15, …**

a) $a_n = \dfrac{n}{n - 1}$

b) $b_n = \dfrac{1}{n + 1}$

c) Los numeradores son cuadrados perfectos y los denominadores forman una progresión aritmética.

$$c_n = \frac{n^2}{5 + (n-1) \cdot 2} = \frac{n^2}{2n + 3}$$

d) $d_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$

e) $e_n = n^2 + 1$

f) $f_1 = 1$; $f_2 = 1 + 2$; $f_3 = 1 + 2 + 3$; $f_4 = 1 + 2 + 3 + 4$; …; $f_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3 **Construye dos sucesiones cuyas leyes de recurrencia sean:**

a) $a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$ **b)** $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_n = \dfrac{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}{2}$

a) $0, 2, 1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{11}{8}, \dfrac{21}{16}, \dfrac{43}{32}, \dots$

b) $1, 2, 1, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{128}, \dots$

4 **Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones. Halla tres términos más de cada una.**

a) $4, 7, 3, -4, -7, \ldots$

b) $2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

a) $a_1 = 4,\ a_2 = 7,\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n > 2$

b) $b_1 = 2,\ b_2 = 3,\ b_n = \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$ para $n > 2$

Progresiones aritméticas

5 **De las siguientes sucesiones, di cuáles son progresiones aritméticas y escribe su término general:**

a) 1,2; 2,4; 3,6; 4,8; 6; …

b) 5; 4,6; 4,2; 3,8; 3,4; …

c) 1, 2, 4, 7, 11, …

d) 14, 13, 11, 8, 4, …

e) $\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \ldots$

f) $1, \frac{89}{100}, \frac{78}{100}, \frac{67}{100}, \frac{56}{100}, \ldots$

a) Es una progresión aritmética con $a_1 = 1{,}2$ y $d = 1{,}2$.

$a_n = 1{,}2 + (n-1) \cdot 1{,}2 = 1{,}2n$.

b) Es una progresión aritmética con $b_1 = 5$ y $d = -0{,}4$.

$b_n = 5 + (n-1) \cdot (-0{,}4) = -0{,}4n + 5{,}4$.

c) y d) no son progresiones aritméticas.

e) La sucesión es una progresión aritmética de diferencia $d = \frac{1}{4}$.

$e_n = \frac{3}{4} + (n-1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{n+2}{4}$

f) La sucesión es una progresión aritmética de diferencia $d = \frac{-11}{100}$.

$f_n = 1 + (n-1) \cdot \left(-\frac{11}{100}\right) = \frac{111-11n}{100}$

6 **Di cuáles de estas sucesiones son progresiones aritméticas:**

a) $a_n = 3n$

b) $b_n = 5n - 4$

c) $c_n = \frac{1}{n}$

d) $d_n = \frac{8-3n}{4}$

e) $e_n = 5 + \frac{n}{2}$

f) $f_n = n^2 - 1$

a) $a_n - a_{n-1} = 3n - 3(n-1) = 3n - 3n + 3 = 3$

Es una progresión aritmética con $d = 3$.

b) $b_n - b_{n-1} = 5n - 4 - [5(n-1) - 4)] = 5n - 4 - 5n + 5 + 4 = 5$

Es una progresión aritmética con $d = 5$.

c) $c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = \frac{1}{3}, c_4 = \frac{1}{4}, \ldots$

$c_2 - c_1 = \frac{-1}{2} \neq c_3 - c_2 = \frac{1}{6}$. No es una progresión aritmética.

d) $d_n - d_{n-1} = \frac{8-3n}{4} - \frac{8-3(n-1)}{4} = \frac{8-3n-8+3n-3}{4} = \frac{-3}{4}$

Es una progresión aritmética con $d = \frac{-3}{4}$.

e) $e_n - e_{n-1} = 5 + \frac{n}{2} - \left(5 + \frac{n-1}{2}\right) = 5 + \frac{n}{2} - 5 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Es una progresión aritmética con $d = \frac{1}{2}$.

f) $f_1 = 0,\ f_2 = 3,\ f_3 = 8,\ f_4 = 15, \ldots$

$f_2 - f_1 = 3 \neq f_3 - f_2 = 5$. No es una progresión aritmética.

7 **Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:**

a) 3, 6, 9, 12, 15, …

b) 5; 4,9; 4,8; 4,7; 4,6; …

c) $c_n = 4n - 2$

d) $d_n = \dfrac{1-2n}{2}$

a) $a_1 = 3;\ a_{25} = a_1 + 24d = 3 + 24 \cdot 3 = 75$

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(3+75) \cdot 25}{2} = 975$$

b) $b_1 = 5;\ b_{25} = b_1 + 24d = 5 - 24 \cdot 0{,}1 = 2{,}6$

$$S_{25} = \frac{(b_1 + b_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(5+2{,}6) \cdot 25}{2} = 95$$

c) $c_1 = 2;\ c_{25} = 98$

$$S_{25} = \frac{(c_1 + c_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(2+98) \cdot 25}{2} = 1250$$

d) $d_1 = \dfrac{-1}{2};\ d_{25} = \dfrac{-49}{2}$

$$S_{25} = \frac{(d_1 + d_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{49}{2}\right) \cdot 25}{2} = \frac{-625}{2} = -312{,}5$$

8 **Halla la suma de los términos comprendidos entre** a_{25} **y** a_{30}**, ambos inclusive, de las progresiones aritméticas del ejercicio anterior.**

a) $a_{25} = 3 + 24 \cdot 3 = 75$ $\qquad a_{30} = 3 + 29 \cdot 3 = 90$

La suma es: $\dfrac{(75+90) \cdot 6}{2} = 495$

b) $b_{25} = 5 + 24 \cdot (-0{,}1) = 2{,}6$ $\qquad b_{30} = 3 + 29 \cdot (-0{,}1) = 0{,}1$

La suma es: $\dfrac{(2{,}6+0{,}1) \cdot 6}{2} = 8{,}1$

c) $c_{25} = 4 \cdot 25 - 2 = 98$ $\qquad c_{30} = 4 \cdot 30 - 2 = 118$

La suma es: $\dfrac{(98+118) \cdot 6}{2} = 648$

d) $d_{25} = \dfrac{1 - 2 \cdot 25}{2} = -\dfrac{49}{2}$ $\qquad d_{30} = \dfrac{1 - 2 \cdot 30}{2} = -\dfrac{59}{2}$

La suma es: $\dfrac{\left[-\frac{49}{2} + \left(-\frac{59}{2}\right)\right] \cdot 6}{2} = -162$

Progresiones geométricas

9 **De las siguientes sucesiones, ¿cuáles son progresiones geométricas? Escribe tres términos más en cada una y su término general.**

a) 32, 16, 8, 4, 2, …

b) 1; 0,1; 0,01; 0,001; …

c) 1, 4, 9, 16, 25, …

d) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \ldots$

a) Es una progresión geométrica con $a_1 = 32$ y $r = \dfrac{1}{2}$.

$$a_6 = 1,\ a_7 = \frac{1}{2},\ a_8 = \frac{1}{4};\ a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^5}{2^{n-1}} = 2^{6-n}$$

b) No es una progresión geométrica; $b_6 = 36$, $b_7 = 49$, $b_8 = 64$, $b_n = n^2$.

c) Es una progresión geométrica con $c_1 = 1$ y $r = 0{,}1$.

$c_6 = 0{,}00001$; $c_7 = 0{,}000001$; $c_8 = 0{,}0000001$; $c_n = 1 \cdot 0{,}1^{n-1} = 0{,}1^{n-1}$

d) Es una progresión geométrica con $d_1 = \sqrt{2}$ y $r = \sqrt{2}$.

$d_6 = 8$; $d_7 = 8$; $d_8 = 16$; $d_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n$.

10 **Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas y halla la suma de los infinitos términos en los casos que sea posible:**

a) $a_1 = 32$, $r = 1/2$ **b)** $a_1 = 10$, $r = 1/10$

c) $a_1 = 2^{-10}$, $r = 2$ **d)** $a_1 = -5$, $r = -1/4$

$$S_{25} = \frac{a_{25} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^{25} - a_1}{r-1}, \quad S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

a) $$S_{25} = \frac{32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{25} - 32}{\frac{1}{2} - 1} = 63{,}99999809 \approx 64 \qquad S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{32}{1-\frac{1}{2}} = \frac{32}{\frac{1}{2}} = 64$$

b) $$S_{25} = \frac{10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{25} - 10}{\frac{1}{2} - 1} \approx 11{,}1 \approx \frac{100}{9} \qquad S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{32}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100}{9} = 11{,}1$$

c) $$S_{25} = \frac{2^{-10} \cdot 2^{25} - 2^{-10}}{2-1} = 32\,767{,}99902 \approx 32\ 768$$

No se puede calcular S_∞ porque $|r|$ no es mayor que 1.

d) $$S_{25} = \frac{(-5) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{25} - (-5)}{-\frac{1}{4} - 1} \approx -4 \qquad S_\infty = \frac{-5}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-5}{\frac{5}{4}} = -4$$

11 **Halla la suma de los términos comprendidos entre el 10 y el 20, ambos inclusive, de la progresión geométrica cuyo primer término es $a_1 = \frac{1}{512}$ y cuya razón es $r = -2$.**

$$a_{10} = \frac{1}{512} \cdot (-2)^9 = -1$$

$$a_{20} = \frac{1}{512} \cdot (-2)^{19} = -1024$$

La suma es $\frac{(-2) \cdot (-1024) - (-1)}{-2-1} = -683$.

Suma de potencias

12 **Calcula.**

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 50^2$

b) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 100^2$

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 50^2 = \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 42\,925$

b) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 98^2 + 100^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 49^2 + 50^2) = 2^2 \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 171\,700$

13 **Calcula.**

$21^3 + 22^3 + \ldots + 58^3 + 59^3 + 60^3$

$21^3 + 22^3 + \ldots + 58^3 + 59^3 + 60^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + 60^3) - (1^3 + 2^3 + \ldots + 20^3) =$

$$= \frac{60^2 \cdot 61^2}{4} - \frac{20^2 \cdot 21^2}{4} = 3\,304\,800$$

Límites

14 **Calcula los términos a_{10}, a_{100} y $a_{1\,000}$, en estas sucesiones e indica cuál es su límite:**

a) $a_n = \dfrac{1}{n-1}$ **b)** $a_n = \dfrac{2n+5}{n}$ **c)** $a_n = \dfrac{5}{n} - 1$ **d)** $a_n = 3 - 7n$

a) $a_{10} = 0,\widehat{1}$; $a_{100} = 0,\widehat{01}$; $a_{1\,000} = 0,\widehat{001}$

$lím\ a_n = 0$

b) $a_{10} = 2,5$; $a_{100} = 2,05$; $a_{1\,000} = 2,005$

$lím\ a_n = 2$

c) $a_{10} = -0,5$; $a_{100} = -0,95$; $a_{1\,000} = -0,995$

$lím\ a_n = -1$

d) $a_{10} = -6,7$; $a_{100} = -697$; $a_{1\,000} = -6\,997$

$lím\ a_n = -\infty$

15 **Estudia el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos muy avanzados e indica cuál es el límite de cada una de ellas:**

a) $a_n = 5n - 10$ **b)** $b_n = \dfrac{n-3}{n+1}$ **c)** $c_n = \dfrac{n}{2n+1}$ **d)** $d_n = 10 - 5n + n^2$

e) $e_n = 1 - (n+2)^2$ **f)** $f_n = \dfrac{n \cdot (-1)^n}{n+1}$ **g)** $g_n = (-1)^n \cdot (n-1)^2$ **h)** $h_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

i) $i_n = n \cdot (-1)^n - n^2$ **j)** $j_n = \dfrac{3n}{n^2+1}$ **k)** $k_n = \dfrac{5}{3n+2}$ **l)** $l_n = (-1)^{n+1}$

a) $a_{10} = 40$; $a_{100} = 490$; $a_{1\,000} = 4\,990$

$lím\ a_n = +\infty$

b) $b_{10} = 0,63$; $b_{100} \approx 0,9603$; $b_{1\,000} \approx 0,996$

$lím\ b_n = 1$

c) $c_{10} \approx 0,476$; $c_{100} \approx 0,498$; $c_{1\,000} \approx 0,4998$

$lím\ c_n = 0,5 = \dfrac{1}{2}$

d) $d_{1\,000} = 10 - 5 \cdot 1\,000 + 1\,000^2 = 995\,010$; $d_{10\,000} = 10 - 5 \cdot 10\,000 + 10\,000^2 = 99\,950\,010$

$lím\ d_n = +\infty$

e) $e_{1\,000} = 1 - (1\,000 + 2)^2 = -1\,004\,003$; $e_{10\,000} = 1 - (10\,000 + 2)^2 = -100\,040\,003$

$lím\ e_n = -\infty$

f) $f_{1\,000} = \dfrac{1000 \cdot (-1)^{1000}}{1000+1} = \dfrac{1000}{1001}$; $f_{1\,001} = \dfrac{1001 \cdot (-1)^{1001}}{1001+1} = -\dfrac{1001}{1002}$

La sucesión de los términos pares tiende a 1 y la de los impares a –1, luego no tiene límite (además, es oscilante).

g) $g_{1\,000} = (-1)^{1\,000} \cdot (1\,000 - 1)^2 = 998\,001$; $g_{1\,001} = (-1)^{1\,001} \cdot (1\,001 - 1)^2 = -1\,000\,000$

Se trata de una sucesión oscilante en la que los términos pares tienden a $+\infty$ y los impares tienden a $-\infty$. Luego no tiene límite.

h) $h_{1\,000} = \dfrac{(-1)^{1000}}{1000^2} = \dfrac{1}{1000\,000}$; $h_{1\,001} = \dfrac{(-1)^{1001}}{1001^2} = -\dfrac{1}{1002\,001}$

Aunque la sucesión es oscilante, todos los términos tienden a 0, luego $lím\ h_n = 0$.

i) $i_{1\,000} = 1\,000 \cdot (-1)^{1\,000} - 1\,000^2 = -999\,000$; $i_{1\,001} = 1\,001 \cdot (-1)^{1\,001} - 1\,001^2 = -1\,003\,002$

Cuando n es grande, el primer término apenas influye en n^2 y, por tanto, $lím\ i_n = lím\ -n^2 = -\infty$.

j) $j_{1\,000} = \dfrac{3 \cdot 1000}{1000^2+1} = \dfrac{3000}{1000\,001}$; $j_{10\,000} = \dfrac{3 \cdot 10\,000}{10\,000^2+1} = \dfrac{30\,000}{100\,000\,001}$

Observamos que el término independiente del denominador es insignificante con respecto a n^2.

$$lím\ j_n = lím\ \frac{3n}{n^2} = lím\ \frac{3}{n} = 0$$

k) $k_{1\,000} = \dfrac{5}{3 \cdot 1000+2} = \dfrac{5}{3002}$; $k_{10\,000} = \dfrac{5}{3 \cdot 10\,000+2} = \dfrac{5}{30\,002}$

$lím\ k_n = 0$

l) $l_{1\,000} = (-1)^{1\,000+1} = -1$; $l_{1\,001} = (-1)^{1\,001+1} = 1$

Esta sucesión no tiene límite porque los términos pares siempre valen –1 y los impares, 1.

Página 70

Para resolver

16 Calcula la suma de:

a) Los números impares de tres cifras.

b) Los cuadrados de los números impares de tres cifras.

a) Es la suma de los términos de una progresión aritmética en la que el primer término es 101, el último es 999, y hay 450 sumandos:

$$S = \frac{(101+999) \cdot 450}{2} = 247\,500$$

b) Primero calcularemos:

$$101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 999^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 999^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2) =$$

$$= \frac{999 \cdot 1\,000 \cdot 1\,997}{6} - \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = 332\,162\,150$$

Ahora bien:

$$101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 999^2 = (101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 999^2) - (102^2 + 104^2 + 106^2 + \ldots + 998^2)$$

Por otra parte:

$$102^2 + 104^2 + 106^2 + \ldots + 998^2 = (2 \cdot 51)^2 + (2 \cdot 52)^2 + (2 \cdot 53)^2 + \ldots + (2 \cdot 499)^2 =$$

$$= 4 \cdot (51^2 + 52^2 + \ldots + 499^2)$$

Y de la misma forma que al principio,

$$51^2 + 52^2 + \ldots + 499^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 499^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 50^2) =$$

$$= \frac{499 \cdot 500 \cdot 999}{6} - \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 41\,498\,825$$

Finalmente,

$$101^2 + 103^2 + 105^2 + \ldots + 999^2 = 332\,162\,150 - 4 \cdot 41\,498\,825 = 166\,166\,850$$

17 **¿Cuánto vale la suma de los 100 primeros múltiplos de 7?**

Queremos calcular la suma de los 100 primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_1 = 7$ y $d = 7$.

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(7 + 700) \cdot 100}{2} = 35350$$

18 **En una progresión aritmética sabemos que $d = 3$, $a_k = 34$ y $S_k = 133$. Calcula k y a_1.**

$$\left.\begin{array}{l} a_k = a_1 + (k-1) \cdot d \;\rightarrow\; 34 = a_1 + (k-1) \cdot 3 \\ S_k = \dfrac{(a_1 + a_k) \cdot k}{2} \;\rightarrow\; 133 = \dfrac{(a_1 + 34) \cdot k}{2} \end{array}\right\}$$

$34 = a_1 + 3k - 3 \;\rightarrow\; a_1 = 37 - 3k$

$133 = \dfrac{(37 - 3k + 34) \cdot k}{2} \;\rightarrow\; 266 = (71 - 3k)\,k$

$26 = 71k - 3k^2 \;\rightarrow\; 3k^2 - 71k + 266 = 0$

$$k = \frac{71 \pm \sqrt{5041 - 3192}}{6} = \frac{71 \pm \sqrt{1849}}{6} = \frac{71 \pm 43}{6} = \begin{cases} k = 14/3 \text{ (no vale)} \\ k = 19 \end{cases}$$

$a_1 = 37 - 3 \cdot 19 = 37 - 57 = -20 \;\rightarrow\; a_1 = -20$

19 **En una progresión geométrica de razón $r = 3$ conocemos $S_6 = 1\,456$. Calcula a_1 y a_4.**

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot 5 - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^6 - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot 729 - a_1}{2} = \frac{728a_1}{2} = 364a_1 = 1\,456 \;\rightarrow\; a_1 = 4$$

$a_4 = a_1 \cdot r^3 = 4 \cdot 27 = 108$

20 **La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es igual a 4 y $a_2 = 1$. Calcula a_1 y la razón.**

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot r = 1 \;\rightarrow\; a_1 = \dfrac{1}{r} \\ S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r} = \dfrac{1/r}{1 - r} = \dfrac{1}{r - r^2} = 4 \;\rightarrow\; 1 = 4r - 4r^2 \end{cases}$$

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \;\rightarrow\; r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; r = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; a_1 = 2$$

21 **Sabemos que la suma de 138 números naturales consecutivos es 30 291. ¿Cuáles son el primero y el último?**

Supongamos que el primer término es k. Entonces el último será $k + 137$, luego:

$30\,291 = \dfrac{(k + k + 137) \cdot 138}{2} \;\rightarrow\; k = 151$ es el primer número natural y $k + 137 = 288$ es el último

22 **Calcula la suma de todos los términos comprendidos entre el 10 y el 20, ambos inclusive, de estas sucesiones dadas por recurrencia:**

a) $a_1 = 20$, $a_n = a_{n-1} + 4$

b) $b_1 = 7$, $b_2 = 13$, $b_n = b_{n-2} + 12$

c) $c_1 = 0{,}625$, $c_n = 2c_{n-1}$

d) $d_1 = 4$, $d_2 = 6$, $d_n = d_{n-2} \cdot \dfrac{9}{4}$

a) Esta sucesión es una progresión aritmética en la que $a_1 = 20$ y $d = 4$.

$a_{10} = 20 + 9 \cdot 4 = 56$; $a_{20} = 20 + 19 \cdot 4 = 96$

La suma es: $\dfrac{(56 + 96) \cdot 11}{2} = 836$

b) Esta sucesión es una progresión aritmética en la que $b_1 = 7$ y $d = 6$.

$b_{10} = 7 + 9 \cdot 6 = 61$; $b_{20} = 7 + 19 \cdot 6 = 121$

La suma es: $\dfrac{(61+121)\cdot 11}{2} = 1001$

c) En esta ocasión tenemos una progresión geométrica en la que $c_1 = 0{,}625$ y $r = 2$.

$c_{10} = 0{,}625 \cdot 2^9 = 320$; $c_{20} = 0{,}625 \cdot 2^{19} = 327\,680$

La suma es: $\dfrac{2 \cdot 327\,680 - 320}{2-1} = 655\,040$

d) Esta sucesión es una progresión geométrica en la que $d_1 = 4$ y $r = \dfrac{3}{2}$.

$d_{10} = 4 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^9 = \dfrac{19\,683}{128}$; $d_{20} = 4 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{19} = \dfrac{1162\,261\,467}{131\,072}$

La suma es: $\dfrac{\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1162\,261\,467}{131\,072} - \dfrac{19\,683}{128}}{\dfrac{3}{2} - 1} \approx 26\,294{,}5$

23 **Halla la suma de todos los términos a partir del décimo de esta sucesión: $a_1 = 6\,144$, $a_2 = 3\,072$, $a_n = \dfrac{1}{4}\, a_{n-2}$.**

La sucesión dada es una progresión geométrica de razón $r = \dfrac{1}{2}$. Por tanto, se puede calcular la suma de los infinitos términos de la sucesión.

$a_{10} = 6\,144 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = 12$

La suma pedida es $\dfrac{12}{1 - \dfrac{1}{2}} = 24$.

24 **Una célula alcanza la madurez y se reproduce por mitosis al cabo de 40 minutos. Partiendo de un cultivo inicial de 625 células, ¿cuántas tendremos al cabo de 4 horas?**

Observemos la sucesión;

$a_1 = 625$ (cultivo de partida)

$a_2 = 625 \cdot 2 = 1\,250$ (40 min)

$a_3 = 1\,250 \cdot 2 = 625 \cdot 2^2 = 2\,500$ (80 min)

Vemos que los términos forman una progresión geométrica de razón $r = 2$.

El término general es $a_n = 625 \cdot 2^{n-1}$.

Por otro lado, 4 h = 4 · 60 min = 240 min se corresponden con $n = 7$.

El número de células es $a_7 = 625 \cdot 2^6 = 40\,000$.

25 **En la primera década del siglo XXI la población española ha crecido un 1,4 % anualmente. Si a finales de 2010 había 46 millones de habitantes, ¿cuántos había a comienzos del año 2001?**

Si llamamos P a la población a comienzos de 2001, la población evolucionará de la siguiente forma:

- Finales de 2001: $P\left(1 + \dfrac{1{,}4}{100}\right)$
- Finales de 2002: $P\left(1 + \dfrac{1{,}4}{100}\right)^2$

…

- Finales de 2010: $P\left(1 + \dfrac{1{,}4}{100}\right)^{10}$

Por tanto, $P\left(1 + \dfrac{1{,}4}{100}\right)^{10} = 46 \to P \cdot 1{,}014^{10} = 46 \to P = \dfrac{46}{1{,}014^{10}} \approx 40\,029\,326$ habitantes.

26 **Se sabe que los ángulos de cierto pentágono están en progresión aritmética. Si el menor mide 50°, halla los demás.**

* ***Recuerda cómo se obtiene la suma de los ángulos de un pentágono.***

La suma de los ángulos de un pentágono es: $180° \cdot (5 - 2) = 540°$

Si d es la diferencia de dicha progresión, tenemos que: $\dfrac{(50 + 50 + 4d) \cdot 5}{2} = 540$

de donde se obtiene que $d = 29$ y los demás ángulos son: 79°, 108°, 137° y 166°.

27 **Los lados de un hexágono están en progresión aritmética. Calcúlalos sabiendo que el mayor mide 13 cm y que su perímetro es de 48 cm.**

Llamamos a los lados a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6.

Sabemos que $a_6 = 13$ cm y que $S_6 = 48$. Por tanto:

$$\begin{cases} a_6 = a_1 + 5d \rightarrow 13 = a_1 + 5d \rightarrow a_1 = 13 - 5d \\ S_6 = \dfrac{(a_1 + a_6) \cdot 6}{2} \rightarrow 48 = (13 - 5d + 13) \cdot 3 \rightarrow 48 = (26 - 5d) \cdot 3 \end{cases}$$

$48 = 78 - 15d \rightarrow 15\text{d} = 30 \rightarrow d = \dfrac{30}{15} = 2 \rightarrow d = 2$

$a_1 = 13 - 5 \cdot 2 = 13 - 10 = 3 \rightarrow a_1 = 3$

Los lados del hexágono miden 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm y 13 cm.

28 **En un cine, la segunda fila de butacas está a 10 m de la pantalla y la séptima fila está a 16 m. ¿En qué fila debe sentarse una persona que le guste ver la pantalla a una distancia de 28 m?**

$a_7 = 16 \rightarrow a_7 = a_2 + 5d = 10 + 5d = 16 \rightarrow d = 1{,}2$

(La distancia entre las dos filas consecutivas es de 1,2 metros).

Buscamos n para que $a_n = 28$ m:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 8{,}8 + (n - 1) \cdot 1{,}2 = 28 \rightarrow 8{,}8 + 1{,}2n - 1{,}2 = 28 \rightarrow 1{,}2n = 20{,}4 \rightarrow n = 17$$

La fila 17 está a 28 metros.

29 **La maquinaria de una fábrica pierde cada año un 20 % de su valor. Si costó 4 millones de euros, ¿en cuánto se valorará después de 10 años de funcionamiento?**

– Al cabo de 1 año valdrá $\rightarrow (4 \cdot 10^6) \cdot 0{,}8$ €

– Al cabo de 2 años valdrá $\rightarrow (4 \cdot 10^6) \cdot 0{,}8^2$ €

…

– Al cabo de 10 años valdrá $\rightarrow (4 \cdot 10^6) \cdot 0{,}8^{10} \approx 429496{,}73$ €

30 **El 1 de enero depositamos 5 000 € en una cuenta bancaria a un interés anual del 6 % con abono mensual de intereses. ¿Cuánto dinero tendremos un año después si no hemos sacado nada en ese tiempo?**

* ***Un 6 % anual corresponde a $\frac{6}{12}$ = 0,5 % mensual.***

– Al cabo de 1 mes tendremos $\rightarrow 5\,000 \cdot 1{,}005$ €

– Al cabo de 2 meses tendremos $\rightarrow 5\,000 \cdot 1{,}005^2$ €

…

– Al cabo de 12 meses tendremos $\rightarrow 5\,000 \cdot 1{,}005^{12} \approx 5\,308{,}39$ €

31 **Recibimos un préstamo de 2 000 € al 10 % de interés anual y hemos de devolverlo en 4 años, pagando cada año los intereses de la parte adeudada más la cuarta parte del capital prestado. Calcula lo que tenemos que pagar cada año.**

$a_1 = 500 + 2\,000 \cdot 0{,}1 = 700$ €

$a_2 = 500 + 1\,500 \cdot 0{,}1 = 650$ €

$a_3 = 500 + 1\,000 \cdot 0{,}1 = 600$ €

$a_4 = 500 + 500 \cdot 0{,}1 = 550$ €

32 **Utiliza las sumas de los términos de una progresión geométrica para expresar los siguientes números decimales periódicos como fracciones:**

a) $2{,}\widehat{4}$ **b)** $1{,}\widehat{72}$ **c)** $0{,}3\widehat{5}$ **d)** $3{,}75\widehat{923}$

a) $2{,}444\ldots = 2 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \ldots = 2 + 4\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots\right) =$

$$= 2 + 4 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 2 + 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{22}{9}$$

b) $1{,}727272\ldots = 1 + \frac{72}{100} + \frac{72}{10\,000} + \frac{72}{100\,000} + \ldots = 1 + 72 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000} + \frac{1}{10\,000\,000} + \ldots\right) =$

$$= 1 + 72 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 1 + 72 \cdot \frac{1}{99} = \frac{19}{11}$$

c) $0{,}35555\ldots = \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10\,000} + \ldots = \frac{3}{10} + 5 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10\,000} + \ldots\right) =$

$$= \frac{3}{10} + 5 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} + 5 \cdot \frac{1}{90} = \frac{16}{45}$$

d) $3{,}75923923923\ldots = 3 + \frac{75}{100} + \frac{923}{100\,000} + \frac{923}{100\,000\,000} + \ldots =$

$$= \frac{375}{100} + 923 \cdot \left(\frac{1}{100\,000} + \frac{1}{100\,000\,000} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{375}{100} + 923 \cdot \frac{\frac{1}{100\,000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{375}{100} + 923 \cdot \frac{1}{99\,900} = \frac{93\,887}{24\,975}$$

33 **Calcula el límite de las siguientes sucesiones:**

a) $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$ **b)** $b_n = \frac{5^n}{n^7}$ **c)** $c_n = \frac{(n-1)^2}{n^2+3}$ **d)** $d_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}$

e) $e_n = \frac{3n+1}{\sqrt{n}}$ **f)** $f_n = \sqrt{\frac{4n-3}{n+2}}$ **g)** $g_n = \frac{(1+n)^3}{(n-2)^2}$ **h)** $h_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$

a) $a_{1\,000} = 1 + \frac{1}{2^{1000}} \approx 1$

Vemos que el límite es 1 porque el segundo sumando tiende a 0.

b) $b_{10} = \frac{5^{10}}{10^7} = \frac{125}{128}$; $b_{100} = \frac{5^{100}}{100^7} = 7{,}8886 \times 10^{55}$; $b_{150} = \frac{5^{150}}{150^7} = 4{,}1007 \times 10^{89}$

Como se puede ver la sucesión crece indefinidamente y el límite es $+\infty$.

c) $c_{10} = 0{,}7864$; $c_{100} = 0{,}9798$; $c_{1\,000} = 0{,}9980$

$lím\ c_n = 1$

d) $d_{10} = 0{,}5025$; $d_{100} = 0{,}500025$; $d_{1\,000} = 0{,}50000025$

$lím\ d_n = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

e) $e_{10} = 9{,}80$; $e_{100} = 30{,}1$; $e_{1\,000} = 94{,}90$

$lím\ e_n = +\infty$

f) $f_{10} = 1{,}756$; $f_{100} = 1{,}973$; $f_{1\,000} = 1{,}997$

$lím\ f_n = 2$

g) $g_{10} = 20{,}797$; $g_{100} = 107{,}278$; $g_{1\,000} = 1007{,}027$

$lím\ g_n = +\infty$

h) $h_{10} = 0{,}760$; $h_{100} = 0{,}909$; $h_{1\,000} = 0{,}969$

$lím\ h_n = 1$

34 Calcula el término general de las siguientes sucesiones y luego halla su límite:

a) $\frac{3}{-2}, \frac{5}{-7}, \frac{7}{-12}, \frac{9}{-17}, \frac{11}{-22}, \dots$ **b)** $\frac{7}{1}, \frac{4}{4}, \frac{1}{9}, \frac{-2}{16}, \frac{-5}{25}, \dots$

c) $\frac{-99}{10}, \frac{-96}{20}, \frac{-91}{30}, \frac{-84}{40}, \frac{-75}{50}, \dots$

a) Tanto las sucesiones de los numeradores como las de los denominadores son progresiones aritméticas.

$$a_n = \frac{3+(n-1)\cdot 2}{-2+(n-1)\cdot(-5)} = \frac{2n+1}{-5n+3} \qquad lím\ a_n = -\frac{2}{5}$$

b) La sucesión de los numeradores es una progresión aritmética y la de los denominadores es la sucesión de los cuadrados de los números naturales.

$$b_n = \frac{7+(n-1)\cdot(-3)}{n^2} = \frac{-3n+10}{n^2} \qquad lím\ b_n = 0$$

c) La sucesión de los numeradores se obtiene restando a 100 los cuadrados de los números naturales. Los denominadores son los múltiplos de 10.

$$c_n = \frac{100-n^2}{10n} \qquad lím\ c_n = -\infty$$

35 Halla el término general y estudia el límite de esta sucesión:

$2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{2}, \dots$

$a_n = \sqrt[n]{2} = 2^{1/n}$

$a_1 = 2$; $a_2 = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$; $a_3 = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599$; $a_4 = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}1892$; …; $a_{10} \approx 1{,}0718$

$a_{100} \approx 1{,}00696$; $lím\ a_n = 1$

36 a) Demuestra que:

$$\mathbf{2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)}$$

b) Calcula la suma de los cuadrados de los 50 primeros números pares.

c) Calcula la suma de los cuadrados de todos los números impares menores que 100.

a) $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = (2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 4)^2 + (2 \cdot 5)^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$

b) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 49^2 + 50^2) = 2^2\ \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 171\,700$

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 99^2 + 100^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2) =$

$$= \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - 171\,700 = 338\,350 - 171\,700 = 166\,650$$

37 **Halla la siguiente suma:**

$$11^3 + 13^3 + 15^3 + 17^3 + \ldots + 33^3$$

Llamamos $S = 11^3 + 13^3 + \ldots + 31^3 + 33^3$.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3 + 11^3 + 12^3 + \ldots + 32^3 + 33^3 = \dfrac{33^2 \cdot 34^2}{4} = 314\,721$

$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 32^3 = 2^3(1^3 + 2^3 + \ldots + 16^3) = 8 \cdot \dfrac{16^2 \cdot 17^2}{4} = 147\,968$

Por tanto:

$1^3 + 3^3 + \ldots + 9^3 + 11^3 + 13^3 + \ldots + 31^3 + 33^3 = 314\,721 - 147\,968 = 166\,753$

$S = 166\,753 - (1^3 + 3^3 + \ldots + 9^3) = 166\,753 - 1\,225 = 165\,528$

Página 71

Cuestiones teóricas

38 **Sea a_n una progresión aritmética con $d > 0$. ¿Cuál es su límite?**

Si $d > 0$, la sucesión se va haciendo cada vez mayor. Por tanto, $lím\ a_n = +\infty$.

39 **Si a_n es una progresión geométrica con $r = \dfrac{1}{3}$, ¿cuál es su límite?**

* ***Ten en cuenta el signo del primer término.***

Al ir multiplicando por $\dfrac{1}{3}$ sucesivamente, los términos se van aproximando a cero.

Es decir, $lím\ a_n = 0$.

40 **Si la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es 5, ¿qué podemos decir del valor de r?**

Inventa un ejemplo con r positivo en el que se verifique esto. Inventa otro ejemplo con r negativo.

Podemos decir que $|r| < 1$ porque se pueden sumar sus infinitos términos.

Con $r > 0$ tenemos, por ejemplo: $\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{5}{16}, \ldots$ ya que $S_\infty = \dfrac{\frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 5$.

Con $r < 0$ tenemos, por ejemplo: $\dfrac{20}{3}, -\dfrac{20}{9}, \dfrac{20}{27}, -\dfrac{20}{81}, \ldots$

En este caso $S_\infty = \dfrac{\frac{20}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = 5$

41 **La sucesión 3, 3, 3, 3, … puede considerarse una progresión aritmética y también geométrica. ¿Cuál es la diferencia en el primer caso? ¿Y la razón en el segundo?**

– Es una progresión aritmética con $d = 0$.

– También es una progresión geométrica con $r = 1$.

42 **En una progresión geométrica cualquiera, a, ar, ar^2, …, comprueba que:**

$$a_1 \cdot a_6 = a_2 \cdot a_5 = a_3 \cdot a_4$$

¿Se verifica también que $a_3 \cdot a_7 = a_4 \cdot a_6$? Enuncia una propiedad que exprese los resultados anteriores.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdot a_6 = a \cdot (a \cdot r^5) = a^2 \cdot r^5 \\ a_2 \cdot a_5 = (a \cdot r) \cdot (a \cdot r^4) = a^2 \cdot r^5 \\ a_3 \cdot a_4 = (a \cdot r^2) \cdot (a \cdot r^3) = a^2 \cdot r^5 \end{array}\right\} \text{ Son iguales}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_3 \cdot a_7 = (a \cdot r^2) \cdot (a \cdot r^6) = a^2 \cdot r^8 \\ a_4 \cdot a_6 = (a \cdot r^3) \cdot (a \cdot r^5) = a^2 \cdot r^8 \end{array}\right\} \text{ Son iguales}$$

Para profundizar

43 **Calcula el límite de cada una de estas sucesiones:**

a) $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2}$

b) $\dfrac{1^2}{1^3}, \dfrac{1^2+2^2}{1^3+2^3}, \dfrac{1^2+2^2+3^2}{1^3+2^3+3^3}, \ldots$

c) $\dfrac{1 \cdot 1^2}{1^3}, \dfrac{2 \cdot (1^2+2^2)}{1^3+2^3}, \dfrac{3 \cdot (1^2+2^2+3^2)}{1^3+2^3+3^3}, \ldots$

d) $\dfrac{1 \cdot 2^2}{1^3}, \dfrac{2 \cdot (2^2+4^2)}{1^3+2^3}, \dfrac{3 \cdot (2^2+4^2+6^2)}{1^3+2^3+3^3}, \ldots$

a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n) = \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{(1+n) \cdot n}{2}\right) = \dfrac{1}{n^2} \cdot \left(\dfrac{n+n^2}{2}\right) = \dfrac{n^2+n}{2n^2}$

Hallamos el límite: $a_{10} = 0{,}55$; $a_{100} = 0{,}505$; $a_{1\,000} = 0{,}5005$; $lím\ a_n = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$

b) Usamos los resultados de la página 59 de esta unidad para el numerador y el denominador.

$$b_n = \frac{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}} = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)} = \frac{4n+2}{3n^2+3n}; \quad lím\ \frac{4n+2}{3n^2+3n} = 0$$

c) Cada término de esta sucesión es igual al correspondiente de la anterior multiplicado por el lugar que ocupa. Es decir:

$$c_n = n \cdot b_n = \frac{4n^2+2n}{3n^2+3n}; \quad lím\ \frac{4n^2+2n}{3n^2+3n} = \frac{4}{3}$$

d) Observamos que:

$2^2 = 2^2 \cdot 1^2$

$2^2 + 4^2 = 2^2 \cdot (1^2 + 2^2)$

$2^2 + 4^2 + 6^2 = 2^2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2)$

Este resultado es el cuádruple de la sucesión del numerador del apartado b), por tanto, el término general de este numerador es $n \cdot 4 \cdot \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

El denominador es igual al denominador de la sucesión del apartado b).

$$d_n = \frac{n \cdot 4 \cdot \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}} = \frac{16n^2(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)^2} = \frac{16n+8}{3n+3}; \quad lím\ \frac{16n+8}{3n+3} = \frac{16}{3}$$

44 **Si llamamos f_n y l_n a los términos generales de las sucesiones de Fibonacci y Lucas, respectivamente:**

a) Comprueba que: $l_n = f_{n-1} + f_{n+1} = 2f_{n-1} + f_n$

b) Halla el término l_{20} obteniendo, a partir de la fórmula, los términos de la sucesión de Fibonacci que necesites.

c) Comprueba que $lím \dfrac{l_{n+1}}{l_n} = \phi$, dividendo, por ejemplo, $l_{11} : l_{10}$ y $l_{12} : l_{11}$.
¿Sabrías demostrarlo de forma general?

a) Podemos comprobar la relación observando los primeros términos de ambas sucesiones:

Sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …

Sucesión de Lucas: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, …

Por ejemplo, $l_3 = 4 = 1 + 3 = f_2 + f_5$ o también, $l_6 = 18 = 5 + 13 = f_5 + f_7$

Veámoslo en general:

Utilizando la propiedad del ejercicio 11 (pág. 60 de la unidad), tenemos que:

$$f_{n+1} + f_{n-1} = \frac{l_n + l_{n+2}}{5} + \frac{l_{n-2} + l_n}{5} = \frac{2}{5}l_n + \frac{1}{5}l_{n-2} + \frac{1}{5}l_{n+2} = \frac{2}{5}l_n + \frac{1}{5}l_{n-2} + \frac{1}{5}(l_{n+1} + l_n) =$$

$$= \frac{3}{5}l_n + \frac{1}{5}l_{n+1} + \frac{1}{5}l_{n-2} = \frac{3}{5}l_n + \frac{1}{5}(l_n + l_{n-1}) + \frac{1}{5}l_{n-2} = \frac{4}{5}l_n + \frac{1}{5}l_{n-1} + \frac{1}{5}l_{n-2} =$$

$$= \frac{4}{5}l_n + \frac{1}{5}(l_{n-1} + l_{n-2}) = \frac{4}{5}l_n + \frac{1}{5}l_n = l_n$$

Además, $f_{n+1} + f_{n-1} = (f_n + f_{n-1}) + f_{n-1} = 2f_{n-1} + f_n$ por la forma en la que se construye la sucesión de Fibonacci.

b) Utilizando la propiedad del ejercicio 10 (pág. 60 de la unidad), tenemos que:

$$f_{19} \approx \frac{\phi^{19}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{19} = 4181$$

$$f_{20} \approx \frac{\phi^{20}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{20} = 6765$$

$l_{20} = 2f_{19} + f_{20} = 2 \cdot 4181 + 6765 = 15127$

c) $f_9 \approx \dfrac{\phi^9}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^9 = 34$

$$f_{10} \approx \frac{\phi^{10}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} = 55$$

$f_{11} = 34 + 55 = 89$

$f_{12} = 55 + 89 = 144$

$l_{10} = 2f_9 + f_{10} = 2 \cdot 34 + 55 = 123$

$l_{11} = 2f_{10} + f_{11} = 2 \cdot 55 + 89 = 199$

$l_{12} = 2f_{11} + f_{12} = 2 \cdot 89 + 144 = 322$

$\dfrac{l_{11}}{l_{10}} = \dfrac{199}{123} \approx 1{,}6179$; $\dfrac{l_{12}}{l_{11}} = \dfrac{322}{199} \approx 1{,}6181$, que son valores muy próximos a $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$.

De forma general:

$$lím \frac{l_{n+1}}{l_n} = lím \frac{f_n + f_{n+2}}{f_{n-1} + f_{n+1}} = lím \frac{\dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{\phi^{n+2}}{\sqrt{5}}}{\dfrac{\phi^{n-1}}{\sqrt{5}} + \dfrac{\phi^{n+1}}{\sqrt{5}}} = lím \frac{\phi^n(1+\phi^2)}{\phi^{n-1}(1+\phi^2)} = lím\, \phi = \phi$$

Autoevaluación

Página 71

1 Determina los términos a_1, a_{97} y a_{500} de la sucesión cuyo término general es: $a_n = \dfrac{n^2 - 709}{n+3}$

¿Cuál es su límite?

$a_1 = \dfrac{1^2 - 709}{1+3} = -177$; $a_{97} = \dfrac{97^2 - 709}{97+3} = 87$; $a_{500} = \dfrac{500^2 - 709}{500+3} = \dfrac{249\,291}{503} = 495,61$

Observamos que los términos independientes se hacen insignificantes comparados con los otros términos, luego:

$$lím\ a_n = lím\ \frac{n^2}{n} = lím\ n = +\infty$$

2 Escribe los diez primeros términos de la sucesión definida así: $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1}$

$a_1 = 4$; $a_2 = 7$; $a_3 = 2 \cdot 4 - 7 = 1$; $a_4 = 2 \cdot 7 - 1 = 13$; $a_5 = 2 \cdot 1 - 13 = -11$;

$a_6 = 2 \cdot 13 - (-11) = 37$; $a_7 = 2 \cdot (-11) - 37 = -59$; $a_8 = 2 \cdot 37 - (-59) = 133$;

$a_9 = 2 \cdot (-59) - 133 = -251$; $a_{10} = 2 \cdot 133 - (-251) = 517$

3 Halla el término general de las siguientes sucesiones. Indica cuáles de ellas son progresiones aritméticas y cuáles progresiones geométricas:

a) 3, 7, 11, 15, 19, 23, …

b) 1, 2, 5, 10, 17, 26, …

c) 1 024, 512, 256, 128, …

d) 3, –9, 27, –81, 243, …

e) 8/13, 19/52, 3/26, –7/52, …

f) 4, 3, 5, 2, 6, 1, 7, 0, …

g) 24, 18, 27/2, 81/8, 243/32, …

h) 0, 2, 6, 12, 20, 30, …

a) Es una progresión aritmética de diferencia $d = 4$.

$a_n = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$

b) No es una progresión. Los términos son una unidad mayor que los cuadrados perfectos, empezando por el cuadrado de 0.

$b_n = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$

c) Es una progresión geométrica de razón $r = \dfrac{1}{2}$.

$c_n = 512 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^9 \cdot 2^{1-n} = 2^{10-n}$

d) Es una progresión geométrica de razón $r = -3$.

$d_n = 3 \cdot (-3)^{n-1}$

e) $\dfrac{8}{13} = \dfrac{32}{52}, \dfrac{19}{52}, \dfrac{3}{26} = \dfrac{6}{52}, \dfrac{-7}{52}, \dots$

Así vemos que es una progresión aritmética de diferencia $d = -\dfrac{16}{52}$.

$e_n = \dfrac{8}{13} + (n-1) \cdot \left(-\dfrac{16}{52}\right) = \dfrac{-4n+12}{13}$

f) No es una progresión. Los términos impares forman una progresión aritmética de diferencia $d = 1$. Los términos pares forman una progresión aritmética de diferencia $d = -1$.

$$f_n = \begin{cases} 3 + \dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 4 - \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

g) Es una progresión geométrica de razón $r = \frac{3}{4}$.

$g_n = 24 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

h) No es una progresión. Observamos la siguiente relación:

$0 = 1 \cdot 0$

$2 = 2 \cdot 1$

$6 = 3 \cdot 2$

$12 = 4 \cdot 3$

$20 = 5 \cdot 4$

…

Luego $h_n = n(n-1) = n^2 - n$

4 Halla la ley de recurrencia por la que se forman las siguientes sucesiones:

a) 7, 8, 15, 23, 38, 61, …

b) 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, …

c) 0, 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, …

d) 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, …

a) Cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores. Por tanto:

$a_1 = 7 \qquad a_2 = 8 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

b) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$a_1 = 1 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 1 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

c) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 2 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

d) $a_1 = 1 \qquad a_2 = 1 \qquad a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$

5 Halla las siguientes sumas:

a) 3 + 7 + 11 + … + 43

b) 1 000 + 1 000 · 1,1 + 1 000 · 1,1^2 + … + 1 000 · 1,1^{15}

c) 80 + 40 + 20 + 10 + 5 + …

d) 101^2 + 102^2 + 103^2 + … + 140^2

e) 3^3 + 4^3 + 5^3 + … + 15^3

a) Es la suma de los once primeros términos de una progresión aritmética de primer término $a_1 = 3$ y diferencia $d = 4$.

$a_n = 4n - 1 \qquad a_1 = 3 \qquad a_{11} = 43$

$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{3 + 43}{2} \cdot 11 = 253$

b) Es la suma de los quince primeros términos de una progresión geométrica de primer término $a_1 = 1\,000$ y razón $r = 1,1$.

$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1} \rightarrow S_{15} = \frac{1000 \cdot 1,1^{15} - 1000}{1,1 - 1} = 31\,772,48$

c) Es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de primer término $a_1 = 80$ y razón $r = 1/2$.

$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{80}{1 - 1/2} = 160$

d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 140^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 140^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2) =$

$$= \frac{140 \cdot 141 \cdot 281}{6} - \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = \frac{5546960 - 2030100}{6} = 586\,140$$

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + 15^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 15^3) - (1^3 + 2^3) = \dfrac{15^2 \cdot 16^2}{4} - 9 = 14\,391$

6 **En una progresión aritmética, $a_{15} = 43$ y $a_{86} = 85{,}6$.**

a) Calcula S_{100}.

b) Obtén el valor de a_{220}.

$$\left.\begin{array}{l} a_{15} = a_1 + 14d = 43 \\ a_{86} = a_1 + 85d = 85{,}6 \end{array}\right\} \rightarrow 85d - 14d = 42{,}6 \rightarrow d = 0{,}6$$

$a_1 = 43 - 14 \cdot 0{,}6 = 34{,}6$

a) $a_{100} = 34{,}6 + 99 \cdot 0{,}6 = 94$

$S_{100} = \dfrac{(34{,}6 + 94) \cdot 100}{2} = 6\,430$

b) $a_{220} = a_1 + 219 \cdot d = 34{,}6 + 219 \cdot 0{,}6 = 166$

7 **Dados estos dos términos de una sucesión, $a_1 = 2$ y $a_3 = 8$, halla cuatro términos más y el término general suponiendo que se trata de una progresión:**

a) aritmética.

b) geométrica.

a) Si es una progresión aritmética, entonces:

$a_3 = a_1 + 2d \rightarrow 8 = 2 + 2d$, de donde $d = 3$.

Término general: $a_n = 2 + 3(n - 1)$

Términos de esta progresión son: $a_2 = 5$; $a_4 = 11$; $a_5 = 14$ y $a_6 = 17$.

b) Si es una progresión geométrica, entonces:

$a_3 = 8$

$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 8$ y, de aquí, $r = 2$.

Término general: $a_n = 2^n$

Términos de esta progresión son: $a_2 = 4$; $a_4 = 16$; $a_5 = 32$; $a_6 = 64$.

8 **Halla los límites de las siguientes sucesiones:**

a) $a_n = \dfrac{5}{n}$ **b)** $b_n = \dfrac{5 + 3n}{n + 1}$ **c)** $c_n = \dfrac{n^2 + 1}{5n}$

d) $d_n = (-5)^n + n^2$ **e)** $e_n = \dfrac{5n - 2}{3 - 2n}$ **f)** $f_n = (-3)^n$

g) $g_n = \dfrac{3}{n} + \dfrac{n}{3}$ **h)** $h_n = \dfrac{4\,000n^2}{-n^3}$ **i)** $i_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{2n}$

a) $a_{10} = 0{,}5$ $a_{100} = 0{,}05$ $a_{1\,000} = 0{,}005 \rightarrow \lim \dfrac{5}{n} = 0$

b) $b_{10} = 3{,}18$ $b_{100} = 3{,}02$ $b_{1\,000} = 3{,}002 \rightarrow \lim \dfrac{5 + 3n}{n + 1} = 3$

c) $c_{10} = 2{,}02$ $c_{100} = 20{,}002$ $c_{1\,000} = 200{,}0002 \rightarrow \lim \dfrac{n^2 + 1}{5n} = +\infty$

d) $d_{100} = (-5)^{100} + 100^2 = 7{,}8886 \cdot 10^{69}$

$d_{101} = (-5)^{101} + 101^2 = -3{,}9443 \cdot 10^{70}$

En esta sucesión la potencia de n apenas influye en el valor de los términos. Se trata de una sucesión oscilante en la que los términos pares tienden a +∞ y los impares tienden a –∞. Por tanto, no tiene límite.

e) $e_{100} = \dfrac{5 \cdot 100 - 2}{3 - 2 \cdot 100} = -\dfrac{498}{197} = -2{,}5279$

$e_{1\,000} = \dfrac{5 \cdot 1000 - 2}{3 - 2 \cdot 1000} = -\dfrac{4998}{1997} = -2{,}5028$

En esta sucesión los términos independientes tienen una influencia insignificante.

$\textit{lím}\ \dfrac{5n-2}{3-2n} = \textit{lím}\ \dfrac{5n}{-2n} = -\dfrac{5}{2}$

f) $f_{50} = (-3)^{50} = 7{,}1790 \cdot 10^{23}$

$f_{51} = (-3)^{51} = -2{,}1537 \cdot 10^{24}$

Se trata de una sucesión oscilante en la que los términos pares tienden a +∞ y los impares, a –∞. Por tanto, no tiene límite.

g) $g_{100} = \dfrac{3}{100} + \dfrac{100}{3} = 33{,}363$

$g_{1\,000} = \dfrac{3}{1000} + \dfrac{1000}{3} = 333{,}34$

En esta sucesión la primera fracción se hace cada vez más próxima a cero, ejerciendo una influencia insignificante en el resultado.

La segunda fracción se hace muy grande cuando n crece indefinidamente.

Por tanto, $\textit{lím}\ g_n = \textit{lím}\ \dfrac{n}{3} = +\infty$.

h) $\textit{lím}\ \dfrac{4\,000n^2}{-n^3} = \textit{lím}\ \dfrac{4\,000}{-n} = 0$ porque el numerador es constante y el denominador, en valor absoluto, se hace muy grande.

i) $i_{1\,000} = \dfrac{(-1)^{1000}+1}{2 \cdot 1000} = \dfrac{1}{1000} = 0{,}001$

$i_{1\,001} = \dfrac{(-1)^{1001}+1}{2 \cdot 1001} = 0$

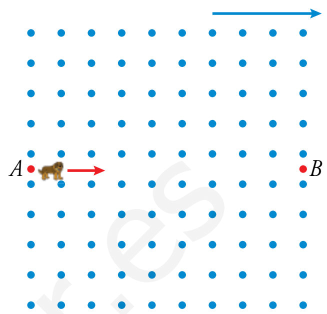
Los términos impares siempre valen 0 y los pares tienden a 0 porque el numerador es constantemente 2 y el denominador se hace muy grande.

Por tanto, $\textit{lím}\ i_n = 0$.

Resuelve

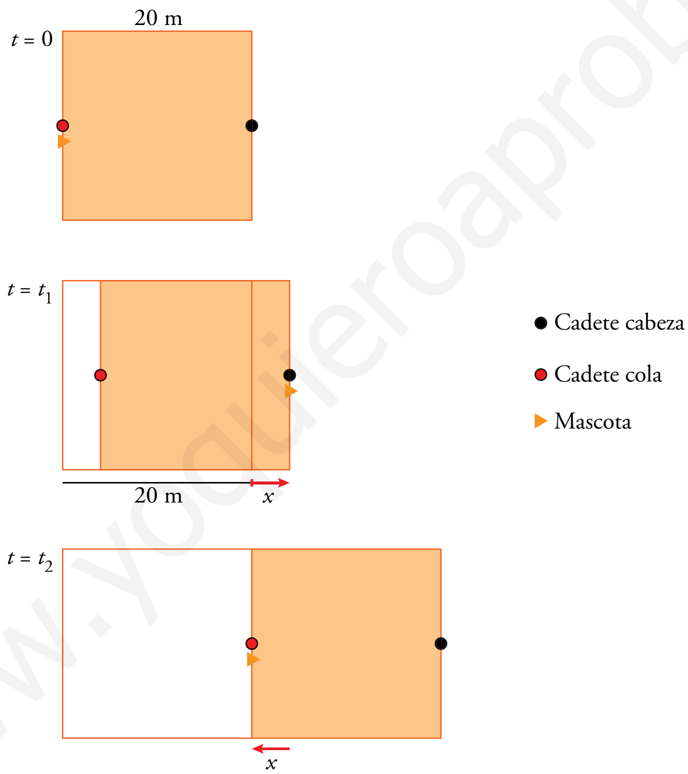
Página 73

Los cadetes que desfilan con su mascota



Una compañía de cadetes, formada en cuadro de 20 metros de lado, avanza con paso regular. La mascota de la compañía, un pequeño perro, parte del centro de la última fila, punto *A*, camina en línea recta hasta el centro de la fila de cabeza, punto *B*, y regresa del mismo modo hasta el centro de la última fila. En el momento de volver a alcanzar *A*, los cadetes han recorrido exactamente 20 metros. Suponiendo que el perro camina con velocidad constante y que no pierde tiempo en los giros, ¿cuántos metros ha recorrido?

Representamos esquemáticamente el movimiento de la mascota y de los cadetes:



Llamamos x al espacio que recorre el soldado de cabeza hasta que la mascota lo alcanza, y usaremos la fórmula $tiempo = \dfrac{espacio}{velocidad}$.

El tiempo que tarda la mascota en llegar hasta el soldado de cabeza, t_1, es el mismo que el que tarda el soldado de cabeza en recorrer los x metros.

Llamamos $v_{mascota}$ a la velocidad de la mascota y v_{cadete} a la velocidad de los cadetes.

La ventaja del cadete de cabeza es de 20 m.

t_1 = tiempo que tarda la mascota en llegar hasta el cadete de cabeza

$$t_1 = \frac{20}{v_{mascota} - v_{cadete}}$$

t_1 = tiempo que tarda el cadete de cabeza en recorrer los x metros

$$t_1 = \frac{x}{v_{cadete}}$$

Luego tenemos la igualdad:

$$I: \frac{20}{v_{mascota} - v_{cadete}} = \frac{x}{v_{cadete}}$$

El espacio recorrido por la mascota cuando avanza con los cadetes es $20 + x$. El espacio recorrido por la mascota al volver es x, puesto que al final se queda a 20 m del principio. Luego el espacio total recorrido por la mascota es $e = 20 + 2x$.

El tiempo total durante el cual avanza la compañía, t_2, es el mismo que el tiempo que está la mascota corriendo.

t_2 = tiempo total durante el cual avanza la compañía

$$t_2 = \frac{20}{v_{cadete}}$$

t_2 = tiempo total durante el cual corre la mascota

$$t_2 = \frac{20 + 2x}{v_{mascota}}$$

Luego tenemos la igualdad:

$$II: \frac{20 + 2x}{v_{mascota}} = \frac{20}{v_{cadete}} \rightarrow \frac{v_{mascota}}{v_{cadete}} = \frac{20 + 2x}{20}$$

Operamos en la igualdad I:

$$x(v_{mascota} - v_{cadete}) = 20 \cdot v_{cadete} \rightarrow x \cdot v_{mascota} = 20 \cdot v_{cadete} + xv_{cadete} \rightarrow$$

$$\rightarrow x \cdot v_{mascota} = v_{cadete}(20 + x) \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{mascota} = v_{cadete}\frac{(20 + x)}{x} \rightarrow \frac{v_{mascota}}{v_{cadete}} = \frac{20}{x} + 1$$

Hemos obtenido la razón entre las dos velocidades. Usamos esta relación en la igualdad II y obtenemos:

$$\frac{20 + 2x}{20} = \frac{20}{x} + 1 \rightarrow 1 + \frac{2x}{20} = \frac{20}{x} + 1 \rightarrow \frac{2x}{20} = \frac{20}{x}$$

Operamos y obtenemos:

$$2x^2 = 400 \rightarrow x^2 = 200 \rightarrow x = 10\sqrt{2} \text{ m}$$

El espacio recorrido por la mascota es $e = 20 + 2x = 20 + 10\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 20\sqrt{2} + 20$ m.

1 Polinomios. Factorización

Página 75

1 **Descompón factorialmente los siguientes polinomios:**

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3\,(x^3 - 9x^2 + 24x - 20)$

	1	–9	24	–20
2		2	–14	20
	1	–7	10	0
2		2	–10	
	1	–5	0	

$x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3(x-2)2\ (x-5)$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$

	1	–3	–3	–5	2	8
2		1	–2	–5	–10	–8
	1	–2	–5	–10	–8	0
–1		–1	3	3	8	
	1	–3	–2	–8	0	
4		4	4	8		
	1	1	2	0		

$x^2 + x + 2 = 0 \ \rightarrow\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$ (no tiene solución)

$x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x-1)\,(x+1)\,(x-4)\,(x^2 + x + 2)$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

	1	6	9	0	–1	–6	–9
–1		–1	–5	–4	4	–3	9
	1	5	4	–4	3	–9	0
–3		–3	–6	6	–6	9	
	1	2	–2	2	–3	0	
–3		–3	3	–3	3		
	1	–1	1	–1	0		
1		1	0	1			
	1	0	1	0			

$x^2 + 1 = 0 \ \rightarrow\ x^2 = -1$ (no tiene solución)

Así, $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9 = (x+3)^2\,(x+1)\,(x-1)\,(x^2+1)$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & 0 & -15 & -5 & 6 \\
2 & & 8 & 16 & 2 & -6 \\
\hline
 & 4 & 8 & 1 & -3 & \boxed{0} \\
-1 & & -4 & -4 & 3 & \\
\hline
 & 4 & 4 & -3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$4x^2 + 4x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} \;\rightarrow\; x = \frac{1}{2},\; x = -\frac{3}{2}$$

$$4x^4 - 15x^2 - 5x + 6 = 4\,(x-2)\,(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

2 **a) Intenta factorizar $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$.**

b) Hazlo ahora sabiendo que es divisible por $x^2 + x + 1$.

a) El polinomio dado no tiene raíces enteras (de hecho, no tiene raíces reales).

b) Hacemos la división:

$$\begin{array}{rl}
x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 & \big|\; x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^4 - x^3 - x^2 \qquad\qquad\quad} & \;\; x^2 + 3x + 4 \\
3x^3 + 7x^2 + 7x + 4 & \\
\underline{-3x^3 - 3x^2 - 3x \quad\;} & \\
4x^2 + 4x + 4 & \\
\underline{-4x^2 - 4x - 4} & \\
0 &
\end{array}$$

Los polinomios $x^2 + x + 1$ y $x^2 + 3x + 4$ son irreducibles (las ecuaciones $x^2 + x + 1 = 0$ y $x^2 + 3x + 4 = 0$ no tienen solución).

Por tanto:

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 = (x^2 + x + 1)\,(x^2 + 3x + 4)$$

3 **Intenta factorizar $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$. Vuelve a intentarlo sabiendo que $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ son raíces suyas.**

El polinomio dado no tiene raíces enteras.

Teniendo en cuenta el dato adicional (que $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ son raíces), procedemos así:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 6 & 7 & 6 & 0 & -1 \\
-1/2 & & -3 & -2 & -2 & 1 \\
\hline
 & 6 & 4 & 4 & -2 & \boxed{0} \\
1/3 & & 2 & 2 & 2 & \\
\hline
 & 6 & 6 & 6 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$6x^2 + 6x + 6 = 0$

$6(x^2 + x + 1) = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ (no tiene solución)

Por tanto:

$$6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)6\,(x^2 + x + 1) = (2x+1)\,(3x-1)\,(x^2 + x + 1)$$

2 Fracciones algebraicas

Página 77

1 ¿Verdadero o falso?

a) $\dfrac{x+1}{x^2+1} = \dfrac{1}{x+1}$

b) $\dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{1}{x+1}$

c) $\dfrac{3x-3}{x^2-1} = \dfrac{3}{x+1}$

d) $\dfrac{x+1}{x} - 1 = \dfrac{1}{x}$

a) Para comprobar si son equivalentes, multiplicamos en cruz: $(x+1)(x+1) \neq x^2+1$, luego es falso.

b) Para comprobar si son equivalentes, multiplicamos en cruz: $(x-1)(x+1) = x^2-1$, luego es verdadero.

c) La primera fracción es el triple de $\dfrac{x-1}{x^2-1}$, y la segunda es el triple de $\dfrac{1}{x+1}$ que son las fracciones del apartado anterior, luego es verdadero.

d) Operamos en el miembro de la izquierda:

$$\frac{x+1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

Obtenemos el miembro de la derecha, luego es verdadero.

2 Reduce previamente a común denominador las fracciones algebraicas siguientes, y súmalas:

$$\frac{x+7}{x} \qquad \frac{x-2}{x^2+x} \qquad -\frac{2x+1}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ x^2+x = x(x+1) \\ x+1 = x+1 \end{array}\right\} \text{mín.c.m.} = x(x+1)$$

Reducimos a común denominador:

$$\frac{x+7}{x} = \frac{(x+7)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x^2+8x+7}{x(x+1)}$$

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{x-2}{x(x+1)}$$

$$-\frac{2x+1}{x+1} = -\frac{(2x+1)x}{x(x+1)} = -\frac{2x^2+x}{x(x+1)} = -\frac{2x^2-x}{x(x+1)}$$

Las sumamos:

$$\frac{x+7}{x} + \frac{x-2}{x^2+x} - \frac{2x+1}{x+1} = \frac{x^2+8x+7}{x(x+1)} + \frac{x-2}{x(x+1)} + \frac{-2x^2-x}{x(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2+8x+7+x-2-2x^2-x}{x^2+x} = \frac{-x^2+8x+5}{x^2+x}$$

3 **Efectúa:**

a) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}$

b) $\dfrac{x}{x+1}+5x$

a) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}=$

$=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{2x(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=$

$=\dfrac{1+2x(x-1)-x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=$

$=\dfrac{1+2x^2-2x-x^2-x}{x^2-1}=\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x}{x+1}+5x=\dfrac{x+5x(x+1)}{x+1}=\dfrac{x(5x+6)}{x+1}=\dfrac{5x^2+6x}{x+1}$

4 **Efectúa estas operaciones:**

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}$

b) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}$

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}=\dfrac{(x^2-2x+3)(2x+3)}{(x-2)(x+5)}=\dfrac{2x^3-x^2+9}{x^2+3x-10}$

b) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}=\dfrac{(x^2-2x+3)(x+5)}{(2x+3)(x-2)}=\dfrac{x^3+3x^2-7x+15}{2x^2-x-6}$

5 **Calcula:**

a) $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)$

b) $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4}$

a) $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)=\dfrac{x+2}{x}:\dfrac{(x-1)(2x+1)}{3x}=\dfrac{(x+2)\,3x}{x(x-1)(2x+1)}=\dfrac{3(x+2)}{(2x+1)(x-1)}$

b) $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4}=\dfrac{(x^4-x^2)(x^4+x^2)}{(x^2+1)\,x^4}=\dfrac{x^2(x^2-1)\cdot x^2(x^2+1)}{(x^2+1)\,x^4}=\dfrac{x^4(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2+1)\,x^4}=x^2-1$

3 Resolución de ecuaciones

Página 78

Practica

Resuelve:

a) $x^2 + x - 6 = 0$ **b)** $x^2 - 2x + 1 = 0$ **c)** $x^2 - 3x + 3 = 0$

d) $3x^2 - 12 = 0$ **e)** $2x^2 + 10x = 0$ **f)** $x^2 = 121$

a) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \to x_1 = 2,\ x_2 = -3$

b) $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \to x = 1$

c) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} \to$ No hay solución.

d) $x = \pm\sqrt{\dfrac{12}{3}} = \pm 2 \to x_1 = 2,\ x_2 = -2$

e) $2x(x+5) = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = -5$

f) $x = \pm\sqrt{121} = \pm 11 \to x_1 = 11,\ x_2 = -11$

Practica

Resuelve:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ **c)** $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$

d) $3x^4 - 36x^2 = 0$ **e)** $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ **f)** $x^4 - 18x^2 = 0$

a) $y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \to y_1 = 4,\ y_2 = 1$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2;\ x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \to x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

b) $y = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} \to y_1 = 9,\ y_2 = 1$

$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3;\ x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \to x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

c) $y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-36}}{2} \to$ No hay solución.

d) $3x^2(x^2 - 12) = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{12},\ x_3 = \sqrt{12}$

e) $y = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = 4$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \to x_1 = 2,\ x_2 = -2$

f) $x^2(x^2 - 18) = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{18},\ x_3 = \sqrt{18}$

Practica

Resuelve:

a) $\dfrac{3x-2}{x} - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{2x-5}{x}$ **b)** $\dfrac{3+x}{x-1} + \dfrac{5}{x+1} = \dfrac{x-2}{x^2-1}$

c) $\dfrac{-x}{x+1} + \dfrac{2x+1}{2x} + \dfrac{1}{x^2-1} = 0$ **d)** $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{3x+2}{x+1}$

a) Reducimos a común denominador y multiplicamos por x^2.

$x(3x-2) - 4 = x(2x-5) \to 3x^2 - 2x - 4 = 2x^2 - 5x \to$

$\to 3x^2 - 2x - 4 - (2x^2 - 5x) = 0 \to$

$\to x^2 + 3x - 4 = 0 \to x = -4,\ x = 1$

Comprobadas las soluciones sobre la ecuación inicial, se ve que ambas son válidas.

Soluciones: $x_1 = -4,\ x_2 = 1$.

b) Reducimos a común denominador y multiplicamos por $x^2 - 1$.

$(3 + x)(x + 1) + 5(x - 1) = x - 2 \to x^2 + 9x - 2 = x - 2 \to x = -8,\ x = 0$

Comprobadas las soluciones sobre la ecuación inicial, se ve que ambas son válidas.

Soluciones: $x_1 = -8,\ x_2 = 0$.

c) Reducimos a común denominador y multiplicamos por $2x(x^2 - 1)$.

$2x(x - 1)(-x) + (2x + 1)(x^2 - 1) + 2x = 0 \to 3x^2 - 1 = 0 \to x = \sqrt{\frac{1}{3}};\ x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

Comprobadas las soluciones sobre la ecuación inicial, se ve que ambas son válidas.

Soluciones: $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}},\ x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$

d) Reducimos a común denominador y multiplicamos por $x(x + 1)$.

$x^2 - (x + 1) = x(3x + 2) \to x^2 - (x + 1) - x(3x + 2) = 0 \to -2x^2 - 3x - 1 = 0 \to x = -\frac{1}{2},\ x = -1$

La solución $x = -1$ no es posible porque hace 0 el denominador. La única solución es $x = -\frac{1}{2}$.

Página 79

Practica

Resuelve:

a) $\sqrt{4x+9} - \sqrt{2x+1} = 2$

b) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{1-x} = 1$

a) Despejamos una de las dos raíces.

$\sqrt{4x+9} = \sqrt{2x+1} + 2$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$(\sqrt{4x+9})^2 = (\sqrt{2x+1} + 2)^2 \to 4x + 9 = 2x + 4\sqrt{2x+1} + 5$

Aislamos el término en el que está la raíz.

$4\sqrt{2x+1} = 4x + 9 - 2x - 5$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$(4\sqrt{2x+1})^2 = (4x + 9 - 2x + 5)^2 \to 32x + 16 = 4x^2 + 16x + 16 \to$

$\to 32x + 16 - (4x^2 + 16x + 16) = 0 \to x_1 = 4,\ x_2 = 0$

Comprobación:

$x_1 = 4 \to \sqrt{4 \cdot 4 + 9} - \sqrt{2 \cdot 4 + 1} = 5 - 3 = 2$ es válida.

$x_2 = 0 \to \sqrt{4 \cdot 0 + 9} - \sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 2$ es válida.

b) Despejamos una de las dos raíces.

$\sqrt{3x+4} = 1 + \sqrt{1-x}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$(\sqrt{3x+4})^2 = (1 - \sqrt{1-x})^2 \to 3x + 4 = 2\sqrt{1-x} - x + 2$

Aislamos el término en el que está la raíz.

$2\sqrt{1-x} = -x + 2 - (3x + 4)$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$(2\sqrt{1-x})^2 = (-x+2-(3x+4))^2 \to 4-4x = 16x^2 + 16x + 4 \to$

$\to 16x^2 + 16x + 4 - 4 + 4x = 0 \to x_1 = -\frac{5}{4};\ x_2 = 0$

Comprobación:

$x_1 = -\frac{5}{4} \to \sqrt{3\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+4} - \sqrt{1+\frac{5}{4}} = -1$ no es válida.

$x_2 = 0 \to \sqrt{3\cdot 0+4} - \sqrt{1-0} = 1$ es válida.

Hay una solución: $x = 0$.

Practica

Resuelve:

a) $2^{x^2-4x} = \frac{1}{16}$ **b)** $5^{x^2-1} = 7$ **c)** $3^{x+2} - 3^x = 72$

a) $2^{x^2-4x} = \frac{1}{2^4} \to x^2 - 4x = 4 \to x_1 = 2\sqrt{2}+2;\ x_2 = 2-2\sqrt{2}$

b) $log(5^{x^2-1}) = log\,7 \to (x^2-1)log\,5 = log\,7 \to (x^2-1) = \frac{log\,7}{log\,5} = 1,2091 \to$

$\to x^2 = 1 + 1,2091 = 2,2091 \to$

$\to x = \pm\sqrt{2,2091} = \pm\,1,4863 \to x_1 = 1,4863;\ x_2 = -1,4863$

c) Hacemos el siguiente cambio de variable: $3^x = y$

$3^2y - y = 72 \to y = 9 = 3^2$

$3^x = 3^2 \to x = 2$

Página 80

Practica

Resuelve:

a) $\boldsymbol{log\,x - log\,4 = 2}$

b) $\boldsymbol{3\,log_5\,(x-1) = log_5\,125}$

c) $\boldsymbol{2\,ln\,x = ln\,(2x+3)}$

(Recuerda: *ln* es logaritmo neperiano o logaritmo en base *e*.)

a) $log\,x - log\,4 = 2 \to log\,\frac{x}{4} = log\,100 \to \frac{x}{4} = 100 \to x = 400$

La solución es válida.

b) $3log_5(x-1) = log_5\,125 \to log_5(x-1)^3 = log_5\,125 \to (x-1)^3 = 125 \to x-1 = \sqrt[3]{125} = 5 \to x = 6$

La solución es válida.

c) $2ln\,x = ln\,(2x+3) \to ln\,x^2 = ln\,(2x+3) \to x^2 = (2x+3) \to x_1 = 3$ es válida; $x_2 = -1$ no es válida porque no se puede hacer $ln\,(-1)$.

1 ¿Verdadero o falso?

a) Al resolver una ecuación con algún radical cuadrático siempre aparece alguna raíz falsa.

b) 4 y −4 son soluciones de la ecuación $\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=4$.

c) 4 y −4 son soluciones de la ecuación $\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}=2$.

a) Falso, hemos resuelto ecuaciones de este tipo en las que todas las soluciones eran válidas.

Ejemplo: $\sqrt{4x+9}-\sqrt{2x+1}=2$ en la página 79.

b) Verdadero, si sustituimos x por 4 o por -4 obtenemos una igualdad.

c) Falso, solo es solución $x = 4$. Al sustituir x por -4 no sale una igualdad.

2 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x^4 - x^2 - 12 = 0$ **b)** $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ **c)** $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ **d)** $x^4 - x^2 - 2 = 0$

a) Hacemos $x^2 = y \to y^2 - y - 12 = 0 \to y = 4,\ y = -3$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

b) Hacemos $x^2 = y \to y^2 - 8y - 9 = 0 \to y = 9,\ y = -1$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

c) Hacemos $x^2 = y \to y^2 + 10y + 9 = 0 \to y = -1,\ y = -9$

Soluciones: No hay.

d) Hacemos $x^2 = y \to y^2 - y - 2 = 0 \to y = 2,\ y = -1$

Soluciones: $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = -\sqrt{2}$

3 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{10}$ **b)** $\frac{4}{x}+\frac{2(x+1)}{3(x-2)}=4$ **c)** $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{3}{4}$

d) $\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{x+1}=3$ **e)** $\frac{5}{x+2}+\frac{x}{x+3}=\frac{3}{2}$ **f)** $\frac{x+3}{x-1}-\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{26}{35}$

a) $10(x + 3) + 10x = 3x(x + 3)$

$10x + 30 + 10x = 3x^2 + 9x$

$0 = 3x^2 - 11x - 30;\ x = \frac{11 \pm 21{,}93}{6} = \begin{cases} 5{,}489 \\ -1{,}822 \end{cases}$

$x_1 = 5{,}489;\ x_2 = -1{,}822$

b) $12(x - 2) + 2x(x + 1) = 12x(x - 2)$

$12x - 24 + 2x^2 + 2x = 12x^2 - 24x$

$0 = 10x^2 - 38x + 24$

$0 = 5x^2 - 19x + 12;\ x = \frac{19 \pm 11}{10} = \begin{cases} 3 \\ 4/5 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ x_2 = \frac{4}{5}$

c) $4x + 4 = 3x^2;\ 0 = 3x^2 - 4x - 4$

$x = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ x_2 = \frac{-2}{3}$

d) $x(x + 1) + 2x(x - 1) = 3(x^2 - 1)$

$x^2 + x + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 3$

$x = 3$

e) $10(x+3)+2x(x+2)=3(x^2+5x+6)$

$10x+30+2x^2+4x=3x^2+15x+18$

$0=x^2+x-12$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\dfrac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases}3\\-4\end{cases}$

$x_1=3;\ x_2=-4$

f) $35(x+3)\,(x+1)-35(x^2+1)=26\,(x^2-1)$

$35(x^2+4x+3)-35(x^2+1)=26(x^2-1)$

$35x^2+140x+105-35x^2-35=26x^2-26$

$26x^2-140x-96=0$

$x=\dfrac{70\pm\sqrt{70^2-4\cdot 13\cdot(-48)}}{26}=\dfrac{70\pm 86}{26}=\begin{cases}6\\-8/13\end{cases}$

$x_1=6;\ x_2=\dfrac{-8}{13}$

4 Resuelve:

a) $-\sqrt{2x-3}+1=x$ **b)** $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+7}=4$ **c)** $2+\sqrt{x}=x$

d) $2-\sqrt{x}=x$ **e)** $\sqrt{3x+3}-1=\sqrt{8-2x}$ **f)** $\sqrt{5x+1}+2=\sqrt{27+3x}$

a) $1-x=\sqrt{2x-3}$

$1+x^2-2x=2x-3;\ x^2-4x+4=0;\ x=2$ (no vale)

No tiene solución.

b) $2x-3=16+x+7+8\sqrt{x+7}$

$x-26=8\sqrt{x+7}$

$x^2+676-52x=64(x+7)$

$x^2+676-52x=64x+448$

$x^2-116x+228=0;\ x=\dfrac{116\pm 12}{2}=\begin{cases}114\\2\ \to\ \text{(no vale)}\end{cases}$

$x=114$

c) $\sqrt{x}=x-2;\ x=x^2+4-4x;\ 0=x^2-5x+4$

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}4\\1\ \to\ \text{(no vale)}\end{cases}$

$x=4$

d) $2-x=\sqrt{x};\ 4+x^2-4x=x;\ x^2-5x+4=0$

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}4\ \to\ \text{(no vale)}\\1\end{cases}$

$x=1$

e) $\sqrt{3x+3}-1=\sqrt{8-2x}$

$3x+3=1+8-2x+2\sqrt{8-2x}$

$5x-6=2\sqrt{8-2x}$

$25x^2+36-60x=4(8-2x)$

$25x^2-52x+4=0$

$x=\dfrac{52\pm 48}{50}=\begin{cases}2\\0{,}08\ \to\ \text{(no vale)}\end{cases}$

Así, $x=2$.

f) $\sqrt{5x+1}+2=\sqrt{27+3x}$

$\sqrt{5x+1}=\sqrt{27+3x}-2$

$(\sqrt{5x+1})^2=(\sqrt{27+3x}-2)^2$

$5x+1=3x-4\sqrt{3x+27}+31$

$4\sqrt{3x+27}=-(5x+1)+3x+31$

$(4\sqrt{3x+27})^2=(-2x+30)^2$

$16(3x+27)=4x^2-120\,x+900$

$16(3x+27)-4x^2+120x-900=0 \;\rightarrow\; x=39,\; x=3$

Comprobación:

$x=39 \;\rightarrow\; \sqrt{5\cdot 39+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 39} \;\rightarrow\; 14+2\neq 12 \;\rightarrow$ (no vale)

$x=3 \;\rightarrow\; \sqrt{5\cdot 3+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 3} \;\rightarrow\; 4+2=6$

5 **Resuelve:**

a) $2^{3x}=0{,}5^{3x+2}$ **b)** $3^{4-x^2}=\dfrac{1}{9}$ **c)** $\dfrac{4^{x+1}}{2^{x+2}}=186$ **d)** $7^{x+2}=5\,764\,801$

a) $2^{3x}=2^{-3x-2};\; 3x=-3x-2;\; 6x=-2;\; x=\dfrac{-1}{3}$

b) $3^4-x^2=3^{-2};\; 4-x^2=-2;\; x^2=6;\; x=\pm\sqrt{6}$

$x_1=\sqrt{6};\; x_2=-\sqrt{6}$

c) $\dfrac{2^{2x-2}}{2^{x+2}}=186;\; 2^{2x-2-x-2}=186;\; 2^{x-4}=186$

$\log 2^{x-4}=\log 186;\; (x-4)\log 2=\log 186$

$x=4+\dfrac{\log 186}{\log 2}=11{,}54$

d) $7^{x+2}=7^8;\; x=6$

6 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $3^x+3^{x+2}=30$ **b)** $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=\dfrac{31}{5}$

c) $2\log x-\log(x+6)=3\log 2$ **d)** $4\log_2(x^2+1)=\log_2 625$

a) $3^x+3^x\cdot 9=30$

$3^x(10)=30;\; 3^x=3;\; x=1$

b) $5\cdot 5^x+5^x+\dfrac{5^x}{5}=\dfrac{31}{5}$

$5^x\cdot\dfrac{31}{5}=\dfrac{31}{5};\; x=0$

c) $\log\dfrac{x^2}{x+6}=\log 8$

$x^2=8x+48;\; x^2-8x-48=0;\; x=\dfrac{8\pm 16}{2}=\begin{cases}12\\ -4 \rightarrow \text{(no vale)}\end{cases}$

$x=12$

d) $\log_2(x^2+1)4=\log_2 5^4;\; x^2+1=5;\; x^2=4;\; x=\pm 2$

$x_1=2;\; x_2=-2$

4 Resolución de sistemas de ecuaciones

Página 82

1 ¿Verdadero o falso?

a) El sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$ **tiene dos soluciones:** $x=4$, $y=1$

b) El sistema $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ **tiene solo dos soluciones:**

$[x_1=2,\ y_1=1]$ **y** $[x_2=-2,\ y_2=-1]$

c) El sistema $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ **tiene cuatro soluciones:**

$[x_1=2,\ y_1=1]$; $[x_2=2,\ y_2=-1]$

$[x_3=-2,\ y_3=1]$; $[x_4=-2,\ y_4=-1]$

a) Falso, $x=4$ e $y=1$ no son dos soluciones, sino una solución para cada incógnita, luego son una solución del sistema.

b) Falso, como las dos incógnitas están al cuadrado, también son soluciones $x_3=-2$, $y_3=1$ y $x_4=2$, $y_4=-1$.

c) Verdadero, por el razonamiento del apartado anterior.

2 Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x^2-7=y+2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1-\dfrac{1}{xy} \\ xy=6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=2y+1 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y^2-x^2=16 \\ \sqrt{5-4y}-x=-(x+y) \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} y&=2x-1 \\ y&=x^2-9 \end{aligned}\right\}$

$x^2-9=2x-1;\ x^2-2x-8=0$

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\dfrac{2\pm 6}{2}=\begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

$x_1=4;\ y_1=7$

$x_2=-2;\ y_2=-5$

b) $\left.\begin{aligned} y+x&=xy-1 \\ xy&=6 \end{aligned}\right\}$

$y=5-x$

$x(5-x)=6;\ 5x-x^2=6;\ x^2-5x+6=0 \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$

$x_1=2;\ y_1=3$

$x_2=3;\ y_2=2$

c) $x = 2y + 1$

$\sqrt{3y+1} - \sqrt{y-1} = 2;\ \sqrt{3y+1} = 2 + \sqrt{y+1}$

$3y + 1 = 4 + y + 1 + 4\sqrt{y+1};\ 2y - 4 = 4\sqrt{y+1};\ y - 2 = 2\sqrt{y+1}$

$y^2 + 4 - 4y = 4y + 4;\ y^2 - 8y = 0$

$y = 8 \rightarrow x = 17$

$y = 0$ (no vale)

$x = 17;\ y = 8$

d) $\sqrt{5-4y} - x = -(x + y);\ \sqrt{5-4y} = -y$

$(\sqrt{5-4y})^2 = y^2;\ 5 - 4y = y^2 \begin{cases} y = 1 \rightarrow \text{(no vale)} \\ y = -5 \end{cases}$

$25 - x^2 = 16 \rightarrow x = -3,\ x = 3$

$x_1 = 3;\ y_1 = -5$

$x_2 = -3;\ y_2 = -5$

3 Resuelve:

a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} log\,(x^2 + y) - log\,(x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 27 \\ log\,x - 1 = log\,y \end{cases}$

d) $\begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,(2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases}$

a) $y = 1 - x;\ x^2 + x(1 - x) + (1 - x)^2 = 21$

$x^2 + x - x^2 + 1 + x^2 - 2x = 21;\ x^2 - x - 20 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \dfrac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \rightarrow y = -4 \\ -4 \rightarrow y = 5 \end{cases}$

$x_1 = -4;\ y_1 = 5$

$x_2 = 5;\ y_2 = -4$

b) $\left.\begin{array}{l} log\,\dfrac{x^2 + y}{x - 2y} = 1 \\ 5^{x+1} = 5^{2y+2} \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x^2 + y = 10x - 20y \\ x + 1 = 2y + 2 \end{array}\right\}$

$x = 2y + 1$

$4y^2 + 1 + 4y + y = 20y + 10 - 20y$

$4y^2 + 5y - 9 = 0$

$y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{8} = \dfrac{-5 \pm 13}{8} = \begin{cases} -9/4 \rightarrow x = -7/2 \\ 1 \rightarrow x = 3 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ y_1 = 1$

$x_2 = \dfrac{-7}{2};\ y_2 = \dfrac{-9}{4}$

c) $\left.\begin{array}{l} x = 27 + y \\ \log \dfrac{x}{y} = 1 \end{array}\right\}$

$10y = 27 + y;\ \ 9y = 27;\ \ y = 3$

$\dfrac{x}{y} = 10;\ \ x = 10y;\ \ x = 30$

$x = 30;\ \ y = 3$

d) $\begin{cases} \log(2x - y^2) = \log(2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases} \to \begin{cases} \log(2x - y^2) = \log(2 - y) + \log 10 \\ 3^{x-1} = (3^3)^{y+3} \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} \log(2x - y^2) = \log 10(2 - y) \\ 3^{x-1} = 3^{3y+9} \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} 2x - y^2 = 10(2 - y) \\ x - 1 = 3y + 9 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} 2x - y^2 + 10y = 20 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$

$x = 10 - 3y$

$2(10 - 3y) - y^2 + 10y - 20 = 0;\ \ y(y - 4) = 0;\ \ y = 4,\ \ y = 0$

$y = 4$ no es válida porque aparecería $\log(-2)$ en la primera ecuación.

$x_1 = 10;\ \ y_1 = 0$

5 Método de Gauss para sistemas lineales

Página 83

1 Reconoce como escalonados y resuelve:

a) $\begin{cases} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 7 \\ y = \dfrac{2x - 8}{3} = 2 \\ z = 3x + y - 12 = 21 + 2 - 12 = 11 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 2 \\ z = 11 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-6}{2} = -3 \\ x = \dfrac{-4y}{3} = 4 \\ z = 5x + y - 17 = 20 - 3 - 17 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{l} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 2x + y + 2 = -2 + 4 + 2 = 4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{l} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = 4 \\ z = y - 7 = 4 - 7 = -3 \\ x = 11 + z = 11 - 3 = 8 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 8 \\ y = 4 \\ z = -3 \end{array}$

2 Resuelve los siguientes sistemas escalonados:

a) $\begin{cases} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y = -5 \\ 5y = -10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = -3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = -5 \\ z = 4 \\ x = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -5 \\ z = 4 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y - z = -3 \\ 3x + \quad = -5 \\ 5y = -10 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-10}{5} = -2 \\ x = \dfrac{-5 - y}{3} = -1 \\ z = x + 2y + 3 = -2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{l} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} z = 1 \\ y = \dfrac{5 + z}{3} = 2 \\ x = 8 + 5y - 3z = 0 + 10 - 3 = 15 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 15 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{l} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{3} = 3 \\ y = \dfrac{8}{2} = 4 \\ z = 4x + y - 7 = 9 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 9 \end{array}$

Página 84

3 **Resuelve por el método de Gauss:**

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=6 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y \phantom{{}+z} = 14 \\ x-2y+z=-3 \\ 2x-y-z=9 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x-y+z=6 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)+(1.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x \phantom{{}+y} +2z=8 \\ 2x \phantom{{}+y+2z} =2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x \phantom{{}+y} +z=4 \\ x \phantom{{}+y+z} =1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ z=4-x=3 \\ y=2-x-z=2-1-3=-2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=1 \\ y=-2 \\ z=3 \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 2x+3y \phantom{{}+z} =14 \\ x-2y+z=-3 \\ 2x-y-z=9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+(2.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y \phantom{{}+z} =14 \\ x-2y+z=-3 \\ 3x-3y \phantom{{}+z} =6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+(1.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y \phantom{{}+z} =14 \\ x-2y+z=-3 \\ 5x \phantom{{}-2y+z} =20 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{20}{5}=4 \\ y=\dfrac{14-2x}{3}=2 \\ z=-3-x+2y=-3-4+4=-3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=4 \\ y=2 \\ z=-3 \end{array}$$

4 **Resuelve:**

a) $\begin{cases} 5x-4y+3z=9 \\ 2x+y-2z=1 \\ 4x+3y+4z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-5y+4z=-1 \\ 4x-5y+4z=3 \\ 5x \phantom{{}-5y} -3z=13 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l} 4x-4y+3z=9 \\ 2x+y-2z=1 \\ 4x+3y+4z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a)+4\cdot(2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-3\cdot(2.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 13x \phantom{{}+y} -5z=13 \\ 2x+y-2z=1 \\ -2x \phantom{{}+y} +10z=-2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2\cdot(1.^a)+(3.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a):2 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 24x \phantom{{}+y-2z} =24 \\ 2x+y-2z=1 \\ -x \phantom{{}+y} +5z=-1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=1 \\ z=\dfrac{-1+x}{5}=0 \\ y=1-2x+2z=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \\ z=0 \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 2x-5y+4z=-1 \\ 4x-5y+4z=3 \\ 5x \phantom{{}-5y} -3z=13 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-5y+4z=-1 \\ 2x \phantom{{}-5y+4z} =4 \\ 5x \phantom{{}-5y} -3z=13 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ z=\dfrac{5x-13}{3}=-1 \\ y=\dfrac{2x+4z+1}{5}=\dfrac{1}{5} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=2 \\ y=\dfrac{1}{5} \\ z=-1 \end{array}$$

Página 85

5 **Intenta resolver por el método de Gauss:**

a) $\left\{\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ x - 2y - z &= 3 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ x - 2y - z &= 3 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}\right.$

a) $$\left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ x - 2y - z &= 3 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \to \left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ 2x - y &= 1 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª dicen cosas contradictorias (si $2x - y$ es igual a 1, no puede ser igual a 2). Por tanto, el sistema es incompatible.

b) $$\left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ x - 2y - z &= 3 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \to \left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ 2x - y &= 1 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \to \left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ 2x - y &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solo quedan dos ecuaciones. Resolvemos el sistema obteniendo y, z en función de x:

$(2.^a) \to y = 2x - 1$

$(1.^a) \to z = -2 - y - x = -2 - (2x - 1) - x = -2 - 2x + 1 - x = -3x - 1$

Soluciones: $\left\{\begin{aligned} y &= 2x - 1 \\ z &= -3x - 1 \end{aligned}\right.$

Para cada valor de x, se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

Para $x = 0 \to \left\{\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -1 \\ z &= -1 \end{aligned}\right.$ Para $x = -2 \to \left\{\begin{aligned} x &= -2 \\ y &= -5 \\ z &= 5 \end{aligned}\right.$

6 **Resuelve:**

a) $\left\{\begin{aligned} x + z &= 3 \\ 2x - y + 4z &= 8 \\ x + y - z &= 2 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} x + z &= 3 \\ 2x - y + 4z &= 8 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}\right.$

a) $$\left.\begin{aligned} x + z &= 3 \\ 2x - y + 4z &= 8 \\ x + y - z &= 2 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \to \left.\begin{aligned} x + z &= 3 \\ 3x + 3z &= 10 \\ x + y - z &= 2 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \to \left.\begin{aligned} x + z &= 3 \\ 0x + 0z &= 1 \\ x + y - z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

La segunda ecuación es absurda. No puede ser 0 = 1. Por tanto, el sistema no tiene solución.

b) $$\left.\begin{aligned} x + z &= 3 \\ 2x - y + 4z &= 8 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \to \left.\begin{aligned} x + z &= 3 \\ 3x + 3z &= 9 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \to \left.\begin{aligned} x + z &= 3 \\ 0x + 0z &= 0 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

La segunda ecuación no dice nada. No es una ecuación. Por tanto, solo quedan dos ecuaciones, la 1.ª y la 3.ª.

Resolvemos el sistema resultante dando los valores de x e y en función de z:

$$\left\{\begin{aligned} &x + z = 3 \to x = 3 - z \\ &x + y - z = 1 \to y = 1 - x + z = 1(3 - z) + z = -2 + 2z \end{aligned}\right.$$

Soluciones: $\left\{\begin{aligned} x &= 3 - z \\ y &= -2 + 2z \end{aligned}\right.$

Para cada valor que le demos a z, se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

Para $z = 0 \to x = 3,\ y = -2$.

Para $z = 4 \to x = -1,\ y = 6$.

6 Inecuaciones y sistemas de inecuaciones con una incógnita

Página 86

1 Resuelve estas inecuaciones:

a) $\mathbf{3x - 2 \le 10}$ **b)** $\mathbf{x - 2 > 1}$ **c)** $\mathbf{2x + 5 \ge 6}$ **d)** $\mathbf{3x + 1 \le 15}$

a) $3x - 2 \le 10 \ \rightarrow\ 3x \le 12 \ \rightarrow\ x \le 4$

Soluciones: $\{x \mid x \le 4\} = (-\infty, 4]$

b) $x - 2 > 1 \ \rightarrow\ x > 3$

Soluciones: $\{x \mid x > 3\} = (3, +\infty)$

c) $2x + 5 \ge 6 \ \rightarrow\ 2x \ge 1 \ \rightarrow\ x \ge \dfrac{1}{2}$

Soluciones: $\left\{x \mid x \ge \dfrac{1}{2}\right\} = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

d) $3x + 1 \le 15 \ \rightarrow\ 3x \le 14 \ \rightarrow\ x \le \dfrac{14}{3}$

Soluciones: $\left\{x \mid x \le \dfrac{14}{3}\right\} = \left(-\infty, \dfrac{14}{3}\right]$

2 Resuelve estos sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} \mathbf{3x - 2 \le 10} \\ \mathbf{x - 2 > 1} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{2x + 5 \ge 6} \\ \mathbf{3x + 1 \le 15} \end{cases}$

Observamos que las inecuaciones que forman ambos sistemas se han resuelto en el ejercicio anterior.

a) $\begin{cases} x \le 4 \\ x > 3 \end{cases}$ *Soluciones:* $\{x \mid 3 < x \le 4\} = (3, 4]$

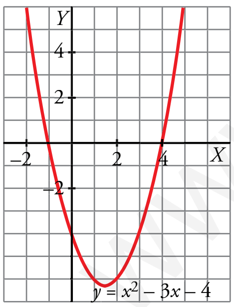
b) $\begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ x \le \dfrac{14}{3} \end{cases}$ *Soluciones:* $\left\{x \mid \dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{14}{3}\right\} = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{14}{3}\right]$

Página 87

3 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\mathbf{x^2 - 3x - 4 < 0}$ **b)** $\mathbf{x^2 - 3x - 4 \ge 0}$ **c)** $\mathbf{x^2 + 7 < 0}$ **d)** $\mathbf{x^2 - 4 \le 0}$

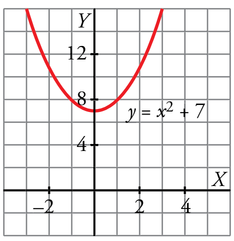
a)



$x^2 - 3x - 4 < 0 \ \rightarrow\$ intervalo $(-1, 4)$

b) $x^2 - 3x - 4 \ge 0 \ \rightarrow\ (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$

c)



$x^2 + 7 < 0 \ \rightarrow\$ No tiene solución.

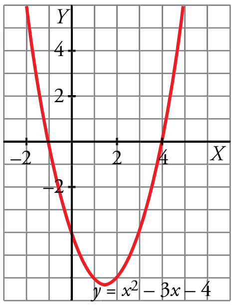
d) $x^2 - 4 \le 0$

La parábola $y = x^2 - 4$ queda por debajo del eje X en el intervalo $(-2, 2)$; y corta al eje X en $x = -2$ y en $x = 2$. Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$.

4 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$

a)



$2x - 7 > 5 \rightarrow 2x > 12 \rightarrow x > 6 \rightarrow (6, +\infty)$

$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

Solución: $(6, +\infty)$

b) $\left.\begin{array}{l} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{array}\right\}$

- Las soluciones de la primera inecuación son lon puntos del intervalo $[-2, 2]$. (Ver apartado d) del ejercicio anterior).
- Las soluciones de la segunda inecuación son:

$$x - 4 > 1 \rightarrow x > 5 \rightarrow (5, +\infty)$$

- Las soluciones del sistema serán los puntos en común de los dos intervalos. Por tanto, el sistema no tiene solución.

7 Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Página 88

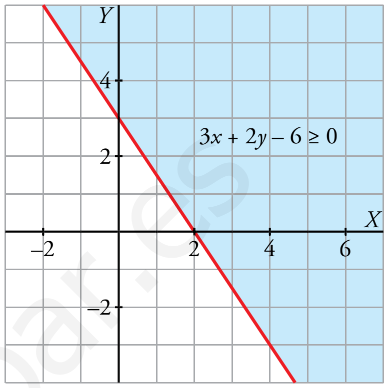
1 Resuelve:

a) $3x + 2y \geq 6$ **b)** $x - y + 1 \geq 0$

a) Dibujamos la recta $r: 3x + 2y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 + 0 - 6 \geq 0$.

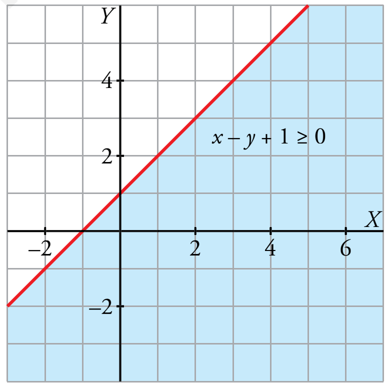
La solución es el semiplano que no contiene a O.



b) Dibujamos la recta $r: x - y + 1 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad: $0 + 0 + 1 \geq 0$.

La solución es el semiplano que contiene a O.



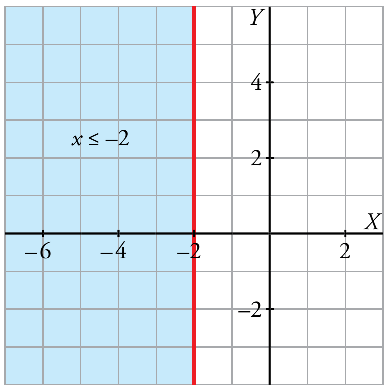
2 Resuelve:

a) $x \leq -2$ **b)** $y > 1$

a) Dibujamos la recta $r: x = -2$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 + 2 \leq 0$.

La solución es el semiplano que no contiene a O.

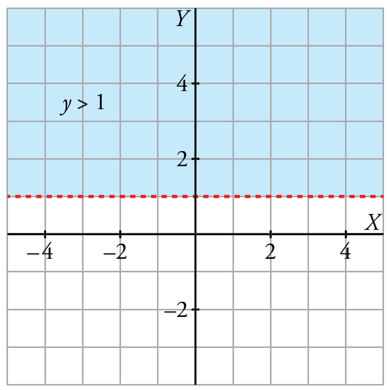


b) Dibujamos la recta $r: y = 1$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 \geq 1$.

La solución es el semiplano que no contiene a O.

La recta $y = 1$ no pertenece al conjunto de soluciones.



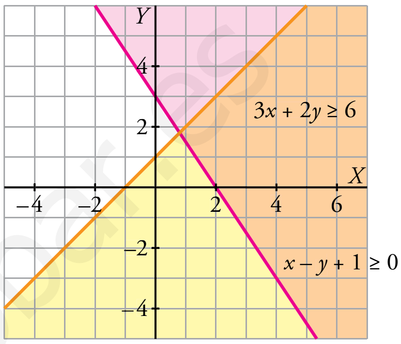
Página 89

3 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

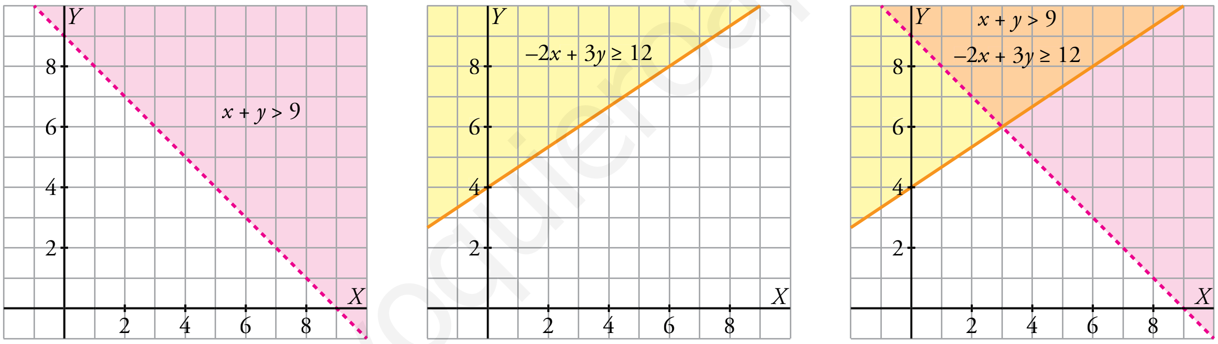
a) $\begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ x - y + 1 \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y > 9 \\ -2x + 3y \geq 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \geq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y \geq 11 \\ -x + 2y \geq 10 \\ y \leq 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y \leq 11 \\ -x + 2y \geq 10 \\ y < 9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y < 11 \\ -x + 2y \leq 10 \\ y \geq 9 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x - 3y \leq -3 \\ x + y \leq 11 \\ x \geq 2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x - 3y > -3 \\ x + y > 11 \\ x \leq 2 \end{cases}$

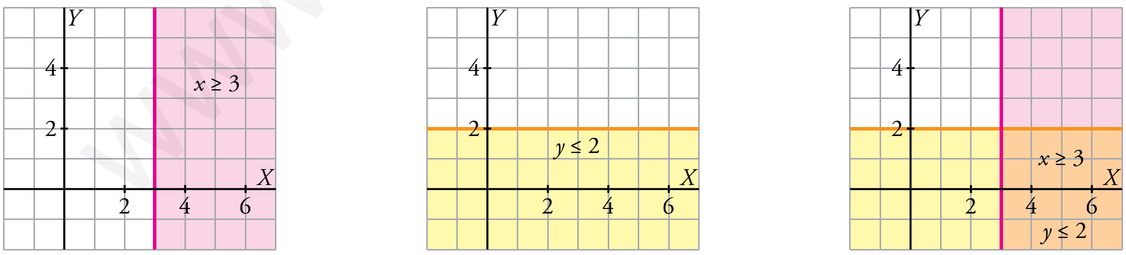
a) Ambas inecuaciones han sido resueltas en el ejercicio 1 anterior. El recinto solución del sistema es la intersección de los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones. Es decir, es el recinto de color marrón.



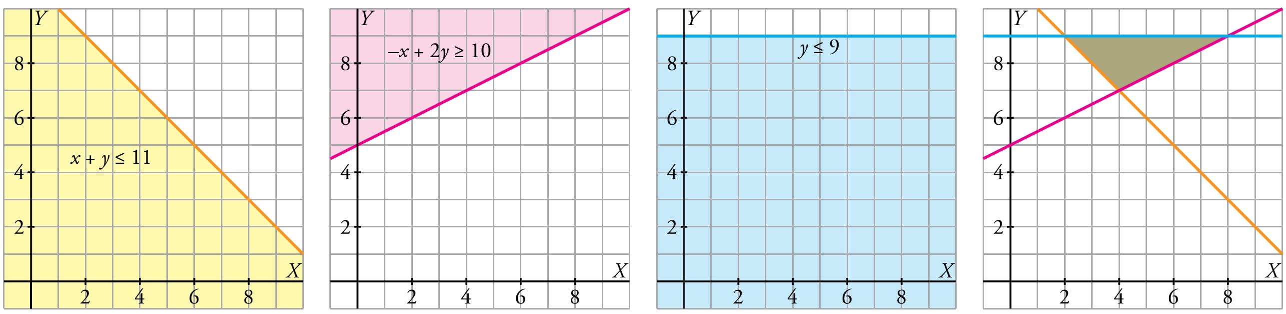
b) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La solución es el recinto marrón.



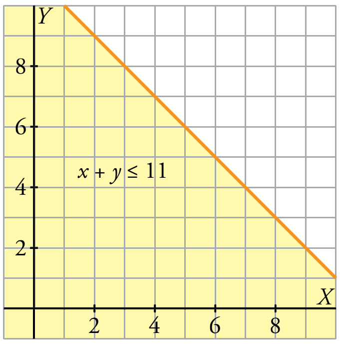
c) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La solución es el recinto marrón.

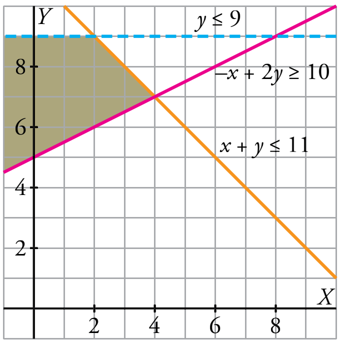


d) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los semiplanos. La solución es el triángulo de intersección.

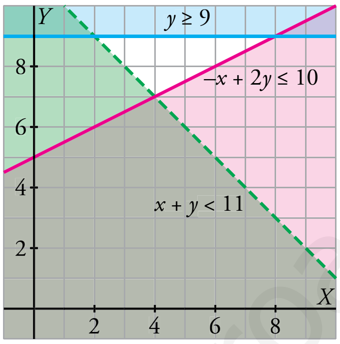


e) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos. Los semiplanos de la segunda y tercera inecuaciones coinciden con los del apartado d). Representamos el semiplano de la primera inecuación. La solución es la región común a los recintos.

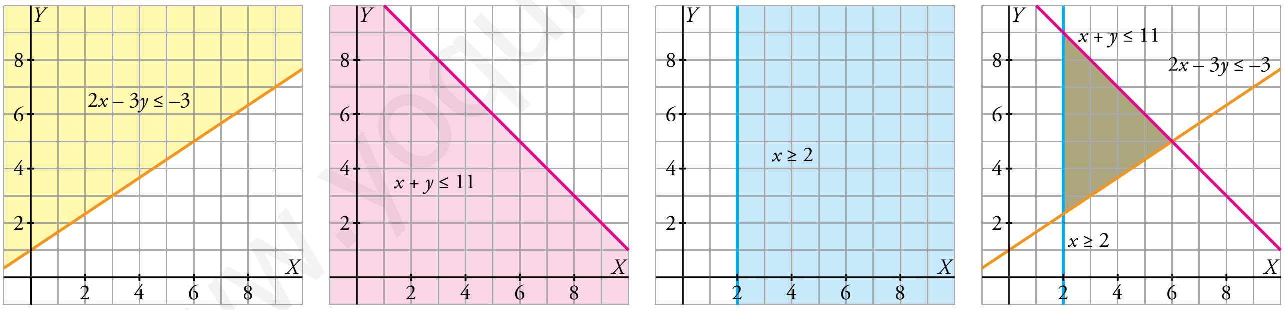




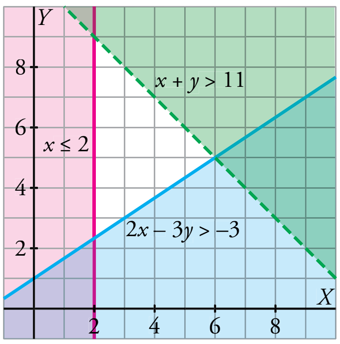
f) Resolvemos cada una de las inecuaciones. No hay ningún punto que esté en la intersección de los tres semiplanos. Luego no hay solución.



g) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos. La solución es el triángulo común a los semiplanos.



h) Resolvemos cada una de las inecuaciones. No hay ningún punto que esté en la intersección de los tres semiplanos. Luego no hay solución.



Ejercicios y problemas resueltos

Página 90

1. Ecuaciones polinómicas de grado tres o superior

Hazlo tú. Resuelve esta ecuación:

$$\mathbf{12x^4 + 14x^3 - 2x = 0}$$

Como no tiene término independiente, sacamos factor común $2x$:

$$2x(6x^3 + 7x^2 - 1) = 0$$

Buscamos ahora las raíces enteras del nuevo polinomio entre los divisores del término independiente y factorizamos.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & 0 & -1 \\ -1 & & -6 & -1 & 1 \\ \hline & 6 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$6x^3 + 7x^2 - 1 = (x + 1)(6x^2 + x - 1)$$

Como no hay más raíces enteras, para descomponer el polinomio de segundo grado resolvemos la ecuación asociada y como el coeficiente principal es 6, nos queda:

$$12x^4 + 14x^3 - 2x = 6 \cdot 2x(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = \frac{1}{3}$

2. Ecuaciones con valores absolutos

Hazlo tú. Resuelve estas ecuaciones:

a) $|x^2 - 2| = 2$ **b)** $|3x + 1| = |2x + 4|$ **c)** $|x + 3| = |2x| + 2$

a) Seguimos las indicaciones del ejercicio resuelto 2, apartado a).

$x^2 - 2 = 2 \to x_1 = -2,\ x_2 = 2$

$x^2 - 2 = -2 \to x_3 = 0$

b) Seguimos las indicaciones del ejercicio resuelto 2, apartado b).

$3x + 1 = 2x + 4 \to x_1 = 3$

$3x + 1 = -(2x + 4) \to x_2 = -1$

c) Seguimos las indicaciones del ejercicio resuelto 2, apartado c).

$$|x + 3| = \begin{cases} -x - 3 & \text{si } x < -3 \\ x + 3 & \text{si } x \ge -3 \end{cases} \qquad |2x| = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

	$x < -3$	$-3 \le x < 0$	$x \ge 0$
$\lvert x + 3 \rvert$	$-x - 3$	$x + 3$	$x + 3$
$\lvert 2x \rvert$	$-2x$	$-2x$	$2x$
$\lvert 2x \rvert + 2$	$-2x + 2$	$-2x + 2$	$2x + 2$

$x < -3$	$-3 \le x < 0$	$x \ge 0$
$-x - 3 = -2x + 2$	$x + 3 = -2x + 2$	$x + 3 = 2x + 2$
$x = 5 \notin (-\infty, -3)$	$x = -1/3 \in [-3, 0)$	$x = 1 \in [0, +\infty)$

Soluciones: $x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = 1$

Página 91

3. Ecuaciones exponenciales

Hazlo tú. Resuelve estas ecuaciones:

a) $3^{x^2+1} - 9^x = 0$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1} = 5$ **c)** $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

a) $3^{x^2+1} - 9^x = 0 \rightarrow 3^{x^2+1} - (3^2)^x = 0 \rightarrow 3^{x^2+1} - 3^{3x} = 0 \rightarrow 3^{x^2+1} = 3^{2x}$

Igualamos los exponentes: $x^2 + 1 = 2x \rightarrow x = 1$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1} = 5$

Tomamos logaritmos en los dos miembros:

$$log\left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1} = log\,5 \rightarrow (-x-1)\,log\left(\frac{1}{2}\right) = log\,5 \rightarrow (-x-1)\,(log\,1 - log\,2) = log\,5 \rightarrow$$

$$\rightarrow -x-1 = \frac{log\,5}{-log\,2} \rightarrow -x = \frac{log\,5}{-log\,2} + 1 \rightarrow x = \frac{log\,5}{log\,2} - 1$$

c) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

Cambiamos de variable: $2^x = y$

$y^2 - 3y + 2 = 0 \rightarrow y_1 = 2,\ y_2 = 1$

$y_1 = 2 \rightarrow 2^x = 2 \rightarrow x_1 = 1$

$y_2 = 1 \rightarrow 2^x = 2^0 \rightarrow x_2 = 0$

4. Ecuaciones logarítmicas

Hazlo tú. Resuelve estas ecuaciones:

a) $log\,x + log\,4 = 2$ **b)** $2\,log\,x - log\,(x-1) = log\,4$

a) $log\,x + log\,4 = 2 \rightarrow log\,(4x) = log\,100 \rightarrow 4x = 100 \rightarrow x = 25$ que es solución válida.

b) $2log\,x - log\,(x-1) = log\,4 \rightarrow log\left(\frac{x^2}{x-1}\right) = log\,4 \rightarrow \frac{x^2}{x-1} = 4 \rightarrow x = 2$ que es solución válida.

Página 92

5. Ecuaciones tipo $ax^{2n} + bx^n + c = 0$

Hazlo tú. Resuelve esta ecuación:

$x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

Hacemos el cambio de variable: $x^4 = y$

La ecuación queda: $y^2 - 15y - 16 = 0 \rightarrow y_1 = 16,\ y_2 = -1$

$x = \pm\sqrt[4]{16} \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2$

$x = \pm\sqrt[4]{-1}$ que no existe.

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

6. Inecuaciones con fracciones algebraicas

Hazlo tú. Resuelve esta inecuación:

$$\frac{x-1}{x} \le x$$

$$\frac{x-1}{x} - x = \frac{-x^2 + x - 1}{x} \le 0$$

Resolvemos las dos ecuaciones asociadas:

$-x^2 + x - 1 = 0$ no tiene solución, luego siempre tiene el mismo signo

$x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$-x^2 + x - 1$	–	–
x	–	+
$\frac{-x^2 + x - 1}{x}$	+	–

El valor 0 no se puede incluir en la solución porque anula el denominador. La solución es $(0, +\infty)$.

Ejercicios y problemas guiados

Página 93

1. Sistemas de ecuaciones no lineales

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 2^{2x} - 3^{y-1} = 61 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} 3\ln x - \ln y = 1 \\ \ln x^3 + \ln y^2 = 7 \end{cases}$ ***c)*** $\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ 3^{x-1} = \dfrac{3^{y^2+1}}{9} \end{cases}$

a) Hacemos el cambio de variable $2^x = z$, $3^y = t$.

El sistema queda:

$\begin{cases} z + t = 17 \\ z^2 - \dfrac{t}{3} = 61 \end{cases}$ cuyas soluciones son: $z = 8,\ t = 9;\ z = -\dfrac{25}{3}, t = \dfrac{76}{3}$

$z = 8,\ t = 9 \rightarrow 2^x = 2^3,\ 3^y = 3^2 \rightarrow x = 3,\ y = 2$

$z = -\dfrac{25}{3}, t = \dfrac{76}{3} \rightarrow 2^x = -\dfrac{25}{3}$ No es válida porque $2^x > 0$ siempre.

Solución: $x = 3,\ y = 2$

b) $\begin{cases} 3\ln x - \ln y = 1 \\ \ln x^3 + \ln y^2 = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\ln x - \ln y = 1 \\ 3\ln x + 2\ln y = 7 \end{cases}$

Restamos 1.ª ecuación menos 2.ª ecuación: $-3\ln y = -6 \rightarrow \ln y = 2 \rightarrow y = e^2$

Sumamos 2.ª ecuación más el doble de la 1.ª: $9\ln x = 9 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$

Solución: $x = e,\ y = e^2$

c) $\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ 3^{x-1} = \dfrac{3^{y^2+1}}{9} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ 3^{x-1} = \dfrac{3^{y^2+1}}{3^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ 3^{x-1} = 3^{y^2+1-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ 3^{x-1} = 3^{y^2-1} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x - 1 = y^2 - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x = y^2 \end{cases} \rightarrow x_1 = 0,\ y_1 = 0;\ x_2 = 1,\ y_2 = -1$

2. Planteamiento y resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

Para fabricar una lata de conservas cilíndrica de capacidad 48π cm³, se necesitan 56π cm² de chapa.

Calcular las dimensiones de la lata de conservas.

$\begin{cases} \pi r^2 h = 48\pi \\ 2\pi r^2 + 2\pi r h = 56\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r^2 h = 48 \rightarrow h = \dfrac{48}{r^2} \\ 2r^2 + 2rh = 56 \end{cases}$

$2r^2 + 2r\dfrac{48}{r^2} = 56 \rightarrow 2r^2 + 2r\dfrac{48}{r^2} - 56 = 0 \rightarrow \dfrac{96}{r} + 2r^2 - 56 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{2(r^3 - 28r + 48)}{r} = 0 \rightarrow (r^3 - 28r + 48) = 0 \rightarrow r = 4,\ r = 2,\ r = -6$ (no es válida)

Soluciones: $r_1 = 4 \rightarrow h_1 = \dfrac{48}{16} = 3;\ r_2 = 2 \rightarrow h_2 = \dfrac{48}{4} = 12$

3. Planteamiento y resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

En un grupo de 1.º de bachillerato todos tienen como materia de modalidad biología, dibujo o tecnología. Las matrículas en biología representan el 60 % del total. Si tres alumnos de dibujo se hubiesen matriculado en tecnología, entonces las dos asignaturas tendrían el mismo número de estudiantes. Finalmente, el doble de la diferencia del número de matriculados en biología y en dibujo es el triple de la diferencia de los matriculados en dibujo y en tecnología. Hallar el número de estudiantes matriculados en cada una de las materias.

$$\begin{cases} x - 0{,}6x - 0{,}6y - 0{,}6z = 0 \\ y - z = 6 \\ 2x - 2y - 3y + 3z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 0{,}4x - 0{,}6y - 0{,}6z = 0 \\ y - z = 6 \\ 2x - 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos la 1.ª ecuación por 5:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z = 0 & (1.^a) \\ \quad\;\; y - \;\; z = 6 & (2.^a) \\ 2x - 5y + 3z = 0 & (3.^a) - (1.^a) \end{cases} \to \begin{cases} 2x - 3y - 3z = 0 & (1.^a) \\ \quad\;\; y - \;\; z = 6 & (2.^a) \\ \; - 2y + 6z = 0 & (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{cases} \to \begin{cases} 2x - 3y - 3z = 0 \\ \quad\;\; y - \;\; z = 6 \\ \qquad\;\; 4z = 12 \end{cases} \to \begin{cases} x = 18 \\ y = 9 \\ z = 3 \end{cases}$$

Solución: $x = 18$ de biología, $y = 9$ de dibujo, $z = 3$ de tecnología.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 94

Para practicar

Factorización

1 **Descompón en factores estos polinomios y di cuáles son sus raíces:**

a) $9x^4 - x^2$ **b)** $4x^2 - 28x + 49$ **c)** $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

d) $2x^3 - x^2 - x$ **e)** $x^4 - 13x^2 + 36$ **f)** $x^4 + 2x^2 + 1$

a) $9x^4 - x^2 = x^2(9x^2 - 1) = x^2(3x - 1)(3x + 1)$

Raíces: $x = 0,\ x = \frac{1}{3},\ x = -\frac{1}{3}$

b) $4x^2 - 28x + 49 = (2x - 7)^2$

Raíz: $x = \frac{7}{2}$

c)
$$\begin{array}{r|l} x^3 + 9x^2 + 27x + 27 & x + 3 \\ x^2 + 6x + 9 & x + 3 \\ x + 3 & x + 3 \\ 1 & \end{array}$$

$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x + 3)^3$

Raíz: $x = -3$

d)
$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - x & x \\ 2x^2 - x - 1 & x - 1 \\ 2x + 1 & 2x + 1 \\ 1 & \end{array}$$

$2x^3 - x^2 - x = x(x - 1)(2x + 1)$

Raíces: $x = 0,\ x = 1,\ x = -\frac{1}{2}$

e)
$$\begin{array}{r|l} x^4 - 13x^2 + 36 & x - 2 \\ x^3 + 2x^2 - 9x - 18 & x + 2 \\ x^2 - 9 & x - 3 \\ x + 3 & x + 3 \\ 1 & \end{array}$$

$x^4 - 13x^2 + 36 = (x - 2)(x - 3)(x + 3)(x + 2)$

Raíces: $x = 2,\ x = -2,\ x = 3,\ x = -3$

f) $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$

Es un producto notable. No tiene raíces porque $x^2 + 1$ no se puede descomponer.

2 Halla, en cada uno de estos casos, el máx.c.d. [$A(x)$, $B(x)$] y el mín.c.m. [$A(x)$, $B(x)$]:

a) $A(x) = x^2 + x - 12$; $B(x) = x^3 - 9x$

b) $A(x) = x^3 + x^2 - x - 1$; $B(x) = x^3 - x$

c) $A(x) = x^6 - x^2$; $B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

a) $A(x) = (x - 3)\ (x + 4)$; $B(x) = x(x - 3)\ (x + 3)$

máx.c.d. $= (x - 3)$

mín.c.m. $= x(x - 3)\ (x + 3)\ (x + 4)$

b) $A(x) = (x - 1)\ (x + 1)2$; $B(x) = x(x - 1)\ (x + 1)$

máx.c.d. $= (x - 1)\ (x + 1)$

mín.c.m. $= x(x - 1)\ (x + 1)^2$

c) $A(x) = x^2(x + 1)\ (x - 1)\ (x^2 + 1)$; $B(x) = (x - 1)\ (x^2 + 1)$

máx.c.d. $= (x - 1)\ (x^2 + 1)$

mín.c.m. $= x^2(x + 1)\ (x - 1)\ (x^2 + 1)$

3 Resuelve estas ecuaciones factorizando previamente:

a) $6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$

b) $16x^5 - 8x^3 + x = 0$

c) $x^3 + 6x^2 - 7x - 60 = 0$

d) $x^3 - 49x = 0$

e) $x^3 + 9x^2 + 15x - 25 = 0$

f) $x^6 + 3x^2 = 0$

a) $6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$

$$6x^3 + 7x^2 - 1 = 6(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Soluciones: $x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = \frac{1}{3}$

b) $16x^5 - 8x^3 + x = 0$

$$16x^5 - 8x^3 + x = 16x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

Soluciones: $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 0,\ x_3 = -\frac{1}{2}$

c) $x^3 + 6x^2 - 7x - 60 = 0$

$x^3 + 6x^2 - 7x - 60 = (x - 3)(x + 5)(x + 4)$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -5,\ x_3 = -4$

d) $x^3 - 49x = 9$

$x^3 - 49x = x(x - 7)(x + 7)$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 7,\ x_3 = -7$

e) $x^3 + 9x^2 + 15x - 25 = 0$

$x^3 + 9x^2 + 15x - 25 = (x - 1)(x + 5)^2$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -5$

f) $x^6 + 3x^2 = 0$

$x^6 + 3x^2 = x^2(x^4 + 3)$

Solución: $x = 0$

Fracciones algebraicas

4 Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{x^4-x^2}{x^5+3x^4+2x^3}$

b) $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}$

c) $\dfrac{-x^3-4x^2+11x+30}{x^2+2x-15}$

d) $\dfrac{x^4-4x^2}{x^3+4x^2+4x}$

a) $\dfrac{x^4-x^2}{x^5+3x^4+2x^3}=\dfrac{x^2(x-1)(x+1)}{x^3(x+2)(x+1)}=\dfrac{1}{x}\dfrac{x-1}{x+2}$

b) $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}=\dfrac{(x+2)^3}{(x+2)^2}=x+2$

c) $\dfrac{-x^3-4x^2+11x+30}{x+2x-15}=\dfrac{-(x+5)(x-3)(x+2)}{(x+5)(x-3)}=-x-2$

d) $\dfrac{x^4-4x^2}{x^3+4x^2+4x}=\dfrac{x^2(x-2)(x+2)}{x(x+2)^2}=x\dfrac{x-2}{x+2}$

5 Opera y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{3a+3}{12a-12}:\dfrac{(a+1)^2}{a^2-1}$

b) $\dfrac{x^2+2x-3}{(x-2)^3}\cdot\dfrac{(x-2)^2}{x^2-1}$

c) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x}{x^2-3x+2}$

d) $\left(\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x}{x+2}\right):\left(1+\dfrac{x}{x+2}\right)$

e) $\left(1-\dfrac{x+1}{x+2}\cdot\dfrac{x+3}{x+2}\right):\dfrac{1}{x+2}$

a) $\dfrac{3(a+1)(a+1)(a-1)}{12(a-1)(a+1)^2}=\dfrac{1}{4}$

b) $\dfrac{(x+3)(x-1)(x-2)^2}{(x-2)^3(x+1)(x-1)}=\dfrac{x+3}{(x-2)(x+1)}$

c) $\dfrac{x(x-1)-x(x-2)-x}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{x^2-x-x^2+2x-x}{(x-2)(x-1)}=0$

d) $\dfrac{(x+1)(x+2)-x^2}{x(x+2)}:\dfrac{x+2+x}{x+2}=\dfrac{3x+2}{x(x+2)}\cdot\dfrac{x+2}{2x+2}=\dfrac{3x+2}{x(2x+2)}=\dfrac{3x+2}{2x(x+1)}$

e) $\dfrac{x^2+4+4x-x^2-4x-3}{(x+2)^2}\cdot(x+2)=\dfrac{1}{x+2}$

6 Demuestra las siguientes identidades:

a) $\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{1-x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{a^2-1}{a^2-3a+2}:\dfrac{a^2+2a+1}{a^2-a-2}=1$

c) $\left(\dfrac{x-2}{x-3}-\dfrac{x-3}{x-2}\right):\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}\right)=2x-5$

a) $\left(\dfrac{1-x+2x}{1-x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{1-x}{x}\right)=\left(\dfrac{1+x}{(1-x)(1+x)}\right)\cdot\left(\dfrac{1-x}{x}\right)=\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\cdot\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{(a+1)(a-1)}{(a-2)(a-1)}:\dfrac{(a+1)^2}{(a-2)(a+1)}=\dfrac{(a+1)(a-2)}{(a-2)(a+1)}=1$

c) $\left(\dfrac{(x-2)^2-(x-3)^2}{(x-3)(x-2)}\right):\left(\dfrac{(x-2)-(x-3)}{(x-3)(x-2)}\right)=\dfrac{(x-2+x-3)(x-2-x+3)}{(x-3)(x-2)}:\dfrac{x-2-x+3}{(x-3)(x-2)}=$

$=\dfrac{(2x-5)}{(x-3)(x-2)}:\dfrac{1}{(x-3)(x-2)}=\dfrac{(2x-5)(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)}=2x-5$

Ecuaciones de primer y segundo grado

7 **Resuelve, cuando sea posible, las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{(x+1)^2}{16} - \dfrac{1+x}{2} = \dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{2+x}{4}$

b) $0{,}2x + 0{,}6 - 0{,}25(x-1)^2 = 1{,}25x - (0{,}5x+2)^2$

c) $(5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$

a) $\dfrac{(x+1)^2}{16} - \dfrac{1+x}{2} = \dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{2+x}{4}$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por 16.

$x^2 - 6x - 7 = x^2 - 6x - 7$

Obtenemos una identidad, luego las soluciones son todos los números reales.

b) $0{,}2x + 0{,}6 - 0{,}25(x-1)^2 = 1{,}25x - (0{,}5x+2)^2$

$0{,}2x + 0{,}6 - 0{,}25(x^2 - 2x + 1) = 1{,}25x - (0{,}25x^2 + 2x + 4)$

$-0{,}25x^2 + 0{,}7x + 0{,}35 = -0{,}25x^2 - 0{,}75x - 4$

$0{,}7x + 0{,}75x = -0{,}35 - 4$

$1{,}45x = -4{,}35$

Solución: $x = -3$

c) $(5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$

$25x^2 - 30x + 9 + 25x - 20x^2 = 5x^2 - 5x$

$9 = 0$

No tiene solución.

8 **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:**

a) $0{,}5(x-1)^2 - 0{,}25(x+1)^2 = 4 - x$

b) $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{2} - 2\right)^2 - \dfrac{x+1}{8} = \dfrac{1}{8} - \dfrac{x-1}{4}$

c) $0{,}\widehat{3}x^2 - x - 1{,}\widehat{3} = 0$

d) $(x+1)^2 - (x-2)^2 = (x+3)^2 + x^2 - 20$

e) $\dfrac{x^2 - 2x + 5}{2} - \dfrac{x^2 + 3x}{4} = \dfrac{x^2 - 4x + 15}{6}$

f) $\dfrac{3x+1}{3} - \dfrac{5x^2+3}{2} = \dfrac{x^2-1}{2} - \dfrac{x+2}{3}$

g) $(x-a)^2 + x(x+b) = 8b^2 - x(2a-b) + a^2$

a) $0{,}5(x^2 + 1 - 2x) - 0{,}25(x^2 + 1 + 2x) = 4 - x$

$0{,}5x^2 + 0{,}5 - x - 0{,}25x^2 - 0{,}25 - 0{,}5x = 4 - x$

$0{,}25x^2 - 0{,}5x - 3{,}75 = 0$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

$x_1 = -3;\ x_2 = 5$

b) $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x^2}{4} + 4 - 2x\right) - \dfrac{x+1}{8} = \dfrac{1}{8} - \dfrac{2x-2}{8}$

$3x^2 + 48 - 24x - x - 1 = 1 - 2x + 2;\ 3x^2 - 23x + 44 = 0$

$x = \dfrac{23 \pm 1}{6} = \begin{cases} 4 \\ 11/3 \end{cases}$

$x_1 = 4;\ x_2 = \dfrac{11}{3}$

c) $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{3x}{3} - \dfrac{4}{3} = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 3x - 4 = 0$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \begin{array}{l} \nearrow 4 \\ \searrow -1 \end{array}$

$x_1 = 4, \;\; x_2 = -1$

d) $x^2 + 1 + 2x - x^2 - 4 + 4x = x^2 + 9 + 6x + x^2 - 20$

$0 = 2x^2 - 8; \;\; x_2 = 4$

$x_1 = -2; \;\; x_2 = 2$

e) $6x^2 - 12x + 30 - 3x^2 - 9x = 2x^2 - 8x + 30$

$x^2 - 13x = 0$

$x_1 = 0; \;\; x^2 = 13$

f) $6x + 2 - 15x^2 - 9 = 3x^2 - 3 - 2x - 4$

$0 = 18x^2 - 8x; \;\; 2x(9x - 4) = 0$

$x_1 = 0; \;\; x_2 = \dfrac{4}{9}$

g) $x^2 + a^2 - 2ax + x^2 + bx = 8b^2 - 2ax + bx + a^2$

$2x^2 = 8b^2; \;\; x^2 = 4b^2; \;\; x = \pm 2b$

$x_1 = 2b; \;\; x_2 = -2b$

Ecuaciones bicuadradas

9 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ **c)** $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ **d)** $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

a) $x^2 = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{array}{l} \nearrow 4 \\ \searrow 1 \end{array}$

$x_1 = 2; \;\; x_2 = -2; \;\; x_3 = 1; \;\; x_4 = -1$

b) $x^2 = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2} = \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \searrow -4 \text{ (no vale)} \end{array}$

$x_1 = 1; \;\; x_2 = -1$

c) $x^2 = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{-3 \pm 1}{2} = \begin{array}{l} \nearrow -1 \\ \searrow -2 \end{array} \;\rightarrow$ No tiene solución

d) $x^2 = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2} = \dfrac{9 \pm 7}{2} = \begin{array}{l} \nearrow 8 \\ \searrow 1 \end{array}$

$x_1 = 1; \;\; x_2 = -1; \;\; x_3 = 2\sqrt{2}; \;\; x_4 = -2\sqrt{2}$

10 Resuelve:

a) $(x^2 - 2)^2 = 1$

b) $\dfrac{3x^4 - 1}{4} + \dfrac{1}{2}\left(x^4 - 2 - \dfrac{1}{2}x^2\right) = \dfrac{x^2 - 5}{4}$

c) $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$

d) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

a) $(x^2 - 2)^2 = 1 \;\rightarrow\; x^4 - 4x^2 + 4 = 1$

$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

$x^2 = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = \begin{array}{l} \nearrow 3 \\ \searrow 1 \end{array}$

$x_1 = \sqrt{3}; \;\; x_2 = -\sqrt{3}; \;\; x_3 = 1; \;\; x_4 = -1$

b) $3x^4 - 1 + 2x^4 - 4 - x^2 = x^4 - 5$

$4x^4 - x^2 = 0$

$x^2(4x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \\ 4x^2 - 1 = 0 \end{cases}$

$x_1 = 0;\ x_2 = \frac{1}{2};\ x_3 = -\frac{1}{2}$

c) $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$

Hacemos el cambio de variable $x^3 = y$.

$y^2 - 2y + 1 = 0 \to y = 1$

$x = \sqrt[3]{1} = 1$

d) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

Hacemos el cambio de variable $x^4 = y$.

$y^2 - 15y - 16 = 0 \to y = 16,\ y = -1$ que no es válida.

$x = \pm\sqrt[4]{16} \to x_1 = 2,\ x_2 = -2$

Ecuaciones con fracciones algebraicas

11 Resuelve estas ecuaciones y comprueba la validez de las soluciones:

a) $\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2} = 0$

b) $\frac{3x-7}{x} = \frac{8x}{x+1} - 5$

c) $\frac{x}{x-2} + \frac{2x}{2-x} = -x$

d) $\frac{x-3}{x^2-9} + \frac{x+1}{x+3} = x + 2$

e) $\frac{x+7}{x+1} - \frac{7x+1}{x^2+2x+1} = x - 4$

f) $\frac{30}{x^2+5x+6} - \frac{x}{x+2} = \frac{2x+1}{x+3}$

a) $\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2} = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por x^2.

$\frac{2x-1}{x^2} = 0 \to 2x - 1 = 0 \to x = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0$$

$x = \frac{1}{2}$ es válida.

b) $\frac{3x-7}{x} = \frac{8x}{x+1} - 5$

$\frac{3x-7}{x} - \frac{8x}{x+1} + 5 = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $x(x+1)$.

$\frac{(x-7)}{x(x+1)} = 0 \to x - 7 = 0 \to x = 7$ es válida.

c) $\frac{x}{x-2} + \frac{2x}{2-x} = -x$

$\frac{x}{x-2} + \frac{2x}{2-x} + x = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $(x-2)$.

$$\frac{x(x-3)}{x-2}=0 \rightarrow x(x-3)=0$$

Soluciones: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$. Son válidas.

d) $\dfrac{x-3}{x^2-9}+\dfrac{x+1}{x+3}=x+2$

$$\frac{x-3}{x^2-9}+\frac{x+1}{x+3}-x-2=0$$

Reducimos a común denominador, simplificamos y multiplicamos por $(x+3)$.

$$\frac{x-3}{x^2-9}+\frac{x+1}{x+3}-x-2=-\frac{(x+2)^2}{x+3}=0 \rightarrow x+2=0$$

Solución: $x=-2$, es válida.

e) $\dfrac{x+7}{x+1}-\dfrac{7x+1}{x^2+2x+1}=x-4$

$$\frac{x+7}{x+1}-\frac{7x+1}{x^2+2x+1}-x+4=0$$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $(x+1)^2$.

$$\frac{-x^3+3x^2+8x+10}{(x+1)^2}=0 \rightarrow -x^3+3x^2+8x+10=0$$

Factorizamos: $-x^3+3x^2+8x+10=-(x-5)(2x+x^2+2)$

La solución es $x=5$, que es válida.

f) $\dfrac{30}{x^2+5x+6}-\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{2x+1}{x+3}$

$$\frac{30}{x^2+5x+6}-\frac{x}{x+2}-\frac{2x+1}{x+3}=0$$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por x^2+5x+6.

$$-\frac{3x^2+8x-28}{x^2+5x+6}=0 \rightarrow 3x^2+8x-28=0$$

Soluciones: $x_1=2$, $x_2=-\dfrac{14}{3}$. Son válidas.

Página 95

Ecuaciones con radicales

12 Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones:

a) $\sqrt{5x+6}=3+2x$ **b)** $x+\sqrt{7-3x}=1$ **c)** $\sqrt{2-5x}+x\sqrt{3}=0$ **d)** $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-5}=0$

a) $5x+6=9+4x^2+12x;\ 0=4x^2+7x+3$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{8}=\frac{-7\pm1}{8}=\begin{cases}-1\\-3/4\end{cases}$$

$$x_1=-1;\ x_2=-\frac{3}{4}$$

b) $7-3x=1+x^2-2x;\ 0=x^2+x-6$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}=\begin{cases}2 \text{ (no vale)}\\-3\end{cases}$$

$$x=-3$$

c) $2 - 5x = 3x^2$; $0 = 3x^2 + 5x - 2$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 1/3 \text{ (no vale)} \\ -2 \end{cases}$$

$x = -2$

d) $2x + 3 = x - 5$; $x = -8$ (no vale)

No tiene solución.

13 Resuelve:

a) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x-6} = 4$ **b)** $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$ **c)** $\sqrt{\dfrac{7x+1}{4}} = \dfrac{5x-7}{6}$ **d)** $\sqrt{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{x}{8}$

a) $5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x}$

$3x - 22 = -8\sqrt{2x}$

$9x^2 + 484 - 132x = 64 \cdot 2x$; $9x^2 - 260x + 484 = 0$

$$x = \frac{260 \pm 224}{18} = \begin{cases} 484/18 = 242/9 \text{ (no vale)} \\ 2 \end{cases}$$

$x = 2$

b) Aislamos un radical: $\sqrt{x-2} = 3 - \sqrt{x+1}$

Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$x - 2 = 9 - 6\sqrt{x+1} + x + 1 \rightarrow 6\sqrt{x+1} = 12 \rightarrow \sqrt{x+1} = 2$

Repetimos el proceso: $x + 1 = 4 \rightarrow x = 3$

Comprobamos la solución, $\sqrt{3-2} + \sqrt{3+1} = 3$, vemos que es válida.

c) $\dfrac{7x+1}{4} = \dfrac{25x^2 + 49 - 70x}{36}$

$63x + 9 = 25x^2 + 49 - 70x$; $0 = 25x^2 - 133x + 40$

$$x = \frac{133 \pm 117}{50} = \begin{cases} 5 \\ 8/25 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$x = 5$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{x}{8}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 = \left(\frac{x}{8}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{64}x^2 \rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{64}x^2 = 0 \rightarrow -\frac{x^3 - 64}{64x} = 0 \rightarrow x^3 - 64 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4, \text{ solución válida.}$$

14 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

b) $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

c) $\sqrt[3]{4x-1} = x - 4$

d) $\sqrt[3]{4-2x} = \sqrt[6]{8x^2 - 16x}$

e) $\sqrt{2x+2} - \sqrt[4]{6x+10} = 0$

f) $\sqrt[4]{3x+1} = 4 - \sqrt[4]{3x+1}$

a) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

$\sqrt{3x} = \sqrt{x} + \sqrt{2}$

$(\sqrt{3x})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{2})^2$

$3x = x + 2\sqrt{2}\sqrt{x} + 2$

$2\sqrt{2}\sqrt{x} = 2x - 2$

$(2\sqrt{2}\sqrt{x})^2 = (2x-2)^2$

$8x = 4x^2 - 8x + 4 \;\to\; x = \sqrt{3} + 2,\; x = 2 - \sqrt{3}$ no es válida.

Solución: $x = \sqrt{3} + 2$

b) $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

$(\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x})^2 = (\sqrt{7-6x})^2 \;\to\; 2\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4} - 6x - 1 = 7 - 6x$

$2\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4} = 8 \;\to\; (\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4})^2 = 4^2 \;\to\; -7x^2 - 33x - 20 = 16$

Soluciones: $x_1 = -\dfrac{12}{7},\; x_2 = -3$. Las dos son válidas.

c) $\sqrt[3]{4x-1} = x - 4$

Elevamos al cubo ambos miembros:

$(\sqrt[3]{4x-1})^3 = (x-4)^3 \;\to\; 4x - 1 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64 \;\to\; x^3 - 12x^2 + 48x - 64 - 4x + 1 = 0$

Factorizamos:

$x^3 - 12x^2 + 44x - 63 = (x-7)(x^2 - 5x + 9)$

Solución: $x = 7$ es válida.

d) $\sqrt[3]{4-2x} = \sqrt[6]{8x^2 - 16x}$

Elevamos a la sexta ambos miembros:

$(4-2x)^2 = 8x^2 - 16x \;\to\; 4x^2 - 16x + 16 = 8x^2 - 16x \;\to\; 4x^2 + 16 = 0$

No tiene solución.

e) $\sqrt{2x+2} - \sqrt[4]{6x+10} = 0$

Aislamos las raíces.

$\sqrt{2x+2} = \sqrt[4]{6x+10}$

Elevamos a la cuarta ambos miembros:

$(2x+2)^2 = 4x^2 + 8x + 4 = 6x + 10 \;\to\; 4x^2 + 8x + 4 = 6x + 10 \;\to$

$\to\; 4x^2 + 2x - 6 = 0 \;\to\; x = 1,\; x = -\dfrac{3}{2}$ no es válida.

Solución: $x = 1$

f) $\sqrt[4]{3x+1} = 4 + \sqrt[4]{3x+1} \;\to\; 0 = 4 \;\to$ No tiene solución.

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

15 **Resuelve expresando ambos miembros de la ecuación como potencias de la misma base:**

a) $3^{x^2+1} = \dfrac{1}{9}$ **b)** $\dfrac{9^{2x}}{3^x} = 27$ **c)** $5 \cdot 2^{x+3} = \dfrac{5}{4}$ **d)** $5^{x^2+3x} = 0{,}04$

e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{8}{27}$ **f)** $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x = 81$ **g)** $(0{,}01)^x = 100$ **h)** $3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 36$

i) $\sqrt{2^{3x-1}} = 0{,}125$ **j)** $3\sqrt[3]{27^{x-1}} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{2x+5}$ **k)** $3 \cdot 9^x \cdot 27^x = 1$ **l)** $5^{x-5} \cdot 125^{2x} = 25$

a) $3^{x^2+1} = \dfrac{1}{9} \;\to\; 3^{x^2+1} = 3^{-2} \;\to\; x^2 + 1 = -2 \;\to\; x^2 = -3 \;\to$ No tiene solución.

b) $\dfrac{9^{2x}}{3^x} = 27 \;\to\; \dfrac{3^{4x}}{3^x} = 3^3 \;\to\; 3^{4x-x} = 3^3 \;\to\; 3x = 3 \;\to$ *Solución:* $x = 1$

c) $5 \cdot 2^{x+3} = \dfrac{5}{4} \to 5 \cdot 2^{x+3} = 5 \cdot 2^{-2} \to x+3 = -2 \to$ *Solución:* $x = -5$

d) $5^{x^2+3x} = 0{,}04 \to 5^{x^2+3x} = \dfrac{4}{100} = \dfrac{1}{25} \to 5^{x^2+3x} = \dfrac{1}{25} \to 5^{x^2+3x} = 5^{-2} \to x^2 + 3x = -2$

Soluciones: $x = -1,\ x = -2$

e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{8}{27} \to \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \to$ *Solución:* $x = 3$

f) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x = 81 \to \left(\dfrac{1}{9}\right)^x = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{-2} \to$ *Solución:* $x = -2$

g) $(0{,}01)^x = 100 \to (0{,}01)^x = 0{,}01^{-2} \to$ *Solución:* $x = -2$

h) $3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 36 \to 3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 6^2 \to 6^{x+1} = 6^2 \to x + 1 = 2 \to$ *Solución:* $x = 1$

i) $\sqrt{2^{3x-1}} = 0{,}125 \to \sqrt{2^{3x-1}} = \dfrac{125}{1000} = \dfrac{1}{8} \to$

$\to \sqrt{2^{3x-1}} = \dfrac{1}{8} \to 2^{\frac{3x-1}{2}} = 2^{-3} \to \dfrac{3x-1}{2} = -3 \to$ *Solución:* $x = -\dfrac{5}{3}$

j) $3\sqrt[3]{27^{x-1}} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{2x+5} \to 3\sqrt[3]{3^{3(x-1)}} = \left(\dfrac{1}{3^2}\right)^{2x+5} \to 3^{1+\frac{3(x-1)}{3}} = 3^{-2(2x+5)} \to$

$\to 1 + \dfrac{3(x-1)}{3} = -2(2x+5) \to x = -2(2x+5) \to$ *Solución:* $x = -2$

k) $3 \cdot 9^x \cdot 27^x = 1 \to 3 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{3x} = 3^0 \to 3^{1+2x+3x} = 3^0 \to 1 + 5x = 0 \to$ *Solución:* $x = -\dfrac{1}{5}$

l) $5^{x-5} \cdot 125^{2x} = 25 \to 5^{x-5} \cdot 5^{3 \cdot 2x} = 5^2 \to 5^{x-5+6x} = 5^2 \to 7x - 5 = 2 \to$ *Solución:* $x = 1$

16 **Resuelve, tomando logaritmos, estas ecuaciones:**

a) $\dfrac{1}{e^x} = 27$ **b)** $e^{x-9} = \sqrt{73}$ **c)** $2^x \cdot 3^x = 81$

d) $\dfrac{2^x}{3^{x+1}} = 1$ **e)** $2^{x+1} \cdot 16^{2x+1} = 3$ **f)** $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x \cdot 125^{x+1} = 4$

a) $\dfrac{1}{e^x} = 27 \to \dfrac{1}{27} = e^x \to ln\,\dfrac{1}{27} = ln\,e^x \to x = ln\,\dfrac{1}{27} = ln\,1 - ln\,27 = 0 - ln\,27 \to x \approx -3{,}296$

b) $e^{x-9} = \sqrt{73} \to ln\,e^{x-9} = ln\,\sqrt{73} \to x - 9 = \dfrac{1}{2}\,ln\,73 \to x = 9 + \dfrac{ln\,73}{2} \to x \approx 11{,}145$

c) $6^x = 81 \to x\,log\,6 = log\,81 \to x = \dfrac{log\,81}{log\,6} \approx 2{,}453$

d) $\dfrac{2^x}{3^x \cdot 3} = 1 \to \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 3 \to x\,log\,\dfrac{2}{3} = log\,3 \to x = \dfrac{log\,3}{log\,2 - log\,3} \approx -2{,}710$

e) $2^{x+1} \cdot 16^{2x+1} = 3 \to 2^{x+1} \cdot 2^{4(2x+1)} = 3 \to 2^{9x+5} = 3 \to log\,2^{9x+5} = log\,3 \to$

$\to (9x+5)\,log\,2 = log\,3 \to (9x+5) = \dfrac{log\,3}{log\,2} = 1{,}5850$

Solución: $x = \dfrac{1{,}5850 - 5}{9} = -0{,}3794$

f) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x \cdot 125^{x+1} = 4 \to 5^{-x} \cdot 5^{3x+3} = 4 \to 5^{2x+3} = 4 \to log\,5^{2x+3} = log\,4 \to$

$\to (2x+3)\,log\,5 = log\,4 \to (2x+3) = \dfrac{log\,4}{log\,5} = 0{,}8613$

Solución: $x = \dfrac{0{,}8613 - 3}{2} = -1{,}0693$

17 **Resuelve las siguientes ecuaciones mediante un cambio de variable:**

a) $2^x + 2^{1-x} = 3$ **b)** $2^{x+1} + 2^{x-1} = \frac{5}{2}$ **c)** $8^{1+x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$

d) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ **e)** $9^x - 3^x - 6 = 0$ **f)** $7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$

g) $2^{x/2} + 2^x = 6$ **h)** $\sqrt{3^{2x}+7} = 3^x + 1$ **i)** $2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x+1} + 3 \cdot 2^{x+2} = 8$

a) $2^x + \frac{2}{2^x} = 3$

$z = 2^x \rightarrow x + \frac{2}{z} = 3;\ z^2 + 2 = 3z$

$z^2 - 3z + 2 = 0;\ z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \rightarrow 2^x = 2 \rightarrow x_1 = 1 \\ 1 \rightarrow 2^x = 1 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$

b) $2 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2} = \frac{5}{2};\ 4 \cdot 2^x + 2^x = 5;\ 2^x = 1$

$x = 0$

c) $2^{3+3x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$

$8 \cdot (2^x)^3 + \frac{(2^x)^3}{2} = \frac{17}{16} \rightarrow 2^x = z \rightarrow 128z^3 + 8z^3 = 17$

$(128+8)(z)^3 = 17;\ (z)^3 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8} \rightarrow z = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \rightarrow 2^x = \frac{1}{2}$

$x = -1$

d) $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$2^x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 0;\ x_2 = 2$

e) $(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0;\ 3^x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \text{ (no vale)} \end{cases}$

$x = 1$

f) $7 \cdot (7^x)^2 - 50 \cdot 7^x + 7 = 0;\ 7^x = \frac{50 \pm 48}{14} = \begin{cases} 7 \\ 1/7 \end{cases}$

$x_1 = -1;\ x_2 = 1$

g) $2^{x/2} - 3 \cdot 2^x = 6 \rightarrow \sqrt{2^x} - 3 \cdot 2^x = 6$

Hacemos el cambio de variable $2^x = y$:

$\sqrt{y} - 3 \cdot y = 6 \rightarrow \sqrt{y} = 3 \cdot y + 6 \rightarrow (\sqrt{y})^2 = (3y+6)^2 \rightarrow y = 9y^2 + 36y + 36 \rightarrow$

$\rightarrow 9y^2 + 35y + 36 = 0 \rightarrow y = \frac{-35 \pm \sqrt{-71}}{18}$

No tiene solución.

h) $\sqrt{3^{2x}+7} = 3^x + 1$

Hacemos el cambio de variable $3^x = y$:

$\sqrt{y^2+7} = y + 1 \rightarrow (\sqrt{y^2+7})^2 = (y+1)^2 \rightarrow y^2 + 7 = y^2 + 2y + 1 \rightarrow 7 = 2y + 1 \rightarrow y = 3$

Solución: $x = 1$

i) $2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x+1} + 3 \cdot 2^{x+2} = 8$

Hacemos el cambio de variable $2^x = y$:

$y^3 - 3 \cdot 2 \cdot y^2 + 3 \cdot 2^2 y = 8 \rightarrow y^3 - 6y^2 + 12y = 8 \rightarrow y^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \rightarrow (y-2)^3 = 0 \rightarrow y = 2$

Solución: $x = 1$

18 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\log (x^2 + 1) - \log (x^2 - 1) = \log \frac{13}{12}$

b) $\ln (x - 3) + \ln (x + 1) = \ln 3 + \ln (x - 1)$

c) $(x - 1) \log (3^{x+1}) = 3 \log 3$

d) $\log (x + 3) - \log (x - 6) = 1$

a) $\log \frac{x^2+1}{x^2-1} = \log \frac{13}{12}$

$12x^2 + 12 = 13x^2 - 13;\ 25 = x^2$

$x_1 = -5;\ x_2 = 5$

b) $\ln (x^2 - 2x - 3) = \ln (3x - 3)$

$x^2 - 2x - 3 = 3x - 3;\ x^2 - 5x = 0$

$x = 5\ \ (x = 0$ no vale)

c) $\log (3^{(x+1)(x-1)}) = \log 3^3$

$3^{(x+1)(x-1)} = 3^3;\ (x + 1)(x - 1) = 3$

$x = 2\ \ (x = -2$ no vale)

d) $\log \frac{x+3}{x-6} = 1$

$x + 3 = 10x - 60;\ 63 = 9x$

$x = 7$

19 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $\log_5 (x^2 - 2x + 5) = 1$

b) $\log \sqrt{3x+5} + \log \sqrt{x} = 1$

c) $2 (\log x)^2 + 7 \log x - 9 = 0$

d) $\frac{1}{2} \log_{11} (x + 5) = 1$

e) $\log (x^2 + 3x + 36) = 1 + \log (x + 3)$

f) $\ln x + \ln 2x + \ln 4x = 3$

a) $\log_5 (x^2 - 2x + 5) = \log_5 5$

$x^2 - 2x + 5 = 5;\ x(x - 2) = 0$

$x_1 = 0;\ x_2 = 2$

b) $\frac{\log (x(3x+5))}{2} = 1;\ 3x^2 + 5x - 100 = 0$

$x = \frac{-5 \pm 35}{6} = \begin{cases} 5 \\ -40/6 \text{ (no vale)} \end{cases}$

$x = 5$

c) $\log x = \frac{-7 \pm \sqrt{49+72}}{4} = \frac{-7 \pm 11}{4} = \begin{cases} 1;\ x_1 = 10 \\ -18/4 = -9/2;\ x_2 = 10^{-9/2} \end{cases}$

d) $\log_{11} (x + 5)^{1/2} = \log_{11} 11$

$(x + 5)^{1/2} = 11;\ (x + 5) = 11^2$

$x = 116$

e) $\log \frac{x^2+3x+36}{x+3} = 1$

$x^2 + 3x + 36 = 10x + 30;\ x^2 - 7x + 6 = 0$

$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 1;\ x_2 = 6$

f) $ln\, x + ln\, 2x + ln\, 4x = 3$

$ln\,(x \cdot 2x \cdot 4x) = 3$

$ln\,(8x^3) = 3 \to 8x^3 = e^3 \to x^3 = \dfrac{e^3}{8}$

$x = \sqrt[3]{\dfrac{e^3}{8}} = \dfrac{e}{2} \to x = \dfrac{e}{2}$

Sistemas de ecuaciones

20 Resuelve:

a) $\begin{cases} x \cdot y = 15 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2y - x = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$

a) $x = \dfrac{5y}{3}$

$\dfrac{5y^2}{3} = 15;\; y^2 = 9 < \begin{matrix} y = 3 \to x = 5 \\ y = -3 \to x = -5 \end{matrix}$

$x_1 = 5,\; y_1 = 3;\; x_2 = -5,\; y_2 = -3$

b) $\left.\begin{matrix} 6y + 6x = 5xy \\ y = \dfrac{2 - 2x}{3} \end{matrix}\right\}$ $4 - 4x + 6x = \dfrac{5x(2 - 2x)}{3}$

$6x + 12 = 10x - 10x^2$

$10x^2 - 4x + 12 = 0$

$5x^2 - 2x + 6 = 0$

No tiene solución.

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \to (2y - 7)^2 + y^2 = 10 \to \\ 2y - x = 7 \to x = 2y - 7 \end{cases}$

$\to 4y^2 - 28y + 49 + y^2 = 10 \to 5y^2 - 28y + 49 = 10 \to y = 3,\; y = \dfrac{13}{5}$

$y_1 = 3,\; x_1 = 1;\; y_2 = \dfrac{13}{5},\; x_2 = -\dfrac{9}{5}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \to \left(\dfrac{6}{y}\right)^2 - y^2 = 5 \to -\dfrac{y^4 - 36}{y^2} - 5 = 0 \to -\dfrac{(y^4 + 5y^2 - 36)}{y^2} = 0 \to \\ xy = 6 \to x = \dfrac{6}{y} \end{cases}$

$\to y^4 + 5y^2 - 36 = 0 \to y = 2,\; y = -2$

$y_1 = 2,\; x_1 = 3;\; y_2 = -2,\; x_2 = -3$

e) $2x^2 - 10x + 12 = 0;\; x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = < \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$

$$\begin{array}{rrrrrr} x^2 + & y^2 & - 5x - & 5y & + 10 & = 0 \\ -x^2 + & y^2 & + 5x - & 5y & - 2 & = 0 \\ \hline & 2y^2 & - & 10y & + 8 & = 0 \end{array}$$

$y^2 - 5y + 4 = 0 \to y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = < \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}$

$x_1 = 3,\; y_1 = 4;\; x_2 = 3,\; y_2 = 1;\; x_3 = 2,\; y_3 = 4;\; x_4 = 2,\; y_4 = 1$

21 Resuelve:

a) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sqrt{3(x+y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + 2 = x + 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

a) $x = (5 - y)^2$

$y^2 - 2y + 1 = 25 + y^2 - 10y$

$8y = 24;\ y = 3;\ x = 4$

$x = 4;\ y = 3$

b) $4x + 4 = y^2 + 1 + 2y;\ x = \dfrac{y^2 + 2y - 3}{4}$

$x = \dfrac{1+3y}{2} = \dfrac{2+6y}{4}$

$y^2 + 2y - 3 = 2 + 6y$

$y^2 - 4y - 5 = 0$

$y = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \to x = 8 \\ -1 \to x = -1 \end{cases}$

$x_1 = -1,\ y_1 = -1;\ x_2 = 8,\ y_2 = 5$

c) $y = 2x - 6$

$\sqrt{3(3x-6)} = 12 - x$

$9x - 18 = 144 + x^2 - 24x$

$0 = x^2 - 33x + 162$

$x = \dfrac{33 \pm 21}{2} = \begin{cases} 27 \to y = 48 \text{ (no vale)} \\ 6 \to y = 6 \end{cases}$

$x = 6,\ y = 6\ \ (x = 27,\ y = 48$ no vale)

d) $y = 2x - 5$

$\sqrt{3x-5} = x - 1$

$3x - 5 = x^2 + 1 - 2x$

$0 = x^2 - 5x + 6$

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \to y = 1 \\ 2 \to y = -1 \end{cases}$

$x_1 = 2,\ y_1 = -1;\ x_2 = 3,\ y_2 = 1$

22 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x + 2^y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} e^x - e^{y+1} = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 10^x \cdot 10^{y^2 - 1} = 0,1 \\ \dfrac{2^{2x}}{2^{y-1}} = 0,25 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3^{2x} + 3^{y-1} = 4 \\ 3^{x+1} + 3^y = 12 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2^{2x} + 2^y = \dfrac{1}{2} \\ 2^{2(x-y)} = 4 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x + 2y = 12 \end{cases}$

$y = 1 + x \to 2^x + 2^{1+x} = 12 \to 2^x + 2 \cdot 2^x = 12 \to 3 \cdot 2^x = 12 \to$

$\to 2^x = 4 \to x = 2 \to y = 1 + 2 = 3$

$x = 2,\ y = 3$

b) $\begin{cases} e^x \cdot e^{y+1} = 1 \to e^{x+y+1} = e^0 \to x = -1 - y \\ x^2 + y^2 = 1 \to (-1-y)^2 + y^2 = 1 \to 2y^2 + 2y = 0 \to y(y+1) = 0 \to y = 0;\ y = -1 \end{cases}$

$x_1 = -1,\ y_1 = 0;\ x_2 = 0,\ y_2 = -1$

c) $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases} \to \begin{cases} 5^{x+y} = 5^0 \\ 5^{x-y} = 5^2 \end{cases} \to \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

$x = 1,\ y = -1$

d) $\begin{cases} 10^x \cdot 10^{y^2-1} = 0,1 \\ \dfrac{2^{2x}}{2^{y-1}} = 0,25 \end{cases} \to \begin{cases} 10^{x+y^2-1} = 10^{-1} \\ 2^{2x-y+1} = 2^{-2} \end{cases} \to \begin{cases} x + y^2 - 1 = -1 \\ 2x - y + 1 = -2 \end{cases} \to \begin{cases} x + y^2 = 0 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} x = -y^2 \\ -2y^2 - y + 3 = 0 \to y = 1,\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$x_1 = -1,\ y_1 = 1;\ x_2 = -\dfrac{9}{4},\ y_2 = -\dfrac{3}{2}$

e) $\begin{cases} 3^{2x} + 3^{y-1} = 4 \\ 3^{x+1} + 3^y = 12 \end{cases}$

Llamamos $3^x = z$ y $3^y = t$ $\begin{cases} z^2 + \dfrac{t}{3} = 4 \\ 3z + t = 12 \end{cases} \to \begin{cases} 3z^2 + t = 12 \\ 3z + t = 12 \end{cases} \to 3z^2 - 3z = 0 \to z = 0,\ z = 1$

$z = 0$ (no vale)

$z = 1 \to t = 9 \to x = 0,\ y = 2$

f) $\begin{cases} 2^{2x} + 2^y = \dfrac{1}{2} \\ 2^{2(x-y)} = 4 \end{cases}$

Llamamos $2^x = z$ y $2^y = t$ $\begin{cases} z^2 + t = \dfrac{1}{2} \to 4t^2 + t = \dfrac{1}{2} \to t = \dfrac{1}{4},\ t = -\dfrac{1}{2} \text{ (no vale)} \\ \dfrac{z^2}{t^2} = 4 \to z^2 = 4t^2 \end{cases}$

$t = \dfrac{1}{4} \to z = \dfrac{1}{2},\ z = -\dfrac{1}{2}$ no es válida.

$t = \dfrac{1}{4} \to z = \dfrac{1}{2} \to x = -1,\ y = -2$

Página 96

23 **Resuelve:**

a) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \\ \log_2 \dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log (x^2 y) = 2 \\ \log x = 6 + \log y^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - y = 25 \\ \log y = \log x - 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \ln x - \ln y = 2 \\ \ln x + \ln y = 4 \end{cases}$

a) $2 \log x = 2$

$x = 10;\ y = 100$

b) $\log_2 x + 3\log_2 y = 5$

$2\log_2 x - \log_2 y = 3$

$$\begin{array}{r} \log_2 x + 3\log_2 y = 5 \\ 6\log_2 x - 3\log_2 y = 9 \\ \hline 7\log_2 x \qquad = 14 \end{array}$$

$x = 4, \ \ y = 2$

c) $2\log x + \log y = 2$

$\log x - 2\log y = 6$

$$\begin{array}{r} 4\log x + 2\log y = \ \ 4 \\ \log x - 2\log y = \ \ 6 \\ \hline 5\log x \qquad = 10 \end{array} \ \to \ \log x = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 100 \\ y = \dfrac{1}{100} \end{array}\right\}$$

d) $\log \dfrac{x}{y} = 1; \ \dfrac{x}{y} = 10; \ x = 10y$

$100y^2 - y^2 = 11; \ 99y^2 = 11; \ y^2 = \dfrac{1}{9} \ \to \ y = \pm\dfrac{1}{3}$

$x = \dfrac{10}{3}; \ y = \dfrac{1}{3}$

$\left(y = -\dfrac{1}{3} \text{ no vale}\right)$

e) $\left.\begin{array}{l} x = 25 + y \\ \log \dfrac{y}{x} = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0,1\,x \\ 0,9x = 25 \end{array}$

$x = \dfrac{250}{9}; \ y = \dfrac{25}{9}$

f) $\left.\begin{array}{l} \ln x - \ln y = 2 \\ \ln x + \ln y = 4 \end{array}\right\}$ Sumando las dos ecuaciones, queda:
$2\ln x = 6 \ \to \ \ln x = 3 \ \to \ x = e^3$

Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª, queda:

$2\ln y = 2 \ \to \ \ln y = 1 \ \to \ y = e$

$x = e^3; \ y = e$

Método de Gauss

24 Resuelve por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x - \ \ y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - \ \ y + z = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 3y + \ \ z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ 4x + \ \ y - \ \ z = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + \ \ y + z = 18 \\ x \qquad - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - \ \ y - z = -10 \\ x + 2y + z = \ \ 11 \\ 2x - \ \ y + z = \ \ \ 8 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª) + (1.ª)} \\ \text{(3.ª) + (1.ª)} \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} x - \ \ y - z = -10 \\ 2x + \ \ y \qquad = \ \ 1 \\ 3x - 2y \qquad = -2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} \\ \text{(3.ª) + 2 · (2.ª)} \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} x - y - z = -10 \\ 2x + y \qquad = \ \ 1 \\ 7x \qquad\quad = \ \ 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 + 10 = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 9 \end{array}$

b) $$\left.\begin{array}{l}2x-3y+z=0\\3x+6y-2z=0\\4x+y-z=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+2\cdot(1.^a)\\(3.^a)+(1.^a)\end{array}\longrightarrow\left.\begin{array}{l}2x-3y+z=0\\7x=0\\6x-2y=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}x=0\\y=0\\z=0\end{array}$$

c) $$\left.\begin{array}{l}x+y+z=3\\2x-y+z=2\\x-y+z=1\end{array}\right\}\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+(1.^a)\\(3.^a)+(1.^a)\end{array}\longrightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=3\\3x+2z=5\\2x+2z=4\end{array}\right\}\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-(2.^a)\end{array}\longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z=3\\3x+2z=5\\-x=-1\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}x=1\\z=\dfrac{5-3x}{2}=1\\y=3-x-z=1\end{array}\right\}\begin{array}{l}x=1\\y=1\\z=1\end{array}$$

d) $$\left.\begin{array}{l}x+y+z=18\\x-z=6\\x-2y+z=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)+2\cdot(1.^a)\end{array}\longrightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=18\\x-z=6\\3x+3z=36\end{array}\right\}\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a):3\end{array}\longrightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=18\\x-z=6\\x+z=12\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)+(2.^a)\end{array}\longrightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=18\\x-z=6\\2x=18\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}x=9\\z=x-6=3\\y=18-x-z=6\end{array}\right\}\begin{array}{l}x=9\\y=6\\z=3\end{array}$$

e) $$\left.\begin{array}{l}x+y+z=2\\2x+3y+5z=11\\x-5y+6z=29\end{array}\right\}\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-2\cdot(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\end{array}\longrightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=2\\y+3z=7\\-6y+5z=27\end{array}\right\}\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)+6\cdot(2.^a)\end{array}\longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z=2\\y+3z=7\\23z=69\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}z=\dfrac{69}{23}=3\\y=7-3z=7-9=-2\\x=2-y-z=2+2-3=1\end{array}\right\}\begin{array}{l}x=1\\y=-2\\z=3\end{array}$$

f) $$\left.\begin{array}{l}x+y-2z=9\\2x-y+4z=4\\2x-y+6z=-1\end{array}\right\}\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+(1.^a)\\(3.^a)+(1.^a)\end{array}\longrightarrow\left.\begin{array}{l}x+y-2z=9\\3x+2z=13\\3x+4z=8\end{array}\right\}\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-(2.^a)\end{array}\longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y-2z=9\\3x+2z=13\\2z=-5\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}z=\dfrac{-5}{2}\\x=\dfrac{13-2z}{3}=6\\y=9-x+2z=9-6-5=-2\end{array}\right\}\begin{array}{l}x=6\\y=-2\\z=\dfrac{-5}{2}\end{array}$$

25 **Resuelve:**

a) $\begin{cases}3x+2y+z-3=0\\x+y=z-5\\x=z-2y-3\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}7x-3y+z=-11\\x-y+1=z\\2x+2y=8+z\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=z-6\\2x-y-\dfrac{z}{5}=0\\\dfrac{-3x}{4}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{2}-10\end{cases}$ **d)** $\begin{cases}\dfrac{2(x-1)}{5}+y=\dfrac{z}{6}-4\\\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{3}=8\\x+2y+\dfrac{z}{4}=1\end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l}3x+2y+z-3=0\\x+y=z-5\\x=z-2y-3\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}3x+2y+z=3\\x+y-z=-5\\x+2y-z=-3\end{array}\right\}\begin{array}{l}(2.^a)\\(1.^a)\\(3.^a)\end{array}\longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y-z=-5\\3x+2y+z=3\\x+2y-z=-3\end{array}\right\}\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-3\cdot(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\end{array}\longrightarrow\left.\begin{array}{l}x+y-z=-5\\-y+4z=18\\y=2\end{array}\right\}\begin{array}{l}x=-2\\y=2\\z=5\end{array}$$

b) $\left.\begin{array}{l} 7x-3y+z=-11 \\ x-y+1=z \\ 2x+2y=8+z \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 7x-3y+z=-11 \\ x-y-z=-1 \\ 2x+2y-z=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (2.^{a}) \\ (1.^{a}) \\ (3.^{a}) \end{array}$

$\left.\begin{array}{r} x-y-z=-1 \\ 7x-3y+z=-11 \\ 2x+2y-z=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^{a}) \\ (2.^{a})-7\cdot(1.^{a}) \\ (3.^{a})-2\cdot(1.^{a}) \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} x-y-z=-1 \\ 4y+8z=-4 \\ 4y+z=10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^{a}) \\ (2.^{a}) \\ (3.^{a})-(2.^{a}) \end{array}$

$\left.\begin{array}{r} x-y-z=-1 \\ 4y+8z=4 \\ -7z=14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0 \\ y=3 \\ z=-2 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=z-6 \\ 2x-y-\dfrac{z}{5}=0 \\ \dfrac{-3x}{4}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{2}-10 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-z=-6 \\ 2x-y-\dfrac{z}{5}=0 \\ \dfrac{-3x}{4}-\dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{2}=-10 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y-6z=-36 \\ 10x-5y-z=0 \\ -9x-4y-6z=-120 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^{a}) \\ (2.^{a}) \\ (3.^{a})-(1.^{a}) \end{array}$

$\left.\begin{array}{r} 3x+2y-6z=-36 \\ 10x-5y-z=0 \\ -12x-6y=-84 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^{a})-6\cdot(2.^{a}) \\ (2.^{a}) \\ 1/6\cdot(3.^{a}) \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} -57x+32y=-36 \\ 10x-5y-z=0 \\ -2x-y=-14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^{a})+32\cdot(3.^{a}) \\ (2.^{a}) \\ (3.^{a}) \end{array}$

$\left.\begin{array}{r} -121x=-484 \\ 10x-5y-z=0 \\ -2x-y=-14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=4 \\ y=6 \\ z=10 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{2(x-1)}{5}+y=\dfrac{z}{6}-4 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{3}=8 \\ x+2y+\dfrac{z}{4}=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{2(x-1)}{5}+y-\dfrac{z}{6}=-4 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{3}=8 \\ x+2y+\dfrac{z}{4}=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 12x+30y-5z-12=-120 \\ 6x-3y+4z=96 \\ 4x+8y+z=4 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 12x+30y-5z=-108 \\ 6x-3y+4z=96 \\ 4x+8y+z=4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^{a})+5\cdot(3.^{a}) \\ (2.^{a})-4\cdot(3.^{a}) \\ (3.^{a}) \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} 32x+70y=-88 \\ -10x-35y=80 \\ 4x+8y+z=4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^{a})+2\cdot(2.^{a}) \\ (2.^{a}) \\ (3.^{a}) \end{array}$

$\left.\begin{array}{r} 12x=72 \\ -10x-35y=80 \\ 4x+8y+z=4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=6 \\ y=-4 \\ z=12 \end{array}$

26 **Resuelve aplicando el método de Gauss:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{l} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{array}\right.$ e) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{l} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 5 \cdot (3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ -3x + y = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \to$$

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ -2y = -1 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ x = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \\ z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = 2 \end{array} \Bigg\} \begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = 2 \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 6z = 8 \\ 6x + 18z = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : 2 \\ (3.^a) : 6 \end{array} \to$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x + 3z = 4 \\ x + 3z = 4/6 \end{array}\right\}$$ Las ecuaciones 2.ª y 3.ª dicen cosas contradictorias.

El sistema es incompatible, no tiene solución.

c) $$\left.\begin{array}{l} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{l} x + y + 3z = 2 \\ -x - 5z = -5 \\ -x - 5z = -5 \end{array}\right\}$$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en función de z:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 2 - 3z \\ -x = -5 + 5z \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to (5 - 5z) + y = 2 - 3z \to y = 2z - 3 \\ \to x = 5 - 5z \end{array}$$

$x = 5 - 5z$, $y = 2z - 3$, $z = z$

d) $$\left.\begin{array}{l} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + 5\ (1.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{l} 2x - y - z = 2 \\ -x = -2 \\ 5x - 2y = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \dfrac{5x - 9}{2} = \dfrac{1}{2} \\ z = 2x - y - 2 = \dfrac{3}{2} \end{array}$$

$x = 2$, $y = \dfrac{1}{2}$, $z = \dfrac{3}{2}$

e) $$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \to \left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 3y + 2z = 8 \\ 3y + 2z = -2 \end{array}\right\}$$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª obtenidas dicen cosas contradictorias. Por tanto, el sistema es incompatible.

f) $\left.\begin{array}{r}-2x+\ \ y+z=1\\ 3x+2y-z=0\\ -x+4y+z=2\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a)+(1.^a)\\ (3.^a)-(1.^a)\end{array}\ \left.\begin{array}{r}-2x+\ \ y+z=1\\ x+3y\ \ \ \ \ \ =1\\ x+3y\ \ \ \ \ \ =1\end{array}\right\}$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en función del parámetro y:

$$\left.\begin{array}{l}-2x+z=1-y\\ x=1-3y\end{array}\right\} \to -2(1-3y)+z=1-y \to z=3-7y$$

$x = 1 - 3y,\ \ z = 3 - 7y$

Inecuaciones. Sistemas de inecuaciones

27 **Resuelve estas inecuaciones:**

a) $5(2+x) > -5x$ **b)** $\dfrac{x-1}{2} > x-1$ **c)** $x^2 + 5x < 0$

d) $9x^2 - 4 > 0$ **e)** $x^2 + 6x + 8 \ge 0$ **f)** $x^2 - 2x - 15 \le 0$

a) $10 + 5x > -5x;\ \ 10x > -10;\ \ x > -1$

$(-1, +\infty)$

b) $x - 1 > 2x - 2;\ \ 1 > x$

$(-\infty, 1)$

c) $x(x+5) < 0$

$(-5, 0)$

d) $\left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$

e) $\dfrac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \dfrac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases}-2\\-4\end{cases}$

$(-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$

f) $\dfrac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \dfrac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases}5\\-3\end{cases}$

$[-3, 5]$

28 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases}4x-3<1\\ x+6>2\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}3x-2>-7\\ 5-x<1\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}5-x<-12\\ 16-2x<3x-3\end{cases}$ **d)** $\begin{cases}2x-3>0\\ 5x+1<0\end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l}x<1\\ x>-4\end{array}\right\}\ (-4, 1)$

b) $\left.\begin{array}{l}x>-\dfrac{5}{3}\\ x>4\end{array}\right\}\ (4, +\infty)$

c) $\left.\begin{array}{l}x>17\\ x>\dfrac{19}{5}\end{array}\right\}\ (17, +\infty)$

d) $\left.\begin{array}{l}x>\dfrac{3}{2}\\ x<-\dfrac{1}{5}\end{array}\right\}$ No tiene solución.

29 **Resuelve:**

a) $(x+1)\,x^2\,(x-3) > 0$ **b)** $x(x^2+3) < 0$ **c)** $\dfrac{x^2}{x+4} < 0$ **d)** $\dfrac{x-3}{x+2} < 0$

a) $\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x+1>0\\ x-3>0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}x>-1\\ x>3\end{array}\right\}\ (3, +\infty)\\ \left.\begin{array}{l}x+1<0\\ x-3<0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}x<-1\\ x<3\end{array}\right\}\ (-\infty, -1)\end{array}\right\}\ (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

b) $(-\infty, 0)$

c)

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 0)$	$(0, +\infty)$
x^2	+	+	+
$x + 4$	–	+	+
$\frac{x^2}{x+4}$	–	+	+

$(-\infty, -4) \cup (-4, 0)$

d)

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, +\infty)$
$x - 3$	–	–	+
$x + 2$	–	+	+
$\frac{x-3}{x+2}$	+	–	+

$(-2, 3)$

30 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} x^2 + 2x > 15 \\ 3 - 2x < 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - x^2 \ge 4 \\ 5x - 1 < 4x + 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2 \le 4 \\ x^2 - 5x + 4 \le 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \ge 0 \\ -x^2 + 11x - 24 \ge 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 + 2x > 15 & \to \textit{Soluciones: } (-\infty, -5) \cup (3, \infty) \\ 3 - 2x < 7 & \to \textit{Soluciones: } (-2, \infty) \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $((-\infty, -5) \cup (3, \infty)) \cap (-2, \infty) = (3, \infty)$

b) $\begin{cases} 5x - x^2 \ge 4 & \to \textit{Soluciones: } [1, 4] \\ 5x - 1 < 4x + 2 & \to \textit{Soluciones: } (-\infty, 3) \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $[1, 4] \cap (-\infty\ 3) = [1, 3)$

c) $\begin{cases} x^2 \le 4 & \to \textit{Soluciones: } [-2, 2] \\ x^2 - 5x + 4 \le 0 & \to \textit{Soluciones: } [1, 4] \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $[-2, 2] \cap [1, 4] = [1, 2]$

d) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \ge 0 & \to \textit{Soluciones: } (-\infty, -1] \cup [6, \infty) \\ -x^2 + 11x - 24 \ge 0 & \to \textit{Soluciones: } [3, 8] \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $((-\infty, -1] \cup [6, \infty)) \cap [3, 8] = [6, 8]$

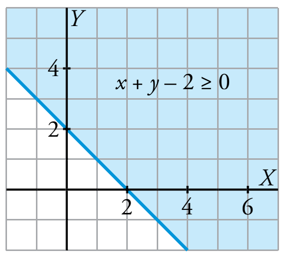
31 **Resuelve gráficamente:**

a) $x + y - 2 \ge 0$ **b)** $2x - 3y \le 6$ **c)** $\dfrac{x - 3y}{2} \le 3$ **d)** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} \ge -1$

a) Dibujamos la recta $r: x + y - 2 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad $0 + 0 - 2 \ge 0$.

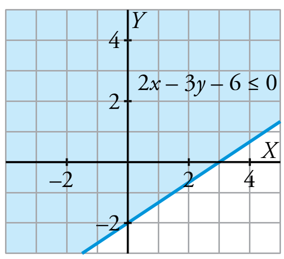
La solución es el semiplano que no contiene a O.



b) Dibujamos la recta $r: 2x - 3y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 - 6 \le 0$.

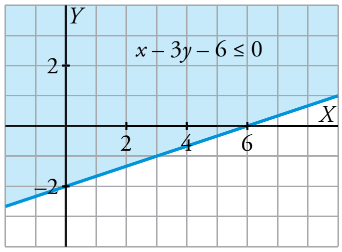
La solución es el semiplano que contiene a O.



c) $\dfrac{x-3y}{2} \le 3 \to x - 3y - 6 \le 0$. Dibujamos la recta $r: x - 3y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 - 6 \le 0$.

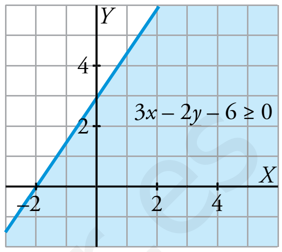
La solución es el semiplano que contiene a O.



d) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} \ge -1 \to 3x - 2y + 6 \ge 0$. Dibujamos la recta $r: 3x - 2y + 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 + 6 \ge 0$.

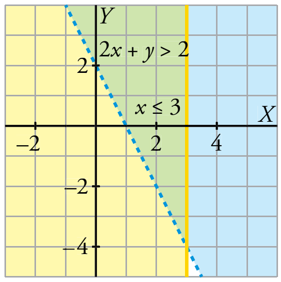
La solución es el semiplano que contiene a O.



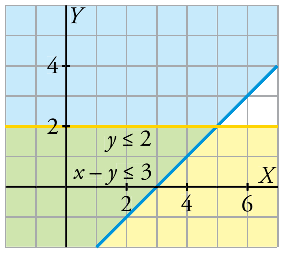
32 Resuelve gráficamente:

a) $\begin{cases} 2x + y > 2 \\ x \le 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y \le 3 \\ y \le 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x - y \le 3 \\ 2x + y \le 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - 2y \le 5 \\ x + y \ge 8 \end{cases}$

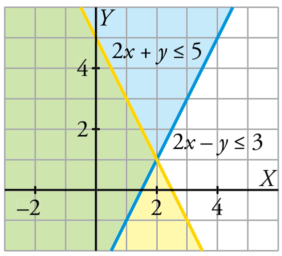
a) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La recta $2x + y = 2$ no pertenece al recinto solución.



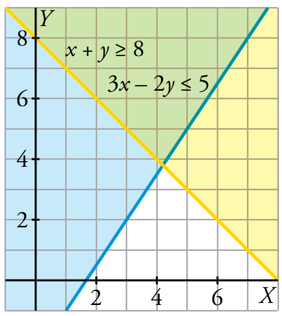
b) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



c) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



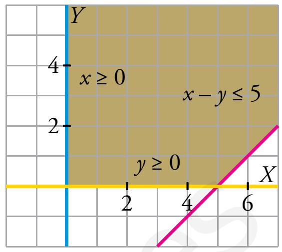
d) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



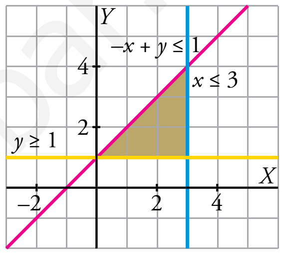
33 **Representa, en cada caso, los puntos del plano que verifican las condiciones dadas:**

a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y \geq 1 \\ x \leq 3 \\ -x + y \leq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y < 2 \\ 2x - y > 1 \\ y > 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y \leq 10 \\ 2x - y \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

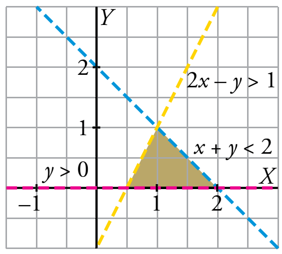
a) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos.



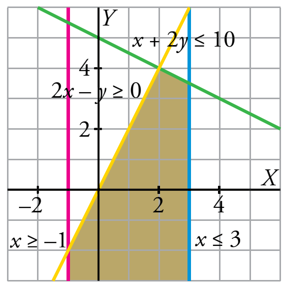
b) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es el triángulo intersección de los tres semiplanos.



c) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es el triángulo intersección de los tres semiplanos (los segmentos de los lados del triángulo no pertenecen a la solución).



d) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los cuatro semiplanos.



Página 97

Problemas

34 **Un inversor, que tiene 28 000 €, coloca parte de su capital en un banco al 8 % y el resto en otro banco al 6 %. Si la primera parte le produce anualmente 200 € más que la segunda, ¿cuánto colocó en cada banco?**

x al 8 % $\xrightarrow{\text{1 año}}$ $0{,}08x$

$(28\,000 - x)$ al 6 % $\xrightarrow{\text{1 año}}$ $0{,}06\,(28\,000 - x)$

$0{,}08x = 0{,}06(28\,000 - x) + 200;\ \ 0{,}08x = 1\,680 - 0{,}06x + 200 \ \to\ x = 13\,428{,}57$ €

Colocó 13 428,57 € al 8 % y 14 571,43 € al 6 %.

35 **Contratamos una hipoteca en enero de 2013 con revisión semestral del tipo de interés. En julio nos sube la cuota un 4 %, en la siguiente revisión baja un 1 % respecto a julio. Si en enero de 2014 estamos pagando 19,24 € mensuales más que en el mismo mes del año anterior, ¿cuál era la cuota inicial?**

Usamos la fórmula $C_f = C_i \cdot$ *índice variación* con $C_f =$ Cuota final, $C_i =$ Cuota inicial

El índice de variación en el primer semestre es $1 + \frac{r}{2}$ (donde r es el tanto por uno del interés).

$i.v. = 1 + 0{,}04 = 1{,}004$

El índice de variación en el segundo semestre es $1 - \frac{r}{2}$ (donde r es el tanto por uno del interés).

$i.v. = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

El índice de variación total es *índice de variación* $= 1{,}04 \cdot 0{,}99 = 1{,}0296$

$C_f = C_i \cdot \textit{índice variación} \rightarrow x + 19{,}24 = x \cdot 1{,}0296 \rightarrow x = 650$ € era la cuota inicial.

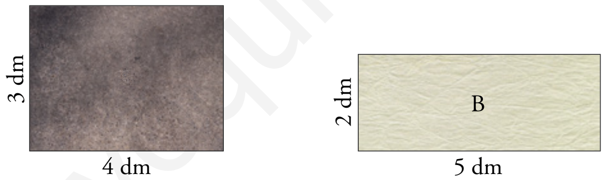
36 **El número de visitantes a cierta exposición durante el mes de febrero se incrementó en un 12 % respecto al mes de enero. Sin embargo, en marzo sufrió un descenso del 12 % respecto a febrero. Si el número de visitantes de enero superó en 36 personas al de marzo, ¿cuántas personas vieron la exposición en enero?**

$$\text{Enero} \xrightarrow{+12\,\%} \text{Febrero} \xrightarrow{-12\,\%} \text{Marzo}$$

$$x \qquad\qquad 1{,}12\,x \qquad\qquad 0{,}88 \cdot 1{,}12x = 0{,}9856x$$

$x = 0{,}9856x + 36 \Rightarrow x = 2\,500$ personas.

37 **Para cubrir el suelo de una habitación, un solador dispone de dos tipos de baldosas:**



Eligiendo el tipo A, se necesitarían 40 baldosas menos que si se eligiera el tipo B. ¿Cuál es la superficie de la habitación?

$$\left.\begin{array}{l} \text{n.º baldosas A} \rightarrow x \\ \text{n.º baldosas B} \rightarrow x + 40 \end{array}\right\} \text{Superficie: } 12x = 10(x + 40)$$

$$12x = 10x + 400$$

$$2x = 400$$

$$x = 200 \text{ baldosas}$$

$200 \cdot 12 = 2\,400 \text{ dm}^2 = 24 \text{ m}^2$

38 **En un número de dos cifras, las decenas son el triple de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras, se obtiene otro número 54 unidades menor. Calcula el número inicial.**

$$\left.\begin{array}{l} \underset{D}{3x} \cdot \underset{U}{x} \rightarrow 30x + x = 31x \\ \underset{D}{x} \cdot \underset{U}{3x} \rightarrow 10x + 3x = 13x \end{array}\right\} \begin{array}{l} 31x = 13x + 54 \\ 18x = 54 \\ x = 3 \end{array}$$

El número es el 93.

39 **Dos grifos llenan un depósito de 1500 litros en una hora y doce minutos. Manando por separado, el primero tardaría una hora más que el segundo. ¿Cuánto tardaría en llenar el depósito cada grifo por separado?**

Entre los dos $\rightarrow$ 1 500 litros en 1,2 horas.

$$\left.\begin{array}{l} 1.^{\text{o}} \rightarrow t+1 \\ 2.^{\text{o}} \rightarrow t \end{array}\right\} \frac{1}{t+1}+\frac{1}{t}=\frac{1}{1,2} \text{ (en 1 hora)}$$

$$\frac{1,2(t+t+1)}{1,2t(t+1)}=\frac{t(t+1)}{1,2t(t+1)}$$

$2,4t + 1,2 = t^2 + t$

$t^2 - 1,4t - 1,2 = 0$

$$t=\frac{1,4\pm 2,6}{2}=\begin{cases} 2 \\ -0,6 \text{ ¡Imposible!} \end{cases}$$

El primero tardaría 3 horas, y el segundo, 2 horas.

40 **Una piscina tarda 5 horas en llenarse utilizando su toma de agua habitual, y 20 horas si utilizamos una manguera. ¿Qué tiempo será necesario emplear para su llenado si usamos ambos métodos de forma simultánea?**

En una hora, la toma de agua habitual llenaría $\frac{1}{5}$ de la piscina. En una hora la manguera llenaría $\frac{1}{20}$ de la piscina.

Entre los dos, en una hora llenarían $\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4}$ de la pisicina.

Luego necesitan 4 horas para llenar la piscina.

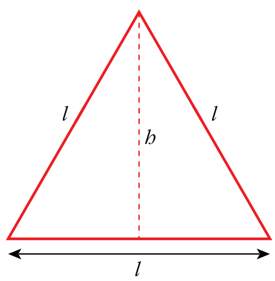
41 **En una tienda se vende té blanco a 18 €/kg y té verde a 14 €/kg. También, una mezcla de ambos a 16,40 €/kg. ¿Cuál es la composición de la mezcla?**

	PRECIO	CANTIDAD DE TÉ PURO EN 1 KG DE MEZCLA	TOTAL
TÉ BLANCO	18 €/kg	x	$18x$
TÉ VERDE	14 €/kg	y	$14y$
MEZCLA	16,40 €/kg	$1 = x + y$	$18x + 14y = 16,40$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ 18x+14y=16,40 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0,6 \\ y=0,4 \end{array}$$

La mezcla tiene 60 % de té blanco y 40 % de té verde.

42 **La superficie de un triángulo equilátero es de 50 m². Calcula el lado.**



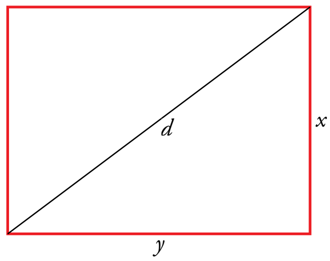
$$h^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2=l^2$$

$$h^2=l^2-\frac{l^2}{4}=\frac{3l^2}{4};\ h=\frac{\sqrt{3}\,l}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}\,l^2}{4}=50$$

$$l^2=\frac{200}{\sqrt{3}} \rightarrow l=\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{\sqrt{3}}}=10,75 \text{ m}$$

43 **Calcula las dimensiones de una finca rectangular sabiendo que su perímetro mide 140 m y su diagonal es de 50 m.**

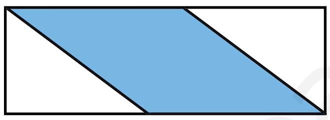


$$\begin{cases} P = 2x + 2y \\ d = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 140 = 2x + 2y \\ 50 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 70 = x + y \\ 2500 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

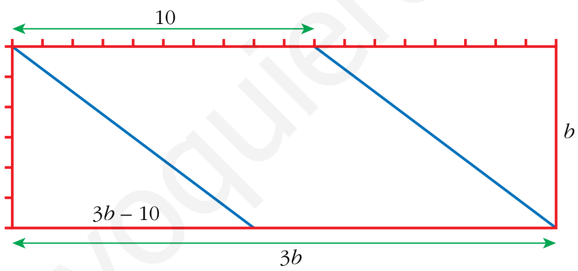
Soluciones: $x_1 = 30,\ y_1 = 40;\ x_2 = 40,\ y_2 = 30$

Un lado mide 30 m y el otro 40 m.

44 **El cuadrilátero central es un rombo de 40 m de perímetro. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que la base es el triple de la altura.**



$4x = 40;\ x = 10$ m



$$b^2 + (3b - 10)^2 = 10^2 \rightarrow b^2 + 9b^2 + 100 - 60b = 100 \rightarrow 10b^2 - 60b = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow b(10b - 60) = 0 \rightarrow b = 0,\ b = 6$$

Base: 18 m; Altura: 6 m

45 **Un granjero espera obtener 36 € por la venta de huevos. En el camino al mercado se le rompen cuatro docenas. Para obtener el mismo beneficio, aumenta en 0,45 € el precio de la docena. ¿Cuántas docenas tenía al principio?**

Tenía x docenas $\rightarrow \dfrac{36}{x}$ €/docena

Le quedan $x - 4$ docenas $\rightarrow \left(\dfrac{36}{x} + 0{,}45\right)$ €/docena

$$\left(\frac{36}{x} + 0{,}45\right)(x - 4) = 36$$

$(36 + 0{,}45x)(x - 4) = 36x$

$36x - 144 + 0{,}45x^2 - 1{,}8x = 36x$

$0{,}45x^2 - 1{,}8x - 144 = 0$

$x = 20$ $(x = -16$ no vale$)$ $\Rightarrow$ Tenía 20 docenas.

46 **Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 kg por defectuosas y vende el resto, aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra, por 147 €. ¿Cuántos kilogramos compró?**

Compró x kg $\to \frac{125}{x}$ €/kg

Vende $(x-20)$ kg $\to \left(\frac{125}{x}+0,40\right)$ €/kg

$\left(\frac{125}{x}+0,40\right)(x-20)=147$

$(125+0,40x)(x-20)=147x$

$125x-2\,500+0,40x^2-8x=147x$

$0,40x^2-30x-2\,500=0$

$x=125$ ($x=-50$ no vale)

Compró 125 kg.

47 **Un almacén tiene contenedores de reciclado para abastecer a las dos entidades para las que trabaja durante 6 meses. Sabiendo que, si suministrara a una sola de las dos, a la primera la podría servir durante 5 meses más que a la segunda, ¿durante cuánto tiempo podría proveer a cada una de ellas si fuesen clientes únicos?**

Llamamos t al n.º de meses que puede servir a la entidad A. El n.º de meses que puede servir a la entidad B es $t+5$.

La proporción de contenedores que sirve al mes a la entidad A es $\frac{1}{t}$.

La proporción de contenedores que sirve al mes a la entidad B es $\frac{1}{t+5}$.

La proporción de contenedores servidos al mes a las dos entidades es: $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+5}=\frac{2t+5}{t(t+5)}$

Esta cantidad es la sexta parte del total puesto que puede servir a las dos entidades durante 6 meses.

$6\left(\frac{2t+5}{t(t+5)}\right)=1 \to$ *Soluciones:* $t=10$, $t=-3$ que no es válida.

Puede servir solo a la primera entidad durante 10 meses.

Puede servir solo a la segunda entidad durante 15 meses.

48 **Una empresa fabrica dos tipos de latas de refrescos de 33 cl. El primer tipo tiene una altura de 12 cm, y el segundo, de 15 cm. ¿Cuál tiene mayor coste de producción?**

Las fórmulas del volumen y la superficie total de una lata son:

$V=\pi r^2 h;\ S=\pi r^2+2\pi rh$

A partir del volumen y la altura, calculamos el radio de la base.

Lata A:

$h=12$ cm $\to 33=\pi r^2\cdot 12 \to r^2=\frac{33}{12\pi} \to r=\sqrt{\frac{33}{12\pi}}$

$S_A=\pi r^2+2\pi rh=\pi\frac{33}{12\pi}+2\pi\sqrt{\frac{33}{12\pi}}\cdot 12=73,293$

Lata B:

$h=15$ cm $\to 33=\pi r^2\cdot 15 \to r^2=\frac{33}{15\pi} \to r=\sqrt{\frac{33}{15\pi}}$

$S_B=\pi r^2+2\pi rh=\pi\frac{33}{15\pi}+2\pi\sqrt{\frac{33}{15\pi}}\cdot 15=81,069$

Tiene mayor coste de producción la lata de altura 15 cm.

49 **De dos triángulos rectángulos se sabe que: la suma de sus hipotenusas es 18, sus catetos menores son 3 y 5, respectivamente, y sus catetos mayores están en relación 1/3. Determina dichos triángulos.**

Llamamos h_1 y h_2 a las hipotenusas de los triángulos y C_1 y C_2 a los catetos desconocidos del primer y segundo triángulo, respectivamente.

Expresamos las hipotenusas en función de los catetos $h_1 = \sqrt{3^2 + C_1^2}$; $h_2 = \sqrt{5^2 + C_2^2}$

Por otra parte: $C_2 = 3C_1$

$h_1 + h_2 = 18 \;\rightarrow\; \sqrt{3^2 + C_1^2} + \sqrt{5^2 + C_2^2} = 18$

Tenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} C_2 = 3C_1 \\ \sqrt{3^2 + C_1^2} + \sqrt{5^2 + C_2^2} = 18 \end{array}\right\} \quad \textit{Soluciones: } C_1 = -4,\; C_2 = -12;\; C_1 = 4,\; C_2 = 12$$

Como los lados tienen que ser positivos, la solución es $C_1 = 4$, $C_2 = 12$.

El triángulo T_1 tiene catetos de medidas 3 y 4 e hipotenusa de medida 5.

El triángulo T_2 tiene catetos de medidas 5 y 12 e hipotenusa de medida 13.

50 **En una caja registradora encontramos billetes de 50 €, 100 € y 200 €, siendo el número total de billetes igual a 21 y la cantidad total de dinero 1 800 €. Sabiendo que el número de billetes de 50 € es el quíntuple de los de 200 €, calcula el número de billetes de cada clase.**

Llamamos:

x = n.º de billetes de 50 €

y = n.º de billetes de 100 €

z = n.º de billetes de 200 €

Expresamos las condiciones en función de las incógnitas y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 21 \\ 50x + 100y + 200z = 1\,800 \\ x = 5z \end{array}\right\} \quad \textit{Solución: } x = 10,\; y = 9,\; z = 2$$

Hay 10 billetes de 50 €, 9 billetes de 100 € y 2 billetes de 200 €.

51 **En una función de teatro se recaudan 5 200 € vendiéndose 200 entradas de tres tipos distintos: patio de butacas, a 30 €; primer y segundo piso, a 25 €, y localidades con visibilidad reducida, a 10 €. Sabiendo que el número de localidades más económicas suponen un 25 % del número de localidades de 25 €, calcula el número de entradas de cada tipo.**

Llamamos:

x = n.º de entradas de 30 €

y = n.º de entradas de 25 €

z = n.º de entradas de 10 €

Expresamos las condiciones en función de las incógnitas y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 200 \\ 30x + 25y + 10z = 5\,200 \\ z = 0{,}25y \end{array}\right\} \quad \textit{Solución: } x = 100,\; y = 80,\; z = 20$$

Hay 100 entradas de 30 €, 80 entradas de 25 € y 20 entradas de 10 €.

52 **Preparamos un surtido con dos tipos de bombones de 10 €/kg y de 15 €/kg, respectivamente. Nuestro presupuesto es de 600 € y queremos preparar, al menos, 40 kg. ¿Qué restricciones tiene la composición del surtido?**

Llamamos:

x = cantidad de bombones de 10 €/kg

y = cantidad de bombones de 15 €/kg

Expresamos las condiciones en función de las incógnitas y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

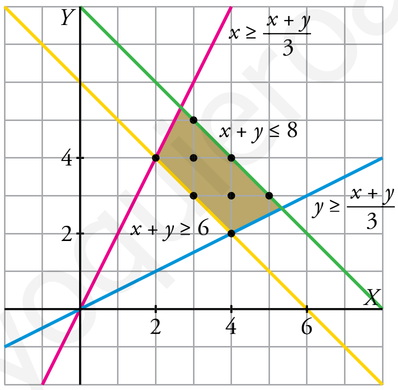
$$\begin{cases} x+y \le 40 \\ 10x+15y \le 600 \end{cases}$$

53 **Un comité de una comunidad de vecinos debe estar formado por entre 6 y 8 personas, no pudiendo ser el número de hombres ni el de mujeres inferior a un tercio del grupo. ¿Cuántas combinaciones posibles hay?**

Llamamos x al n.º de mujeres e y al n.º de hombres. Las condiciones son:

$$\begin{cases} 6 \le x+y \le 8 \\ x \ge \dfrac{x+y}{3} \\ y \ge \dfrac{x+y}{3} \end{cases}$$

Representamos el recinto solución:



Las diferentes posibilidades son: $(x = 4,\ y = 2)$, $(x = 3,\ y = 3)$, $(x = 2,\ y = 4)$, $(x = 4,\ y = 3)$, $(x = 3,\ y = 4)$, $(x = 5,\ y = 3)$, $(x = 4,\ y = 4)$, $(x = 3,\ y = 5)$, que corresponden a los puntos del recinto común cuyas coordenadas son enteras.

Página 98

Para resolver

54 **Resuelve:**

a) $x^7 - 16x^4 + 64x = 0$ **b)** $\dfrac{5x+1}{x^2+2x+1} + \dfrac{x}{x+1} = 2$ **c)** $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = x+1$

d) $(\sqrt{x} + x + 2)\,x = 0$ **e)** $\dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}} = \dfrac{-5}{6}$

a) $x^7 - 16x^4 + 64x = 0$

Factorizamos el polinomio:

$x^7 - 16x^4 + 64x = x(x-2)^2(2x + x^2 + 4)^2$

Soluciones: $x = 0$; $x = 2$

b) $\dfrac{5x+1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x}{x+1}=2 \to \dfrac{5x+1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x}{x+1}-2=0$

Operamos en el miembro de la izquierda:

$\dfrac{5x+1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x}{x+1}-2=-\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$

La ecuación queda:

$-\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}=0 \to (x-1)^2=0 \to x=1$ que es válida.

Solución: $x = 1$

c) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=x+1$

$(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x})^2=(x+1)^2$

$3x+2\sqrt{x(2x+1)}+1=x^2+2x+1$

$2\sqrt{x(2x+1)}=x^2-x$

$4x(2x+1)=x^4-2x^3+x^2 \to x^4-2x^3+x^2-8x^2-4x=0$

Factorizamos el polinomio:

$x^4-2x^3+x^2-8x^2-4x=x(x-4)(x+1)^2$

Soluciones: $x = 0,\ x = 4,\ x = -1$ no válida

d) $(\sqrt{x}+x+2)x=0$ Cada factor se iguala a cero: $x=0,\ \sqrt{x}+x+2=0$

Resolvemos $\sqrt{x}+x+2=0$

$\sqrt{x}=-x-2$

$x=x^2+4x+4$

$x^2+3x+4=0$ que no tiene soluciones.

Tenemos, entonces, solamente la solución correspondiente al primer factor.

Solución: $x = 0$

e) $\dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}}=\dfrac{-5}{6}$

$\dfrac{(\sqrt{x-4})^2-(\sqrt{x+1})^2}{\sqrt{(x+1)(x-4)}}=\dfrac{-5}{6}$

$(6((x-4)-(x+1)))^2=-5(\sqrt{(x+1)(x-4)})^2$

$900 = 25(x + 1)(x - 4)$

$900 = 25x^2 - 75x - 100 \to x = 8,\ x = -5$ no es válida.

Solución: $x = 8$

55 Resuelve estas ecuaciones de grado superior a dos en las que puedes despejar la incógnita:

a) $\dfrac{3x}{5}+\dfrac{25}{9x^2}=0$ **b)** $\dfrac{x}{8}-\dfrac{2}{81x^3}=0$ **c)** $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x^2}=0$

d) $\dfrac{2}{5x}-\dfrac{5x^3}{2}=0$ **e)** $\dfrac{x+1}{x^2}-\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x^3+x^2}=0$

a) $\dfrac{3x}{5}+\dfrac{25}{9x^2}=0$

$\dfrac{27x^3+125}{45x^2}=0 \to 27x^3+125=0 \to x=\sqrt[3]{\dfrac{-125}{27}}=-\dfrac{5}{3}$

Solución: $x=-\dfrac{5}{3}$

b) $\frac{x}{8} - \frac{2}{81x^3} = 0$

$\frac{x}{8} - \frac{2}{81x^3} = \frac{81x^4 - 16}{648x^3} = 0 \rightarrow 81x^4 - 16 = 0 \rightarrow x = \sqrt[4]{\frac{26}{81}} = \pm\frac{2}{3}$

Soluciones: $x = \frac{2}{3},\ x = -\frac{2}{3}$

c) $\frac{x}{2} - \frac{1}{x^2} = 0$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 2}{2x^2} = 0 \rightarrow x^3 - 2 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{2}$

Solución: $x = \sqrt[3]{2}$

d) $\frac{2}{5x} - \frac{5x^3}{2} = 0$

$\frac{2}{5x} - \frac{5x^3}{2} = -\frac{25x^4 - 4}{10x} = 0 \rightarrow 25x^4 - 4 = 0 \rightarrow x = \sqrt[4]{\frac{4}{25}} = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$

Soluciones: $x = \sqrt{\frac{2}{5}},\ x = -\sqrt{\frac{2}{5}}$

e) $\frac{x+1}{x^2} - \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x^3+x^2} = 0$

$\frac{x+1}{x^2} - \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x^3+x^2} = -\frac{x-2}{x} = 0 \rightarrow (x-2) = 0 \rightarrow x = 2$

Solución: $x = 2$

56 **Resuelve las siguientes ecuaciones en las que aparecen valores absolutos:**

a) $|x - 5| = 3x - 1$

b) $\left|\frac{x-3}{2}\right| = 4$

c) $|x^2 - x| = |1 - x^2|$

d) $|x^2 - 3x + 1| = 1$

a) $|x - 5| = 3x - 1 \rightarrow \begin{cases} x - 5 = 3x - 1 \\ x - 5 = -(3x - 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3/2 \end{cases}$

Soluciones: $x = -2,\ x = \frac{3}{2}$

b) $\left|\frac{x-3}{2}\right| = 4 \rightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{2} = 4 \\ \frac{x-3}{2} = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = -5 \end{cases}$

Soluciones: $x = 11,\ x = -5$

c) $|x^2 - x| = |1 - x^2| \rightarrow \begin{cases} x^2 - x = 1 - x^2 \\ x^2 - x = -(1 - x^2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1,\ x = -1/2 \\ x = 1 \end{cases}$

Soluciones: $x = 1,\ x = -\frac{1}{2}$

d) $|x^2 - 3x + 1| = 1 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 1 \\ x^2 - 3x + 1 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3,\ x = 0 \\ x = 2,\ x = 1 \end{cases}$

Soluciones: $x = 3,\ x = 0,\ x = 2,\ x = 1$

57 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot 16^{x+1} \cdot 2^{1-x} = 0{,}25$

b) $\frac{\sqrt{3^x}}{(1/3)^{x+1}} \cdot 9^{1-x} = 243$

c) $2^x \cdot 5^{x+1} = 10$

d) $3^x \cdot 9^x = 2$

e) $25^x - 2 \cdot 5^{x+1} + 25 = 0$

f) $3^{2x} + 2 \cdot 3^{x+1} = 3^3$

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot 16^{x+1} \cdot 2^{1-x} = 0{,}25$

$(2^{-2})^x \cdot 2^{4(x+1)} \cdot 2^{1-x} = 2^{-2}$

$2^{-2x} \cdot 2^{4x+4} \cdot 2^{1-x} = 2^{-2} \to 2^{-2x+4x+4+1-x} = 2^{-2}$

$-2x + 4x + 4 + 1 - x = -2 \to x = -7$

Solución: $x = -7$

b) $\frac{\sqrt{3^x}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}} \cdot 9^{1-x} = 243$

$\frac{3^{(1/2)\cdot x}}{3^{-(x+1)}} \cdot 3^{2(1-x)} = 3^5$

$3^{\frac{1}{2}\cdot x} \cdot 3^{x+1} \cdot 3^{2-2x} = 3^5 \to 3^{\frac{x}{2}+x+1+2-2x} = 3^5$

$\frac{x}{2} + x + 1 + 2 - 2x = 5 \to x = -4$

Solución: $x = -4$

c) $2^x \cdot 5^{x+1} = 10$

$2^x \cdot 5 \cdot 5^x = 10 \to 5 \cdot (2 \cdot 5)^x = 10 \to 5 \cdot 10^x = 10 \to 10^x = 2 \to x = \log 2$

Solución: $x = \log 2 = 0{,}69$

d) $3^x \cdot 9^x = 2$

$3^x \cdot 3^{2x} = 2$

$3^{3x} = 2$

$3x = \log_3 2 \to x = \frac{\log_3 2}{3}$

Solución: $x = \frac{\log_3 2}{3} = 0{,}21$

e) $25^x - 2 \cdot 5^{x+1} + 25 = 0$

$5^{2x} - 2 \cdot 5 \cdot 5^x + 5^2 = 0 \to (5^x - 5)^2 = 0 \to 5^x - 5 = 0 \to 5^x = 5 \to x = 1$

Solución: $x = 1$

f) $3^{2x} + 2 \cdot 3^{x+1} = 3^3$

Hacemos el cambio de variable: $3^x = y$

$y^2 + 2 \cdot 3y - 27 = 0 \to y = 3, y = -9$ no válida

$y = 3 \to x = 1$

Solución: $x = 1$

58 **Resuelve estas ecuaciones logarítmicas:**

a) $2\log_2 x = \log_2 \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$

b) $\log (x+1)^5 + \log (3x+2)^5 = 5$

c) $\log (8 + x^3) = 3 \log (x+2)$

d) $\ln 6 + (x^2 - 5x + 7) \ln 2 = \ln 12$

e) $(2x^2 + x - 3) \log 5 = 2 \log \frac{1}{5}$

f) $\log (3^{1-x})^{1+x} + \log 2700 = 2$

a) $2\log_2 x = \log_2 \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \rightarrow 2\log_2 x = \log_2 x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rightarrow 2\log_2 x = \log_2 x - 1 \rightarrow$

$\rightarrow \log_2 x = -1 \rightarrow x = 2^{-1} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

Solución: $x = \frac{1}{2}$

b) $\log (x+1)^5 + \log (3x+2)^5 = 5$

$\log (x+1)^5 \cdot (3x+2)^5 = \log 100\,000 \rightarrow (x+1)^5 \cdot (3x+2)^5 = 10^5 \rightarrow$

$\rightarrow (x+1)(3x+2) = 10 \rightarrow x = 1,\ x = -\frac{8}{3}$ no válida

Solución: $x = 1$

c) $\log (8 + x^3) = 3\log (x+2) \rightarrow \log (8 + x^3) = \log (x+2)^3 \rightarrow (8 + x^3) = (x+2)^3 \rightarrow$

$\rightarrow (8 + x^3) - (x+2)^3 = 0 \rightarrow -6x^2 - 12x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = -2$ (no válida), $x = 0$

Solución: $x = 0$

d) $\ln 6 + (x^2 - 5x + 7) \ln 2 = \ln 12$

$\ln 6 \cdot 2^{x^2 - 5x + 7} = \ln 12 \rightarrow 6 \cdot 2^{x^2 - 5x + 7} = 6 \cdot 2 \rightarrow x^2 - 5x + 7 = 1 \rightarrow x = 3,\ x = 2$

Soluciones: $x = 3,\ x = 2$

e) $(2x^2 + x - 3) \log 5 = 2 \log \frac{1}{5} \rightarrow \log 5^{2x^2 + x - 3} = \log 5^{-2} \rightarrow 2x^2 + x - 3 = -2 \rightarrow x = \frac{1}{2},\ x = -1$

Soluciones: $x = \frac{1}{2},\ x = -1$

f) $\log (3^{1-x})^{1+x} + \log 2700 = 2$

$\log (3^{(1-x)(1+x)}) + \log 27 + \log 100 = 2 \rightarrow \log (3^{(1-x)(1+x)}) + \log 3^3 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \log (3^{(1-x)(1+x)+3}) = \log 1 \rightarrow 3^{(1-x)(1+x)+3} = 1 \rightarrow$

$\rightarrow (1-x)(1+x) + 3 = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 2$

Soluciones: $x = -2,\ x = 2$

59 **Resuelve por tanteo las siguientes ecuaciones, sabiendo que tienen una solución en el intervalo indicado:**

a) $x^3 - x - 2 = 0$ **en** $[1, 2]$

b) $3x^3 + x^2 - 3 = 0$ **en** $[0, 1]$

a) $x \approx 1{,}5$

b) $x \approx 0{,}9$

60 Resuelve las siguientes ecuaciones mediante un cambio de variable:

a) $\sqrt{\left(2+\frac{1}{x}\right)^2+3}=-2\left(2+\frac{1}{x}\right)$ **b)** $e^{3x^2-3}-3e^{2x^2-2}+3e^{x^2-1}-1=0$ **c)** $\sqrt{\left(log\,\frac{2}{x}\right)^2+3}=-1+3\,log\,\frac{2}{x}$

a) $\sqrt{\left(2+\frac{1}{x}\right)^2+3}=-2\left(2+\frac{1}{x}\right)$

Hacemos $2+\frac{1}{x}=y \;\to\; \sqrt{y^2+3}=-2y \;\to\; y^2+3=4y^2 \;\to\; 3y^2-3=0 \;\to\; y=1,\; y=-1$

$y=1 \;\to\; 2+\frac{1}{x}=1 \;\to\; x=-1$

$y=-1 \;\to\; 2+\frac{1}{x}=-1 \;\to\; x=-\frac{1}{3}$

Soluciones: $x=-1,\; x=-\frac{1}{3}$

b) $e^{3x^2-3}-3e^{2x^2-2}+3e^{x^2-1}-1=0$

Hacemos el cambio de variable: $x^2-1=y$

$e^{3y}-3e^{2y}+3e^{y}-1=0$

Hacemos el cambio de variable: $e^y=t$

$t^3-3t^2+3t-1=0 \;\to\; t=1$

Deshacemos los cambios de variable:

$e^y=1 \;\to\; y=0$

$x^2-1=0 \;\to\; x=1,\; x=-1$

Soluciones: $x=1,\; x=-1$

c) $\sqrt{\left(log\,\frac{2}{x}\right)^2+3}=-1+3\,log\,\frac{2}{x}$

Hacemos $log\,\frac{2}{x}=y$

$\sqrt{y^2+3}=-1+3y \;\to\; y^2+3=(-1+3y)^2=9y^2-6y+1 \;\to$

$\to\; y^2+3=9y^2-6y+1 \;\to\; y=1,\; y=-\frac{1}{4}$ no válida.

$log\,\frac{2}{x}=1=log\,10 \;\to\; \frac{2}{x}=10 \;\to\; x=\frac{1}{5}$

Solución: $x=\frac{1}{5}$

61 Resuelve:

a) $\begin{cases} x+y=5\\ 2x-5y=17\\ 5x-2y=32\end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-y=7\\ 5x+2y=1\\ 3x+3y=0\end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x-y+z=8\\ 2x+y+2z=1\end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x-2y+3z=0\\ 2x-4y+6z=2\end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x+y=5\\ 2x-5y=17\\ 5x-2y=32\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a)-2\cdot(1.^a)\\ (3.^a)-5\cdot(1.^a)\end{array}$ $\left.\begin{array}{r} x+y=5\\ -7y=7\\ -7y=7\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a)-2\cdot(1.^a)\end{array}$ $\left.\begin{array}{r} x+y=5\\ -7y=7\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x=6\\ y=-1\end{array}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=7\\ 5x+2y=1\\ 3x+3y=0\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a)+2\cdot(1.^a)\\ (3.^a)+3\cdot(1.^a)\end{array}$ $\left.\begin{array}{r} 2x-y=7\\ 9x=15\\ 9x=21\end{array}\right\}$

Hay dos ecuaciones que se contradicen. No hay solución.

c) $\left.\begin{aligned} x - y + z &= 8 \\ 2x + y + 2z &= 1 \end{aligned}\right\}$ $\begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{matrix}$ $\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 8 \\ 3y &= -15 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} x &= 3 - z \\ y &= -5 \end{aligned}$

d) $\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ 2x - 4y + 6z &= 2 \end{aligned}\right\}$ $\begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{matrix}$ $\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ 0 &= 2 \end{aligned}\right\}$

Hay una ecuación imposible. No hay solución.

62 **Resuelve:**

a) $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = \sqrt{2y} \\ x + y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{4y+2x} = \sqrt{3y+x} - 1 \\ y + x = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x+3)(y-5) = 0 \\ (x-2)(y-1) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x^3 - 3x^2 + 4)(y+1) = 0 \\ \sqrt{24 - x^3} = y + 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 y + x y^2 = 6 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} \sqrt{x-y} - \sqrt{x+y} = \sqrt{2y} \to \sqrt{8-2y} - \sqrt{8} = \sqrt{2y} \to \sqrt{8-2y} = \sqrt{8} + \sqrt{2y} \to 8 - 2y = (\sqrt{8} + \sqrt{2y})^2 \to \\ x + y = 8 \to x = 8 - y \end{cases}$

$\to 8 - 2y = 2y + 8\sqrt{y} + 8 \to 8\sqrt{y} = -4y \to 64y = 16y^2 \to y = 4,\ y = 0$

$y = 4 \to x = 4$
$y = 0 \to x = 8$

Soluciones: $x_1 = 4,\ y_1 = 4;\ x_2 = 8,\ y_2 = 0$

b) $\begin{cases} \sqrt{4x+2y} = \sqrt{3y+x} - 1 \to \sqrt{-20 - 4y + 2y} = \sqrt{3y - 5 - y} - 1 \to \sqrt{-20 - 24y} = \sqrt{2y-5} - 1 \to \\ y + x = -5 \to x = -5 - y \end{cases}$

$\to -20 - 24y = (\sqrt{2y-5} - 1)^2 \to -20 - 24y = 2y - 2\sqrt{2y-5} - 4 \to$

$\to \dfrac{-16 - 22y}{2} = \sqrt{2y-5} \to (-8 - 11y)^2 = 2y - 5 \to 121y^2 + 176y + 64 = 2y - 5 \to$

$\to 121y^2 + 176y + 64 - 2y + 5 = 0 \to 121y^2 + 174y + 69 = 0$ no tiene solución.

c) $\begin{cases} (x+3)(y-5) = 0 \\ (x-2)(y-1) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} (x+3)(y-5) = 0 \to x = -3 \text{ o } y = 5 \\ (x-2)(y-1) = 0 \to x = 2 \text{ o } y = 1 \end{cases}$

Por tanto, las soluciones son: $x_1 = 2,\ y_1 = 5;\ x_2 = -3,\ y_2 = 1$.

d) $\begin{cases} (x^3 - 3x^2 + 4)(y+1) = 0 \to (x^3 - 3x^2 + 4)(\sqrt{24 - x^3} - 6 + 1) = 0 \to (x^3 - 3x^2 + 4)(\sqrt{24 - x^3} - 5) = 0 \\ \sqrt{24 - x^3} = y + 6 \to y = \sqrt{24 - x^3} - 6 \end{cases}$

Cada factor se iguala a cero.

$(x^3 - 3x^2 + 4) = 0 \to x = 2, x = -1$
$\sqrt{24 - x^3} - 5 = 0 \to x = -1$

$x = 2 \to y = -2$

$x = -1 \to y = -1$

Soluciones: $x_1 = 2,\ y_1 = -2;\ x_2 = -1,\ y_2 = -1$

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=5 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=5 \\ -\dfrac{x^2-y^2}{x^2y^2}=5 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=5xy \\ -\dfrac{(x+y)(x-y)}{xyxy}=5 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=5xy \\ -5\dfrac{(x-y)}{xy}=5 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} x+y=5xy \to x+y=-5(x-y) \to 6x-4y=0 \to x=\dfrac{4y}{6} \\ -(x-y)=xy \to -\dfrac{4y}{6}+y=\dfrac{1}{3}y=\dfrac{4y}{6}y \to \dfrac{1}{3}y=\dfrac{4y^2}{6} \to y=2y^2 \to y=\dfrac{1}{2},\ y=0 \text{ no válida} \end{cases}$

$y=\dfrac{1}{2} \to x=\dfrac{1}{3}$

Solución: $x=\dfrac{1}{3},\ y=\dfrac{1}{2}$

f) $\begin{cases} x^2y+xy^2=6 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \to \begin{cases} xy(x+y)=6 \\ \dfrac{y+x}{xy}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Multiplicamos las ecuaciones y nos queda: $(x+y)^2=9$

De la segunda ecuación:

$y+x=\dfrac{3}{2}xy \to y-\dfrac{3}{2}xy=-x \to y\left(1-\dfrac{3}{2}x\right)=-x \to y=\dfrac{-x}{1-\dfrac{3}{2}x} \to y=\dfrac{-2x}{2-3x}$

Nos queda el siguiente sistema:

$\begin{cases} (x+y)^2=9 \\ y=\dfrac{-2x}{2-3x} \end{cases}$

Obtenemos los dos sistemas siguientes:

$\begin{cases} x+y=3 \\ y=\dfrac{-2x}{2-3x} \end{cases} \to [x=1,\ y=2];\ [x=2,\ y=1]$

$\begin{cases} x+y=-3 \\ y=\dfrac{-2x}{2-3x} \end{cases} \to \left[x=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2},\ y=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right];\ \left[x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2},\ y=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right]$

Soluciones: $[x=1,\ y=2],\ [x=2,\ y=1],\ \left[x=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2},\ y=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right];\ \left[x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2},\ y=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right]$

63 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \log_y \sqrt{x}=\dfrac{1}{2} \\ \log_x y^2=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 5 \\ \dfrac{e^x}{e^y}=e \end{cases}$

a) $\begin{cases} \log_y \sqrt{x}=\dfrac{1}{2} \\ \log_x y^2=2 \end{cases} \to \begin{cases} y^{1/2}=\sqrt{x} \\ x^2=y^2 \end{cases} \to y=x,\ y\ge 0,\ x\ge 0$

b) $\begin{cases} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 5 \\ \dfrac{e^x}{e^y}=e \end{cases} \to \begin{cases} \log(x+y)(x-y)=\log 5 \\ e^x=ee^y \end{cases} \to \begin{cases} (x+y)(x-y)=5 \to \\ x=y+1 \end{cases}$

$\to (y+1)^2-y^2=2y+1=5 \to 2y+1=5 \to y=2$

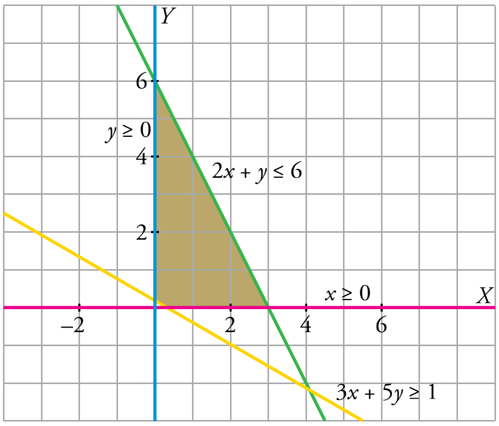
$y=2 \to x=3$

Solución: $x=3,\ y=2$

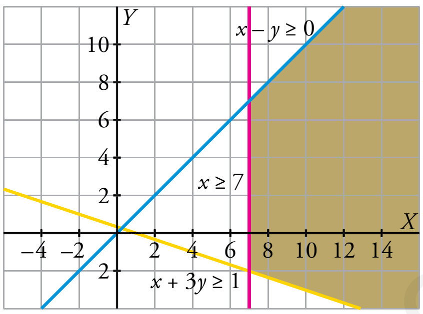
64 **Representa gráficamente el conjunto de soluciones de estos sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} 2x + y \le 6 \\ 3x + 5y \ge 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y \ge 1 \\ x \ge 7 \\ x - y \ge 0 \end{cases}$

a) El recinto intersección es:



b)



65 **Resuelve:** $\dfrac{2x+4}{x-1} \ge 0$

Después, deduce la solución de estas otras inecuaciones:

a) $\dfrac{2x+4}{x-1} < 0$

b) $\dfrac{2x+4}{x-1} \le 0$

	$(-\infty, -2]$	$[-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$2x + 4$	–	+	+
$x - 1$	–	–	+
$\dfrac{2x+4}{x-1}$	+	–	+

$\dfrac{2x+4}{x-1} \ge 0$ en $(-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$

a) *Solución:* $(-2, 1)$

b) *Solución:* $[-2, 1)$

66 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $x^4 - 4x^2 < 0$ **b)** $x^3 - x^2 - 6x < 0$ **c)** $\dfrac{4 - x^2}{(x-3)^2} > 0$ **d)** $\dfrac{-2}{(x-1)^3} < 0$

a) $x^2(x^2 - 4) < 0 \Rightarrow x^2 - 4 < 0$

$x \neq 0$

$(-2, 0) \cup (0, 2)$

b) $x(x^2 - x - 6) < 0$

$x(x-3)(x+2) < 0$

$(-\infty, -2) \cup (0, 3)$

c) $\left.\begin{array}{r} x \neq 3 \\ 4 - x^2 > 0 \end{array}\right\} (-2, 2)$

d) $x \neq 1$; $(1, +\infty)$

Página 99

Cuestiones teóricas

67 **¿Qué valores ha de tomar el parámetro k para que $x^2 - 6x + k = 0$ no tenga soluciones reales?**

$36 - 4k < 0$; $36 < 4k$; $9 > k$; $k > 9$

68 **Halla m para que al dividir el polinomio $2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + m$ entre $x + 4$, el resto sea igual a 12.**

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 9 & 2 & -6 & m \\ -4 & & -8 & -4 & 8 & -8 \\ \hline & 2 & 1 & -2 & 2 & \boxed{m-8} \end{array}$$

$m - 8 = 12 \rightarrow m = 20$

69 **Escribe un polinomio de grado 4 que solo tenga por raíces 0 y 1.**

Por ejemplo: $P(x) = x^3(x-1)$; $Q(x) = x^2(x-1)$

70 **Justifica por qué este sistema de ecuaciones no puede tener solución:**

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

La primera y la tercera ecuación se contradicen.

71 **Inventa ecuaciones que tengan por soluciones los valores siguientes:**

a) $3, -3, \sqrt{7}$ **y** $-\sqrt{7}$

b) 5; $0{,}3$ **y** -2

c) $0, \dfrac{1}{2}$ **y** $0{,}7$

d) $0, 1, -1$ **y** $\dfrac{1}{3}$

a) $(x-3)(x+3)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) = (x^2-9)(x^2-7) = x^4 - 16x^2 + 63$

b) $(x-5)(x-0{,}3)(x+2) = x^3 - 3{,}3x^2 - 9{,}1x + 3$

c) $x\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x - 0{,}7) = x(x - 0{,}5)(x - 0{,}7) = x^3 - 1{,}2x^2 + 0{,}35x$

d) $x(x-1)(x+1)\left(x - \dfrac{1}{3}\right) = x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + \dfrac{1}{3}x$

Para profundizar

72 **Resuelve estas ecuaciones de segundo grado en las que la incógnita es x:**

a) $abx^2 - (a+b)x + 1 = 0$

b) $(x-a)^2 - 2x(x+a) - 4a^2 = 0$

c) $ax^2 + bx + b - a = 0$

d) $(a+b)x^2 + bx - a = 0$

a) $$x = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2ab} = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2+b^2+2ab-4ab}}{2ab} =$$

$$= \frac{a+b \pm (a-b)}{2ab} = \begin{cases} \dfrac{a+b+a-b}{2ab} = \dfrac{2a}{2ab} = \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{a+b-a+b}{2ab} = \dfrac{2b}{2ab} = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

$x_1 = \dfrac{1}{a};\ x_2 = \dfrac{1}{b}$

b) $x^2 + a^2 - 2ax - 2x^2 - 2ax - 4a^2 = 0$

$x^2 + 4ax + 3a^2 = 0$

$$x = \frac{-4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{2} = \frac{-4a \pm \sqrt{4a^2}}{2} = \frac{-4a \pm 2a}{2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-4+2a}{2} = \dfrac{-2a}{2} = -a \\ \dfrac{-4a-2a}{2} = \dfrac{-6a}{2} = -3a \end{cases}$$

$x_1 = -a;\ x_2 = -3a$

c) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(b-a)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ab + 4a^2}}{2a} =$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{(2a-b)^2}}{2a} = \begin{cases} \dfrac{-b+2a-b}{2a} = \dfrac{2a-2b}{2a} = \dfrac{a-b}{a} \\ \dfrac{-b-2a+b}{2a} = -1 \end{cases}$$

$x_1 = -1;\ x_2 = \dfrac{a-b}{a}$

d) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a(a+b)}}{2(a+b)} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2 + 4ab}}{2(a+b)} = \frac{-b \pm (2a+b)}{2(a+b)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-b+2a+b}{2(a+b)} = \dfrac{a}{a+b} \\ \dfrac{-b-2a-b}{2(a+b)} = \dfrac{-(2a+2b)}{2(a+b)} = -1 \end{cases}$$

$x_1 = -1;\ x_2 = \dfrac{a}{a+b}$

73 **Resuelve:**

a) $|x| + 1 = |3x - 5|$

b) $|x^2 - 1| = |x| - 1$

a)

	$x < 0$	$0 \le x < \frac{5}{3}$	$x \ge \frac{5}{3}$
$\|x\|$	$-x$	x	x
$\|x\| + 1$	$-x + 1$	$x + 1$	$x + 1$
$\|3x - 5\|$	$-3x + 5$	$-3x + 5$	$3x - 5$

$x < 0$	$0 \le x < \frac{5}{3}$	$x \ge \frac{5}{3}$
$-x + 1 = -3x + 5$	$x + 1 = -3x + 5$	$x + 1 = 3x - 5$
$x = 2 \notin (-\infty, 0)$	$x = 1 \in \left[0, \frac{5}{3}\right)$	$x = 3 \in \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$

Soluciones: $x = 1,\ x = 3$

b)

	$x < -1$	$-1 \le x < 0$	$0 \le x < 1$	$1 \le x$
$\|x^2 - 1\|$	$x^2 - 1$	$1 - x^2$	$1 - x^2$	$x^2 - 1$
$\|x\|$	$-x$	$-x$	x	x
$\|x\| - 1$	$-x - 1$	$-x - 1$	$x - 1$	$x - 1$

$x < -1$	$-1 \le x < 0$	$0 \le x < 1$	$1 \le x$
$x^2 - 1 = -x - 1$	$1 - x^2 = -x - 1$	$1 - x^2 = x - 1$	$x^2 - 1 = x - 1$
$x = -1 \notin (-\infty, -1)$	$x = -1 \in [-1, 0)$	$x = 1 \notin [0, 1)$	$x = 1 \in [1, +\infty)$
$x = 0 \notin (-\infty, -1)$	$x = 2 \notin [-1, 0)$	$x = -2 \notin [0, 1)$	$x = 0 \notin [1, +\infty)$

Soluciones: $x = -1,\ x = 1$

74 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $\frac{2x+1}{x+1} > 1$ **b)** $\frac{x-1}{x+3} \ge x$ **c)** $\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-1}{x+1}$ **d)** $\frac{1}{x+2} \le \frac{x}{x+2}$

a) $\frac{2x+1}{x+1} > 1 \rightarrow \frac{2x+1}{x+1} - 1 > 0 \rightarrow \frac{x}{x+1} > 0$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0]$	$[0, +\infty)$
x	–	–	+
$x + 1$	–	+	+
$\frac{x}{x+1}$	+	–	+

Solución: $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

b) $\frac{x-1}{x+3} \ge x \rightarrow \frac{x-1}{x+3} - x \ge 0 \rightarrow -\frac{(x+1)^2}{x+3} \ge 0 \rightarrow \frac{(x+1)^2}{x+3} \le 0$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1]$	$[-1, +\infty)$
$(x+1)^2$	+	+	+
$x + 3$	–	+	+
$\frac{(x+1)^2}{x+3}$	–	+	+

Solución: $(-\infty, -3)$

c) $\dfrac{x+1}{x-1} < \dfrac{x-1}{x+1} \rightarrow \dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1} < 0 \rightarrow 4\dfrac{x}{x^2-1} < 0$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0]$	$[0, 1)$	$(-1, +\infty)$
x	–	–	+	+
x^2-1	+	–	–	+
$\dfrac{x}{x^2-1}$	–	+	–	+

Solución: $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

d) $\dfrac{1}{x+2} \le \dfrac{x}{x+2} \rightarrow \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{x}{x+2} \le 0 \rightarrow \dfrac{1-x}{x+2} \le 0$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1]$	$[1, +\infty)$
$1-x$	+	+	–
$x+2$	–	+	+
$\dfrac{1-x}{x+2}$	–	+	–

Solución: $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$

75 **Una vasija contiene una mezcla de alcohol y agua en una proporción de 3 a 7. En otra vasija la proporción es de 2 a 3. ¿Cuántos cazos hemos de sacar de cada vasija para obtener 12 cazos de una mezcla en la que la proporción alcohol-agua sea de 3 a 5?**

x cazos V_1	$(12 - x)$ cazos V_2	12 cazos
3 alcohol 7 agua	2 alcohol 3 agua	3 alcohol 5 agua
$\dfrac{3}{10}$ alcohol	$\dfrac{2}{5}$ alcohol	$\dfrac{3}{8}$ alcohol

La proporción de alcohol es:

$$\frac{3}{10}x + (12 - x)\cdot\frac{2}{5} = \frac{3}{8}\cdot 12$$

$$\frac{3x}{10} + \frac{24-2x}{5} = \frac{9}{2};\ 3x + 48 - 4x = 45;\ x = 3$$

Solución: 3 cazos de la primera y 9 de la segunda.

Autoevaluación

Página 99

1 Resuelve factorizando previamente.

$$\mathbf{3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0}$$

$3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0$

$x(3x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x - 2) = 0$

	3	1	–9	–9	–2
–1		–3	2	7	2
	3	–2	–7	–2	0
2		6	8	2	
	3	4	1	0	

$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \begin{cases} -1 \\ -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

La ecuación factorizada queda así:

$$x(x+1)^2 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)(x-2) = 0$$

Las soluciones son: $x_1 = 0;\; x_2 = -1;\; x_3 = -\dfrac{1}{3};\; x_4 = 2$

2 Opera y simplifica el resultado.

$$\left(\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}\right) : \frac{3x}{x-1}$$

$$\left(\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}\right) : \frac{3x}{x-1} = \frac{x^2 - x(x-1)}{x^2-1} : \frac{3x}{x-1} =$$

$$= \frac{(x^2 - x^2 + x)(x-1)}{3x(x^2-1)} : \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)\,3x} = \frac{1}{3(x+1)}$$

3 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

b) $\sqrt{8 + 2x} - x = x + 6$

c) $\dfrac{3x}{x^2-4} = \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{4}{3}$

d) $3^{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

e) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

f) $\ln x + \ln 4 = 2 \ln (x+1)$

g) $|3x + 1| = |x - 3|$

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Hacemos el cambio $y = x^2$.

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$y = 2 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{y} \begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$y = 1 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{y} \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = \sqrt{2};\; x_2 = -\sqrt{2};\; x_3 = 1;\; x_4 = -1$

b) $\sqrt{8+2x}-x=x+6 \to \sqrt{8+2x}=2x+6$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$(\sqrt{8+2x})^2=(2x+6)^2 \to 8+2x=4x^2+36+24x \to$

$\to 4x^2+22x+28=0 \to 2x^2+11x+14=0$

$x=\dfrac{-11\pm\sqrt{121-112}}{4}=\dfrac{-11\pm 3}{4}=\begin{cases}-2\\-7/2\end{cases}$

Comprobada la ecuación inicial, el resultado $-\dfrac{7}{2}$ resulta no ser válido.

Por tanto, la solución de la ecuación es $x=-2$.

c) $\dfrac{3x}{x^2-4}=\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{4}{3} \to \dfrac{9x}{3(x^2-4)}=\dfrac{3x(x-2)-4(x^2-4)}{3(x^2-4)} \to$

$\to 9x=3x^2-6x-4x^2+16 \to x^2+15x-16=0 \to$

$\to x=\dfrac{-15\pm\sqrt{225+64}}{4}=\dfrac{-15\pm 17}{2}=\begin{cases}1\\-16\end{cases}$

Soluciones: $x_1=1;\ x_2=-16$

d) $3^{x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \to 3^{x-1}=3^{-1/2} \to x-1=-\dfrac{1}{2} \to x=\dfrac{1}{2}$

e) $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0 \to (2^x)^2-6\cdot 2^x+8=0$

Hacemos el cambio $y=2^x$, con lo que obtenemos:

$y^2-6y+8=0 \to y=\dfrac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\dfrac{6\pm 2}{2}=\begin{cases}4\\2\end{cases}$

$y=4 \to 2^x=4 \to 2^x=2^2 \to x=2$

$y=2 \to 2^x=2 \to 2^x=2^1 \to x=1$

Soluciones: $x_1=1;\ x_2=2$

f) $\ln x+\ln 4=2\ln(x+1) \to \ln 4x=\ln(x+1)^2 \to 4x=(x+1)^2 \to$

$\to x^2-2x+1=0 \to (x-1)^2=0 \to x=1$

Solución: $x=1$

g) $|3x+1|=|x-3|\begin{cases}3x+1=x-3 \to 2x=-4 \to x=-2\\3x+1=-(x-3) \to 4x=2 \to x=1/2\end{cases}$

Soluciones: $x_1=-2,\ x_2=\dfrac{1}{2}$

4 Resuelve estos sistemas no lineales:

a) $\begin{cases}\boldsymbol{xy-x^2=6}\\\boldsymbol{x+y=7}\end{cases}$ b) $\begin{cases}\boldsymbol{x^2+y^2+xy=1}\\\boldsymbol{2x^2-y^2-xy=2}\end{cases}$

a) $\begin{cases}xy-x^2=6 \to x(7-x)-x^2=6 \to x(7-x)-x^2-6=0 \to -2x^2+7x-6=0 \to x=2,\ x=\dfrac{3}{2}\\x+y=7 \to y=7-x\end{cases}$

$x=2 \to y=5$

$x=\dfrac{3}{2} \to y=\dfrac{11}{2}$

Soluciones: $x_1=2,\ y_1=5;\ x_2=\dfrac{3}{2},\ y_2=\dfrac{11}{2}$

b) $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2+xy=1\\2x^2+y^2-xy=2\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}(1.^a)\\(1.^a)+(2.^a)\end{array}$ $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2+xy=1\\3x^2\qquad\qquad=3\end{array}\right\} \to x=-1$

$x=1 \to y^2+y=0 \to y=0,\ y=1 \to$ *Soluciones:* $x_1=1,\ y_1=1;\ x_2=1,\ y_2=0$

$x=0 \to y^2=1 \to y=1,\ y=-1 \to$ *Soluciones:* $x_3=0,\ y_3=1;\ x_4=0,\ y_4=-1$

5 Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases}y-2x=0\\3^y-6\cdot3^x=-9\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}\sqrt{x^2+5}=y+2\\log\,5x-log\,y=1\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}x+2y+2z=3\\x+\ \ y+3z=0\\-2x+3y+3z=1\end{cases}$ **d)** $\begin{cases}x+y-\ \ z=3\\2x-y-\ \ z=8\\3x\qquad-2z=0\end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l}y-2x=0\\3^y-6\cdot3^x=-9\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}y=2x\\3^{2x}-6\cdot3^x=-9\end{array}\right\}$

Hacemos el cambio $3^x=z$:

$z^2-6z+9=0 \to z=\dfrac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=3$

$3^x=3 \to x=1$

$x=1 \to y=2$

Solución: $x=1,\ y=2$

b) $\begin{cases}\sqrt{x^2+5}=y+2\\log\,5x-\ log\,y=1\end{cases} \to \begin{cases}x^2+5=(y+2)^2\\log\,\dfrac{5x}{y}=log\,10\end{cases} \to \begin{cases}x^2+5=y^2+4y+4 \to 4y^2+5=y^2+4y+4 \to y=1,\ y=\dfrac{1}{3}\\\dfrac{5x}{y}=10 \to x=2y\end{cases}$

$y=1 \to x=2$

$y=\dfrac{1}{3} \to x=\dfrac{2}{3}$

Soluciones: $x_1=2,\ y_1=1;\ x_2=\dfrac{2}{3},\ y_2=\dfrac{1}{3}$

c) $\left.\begin{array}{r}x+2y+2z=3\\x+\ \ y+3z=0\\-2x+3y+3z=1\end{array}\right\} \to \begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)+2\cdot(1.^a)\end{array}\ \left.\begin{array}{r}x+2y+2z=\ \ 3\\-\ \ y+\ \ z=-3\\7y+7z=\ \ 7\end{array}\right\} \to \begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)+7\cdot(2.^a)\end{array}\ \left.\begin{array}{r}x+2y+\ \ 2z=\ \ 3\\-\ \ y+\ \ \ \ z=\ -3\\14z=-14\end{array}\right\}$

$14z=-14 \to z=-1$

$-y+z=-3 \to -y-1=-3 \to y=2$

$x+2y+2z=3 \to x+4-2=3 \to x=1$

Solución: $x=1,\ y=2,\ z=-1$

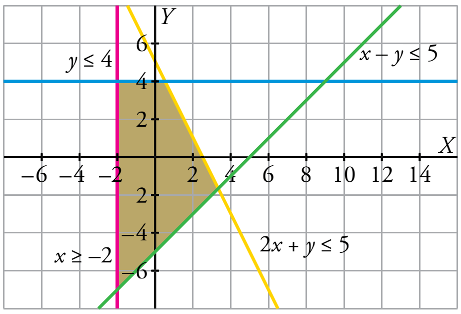
d) $\left.\begin{array}{r}x+y-\ \ z=3\\2x-y-\ \ z=8\\3x-\ \ -2z=0\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-2\cdot(1.^a)\\(3.^a)-3\cdot(1.^a)\end{array}$ $\left.\begin{array}{r}x+\ \ y-z=3\\-3y+z=2\\-3y+z=9\end{array}\right\}$

Las dos últimas filas se contradicen, luego no hay solución.

6 **Resuelve estos sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} 2x + y \le 5 \\ x - y \le 5 \\ y \le 4 \\ x \ge -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ \dfrac{x+1}{2} - 3x \le x - 3 \end{cases}$

a)



La solución es el cuadrilátero señalado.

b) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ \dfrac{x+1}{2} - 3x \le x - 3 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ \dfrac{7}{2} - \dfrac{7}{2}x \le 0 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \to \text{Solución } [-2, 3] \\ \dfrac{7}{2} - \dfrac{7}{2}x \le 0 \to \text{Solución } [1, \infty) \end{cases}$

Solución: $x \in [1, 3]$

7 **Resuelve:**

a) $x(x-1) - 2(x+2) < x(x+1)$ **b)** $\dfrac{x^2+2x+1}{x+3} \ge 0$

a) $x(x-1) - 2(x+2) < x(x+1) \to x^2 - x - 2x - 4 < x^2 + x \to$

$\to -4x - 4 < 0 \to 4x > -4 \to x > -1$

Solución: $x \in (-1, +\infty)$

b) $\dfrac{x^2+2x+1}{x+3} \ge 0$

Para que un cociente sea positivo, el numerador y el denominador han de tener el mismo signo.

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \to (x+1)^2 \ge 0$ para cualquier valor de x.

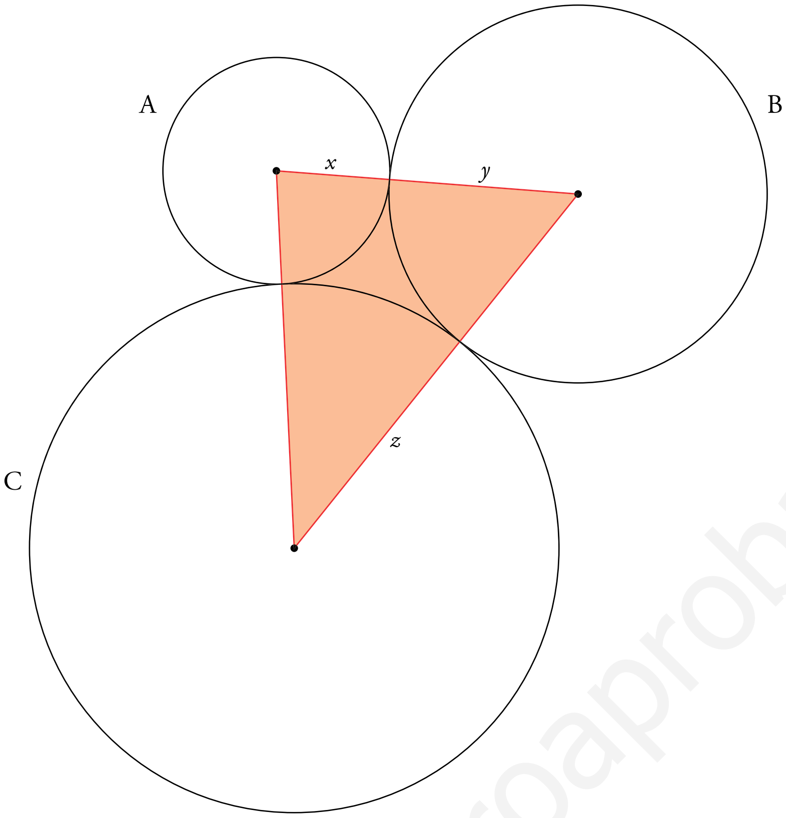
Para $x = -3$, la ecuación no tiene solución, ya que el denominador se hace cero.

Veamos dónde es $x + 3$ positivo.

$x + 3 > 0 \to x > -3$

Solución: $x \in (-3, +\infty)$

8 **Un circo está compuesto por tres pistas circulares tangentes dos a dos. Las distancias entre sus centros son 80, 100 y 120 metros, respectivamente. Calcula el diámetro de cada una de las pistas.**



Llamamos x al radio de la pista A.

Llamamos y al radio de la pista B.

Llamamos z al radio de la pista C.

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ x + z = 100 \\ y + z = 120 \end{cases}$$

Solución: $x = 30,\ y = 50,\ z = 70$

La pista A tiene 60 m de diámetro; la pista B tiene 100 m de diámetro y la pista C tiene 140 m de diámetro.

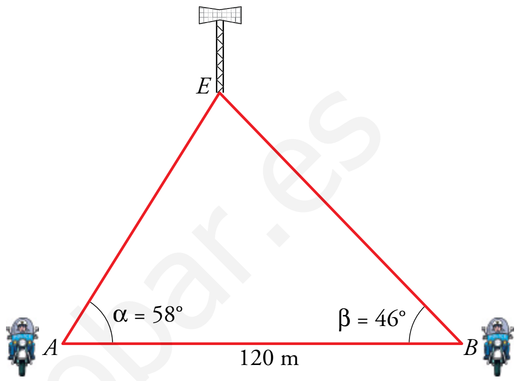
Resuelve

Página 105

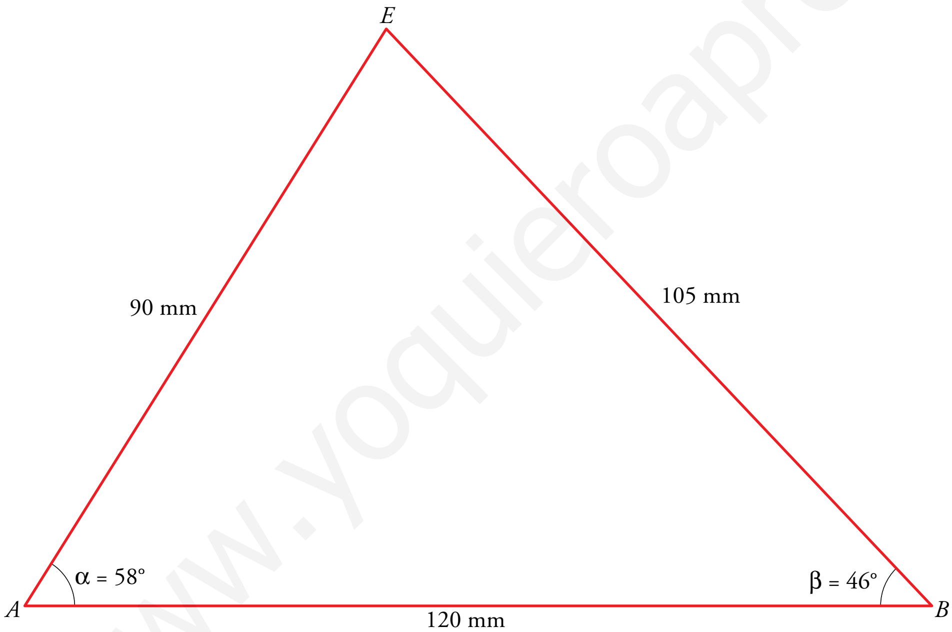
Localización de una emisora clandestina

Vamos a aplicar la técnica de la triangulación para resolver el siguiente problema:

> **Una emisora de radio clandestina *E* se sintoniza desde dos controles policiales, *A* y *B*. En cada uno de ellos se detecta la dirección en la que se encuentra, no la distancia. Por tanto, se conocen los ángulos $\alpha = 58°$ y $\beta = 46°$, así como la distancia $AB = 120$ m. Para localizar sobre el terreno la emisora *E* hay que calcular la distancia $\overline{AE}$ o la distancia $\overline{BE}$.**



Resuelve el problema planteado realizando un dibujo en tu cuaderno a escala 1:1 000 (1 m = 1 mm). Sobre el papel, mide los lados *AE* y *BE* e interpreta el resultado en la realidad.



La emisora se encuentra a 90 m del control *A* y a 105 m del control *B*.

1 Razones trigonométricas de un ángulo agudo (0° a 90°)

Página 106

Hazlo tú. Sabiendo que *sen* β = 0,39 calcula *cos* β y *tg* β.

$$cos\ \beta = \sqrt{1 - sen^2\ \beta} = \sqrt{1-(0,39)^2} = 0,92$$

$$tg\ \beta = \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = \frac{0,39}{0,92} = 0,42$$

Hazlo tú. Conociendo *tg* β = 1,28 calcula *sen* β y *cos* β.

$s = sen\ \beta$; $c = cos\ \beta$

$$\begin{cases} s^2 + c^2 = 1 \rightarrow (1,28c)^2 + c^2 = 1 \rightarrow 2,6384c^2 = 1 \rightarrow c = 0,62 \\ \dfrac{s}{c} = 1,28 \rightarrow s = 1,28c \end{cases}$$

$cos\ \beta = 0,62$

$sen\ \beta = 1,28 \cdot 0,62 = 0,79$

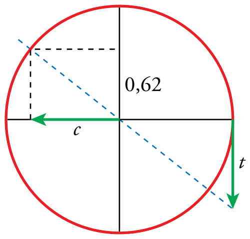
2 Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera (0° a 360°)

Página 107

1 **Sabiendo que el ángulo α está en el segundo cuadrante $(90° < \alpha < 180°)$ y *sen* $\alpha = 0{,}62$, calcula *cos* α y *tg* α.**

$cos\ \alpha = -\sqrt{1-0{,}62^2} = -0{,}78$

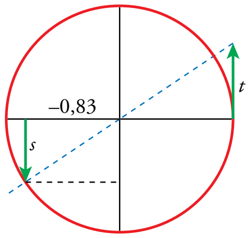
$tg\ \alpha = \dfrac{0{,}62}{-0{,}78} = -0{,}79$



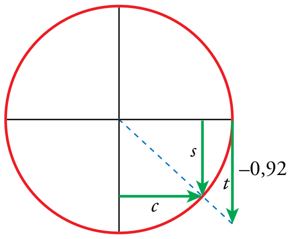
2 **Sabiendo que el ángulo α está en el tercer cuadrante $(180° < \alpha < 270°)$ y *cos* $\alpha = -0{,}83$, calcula *sen* α y *tg* α.**

$sen\ \alpha = -\sqrt{1-(0{,}83)^2} = -0{,}56$

$tg\ \alpha = \dfrac{-0{,}56}{-0{,}83} = 0{,}67$



3 **Sabiendo que el ángulo α está en el cuarto cuadrante $(270° < \alpha < 360°)$ y *tg* $\alpha = -0{,}92$, calcula *sen* α y *cos* α.**



$\left.\begin{array}{l} \dfrac{s}{c} = -0{,}92 \\ s^2 + c^2 = 1 \end{array}\right\}$ El sistema tiene dos soluciones: $\begin{array}{l} s = -0{,}68;\ c = 0{,}74 \\ s = 0{,}68;\ c = -0{,}74 \end{array}$

4 **Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y amplíala para los ángulos 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° y 360°.**

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen	**0**	**1/2**	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	**1**				
cos	**1**	$\sqrt{3}/2$			**0**				
tg	**0**	$\sqrt{3}/3$			**–**				

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	–1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	–1
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	–1	$-\sqrt{3}/3$	0

	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen	–1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	–1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	–1/2	0
cos	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	–1/2	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tg	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	–1	$-\sqrt{3}/3$	0

3 Ángulos fuera del intervalo 0° a 360°

Página 108

1 Pasa cada uno de los siguientes ángulos al intervalo [0°, 360°) y al intervalo (–180°, 180°]:

a) 396°	**b) 492°**	**c) 645°**
d) 3 895°	**e) 7 612°**	**f) 1 980°**

Se trata de expresar el ángulo de la siguiente forma:

$$k \text{ o } -k, \text{ donde } k \le 180°$$

a) $396° = 396° - 360° = 36°$

b) $492° = 492° - 360° = 132°$

c) $645° = 645° - 360° = 285° = 285° - 360° = -75°$

d) $3\,895° = 3\,895° - 10 \cdot 360° = 295° = 295° - 360° = -65°$

e) $7\,612° = 7\,612° - 21 \cdot 360° = 52°$

f) $1\,980° = 1\,980° - 5 \cdot 360° = 180°$

Cuando hacemos, por ejemplo, $7\,612° = 7\,612° - 21 \cdot 360°$, ¿por qué tomamos 21? Porque, previamente, hemos realizado la división 7 612 ÷ 360 = 21.44... . Es el cociente entero.

2 Determina el valor de estas razones trigonométricas:

a) *sen* 13 290°	**b) *cos* (–1 680°)**	**c) *tg* 3 825°**	**d) *cos* 4 995°**
e) *sen* (–1 710°)	**f) *tg* 3 630°**	**g) *cos* (–36 000°)**	**h) *sen* (–330°)**

a) $13\,290° = 360° \cdot 36 + 330°$

$$sen\ 13\,290° = sen\ 330° = -sen\ 30° = -\frac{1}{2}$$

b) $-1\,680° = -360° \cdot 4 - 240°$

$$cos\ (-1\,680°) = cos\ (-240°) = cos\ 120° = -cos\ 60° = -\frac{1}{2}$$

c) $3\,825° = 360° \cdot 10 + 225°$

$$tg\ 3\,825° = tg\ 225° = tg\ 45° = 1$$

d) $4\,995° = 360° \cdot 13 + 315°$

$$cos\ 4\,995° = cos\ 315° = cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e) $-1\,710° = -360° \cdot 4 - 270°$

$$sen\ (-1\,710°) = sen\ (-270°) = sen\ (90°) = 1$$

f) $3\,630° = 360° \cdot 10 + 30°$

$$tg\ 3\,630° = tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

g) $-36\,000° = -360° \cdot 100$

$$cos\ (-36\,000°) = cos\ 0° = 1$$

h) $sen\ (-330°) = sen\ 30° = \dfrac{1}{2}$

4 Trigonometría con calculadora

Página 109

Hazlo tú. Sabiendo que $sen\ \beta = 0{,}87$ **y** $90° < \beta < 180°$**, calcula** $cos\ \beta$ **y** $tg\ \beta$**.**

$cos\ \beta = -0{,}493$

$tg\ \beta = -1{,}765$

1 A partir de los datos que se ofrecen en cada apartado relativos al ángulo α**, halla, con ayuda de la calculadora, las razones trigonométricas de** α**.**

a) $sen\ \alpha = 0{,}573;\ \ \alpha > 90°$

b) $cos\ \alpha = 0{,}309;\ \ sen\ \alpha < 0$

c) $tg\ \alpha = 1{,}327;\ \ 180° < \alpha < 270°$

d) $cos\ \alpha = -0{,}819;\ \ tg\ \alpha < 0$

a) $cos\ \alpha = -0{,}82$

$tg\ \alpha = -0{,}699$

b) $sen\ \alpha = -0{,}951$

$tg\ \alpha = -3{,}078$

c) $sen\ \alpha = -0{,}799$

$cos\ \alpha = -0{,}602$

d) $sen\ \alpha = 0{,}574$

$tg\ \alpha = -0{,}7$

5 Relaciones entre las razones trigonométricas de algunos ángulos

Página 111

1 **Calcula las razones trigonométricas de 55°, 125°, 145°, 215°, 235°, 305° y 325° a partir de las razones trigonométricas de 35°:**

$$\textit{sen}\ 35° = 0{,}57;\quad \cos 35° = 0{,}82;\quad \textit{tg}\ 35° = 0{,}70$$

- 55° = 90° – 35° → 55° y 35° son complementarios.

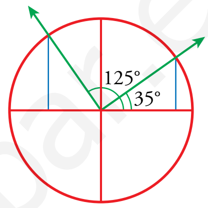
$$\left.\begin{array}{l} \textit{sen}\ 55° = \cos 35° = 0{,}82 \\ \cos 55° = \textit{sen}\ 55° = 0{,}57 \end{array}\right\}\ \textit{tg}\ 55° = \frac{\textit{sen}\ 55°}{\cos 55°} = \frac{0{,}82}{0{,}57} = 1{,}43 \quad \left(\text{También } \textit{tg}\ 55° = \frac{1}{\textit{tg}\ 35°} = \frac{1}{0{,}70} \approx 1{,}43\right)$$

- 125° = 90° + 35°

$\textit{sen}\ 125° = \cos 35° = 0{,}82$

$\cos 125° = -\textit{sen}\ 35° = -0{,}57$

$\textit{tg}\ 125° = \dfrac{-1}{\textit{tg}\ 35°} = \dfrac{-1}{0{,}70} = -1{,}43$

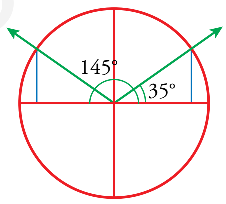


- 145° = 180° – 35° → 145° y 35° son suplementarios.

$\textit{sen}\ 145° = \textit{sen}\ 35° = 0{,}57$

$\cos 145° = -\cos 35° = -0{,}82$

$\textit{tg}\ 145° = -\textit{tg}\ 35° = -0{,}70$

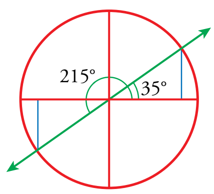


- 215° = 180° + 35°

$\textit{sen}\ 215° = -\textit{sen}\ 35° = -0{,}57$

$\cos 215° = -\cos 35° = -0{,}82$

$\textit{tg}\ 215° = \textit{tg}\ 35° = 0{,}70$

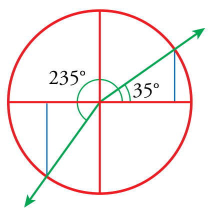


- 235° = 270° – 35°

$\textit{sen}\ 235° = -\cos 35° = -0{,}82$

$\cos 235° = -\textit{sen}\ 35° = -0{,}57$

$\textit{tg}\ 235° = \dfrac{\textit{sen}\ 235°}{\cos 235°} = \dfrac{-\cos 35°}{-\textit{sen}\ 35°} = \dfrac{1}{\textit{tg}\ 35°} = \dfrac{1}{0{,}70} = 1{,}43$

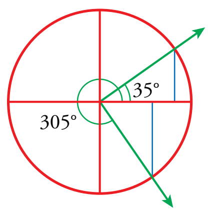


- 305° = 270° + 35°

$\textit{sen}\ 305° = -\cos 35° = -0{,}82$

$\cos 305° = \textit{sen}\ 35° = 0{,}57$

$\textit{tg}\ 305° = \dfrac{\textit{sen}\ 305°}{\cos 305°} = \dfrac{-\cos 35°}{\textit{sen}\ 35°} = -\dfrac{1}{\textit{tg}\ 35°} = -1{,}43$

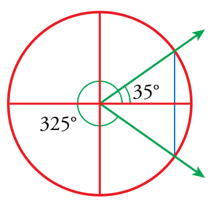


- 325° = 360° – 35° (= –35°)

$\textit{sen}\ 325° = -\textit{sen}\ 35° = -0{,}57$

$\cos 325° = \cos 35° = 0{,}82$

$\textit{tg}\ 325° = \dfrac{\textit{sen}\ 325°}{\cos 325°} = \dfrac{-\textit{sen}\ 35°}{\cos 35°} = -\textit{tg}\ 35° = -0{,}70$



2 **Averigua las razones trigonométricas de 358°, 156° y 342°, utilizando la calculadora solo para hallar razones trigonométricas de ángulos comprendidos entre 0° y 90°.**

- $358° = 360° - 2°$

  $sen\ 358° = -sen\ 2° = -0,0349$

  $cos\ 358° = cos\ 2° = 0,9994$

  $tg\ 358° \overset{(*)}{=} -tg\ 2° = -0,03492$

  $(*)\ tg\ 358° = \dfrac{sen\ 358°}{cos\ 358°} = \dfrac{-sen\ 2°}{cos\ 2°} = -tg\ 2°$

- $156° = 180° - 24°$

  $sen\ 156° = sen\ 24° = 0,4067$

  $cos\ 156° = -cos\ 24° = -0,9135$

  $-tg\ 24° = -0,4452$

  OTRA FORMA DE RESOLVERLO:

  $156° = 90° + 66°$

  $sen\ 156° = cos\ 66° = 0,4067$

  $cos\ 156° = -sen\ 66° = -0,9135$

  $tg\ 156° = \dfrac{-1}{tg\ 66°} = \dfrac{-1}{2,2460} = -0,4452$

- $342° = 360° - 18°$

  $sen\ 342° = -sen\ 18° = -0,3090$

  $cos\ 342° = cos\ 18° = 0,9511$

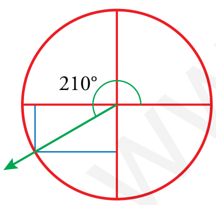
  $tg\ 342° = -tg\ 18° = -0,3249$

3 **Dibuja, sobre la circunferencia goniométrica, ángulos que cumplan las siguientes condiciones y estima, en cada caso, el valor de las restantes razones trigonométricas:**

a) $sen\ \alpha = -\dfrac{1}{2},\ tg\ \alpha > 0$ **b)** $cos\ \alpha = \dfrac{3}{4},\ \alpha > 90°$ **c)** $tg\ \alpha = -1,\ cos\ \alpha < 0$

d) $tg\ \alpha = 2,\ cos\ \alpha < 0$ **e)** $sen\ \alpha = -1$ **f)** $cos\ \alpha = 0,\ sen\ \alpha > 0$

a)

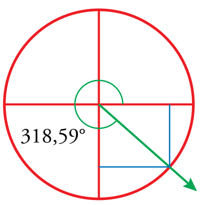


$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = -1/2 < 0 \\ tg\ \alpha > 0 \end{array}\right\} \to cos\ \alpha < 0 \to \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante

$cos\ 210° \approx -0,86$

$tg\ 210° \approx 0,58$

b)

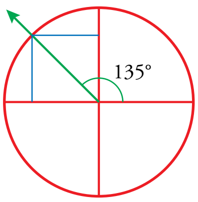


$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = 3/4 \\ \alpha > 90° \end{array}\right\} \to \alpha \in 4.°$ cuadrante

$sen\ 318,59° \approx -0,66$

$tg\ 318,59° \approx -0,88$

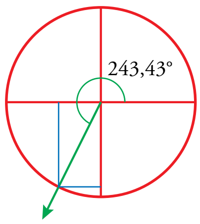
c)



$\left.\begin{array}{l} tg\ \beta = -1 < 0 \\ cos\ \beta < 0 \end{array}\right\} \to sen\ \beta > 0 \to \beta \in 2.°$ cuadrante

$sen\ 135° \approx 0,7$

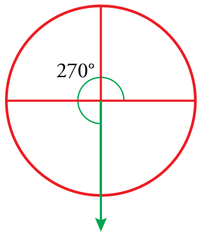
$cos\ 135° \approx -0,7$

d) 

$\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = 2 > 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{array}\right\} \rightarrow sen\ \alpha < 0 \rightarrow \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante

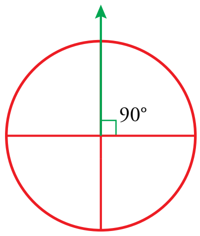
$sen\ 243,43° \approx -0,9$

$cos\ 243,43° \approx -0,45$

e) 

$cos\ 270° = cos\ 90° = 0$

$tg\ 270°$ no existe

f) 

$sen\ 90° = 1$

$tg\ 90°$ no existe

6 Resolución de triángulos rectángulos

Página 112

Hazlo tú. **Los catetos de un triángulo rectángulo son $a = 47$ cm y $b = 62$ cm. Halla la hipotenusa y los ángulos.**

Por el teorema de Pitágoras, $c = \sqrt{47^2 + 62^2} = 77,8$ cm

$tan\ \hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{47}{62} \rightarrow \hat{A} = 37°\ 9'\ 52''$

$\hat{B} = 90° - \hat{A} = 90° - 37°\ 14'\ 5'' = 52°\ 50'\ 8''$

Hazlo tú. **En un triángulo rectángulo conocemos $\hat{B} = 62°$ y $b = 152$ m. Halla los demás elementos.**

$sen\ \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow c = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{152}{sen\ 62°} = 172,15\ \text{cm}$

$tg\ \hat{B} = \frac{b}{a} \rightarrow a = \frac{b}{tg\ \hat{B}} = \frac{152}{tg\ 62°} = 80,82\ \text{cm}$

$\hat{A} = 90° - 62° = 28°$

Hazlo tú. **Conocemos la hipotenusa, $c = 72$ m, y el ángulo $\hat{A} = 23°$ de un triángulo rectángulo. Calcula b.**

$cos\ \hat{A} = \frac{b}{c} \rightarrow b = c \cdot cos\ \hat{A} = 72 \cdot cos\ 23° = 66,28$ cm

Página 113

1 **Las siguientes propuestas están referidas a triángulos rectángulos que, en todos los casos, se designan por ABC, siendo C el ángulo recto.**

a) Datos: $c = 32$ cm, $\hat{B} = 57°$. Calcula a.

b) Datos: $c = 32$ cm, $\hat{B} = 57°$. Calcula b.

c) Datos: $a = 250$ m, $b = 308$ m. Calcula c y $\hat{A}$.

d) Datos: $a = 35$ cm, $\hat{A} = 32°$. Calcula b.

e) Datos: $a = 35$ cm, $\hat{A} = 32°$. Calcula c.

a) $cos\ \hat{B} = \frac{a}{c} \rightarrow a = c\ cos\ \hat{B} = 17,43$ cm

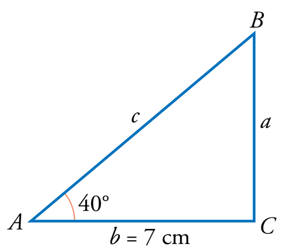
b) $sen\ \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow b = c\ sen\ \hat{B} = 26,84$ cm

c) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 396,69$ m; $tg\ \hat{A} = \frac{a}{b} = 0,81 \rightarrow \hat{A} = 39°\ 3'\ 57''$

d) $tg\ \hat{A} = \frac{a}{b} \rightarrow b = \frac{a}{tg\ \hat{A}} = 56,01$ cm

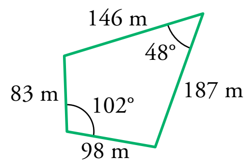
e) $sen\ \hat{A} = \frac{a}{c} \rightarrow c = \frac{a}{sen\ \hat{A}} = 66,05$ cm

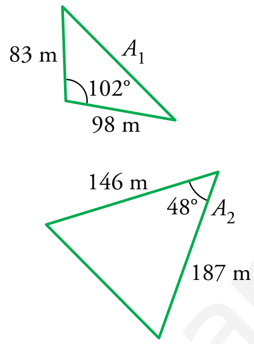
2 **Para determinar la altura de un poste nos hemos alejado 7 m de su base y hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un valor de 40°. ¿Cuánto mide el poste?**



$tg\ 40° = \frac{a}{7} \rightarrow a = 7\ tg\ 40° = 5,87$ m

3 Halla el área del siguiente cuadrilátero. Sugerencia: pártelo en dos triángulos.





$A_1 = \frac{1}{2} 98 \cdot 83 \; sen \; 102° = 3\,978{,}13 \text{ m}^2$

$A_2 = \frac{1}{2} 187 \cdot 146 \; sen \; 48° = 10\,144{,}67 \text{ m}^2$

El área es la suma de A_1 y A_2: $14\,122{,}80 \text{ m}^2$

7 Estrategia de la altura para resolver triángulos oblicuángulos

Página 115

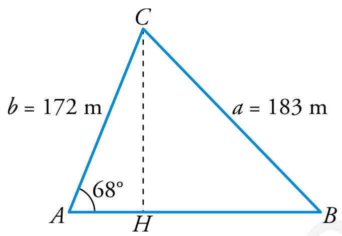
1 **En un triángulo *ABC* conocemos $\hat{A} = 68°$, $b = 172$ m y $a = 183$ m. Calcula la longitud del lado *c*.**

$\overline{AH} = 172 \; cos \; 68° = 64{,}43$ m

$\overline{CH} = 172 \; sen \; 68° = 159{,}48$ m

$\overline{HB} = \sqrt{a^2 - \overline{CH}^2} = 89{,}75$ m

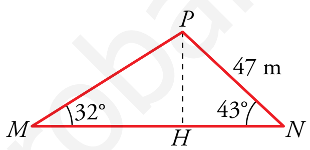
$C = \overline{AH} + \overline{HB} = 64{,}43 \text{ m} + 89{,}75 \text{ m} = 154{,}18$ m



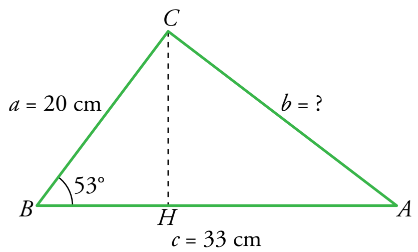
2 **En un triángulo *MNP* conocemos $\hat{M} = 32°$, $\hat{N} = 43°$ y $\overline{NP} = 47$ m. Calcula $\overline{MP}$.**

$sen \; 43° = \dfrac{\overline{PH}}{47} \rightarrow \overline{PH} = 47 \; sen \; 43° = 32{,}05$ m

$sen \; 32° = \dfrac{\overline{PH}}{\overline{MP}} \rightarrow \overline{MP} = \dfrac{\overline{PH}}{sen \; 32°} = \dfrac{32{,}05}{sen \; 32°} = 60{,}49$ m



3 **En un triángulo *ABC* conocemos $a = 20$ cm, $c = 33$ cm y $\hat{B} = 53°$. Calcula la longitud del lado *b*.**



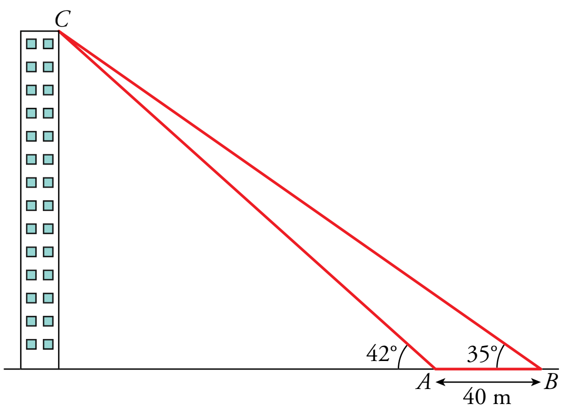
$\overline{BH} = a \; cos \; 53° = 12{,}04$ cm

$\overline{CH} = a \; sen \; 53° = 15{,}97$ cm

$\overline{HA} = c - \overline{BH} = 20{,}96$ cm

$b = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HA}^2} = 26{,}35$ cm

4 **Observa el gráfico de la derecha. Estamos en *A*, medimos el ángulo bajo el que se ve el edificio (42°), nos alejamos 40 m y volvemos a medir el ángulo (35°). ¿Cuál es la altura del edificio y a qué distancia nos encontramos de él?**



$$\left.\begin{array}{l} tg \; 42° = \dfrac{h}{d} \rightarrow h = d \; tg \; 42° \\ tg \; 35° = \dfrac{h}{d + 40} \rightarrow h = (d + 40) \; tg \; 35° \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow d \; tg \; 42° = (d + 40) tg \; 35° \rightarrow d = \frac{40 \; tg \; 35°}{tg \; 42° - tg \; 35°} = 139{,}90 \text{ m}$$

$h = d \; tg \; 42° = 125{,}97$ m

La altura es 125,97 m. La primera distancia es 139,90 m, y ahora, después de alejarnos 40 m, estamos a 179,90 m.

8 Dos importantes teoremas para resolver triángulos cualesquiera

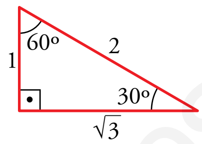
Página 116

1 **¿Verdadero o falso?**

a) El teorema de los senos confirma que en un triángulo, "a mayor lado se opone mayor ángulo".

b) Este triángulo rectángulo es la mitad de un triángulo equilátero.

Dividimos el seno de cada ángulo entre el lado opuesto:



- $\dfrac{sen\ 60°}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{sen\ 90°}{2} = \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{sen\ 30°}{1} = \dfrac{1/2}{1} = \dfrac{1}{2}$

Con estas igualdades se comprueba que se cumple el teorema de los senos.

a) Verdadero.

Como la razón entre el lado y el seno del ángulo opuesto es constante, cuanto mayor es el lado, mayor es el seno del ángulo opuesto y, por tanto, mayor es el ángulo opuesto (al tratarse de ángulos de un triángulo).

b) Verdadero.

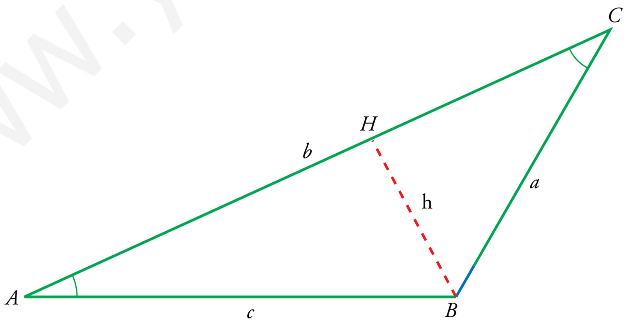
Con estas igualdades se comprueba el teorema de los senos en el caso particular de un triángulo equilátero. Sin embargo, el teorema es mucho más general porque se pueda aplicar a triángulos cualesquiera.

2 **Demuestra detalladamente, basándote en la demostración del teorema de los senos, la siguiente relación:**

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}$$

Lo demostramos para $\hat{C}$ ángulo agudo. (Si fuese un ángulo obtuso razonaríamos como en el ejercicio anterior).

Trazamos la altura h desde el vértice B. Así, los triángulos obtenidos AHB y CHB son rectángulos.



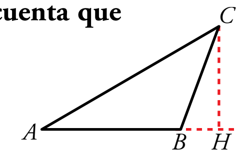
Por tanto, tenemos $sen\ \hat{A} = \dfrac{h}{c} \to h = c\ sen\ \hat{A}$

$$sen\ \hat{C} = \frac{h}{a} \to h = a\ sen\ \hat{C}$$

$$c\ sen\ \hat{A} = a\ sen\ \hat{C}$$

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}$$

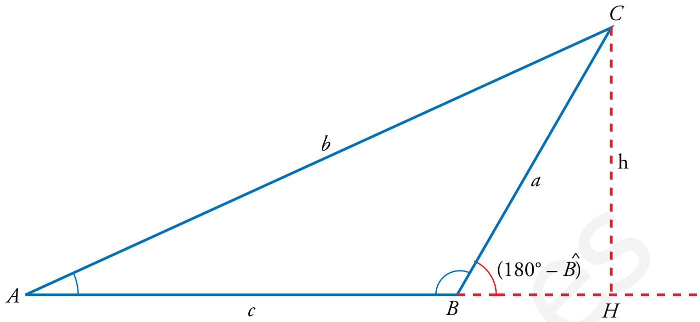
3 **Repite la demostración anterior en el caso de que $\hat{B}$ sea obtuso. Ten en cuenta que *sen* (180° – $\hat{B}$) = *sen* $\hat{B}$.**



$$sen\ \hat{A} = \frac{h}{b} \rightarrow h = b\ sen\ \hat{A}$$

$$sen\ \hat{B} = sen\ (180 - \hat{B}) = \frac{h}{a} \rightarrow h = a\ sen\ \hat{B}$$

$$b\ sen\ \hat{A} = a\ sen\ \hat{B} \rightarrow \frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}}$$



Página 117

Hazlo tú. Halla b y c conociendo a = 56 m, $\hat{B}$ = 52° y $\hat{C}$ = 112°.

$\hat{A}$ = 180° – 52° – 112° = 26°

Ahora usamos el teorema de los senos.

$$\frac{56}{sen\ 26°} = \frac{b}{sen\ 52°} \rightarrow b = \frac{56 \cdot sen\ 52°}{sen\ 26°} = 100,66 \text{ m}$$

$$\frac{56}{sen\ 26°} = \frac{c}{sen\ 112°} \rightarrow c = \frac{56 \cdot sen\ 112°}{sen\ 26°} = 118,44 \text{ m}$$

Hazlo tú. Calcula $\hat{A}$ conociendo a = 6 cm, b = 4 cm y $\hat{B}$ = 30°.

Por el teorema de los senos:

$$\frac{6}{sen\ \hat{A}} = \frac{4}{sen\ 30°} \rightarrow sen\ \hat{A} = \frac{6 \cdot sen\ 30°}{4} = 0,75 \rightarrow \hat{A}_1 = 48°\ 35'\ 25'' \quad \hat{A}_2 = 131°\ 24'\ 35''$$

En este caso ambas soluciones son posibles porque $\hat{A} + \hat{B} < 180°$.

Por tanto, tenemos dos posibles triángulos, uno acutángulo y otro obtusángulo.

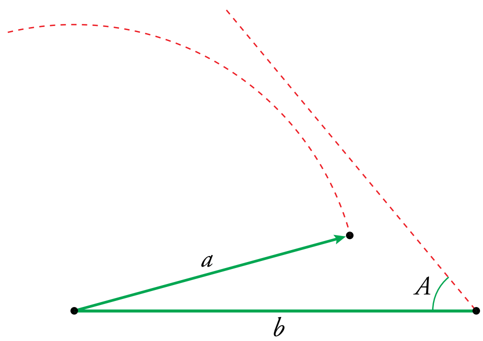
4 **¿Verdadero o falso?**

a) Si nos dan dos lados de un triángulo, a y b, y el ángulo opuesto a uno de ellos, $\hat{A}$, y deseamos hallar el ángulo $\hat{B}$, con el teorema de los senos seguro que llegaremos a una solución.

b) Si nos dan dos lados y un ángulo de un triángulo y deseamos hallar otro lado, el teorema de los senos seguro que nos permite llegar a una solución.

a) Falso.

Si el lado a no es suficientemente grande, el problema no tendrá solución como muestra el siguiente dibujo:



b) Falso.

Si nos dan el ángulo comprendido entre los dos lados, no podemos plantear el problema usando el teorema de los senos.

5 **En un triángulo ABC, conocemos $a = 4$ cm y $\hat{B} = 30°$. Halla $\hat{A}$ en los siguientes casos:**

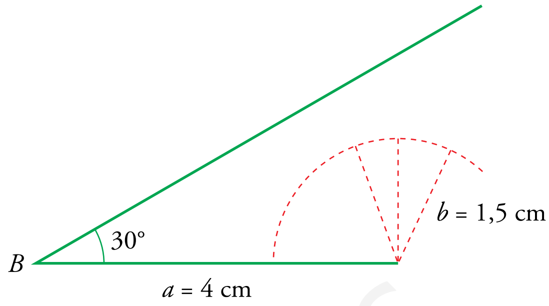
a) $b = 1,5$ cm **b) $b = 2$ cm** **c) $b = 3$ cm** **d) $b = 4$ cm**

a) $b = 1,5$ cm

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} \to \frac{4}{sen\,\hat{A}} = \frac{1,5}{sen\,30°} \to sen\,\hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{1,5} = 1,\hat{3}$$

¡Imposible, pues $sen\,\hat{A} \in [-1, 1]$ siempre!

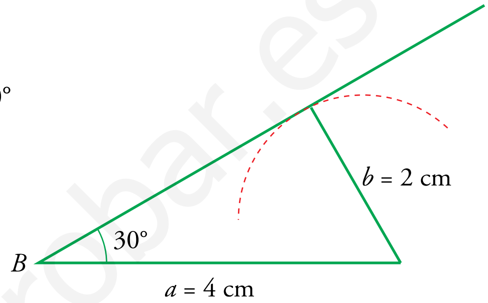
No tiene solución. Con esta medida, $b = 1,5$ cm, el lado b nunca podría tocar al lado c.



b) $b = 2$ cm

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} \to \frac{4}{sen\,\hat{A}} = \frac{2}{sen\,30°} \to sen\,\hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{2} = 1 \to A = 90°$$

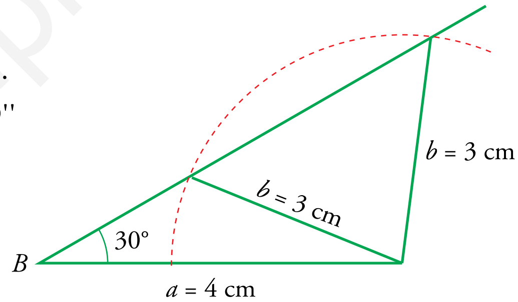
Se obtiene una única solución.



c) $b = 3$ cm

$$\frac{4}{sen\,\hat{A}} = \frac{2}{sen\,30°} \to sen\,\hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{3} = 0,\hat{6} \to \begin{cases} \hat{A}_1 = 41°\ 48'\ 37,1''. \\ \hat{A}_2 = 138°\ 11'\ 22,9'' \end{cases}$$

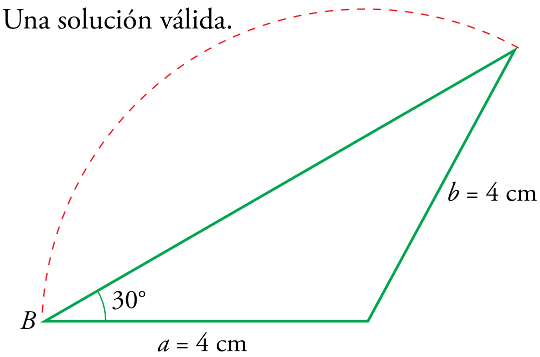
Las dos soluciones son válidas, pues en ningún caso ocurre que $\hat{A} + \hat{B} > 180°$.



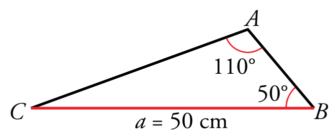
d) $b = 4$ cm

$$\frac{4}{sen\,\hat{A}} = \frac{4}{sen\,30°} \to sen\,\hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{4} = 0,5 \to \begin{cases} \hat{A}_1 = 30° \to \text{Una solución válida.} \\ \hat{A}_1 = 150° \end{cases}$$

La solución $\hat{A}_2 = 150°$ no es válida, pues, en tal caso, sería $\hat{A} + \hat{B} = 180°$. ¡Imposible!



6 **Calcula los lados b y c del triángulo de la derecha.**



Hallamos el ángulo $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 180° - 160° = 20°$

Aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{50}{sen\,110°} = \frac{b}{sen\,50°} \to b = \frac{50 \cdot sen\,50°}{sen\,110°} = 40,76 \text{ cm}$$

$$\frac{50}{sen\,110°} = \frac{c}{sen\,20°} \to b = \frac{50 \cdot sen\,20°}{sen\,110°} = 18,2 \text{ cm}$$

Página 118

7 **¿Verdadero o falso?**

a) Si de un triángulo conocemos dos lados y el ángulo que forman, el teorema del coseno nos permite obtener el otro lado.

b) Si aplicamos el teorema del coseno a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, entonces obtenemos el teorema de Pitágoras.

a) Verdadero. Esta es la situación en la que se usa el teroema del coseno para calcular el tercer lado de un triángulo.

b) Verdadero. El ángulo opuesto a la hipotenusa es el ángulo recto y, por tanto, su coseno vale cero.

Si a es la hipotenusa, el ángulo opuesto es $\hat{A} = 90°$ y se obtiene el teorema de Pitágoras a partir del teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ 90° \ \rightarrow\ a^2 = b^2 + c^2$$

Página 119

Hazlo tú. Calcula c conociendo $a = 7$ m, $b = 22$ m y $\hat{C} = 40°$.

Por el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \hat{C} \ \rightarrow\ c = \sqrt{7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cdot cos\ 40°} = 17,24 \text{ m}$$

8 **Resuelve los siguientes triángulos:**

a) $a = 12$ **cm;** $b = 16$ **cm;** $c = 10$ **cm**

b) $b = 22$ **cm;** $a = 7$ **cm;** $\hat{C} = 40°$

c) $b = 4$ **cm;** $c = 3$ **cm;** $\hat{A} = 105°$

d) $a = 4$ **m;** $\hat{B} = 45°$; $\hat{C} = 60°$

e) $b = 5$ **m;** $\hat{A} = \hat{C} = 35°$

f) $a = b = 10$ **cm;** $\hat{C} = 40°$

g) $a = 5$ **cm;** $\hat{A} = 75°$; $\hat{B} = 45°$

h) $a = 16$ **cm;** $\hat{A} = 90°$; $\hat{C} = 30°$

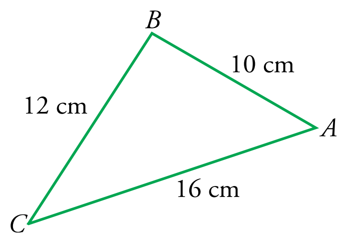
a) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \hat{A}$

$12^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10\ cos\ \hat{A}$

$144 = 256 + 100 - 320\ cos\ \hat{A}$

$cos\ \hat{A} = \dfrac{256 + 100 - 144}{320} = 0,6625$

$\hat{A} = 48°\ 30'\ 33''$



• $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\ \hat{B}$

$256 = 144 + 100 - 2 \cdot 12 \cdot 10\ cos\ \hat{B}$

$cos\ \hat{B} = \dfrac{144 + 100 - 256}{240} = -0,05$

$\hat{B} = 92°\ 51'\ 57,5''$

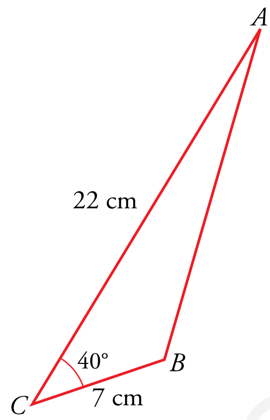
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \ \rightarrow\ \hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B}$

$\hat{C} = 38°\ 37'\ 29,5''$

b) • $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

$c^2 = 7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22\cos 40° = 49 + 484 - 235{,}94 = 297{,}06$

$c = 17{,}24$ cm



• $\dfrac{a}{sen\,\widehat{A}} = \dfrac{c}{sen\,\widehat{C}} \to \dfrac{7}{sen\,\widehat{A}} = \dfrac{17{,}24}{sen\,40°}$

$sen\,\hat{A} = \dfrac{7\,sen\,40°}{17{,}24} = 0{,}26$

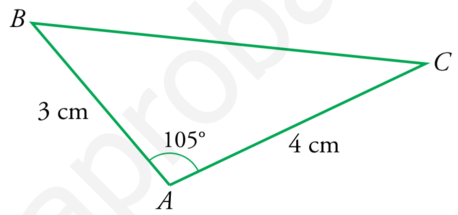
$\hat{A} = \begin{cases} \hat{A}_1 = 15°\ 7'\ 44{,}3'' \\ \hat{A}_2 = 164°\ 52'\ 15{,}7'' \to \text{No válida.} \end{cases}$

(La solución $\hat{A}_2$ no es válida, pues $\hat{A}_2 + \hat{C} > 180°$).

• $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 124°\ 52'\ 15{,}7''$

c) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3\cos 105° = 31{,}21$

$a = 5{,}59$ m



• $\dfrac{a}{sen\,\widehat{A}} = \dfrac{b}{sen\,\widehat{B}} \to \dfrac{5{,}59}{sen\,105°} = \dfrac{4}{sen\,\widehat{B}}$

$sen\,\hat{B} = \dfrac{4 \cdot sen\,105°}{5{,}59} = 0{,}6912$

$\hat{B} = \begin{cases} \hat{B}_1 = 43°\ 43'\ 25{,}3'' \\ \hat{B}_2 = 136°\ 16'\ 34{,}7'' \to \text{No válida.} \end{cases}$

(La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180°$).

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 31°\ 16'\ 34{,}7''$

d) • $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 75°$

• $\dfrac{a}{sen\,\widehat{A}} = \dfrac{b}{sen\,\widehat{B}} \to \dfrac{4}{sen\,75°} = \dfrac{b}{sen\,45°}$

$b = \dfrac{4 \cdot sen\,45°}{sen\,75°} = 2{,}93$ m

• $\dfrac{a}{sen\,\widehat{A}} = \dfrac{c}{sen\,\widehat{C}} \to \dfrac{4}{sen\,75°} = \dfrac{c}{sen\,60°}$

$c = \dfrac{4 \cdot sen\,60°}{sen\,75°} = 3{,}59$ m

e) • $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 110°$

• $\dfrac{b}{sen\,\widehat{B}} = \dfrac{a}{sen\,\widehat{A}} \to \dfrac{5}{sen\,110°} = \dfrac{a}{sen\,35°}$

$a = \dfrac{5 \cdot sen\,35°}{sen\,110°} = 3{,}05$ m

• Como $\hat{A} = \hat{C} \to a = c \to c = 3{,}05$ m

f) • Como los lados a y b son iguales, el triángulo es isósceles:

$\hat{A} + \hat{B} = 180° - 40° \to 2\hat{A} = 140° \to \hat{A} = \hat{B} = 70°$

• $\dfrac{10}{sen\,70°} = \dfrac{c}{sen\,40°} \to c = \dfrac{10 \cdot sen\,40°}{sen\,70°} = 6{,}84$ cm

g) • $\hat{C} = 180° - 75° - 45° = 60°$

• $\dfrac{5}{sen\, 75°} = \dfrac{b}{sen\, 45°} \rightarrow b = \dfrac{5 \cdot sen\, 45°}{sen\, 75°} = 3,66 \text{ cm}$

• $\dfrac{5}{sen\, 75°} = \dfrac{c}{sen\, 60°} \rightarrow b = \dfrac{5 \cdot sen\, 60°}{sen\, 75°} = 4,48 \text{ cm}$

h) • $\hat{B} = 180° - 90° - 30° = 60°$

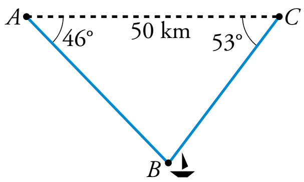
• $sen\, 30° = \dfrac{c}{16} \rightarrow c = 16 \cdot sen\, 30° = 8 \text{ cm}$

• $cos\, 30° = \dfrac{b}{16} \rightarrow b = 16 \cdot cos\, 30° = 13,86 \text{ cm}$

9 **Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos:**

$$\widehat{BAC} = 46° \text{ y } \widehat{BCA} = 53°$$

¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?



$\hat{B} = 180° - 46° - 53° = 81°$

• $\dfrac{a}{sen\, \widehat{A}} = \dfrac{b}{sen\, \widehat{B}} \rightarrow a = \dfrac{b\, sen\, \widehat{A}}{sen\, \widehat{B}} = \dfrac{50 \cdot sen\, 46°}{sen\, 81°} = 36,4 \text{ km}$

• $\dfrac{c}{sen\, \widehat{C}} = \dfrac{b}{sen\, \widehat{B}} \rightarrow c = \dfrac{b\, sen\, \widehat{C}}{sen\, \widehat{B}} = \dfrac{50 \cdot sen\, 53°}{sen\, 81°} = 40,4 \text{ km}$

Ejercicios y problemas resueltos

Página 120

1. Relaciones entre las razones trigonométricas

Hazlo tú. **Si** $\boldsymbol{cos}\ \alpha = -3/4$ **y** $180° < \alpha < 270°$, **calcula:** $sen\ \alpha$; $tg\ \alpha$; $cos\ (90° - \alpha)$; $sen\ (180° + \alpha)$; $tg\ (180° - \alpha)$; $sen\ (360° - \alpha)$, **sin hallar el ángulo** α.

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ sen^2\ \alpha + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \ \rightarrow\ sen\ \alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

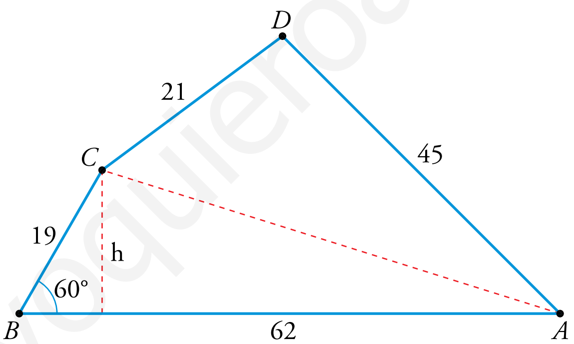
Como α pertenece al tercer cuadrante, su seno es negativo $\rightarrow$ $sen\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{3} \qquad cos\ (90° - \alpha) = sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad tg\ (180° - \alpha) = -tg\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3} \qquad sen\ (360° - \alpha) = -sen\ \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

2. Cálculo del área de una parcela descomponiéndola en triángulos

Hazlo tú. **Halla el área del cuadrilátero irregular** $ABCD$ **sabiendo que** $\overline{AB} = 62$ **m;** $\overline{BC} = 19$ **m;** $\overline{CD} = 21$ **m;** $\overline{AD} = 45$ **m;** $\hat{B} = 60°$.



Trazando la diagonal $\overline{AC}$ descomponemos el cuadrilátero en dos triángulos.

- Área del triángulo ABC:

$$sen\ 60° = \frac{h}{19} \ \rightarrow\ h = 19 \cdot sen\ 60° = 16,45 \text{ m}$$

$$S_{ABC} = \frac{62 \cdot 16,45}{2} = 509,95 \text{ m}^2$$

- Área del triángulo ACD:

Para poder usar la fórmula de Herón necesitamos el lado $\overline{AC}$. Por el teorema del coseno:

$$\overline{AC}^2 = 19^2 + 62^2 - 2 \cdot 19 \cdot 62\ cos\ 60° = 3\,027 \ \rightarrow\ \overline{AC} = \sqrt{3\,027} = 55,02 \text{ m}$$

Ahora, aplicamos la fórmula de Herón:

$$p = \frac{21 + 45 + 55,02}{2} = 60,51$$

$$S_{ACD} = \sqrt{60,51\,(60,51 - 21)\,(60,51 - 45)\,(60,51 - 55,02)} = 451,19 \text{ m}^2$$

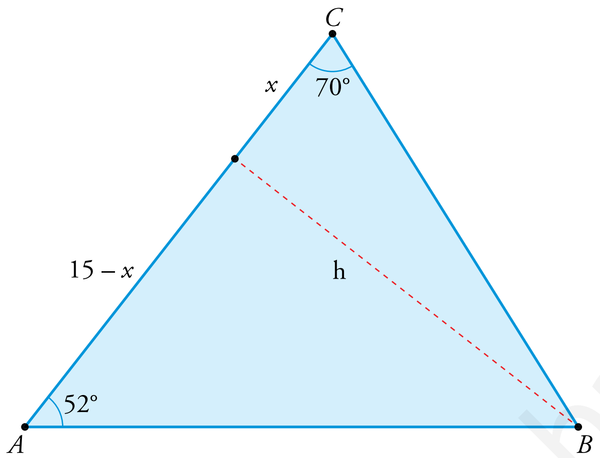
- El área del cuadrilátero es:

$$S_{ABCD} = 509,95 + 451,19 = 961,14 \text{ m}^2$$

Página 121

3. Cálculo de una distancia mediante la estrategia de la altura

Hazlo tú. **De un triángulo ABC conocemos $\overline{AC} = 15$ m, $\hat{A} = 52°$ y $\hat{C} = 70°$. Calcula la altura sobre AC.**



Llamamos h a la altura trazada sobre el lado $\overline{AC}$. Dividimos este lado en dos partes, que medirán x y $15 - x$.

$$\left.\begin{array}{l} tg\, 52° = \dfrac{h}{15 - x} \;\rightarrow\; h = (15 - x) \cdot tg\, 52° \\ tg\, 70° = \dfrac{h}{x} \;\rightarrow\; h = x \cdot tg\, 70° \end{array}\right\} \rightarrow (15 - x) \cdot tg\, 52° = x \cdot tg\, 70° \;\rightarrow\; x = 4{,}77 \text{ m}$$

Finalmente, $h = x \cdot tg\, 70° = 4{,}77 \cdot tg\, 70° = 13{,}11$ m.

4. Resolución de un triángulo conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Hazlo tú. **Resuelve el triángulo ABC en el que conocemos $a = 12$ cm, $b = 8{,}3$ cm y $\hat{A} = 110°$.**

Aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{12}{sen\, 110°} = \frac{8{,}3}{sen\, \hat{B}} \;\rightarrow\; sen\, \hat{B} = \frac{8{,}3 \cdot sen\, 110°}{12} = 0{,}65 \;\rightarrow\; \hat{B} \text{ puede ser } 40°\ 32'\ 30'' \text{ o bien } 139°\ 27'\ 30''$$

Este segundo valor no es posible porque la suma de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ sería superior a 180°.

Por tanto, $\hat{B} = 40°\ 32'\ 30''$.

$\hat{C} = 180° - (110° + 40°\ 32'\ 30'') = 29°\ 27'\ 30''$

Hallamos el lado c usando, de nuevo, el teorema de los senos:

$$\frac{12}{sen\, 110°} = \frac{c}{sen\, (29°\ 27'\ 30'')} \;\rightarrow\; c = \frac{12 \cdot sen\, (29°\ 27'\ 30'')}{sen\, 110°} = 6{,}28 \text{ cm}$$

Página 122

5. Cálculo de los ángulos de un triángulo cuando se conocen los tres lados

Hazlo tú. **Halla los ángulos del triángulo ABC en el que $a = 15$ cm, $b = 27$ cm y $c = 38$ cm.**

Usando el teorema del coseno, tenemos:

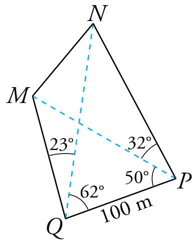
$$38^2 = 15^2 + 27^2 - 2 \cdot 15 \cdot 27 cos\, \hat{C} \;\rightarrow\; cos\, \hat{C} = \frac{490}{-810} \;\rightarrow\; \hat{C} = 127°\ 13'\ 28''$$

$$27^2 = 38^2 + 15^2 - 2 \cdot 38 \cdot 15 cos\, \hat{B} \;\rightarrow\; cos\, \hat{B} = \frac{-940}{-1140} \;\rightarrow\; \hat{B} = 34°\ 27'\ 21''$$

$$\hat{A} = 180° - (127°\ 13'\ 28'' + 34°\ 27'\ 21'') = 18°\ 19'\ 11''$$

6. Cálculo de la distancia entre dos puntos inaccesibles

Hazlo tú. Calcula la distancia $\overline{MN}$.



- Usando el triángulo PQM podemos calcular el lado $\overline{QM}$:

  El ángulo $\widehat{QMP} = 180° - 50° - 85° = 45°$

  $$\frac{\overline{QM}}{sen\,50°} = \frac{100}{sen\,45°} \to \overline{QM} = \frac{100 \cdot sen\,50°}{sen\,45°} = 108,34 \text{ m}$$

- Usando el triángulo PQN podemos calcular la diagonal $\overline{QN}$:

  El ángulo $\widehat{QNP} = 180° - 62° - 82° = 36°$

  $$\frac{\overline{QN}}{sen\,82°} = \frac{100}{sen\,36°} \to \overline{QN} = \frac{100 \cdot sen\,82°}{sen\,36°} = 168,47 \text{ m}$$

- Ahora usamos el teorema del coseno para hallar $\overline{MN}$:

  $\overline{MN}^2 = 108,34^2 + 168,47^2 - 2 \cdot 108,34 \cdot 168,47\ cos\ 23° = 6\,517,5$

  $\overline{MN} = \sqrt{6\,517,5} = 80,73$ m

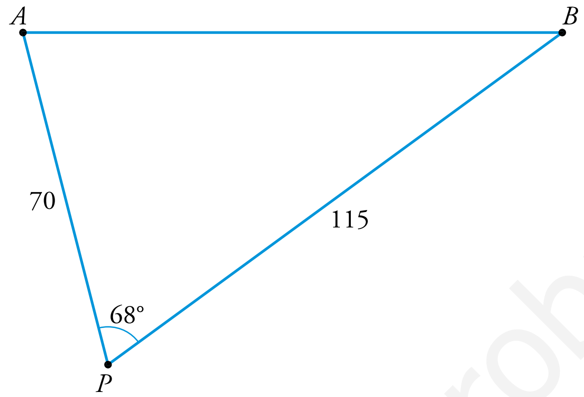
Ejercicios y problemas guiados

Página 123

1. Cálculo de los lados y los ángulos de un triángulo

Desde un punto P observamos los puntos A y B, situados en las orillas opuestas de una laguna, bajo un ángulo de 68°. Sabemos que $\overline{PA} = 70$ m y $\overline{PB} = 115$ m.

Calcular la distancia AB y los ángulos $\widehat{PAB}$ y $\widehat{PBA}$.



$$\overline{AB}^2 = 70^2 + 115^2 - 2 \cdot 70 \cdot 115 \cos 68° = 12\,093,8$$

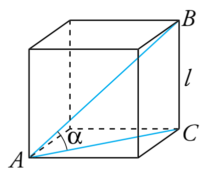
$$\overline{AB} = \sqrt{12\,093,8} = 110 \text{ m}$$

$$\frac{115}{sen\ \widehat{PAB}} = \frac{110}{sen\ 68°} \to sen\ \widehat{PAB} = \frac{115 \cdot sen\ 68°}{110} = 0,9693 \to \widehat{PAB} = 75°\ 46'\ 22''$$

$$\widehat{ABP} = 180° - 68° - 75°\ 46'\ 22'' = \ 36°\ 13'\ 38''$$

2. Ángulos en un cubo

Hallar el ángulo que forma la diagonal de la cara de un cubo con la diagonal del cubo.



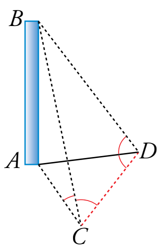
Por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = l^2 + l^2 \to \overline{AC}^2 = 2l^2 \to \overline{AC} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$

$$tg\ \alpha = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \alpha = 35°\ 15'\ 52''$$

3. Resolución de triángulos: altura de una torre

Para medir la altura de la torre AB, nos situamos en los puntos C y D y tomamos estas medidas:



$\overline{CD}$ = 15 m; $\widehat{ACB}$ = 40°

$\widehat{BCD}$ = 58°; $\widehat{BDC}$ = 70°

¿Qué altura tiene la torre?

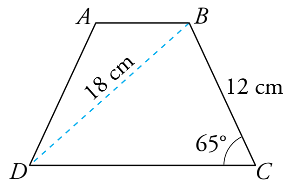
$$\hat{B} = 180° - 58° - 70° = 52°$$

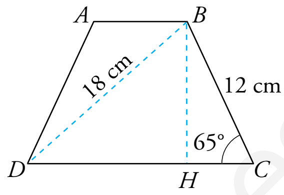
$$\frac{\overline{BC}}{sen\ 70°} = \frac{15}{sen\ 52°} \to \overline{BC} = \frac{15 \cdot sen\ 70°}{sen\ 52°} = 17,89 \text{ m}$$

$$sen\ 40° = \frac{\overline{AB}}{17,89} \to \overline{AB} = 17,89 \cdot sen\ 40° = 11,5 \text{ m}$$

4. Área y perímetro de un trapecio

Hallar el perímetro y el área de este trapecio isósceles:





$\overline{BH} = 12 \cdot sen\, 65° = 10,88$

$\overline{HC} = 12 \cdot cos\, 65° = 5,07$

Por el teorema de Pitágoras:

$\overline{DH}^2 = 18^2 - 10,88^2 = 205,63 \rightarrow \overline{DH} = \sqrt{205,63} = 14,34$

$\overline{DC} = 14,34 + 5,07 = 19,41$

$\overline{AB} = 19,41 - 2 \cdot 5,07 = 9,27$ ya que el trapecio es isósceles.

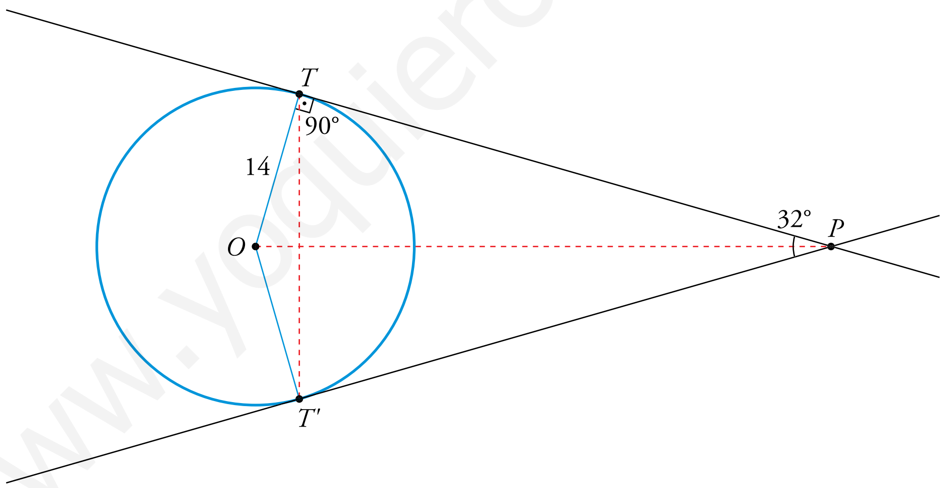
Finalmente, $S_{ABCD} = \dfrac{19,41 + 9,27}{2} \cdot 10,88 = 156,02 \text{ cm}^2$

5. Tangentes a una circunferencia: distancias

Las tangentes trazadas desde el punto P a una circunferencia de centro O y de 14 cm de radio forman un ángulo de 32°. Calcular:

a) La distancia de P al centro de la circunferencia.

b) La longitud de la cuerda que une los puntos de tangencia.



a) $sen\, 16° = \dfrac{14}{\overline{OP}} \rightarrow \overline{OP} = \dfrac{14}{sen\, 16°} = 50,79 \text{ cm}$

b) $\widehat{TOT'} = 360° - 32° - 2 \cdot 90° = 148°$

Aplicamos el teorema del coseno al triángulo OTT':

$\overline{TT'}^2 = 14^2 + 14^2 - 2 \cdot 14 \cdot 14 cos\, 148° = 724,43 \rightarrow TT' = \sqrt{724,43} = 26,9 \text{ cm}$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 124

Para practicar

Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas

1 **Utiliza las relaciones fundamentales para hallar las demás razones trigonométricas de los ángulos agudos α, β y γ.**

a) $\cos\alpha = \sqrt{5}/3$ **b)** $\operatorname{sen}\beta = 3/5$ **c)** $tg\,\gamma = 3$

a) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \to \operatorname{sen}^2\alpha + \frac{5}{9} = 1 \to \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{4}{9} \to \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{2}{3}$

• Si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3} \to tg\,\alpha = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ • Si $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{2}{3} \to tg\,\alpha = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{-2}{\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$

b) $\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 \to \frac{9}{25} + \cos^2\beta = 1 \to \cos^2\beta = \frac{16}{25} \to \cos\beta = \pm\frac{4}{5}$

• Si $\cos\beta = \frac{4}{5} \to tg\,\beta = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$ • Si $\cos\beta = -\frac{4}{5} \to tg\,\beta = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

c) $\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\cos\gamma} = 3 \to \operatorname{sen}\gamma = 3\cos\gamma$

$\operatorname{sen}^2\gamma + \cos^2\gamma = 1 \to (3\cos\gamma)^2 + \cos^2\gamma = 1 \to 10\cos^2\gamma = 1 \to \cos\gamma = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$

• Si $\cos\gamma = \frac{\sqrt{10}}{10} \to \operatorname{sen}\gamma = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ • Si $\cos\gamma = -\frac{\sqrt{10}}{10} \to \operatorname{sen}\gamma = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2 **Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala calculando las razones trigonométricas que faltan en cada caso:**

	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\,\alpha$
$0° < \alpha < 90°$	0,3		
$90° < \alpha < 180°$		–0,6	
$180° < \alpha < 270°$			2
$270° < \alpha < 360°$			$-\sqrt{5}$

• 1.ª fila:

Como el ángulo está en el primer cuadrante, su coseno es positivo.

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \to 0,09 + \cos^2\alpha = 1 \to \cos^2\alpha = 0,91 \to \cos\alpha = 0,954$

$tg\,\alpha = \frac{0,3}{0,954} = 0,314$

• 2.ª fila:

Como el ángulo está en el segundo cuadrante, su seno es positivo.

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \to \operatorname{sen}^2\alpha + 0,36 = 1 \to \operatorname{sen}^2\alpha = 0,64 \to \operatorname{sen}\alpha = 0,8$

$tg\,\alpha = \frac{0,8}{-0,6} = -\frac{4}{3}$

- 3.ª fila:

  Como el ángulo está en el tercer cuadrante, su seno y su coseno son negativos.

  $\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = 2 \rightarrow sen\,\alpha = 2cos\,\alpha$

  $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow 4cos^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow 5cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow cos^2\,\alpha = \frac{1}{5} \rightarrow cos\,\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

  $sen\,\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

- 4.ª fila:

  Como el ángulo está en el cuarto cuadrante, su seno es negativo y su coseno es positivo.

  $\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = -\sqrt{5} \rightarrow sen\,\alpha = -\sqrt{5}\,cos\,\alpha$

  $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow 5cos^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow 6cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow cos^2\,\alpha = \frac{1}{6} \rightarrow cos\,\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$

  $sen\,\alpha = -\sqrt{5}\frac{\sqrt{6}}{6} = -\frac{\sqrt{30}}{6}$

	sen α	***cos*** α	***tg*** α
0° < α < 90°	0,3	0,95	0,31
90° < α < 180°	0,8	–0,6	–4/3
180° < α < 270°	$-2\sqrt{5}/5$	$-\sqrt{5}/5$	2
270° < α < 360°	$-\sqrt{30}/6$	$\sqrt{6}/6$	$-\sqrt{5}$

3 **Halla, en cada caso, las razones trigonométricas de α:**

a) *sen* α = –2/3; *cos* α < 0

b) *cos* α = 5/6; *tg* α < 0

c) *tg* α = 2,25; *sen* α < 0

d) *cos* α = $-\sqrt{5}/4$; *sen* α < 0

a) Como $cos\,\alpha < 0$, $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow \frac{4}{9} + cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow cos^2\,\alpha = \frac{5}{9} \rightarrow cos\,\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$$tg\,\alpha = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

b) Como $tg\,\alpha < 0$, $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow sen^2\,\alpha + \frac{25}{36} = 1 \rightarrow sen^2\,\alpha = \frac{11}{36} \rightarrow sen\,\alpha = -\frac{\sqrt{11}}{6}$

$$tg\,\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{11}}{6}}{\frac{5}{6}} = -\frac{\sqrt{11}}{5}$$

c) $\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = 2,25 \rightarrow sen\,\alpha = 2,25\,cos\,\alpha$

$sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow (2,25cos\,\alpha)^2 + cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow 6,0625cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow cos\,\alpha = -\sqrt{\frac{1}{6,0625}} = -0,4061$ (tiene el mismo signo que $sen\,\alpha$ por ser $tg\,\alpha > 0$)

$sen\,\alpha = 2,25cos\,\alpha = 2,25 \cdot (-0,4061) = -0,9137$

d) Como $sen\,\alpha < 0$, $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow sen^2\,\alpha + \frac{5}{16} = 1 \rightarrow sen^2\,\alpha = \frac{11}{6} \rightarrow sen\,\alpha = -\frac{\sqrt{11}}{4}$

$$tg\,\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{11}}{4}}{-\frac{\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{55}}{5}$$

4 **Sabiendo que** $\cos\alpha = 0{,}8$ **y** $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}6$ **calcula:**

a) $\cos(180° + \alpha)$ **b)** $\operatorname{sen}(180° - \alpha)$ **c)** $\operatorname{tg}(-\alpha)$

d) $\operatorname{sen}(90° - \alpha)$ **e)** $\cos(90° + \alpha)$ **f)** $\operatorname{tg}(90° - \alpha)$

a) $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha = -0{,}8$

b) $\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha = 0{,}6$

c) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{0{,}6}{0{,}8} = -\dfrac{3}{4}$

d) $\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha = 0{,}8$

e) $\cos(90° + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha = -0{,}6$

f) $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{4}{3}$

5 **Si sabemos que** $\operatorname{sen} 42° = 0{,}67$, $\cos 42° = 0{,}74$ **y** $\operatorname{tg} 42° = 0{,}9$, **di el valor de las siguientes razones trigonométricas sin utilizar la calculadora:**

a) $\cos 48°$ **b)** $\operatorname{sen}(-48°)$ **c)** $\operatorname{sen} 138°$

d) $\operatorname{tg} 318°$ **e)** $\cos 222°$ **f)** $\operatorname{tg} 858°$

a) $\cos 48° = \cos(90° - 42°) = \operatorname{sen} 42° = 0{,}67$

b) $\operatorname{sen}(-48°) = -\operatorname{sen} 48° = -\operatorname{sen}(90° - 42°) = -\cos 42° = -0{,}74$

c) $\operatorname{sen} 138° = \operatorname{sen}(180° - 42°) = \operatorname{sen} 42° = 0{,}67$

d) $\operatorname{tg} 318° = \operatorname{tg}(360° - 42°) = \operatorname{tg}(-42°) = -\operatorname{tg} 42° = -0{,}9$

e) $\cos 222° = \cos(180° + 42°) = -\cos 42° = -0{,}74$

f) $\operatorname{tg} 858° = \operatorname{tg}(360° \cdot 2 + 138°) = \operatorname{tg} 138° = \operatorname{tg}(180° - 42°) = -\operatorname{tg} 42° = -0{,}9$

6 **Expresa con un ángulo del primer cuadrante las siguientes razones trigonométricas y di su valor exacto sin usar la calculadora:**

a) $\operatorname{sen} 135°$ **b)** $\cos 240°$ **c)** $\operatorname{tg} 120°$

d) $\cos 1\,845°$ **e)** $\operatorname{tg} 1\,125°$ **f)** $\operatorname{sen}(-120°)$

a) $\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen}(90° + 45°) = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$

d) $\cos 1\,845° = \cos(360° \cdot 5 + 45°) = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\operatorname{tg} 1\,125° = \operatorname{tg}(360° \cdot 3 + 45°) = \operatorname{tg} 45° = 1$

f) $\operatorname{sen}(-120°) = -\operatorname{sen} 120° = -\operatorname{sen}(180° - 60°) = -\operatorname{sen} 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7 **Halla con la calculadora el valor del ángulo** α**:**

a) $\operatorname{sen}\alpha = -0{,}75$; $\alpha < 270°$

b) $\cos\alpha = -0{,}37$; $\alpha > 180°$

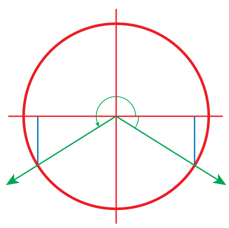
c) $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}38$; $\operatorname{sen}\alpha < 0$

d) $\cos\alpha = 0{,}23$; $\operatorname{sen}\alpha < 0$

a) Con la calculadora $\rightarrow$ $\alpha = -48°\,35'\,25'' \in$ 4.° cuadrante

Como debe ser $\left.\begin{matrix}\operatorname{sen}\alpha < 0\\ \alpha < 270°\end{matrix}\right\}$ $\rightarrow$ $\alpha \in$ 3.er cuadrante

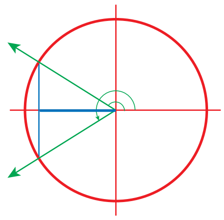
Luego $\alpha = 180° + 48°\,35'\,25'' = 228°\,35'\,25''$



b) Con la calculadora: 111° 42' 56,3''

$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha < 0 \\ \alpha > 180° \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante

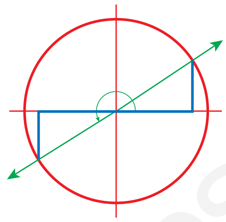
Luego α = 360° – 111° 42' 56,3' = 248° 17' 3,7''.



c) $\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = 1{,}38 > 0 \\ sen\ \alpha < 0 \end{array}\right\}\ cos < 0 \rightarrow \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante

Con la calculadora: tg^{-1} 1,38 = 54° 4' 17,39''

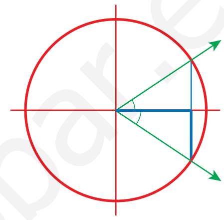
α = 180° + 54° 4' 17,39'' = 234° 4' 17,4''



d) $\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = 0{,}23 > 0 \\ sen\ \alpha < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in 4.°$ cuadrante

Con la calculadora: cos^{-1} 0,23 = 76° 42' 10,5''

α = –76° 42' 10,5'' = 283° 17' 49,6''



8 **a) Representa un ángulo α tal que $cos\ \alpha = -\frac{3}{8}$ y $sen\ \alpha < 0$. Halla $sen\ \alpha$ y $tg\ \alpha$.**

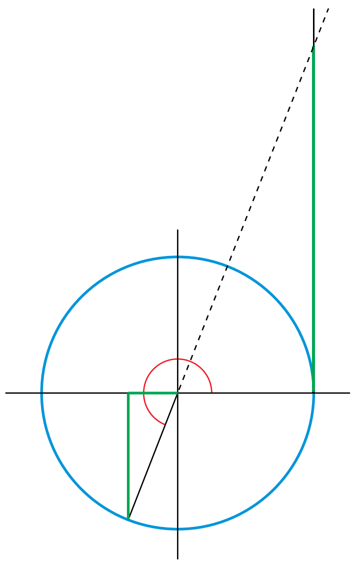
b) Di el valor de las razones siguientes:

$tg\ (180° - \alpha)$; $cos\ (90° - \alpha)$; $sen\ (180° + \alpha)$ $\quad$ $sen\ (-\alpha)$; $tg\ (90° + \alpha)$; $cos\ (360° - \alpha)$

a) $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha + \frac{9}{64} = 1 \rightarrow$

$\rightarrow sen^2\ \alpha = \frac{55}{64} \rightarrow sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{55}}{8}$

$$tg\ \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{55}}{8}}{-\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$



b) $tg\ (180° - \alpha) = -tg\ \alpha = -\frac{\sqrt{55}}{3}$ $\qquad$ $cos\ (90° - \alpha) = sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{55}}{8}$

$sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha = \frac{\sqrt{55}}{8}$ $\qquad$ $sen\ (-\alpha) = -sen\ \alpha = \frac{\sqrt{55}}{8}$

$tg\ (90° + \alpha) = \frac{-1}{tg\ \alpha} = -\frac{3}{\sqrt{55}} = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$ $\qquad$ $cos\ (360° - \alpha) = cos\ \alpha = -\frac{3}{8}$

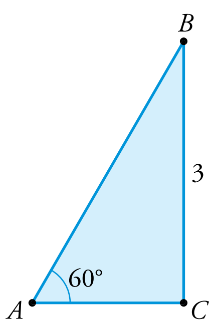
Resolución de triángulos rectángulos

9 **Para llegar a una altura de 3 m, apoyamos una escalera formando un ángulo de 60° con el suelo. Halla la longitud de la escalera y la distancia desde su base hasta la pared.**

El suelo, la escalera y la pared forman un triángulo rectángulo.

$sen\ 60° = \frac{3}{c} \rightarrow$ Longitud de la escalera = $c = \frac{3}{sen\ 60°} = \frac{3}{\sqrt{3}/2} = \frac{6}{\sqrt{3}}$ = 3,46 m

$tg\ 60° = \frac{3}{b} \rightarrow$ Distancia desde la base a la pared = $b = \frac{3}{tg\ 60°} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ = 1,73 m

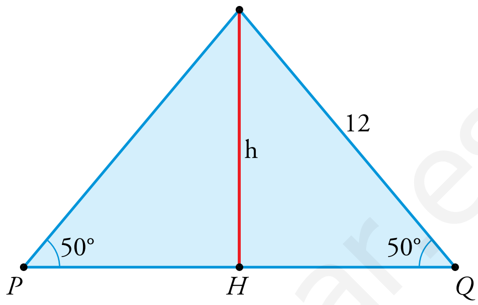


10 **Una persona que mide 1,78 m proyecta una sombra de 85 cm. ¿Qué ángulo forman los rayos del sol con la horizontal?**

El cociente entre la altura y la sombra es la tangente del ángulo α que forma el sol con la horizontal.

$$tg\ \alpha = \frac{1{,}78}{0{,}85} = 2{,}094 \rightarrow \alpha = 64°\ 28'\ 27''$$

11 **Un mástil está sujeto a tierra con dos cables de 12 m que forman ángulos de 50° con el suelo. Calcula la altura del mástil y la distancia de la base a los puntos de sujección.**

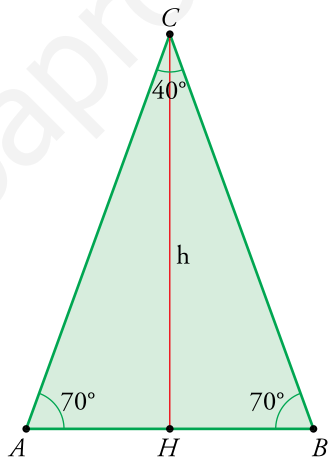


Altura del poste = h = 12 · *sen* 50° = 9,19 m

La distancia de la base al punto de sujección es:

$\overline{HQ}$ = 12 · *cos* 50° = 7,71 m

12 **En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 10 m y el ángulo opuesto es de 40°. Halla el perímetro y el área del triángulo.**



La medida de los ángulos iguales es $\dfrac{180° - 40°}{2} = 70°$.

$$tg\ 70° = \frac{h}{5} \rightarrow h = 5 \cdot tg\ 70° = 13{,}74 \text{ m}$$

$$S_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{10 \cdot 13{,}74}{2} = 68{,}7 \text{ m}^2$$

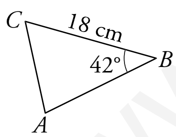
$$cos\ 70° = \frac{5}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = \frac{5}{cos\ 70°} = 14{,}62 \text{ m}$$

El perímetro del triángulo *ABC* es:

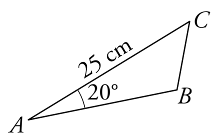
P = 2 · 14,62 + 10 = 39,24 m

13 **Calcula la altura trazada desde *C* en cada uno de los triángulos siguientes:**

a)



b)

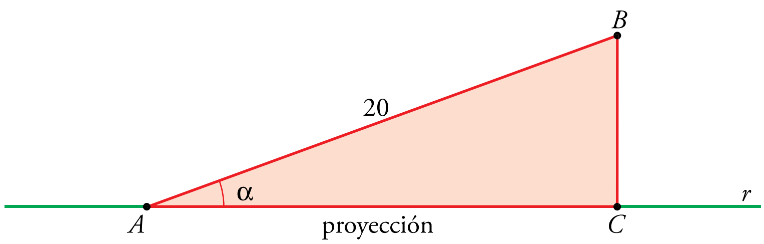


a) h = 18 · *sen* 42° = 12,04 cm

b) h = 25 · *sen* 20° = 8,55 cm

14 **Halla, en cada caso, la proyección de un segmento de 20 cm de longitud sobre una recta *r* con la que forma un ángulo α:**

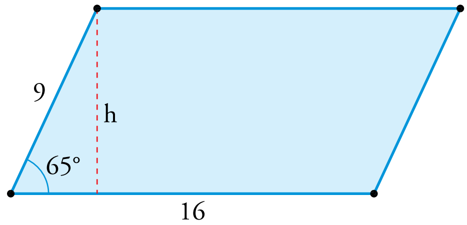
a) α **= 20°** **b)** α **= 45°** **c)** α **= 80°**



Podemos obtener la proyección usando el coseno del ángulo α.

a) $\overline{AC} = 20 \cdot cos\ 20° = 18{,}79$ cm b) $\overline{AC} = 20 \cdot cos\ 45° = 14{,}14$ cm c) $\overline{AC} = 20 \cdot cos\ 80° = 3{,}47$ cm

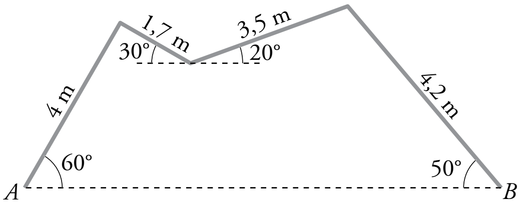
15 **Calcula el área de un paralelogramo cuyos lados, de 9 cm y 16 cm, forman un ángulo de 65°.**



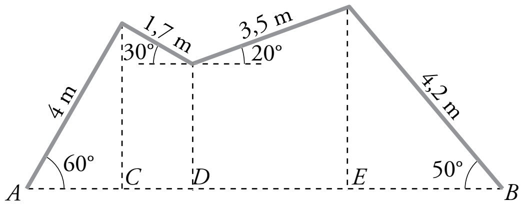
h = 9 · *sen* 65° = 8,16 cm

La superficie es $S = 16 \cdot 8{,}16 = 130{,}56 \text{ cm}^2$

16 **El tejado de una casa tiene la forma y las medidas que se indican en la figura. Calcula la distancia $\overline{AB}$.**



Trazamos perpendiculares del segmento $\overline{AB}$ que pasen por los tres vértices superiores. Esas rectas dividen al segmento $\overline{AB}$ en 4 partes. Las longitudes de estos segmentos, de izquierda a derecha son:



$\overline{AC} = 4 \cdot \cos 60° = 2 \text{ m}$

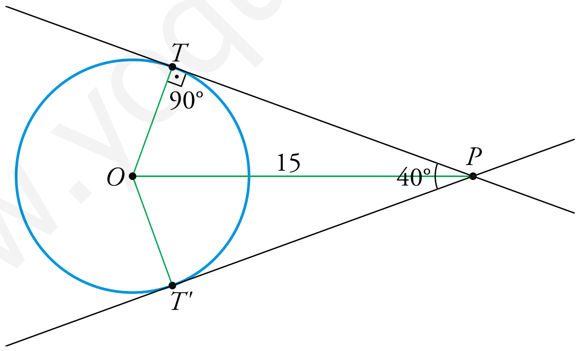
$\overline{CD} = 1{,}7 \cdot \cos 30° = 1{,}47 \text{ m}$

$\overline{DE} = 3{,}5 \cdot \cos 20° = 3{,}29 \text{ m}$

$\overline{EB} = 4{,}2 \cdot \cos 50° = 2{,}7 \text{ m}$

La longitud total es: $\overline{AB} = 2 + 1{,}47 + 3{,}29 + 2{,}7 = 9{,}46$ m

17 **Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan las tangentes que forman entre sí un ángulo de 40°. Si la distancia de P al centro de la circunferencia es de 15 cm, ¿cuál es su radio?**



El radio $\overline{OT}$ es el cateto opuesto al ángulo de $20° = \dfrac{40°}{2}$, luego $\overline{OT} = 15 \cdot sen\ 20° = 5{,}13$ cm.

18 **En un triángulo ABC, rectángulo en A, se conocen un cateto y la altura sobre la hipotenusa:**

$$\overline{AC} = 15 \text{ m} \qquad \overline{AD} = 12 \text{ m}$$

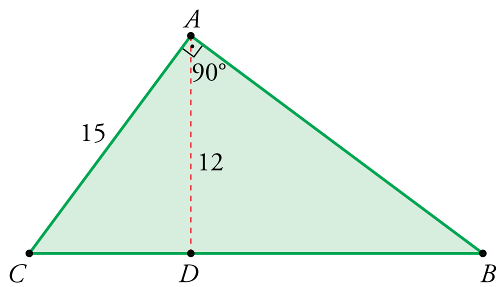
Halla los lados y los ángulos del triángulo.

$sen\ \hat{C} = \dfrac{12}{15} = 0{,}8 \rightarrow \hat{C} = 53°\ 7'\ 48''$

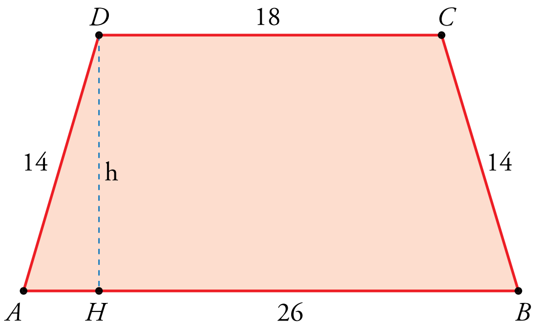
$\hat{B} = 90° - 53°\ 7'\ 48'' = 36°\ 52'\ 12''$

$sen\ \hat{B} = \dfrac{12}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = \dfrac{12}{sen\ \hat{B}} = 20 \text{ m}$

Por el teorema de Pitágoras, $\overline{BC} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ m}$.



19 **Las bases de un trapecio isósceles miden 18 cm y 26 cm, y los lados iguales, 14 cm. Calcula sus ángulos y su área.**



$\overline{AH} = \dfrac{26-18}{2} = 4$ cm por ser isósceles.

$cos\, \hat{A} = \dfrac{4}{14} = 0,2857 \rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 73°\ 23'\ 54''$

Como los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360°:

$$\hat{C} = \hat{D} = \frac{360° - 2 \cdot (73°\ 23'\ 54'')}{2} = 180° - 73°\ 23'\ 54'' = 106°\ 36'\ 6''$$

Para calcular la superficie necesitamos la altura: $h = 14 \cdot sen\, \hat{A} = 13,42$ cm

$$S_{ABCD} = \frac{26+18}{2} \cdot 13,42 = 295,24 \text{ cm}^2$$

Página 125

Resolución de triángulos cualesquiera

20 **Aplica el teorema de los senos para resolver el triángulo *ABC* en los siguientes casos:**

a) $\hat{A} = 55°,\ \hat{B} = 40°,\ c = 15$ **m**

b) $\hat{A} = 50°,\ a = 23$ **m,** $c = 18$ **m**

c) $\hat{A} = 35°,\ \hat{C} = 42°,\ b = 17$ **m**

d) $\hat{B} = 105°,\ b = 30$ **m,** $a = 18$ **m**

a) $\hat{C} = 180° - 55° - 40° = 85°;\ \dfrac{a}{sen\, 55°} = \dfrac{b}{sen\, 40°} = \dfrac{15}{sen\, 85°}$

$$a = \frac{15 \cdot sen\, 55°}{sen\, 85°} = 12,33 \text{ cm}; \qquad b = \frac{15 \cdot sen\, 40°}{sen\, 85°} = 9,68 \text{ cm}$$

b) $\dfrac{23}{sen\, 50°} = \dfrac{18}{sen\, \hat{C}} \rightarrow sen\, \hat{C} = \dfrac{18 \cdot sen\, 50°}{23} = 0,6 \rightarrow \hat{C} = 36°\ 52'\ 12''$

$$\hat{B} = 180° - 50° - 36°\ 52'\ 12'' = 93°\ 7'\ 48''$$

$$\frac{23}{sen\, 50°} = \frac{b}{sen\, \hat{B}} \rightarrow b = \frac{23 \cdot sen\, \hat{B}}{sen\, 50°} = 30 \text{ cm}$$

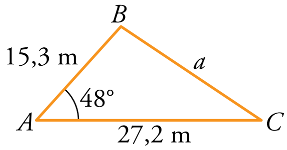
c) $\hat{B} = 180° - (35° + 42°) = 103°;\ \dfrac{b}{sen\, \hat{B}} = \dfrac{a}{sen\, \hat{A}} \rightarrow a = \dfrac{17 \cdot sen\, 35°}{sen\, 103°} = 10 \text{ m}$

$$\frac{b}{sen\, \hat{B}} = \frac{c}{sen\, \hat{C}} \rightarrow c = \frac{17 \cdot sen\, 42°}{sen\, 103°} \rightarrow c = 11,67 \text{ m}$$

d) $\dfrac{b}{sen\, \hat{B}} = \dfrac{a}{sen\, \hat{A}} \rightarrow sen\, \hat{A} = \dfrac{18 \cdot sen\, 105°}{30} \rightarrow \hat{A} = 35°\ 25'\ 9'';\ \hat{C} = 39°\ 34'\ 51''$

$$\frac{b}{sen\, \hat{B}} = \frac{c}{sen\, \hat{C}} \rightarrow c = \frac{30 \cdot sen\, 39°\ 34'\ 51''}{sen\, 105°} \rightarrow c = 19,79 \text{ m}$$

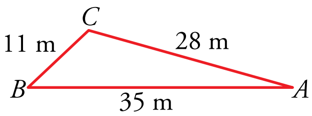
21 **Aplica el teorema del coseno para hallar el lado a del triángulo ABC, en el que $\hat{A} = 48°$, $b = 27{,}2$ m y $c = 15{,}3$ m.**



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

$a^2 = 27{,}2^2 + 15{,}3^2 - 2 \cdot 27{,}2 \cdot 15{,}3 \cos 48° \rightarrow a = 20{,}42$ m

22 **Halla los ángulos del triángulo ABC en el que $a = 11$ m, $b = 28$ m y $c = 35$ m.**



$11^2 = 28^2 + 35^2 - 2 \cdot 28 \cdot 35 \cos \hat{A} \rightarrow$

$\rightarrow \cos \hat{A} = \dfrac{28^2 + 35^2 - 11^2}{2 \cdot 28 \cdot 35} \rightarrow \hat{A} = 15°\ 34'\ 41''$

$28^2 = 11^2 + 35^2 - 2 \cdot 11 \cdot 35 \cos \hat{B} \rightarrow \cos \hat{B} = \dfrac{11^2 + 35^2 - 28^2}{2 \cdot 11 \cdot 35} \rightarrow \hat{B} = 43°\ 7'\ 28''$

$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) \rightarrow \hat{C} = 121°\ 17'\ 51''$

23 **Resuelve los siguientes triángulos:**

a) $b = 32$ **cm,** $a = 17$ **cm,** $\hat{C} = 40°$

b) $a = 85$ **cm,** $c = 57$ **cm,** $\hat{B} = 65°$

c) $a = 23$ **cm,** $b = 14$ **cm,** $c = 34$ **cm**

a) $c^2 = 32^2 + 17^2 - 2 \cdot 32 \cdot 17 \cos 40° \rightarrow c = 21{,}9$ cm

$17^2 = 32^2 + 21{,}9^2 - 2 \cdot 32 \cdot 21{,}9 \cos \hat{A} \rightarrow \hat{A} = 29°\ 56'\ 8''$

$\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) \rightarrow \hat{B} = 110°\ 3'\ 52''$

b) $b^2 = 85^2 + 57^2 - 2 \cdot 85 \cdot 57 \cos 65° \rightarrow b = 79{,}87$ cm

$57^2 = 85^2 + 79{,}87^2 - 2 \cdot 85 \cdot 79{,}87 \cos \hat{C} \rightarrow \hat{C} = 40°\ 18'\ 5''$

$\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) \rightarrow \hat{A} = 74°\ 41'\ 55''$

c) $23^2 = 14^2 + 34^2 - 2 \cdot 14 \cdot 34 \cos \hat{A} \rightarrow \hat{A} = 30°\ 10'\ 29''$

$14^2 = 23^2 + 34^2 - 2 \cdot 23 \cdot 34 \cos \hat{B} \rightarrow \hat{B} = 17°\ 48'\ 56''$

$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) \rightarrow \hat{C} = 133°\ 0'\ 35''$

24 **Resuelve los siguientes triángulos:**

a) $a = 100$ **m,** $\hat{B} = 47°$, $\hat{C} = 63°$

b) $b = 17$ **m,** $\hat{A} = 70°$, $\hat{C} = 35°$

c) $a = 70$ **m,** $b = 55$ **m,** $\hat{C} = 73°$

d) $a = 122$ **m,** $c = 200$ **m,** $\hat{B} = 120°$

e) $a = 25$ **m,** $b = 30$ **m,** $c = 40$ **m**

f) $a = 100$ **m,** $b = 185$ **m,** $c = 150$ **m**

g) $a = 15$ **m,** $b = 9$ **m,** $\hat{A} = 130°$

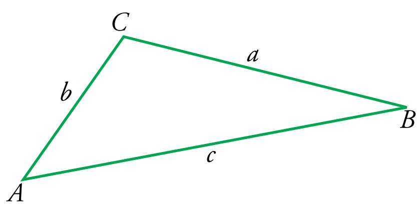
h) $b = 6$ **m,** $c = 8$ **m,** $\hat{C} = 57°$

a) • $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 70°$

• $\dfrac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \rightarrow \dfrac{100}{\operatorname{sen} 70°} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} 47°} \rightarrow$

$\rightarrow b = \dfrac{100 \cdot \operatorname{sen} 47°}{\operatorname{sen} 70°} = 77{,}83$ m

• $\dfrac{100}{\operatorname{sen} 70°} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} 63°} \rightarrow c = \dfrac{100 \cdot \operatorname{sen} 63°}{\operatorname{sen} 70°} = 94{,}82$ m



b) • $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 75°$

• $\dfrac{17}{sen\,75°} = \dfrac{a}{sen\,70°} \to a = \dfrac{17 \cdot sen\,70°}{sen\,75°} = 16{,}54$ m

• $\dfrac{17}{sen\,75°} = \dfrac{c}{sen\,35°} \to c = \dfrac{17 \cdot sen\,35°}{sen\,75°} = 10{,}09$ m

c) • $c^2 = 70^2 + 55^2 - 2 \cdot 70 \cdot 55 \cdot cos\,73° = 5\,673{,}74 \to c = 75{,}3$ m

• $70^2 = 55^2 + 75{,}3^2 - 2 \cdot 55 \cdot 75{,}3 \cdot cos\,\hat{A} \to$

$\to cos\,\hat{A} = \dfrac{55^2 + 75{,}3^2 - 70^2}{2 \cdot 55 \cdot 75{,}3} = 0{,}4582 \to \hat{A} = 62°\ 43'\ 49{,}4''$

• $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 44°\ 16'\ 10{,}6''$

d) • $b^2 = 122^2 + 200^2 - 2 \cdot 122 \cdot 200 cos\,120° = 79\,284 \to b = 281{,}6$ m

• $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\,\hat{A} \to cos\,\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \to$

$\to cos\,\hat{A} = \dfrac{281{,}6^2 + 200^2 - 12^2}{2 \cdot 281{,}6 \cdot 200} = 0{,}92698 \to \hat{A} = 22°\ 1'\ 54{,}45''$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 37°\ 58'\ 55{,}5''$

e) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\,\hat{A} \to$

$\to cos\,\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{30^2 + 40^2 - 25^2}{2 \cdot 30 \cdot 40} = 0{,}7812 \to \hat{A} = 38°\ 37'\ 29{,}4''$

• $cos\,\hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{25^2 + 40^2 - 30^2}{2 \cdot 25 \cdot 40} = 0{,}6625 \to \hat{B} = 48°\ 30'\ 33''$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 92°\ 51'\ 57{,}6''$

f) • $cos\,\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{185^2 + 150^2 - 100^2}{2 \cdot 185 \cdot 150} = 0{,}84189 \to \hat{A} = 32°\ 39'\ 34{,}4''$

• $cos\,\hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{100^2 + 150^2 - 185^2}{2 \cdot 100 \cdot 150} = -0{,}0575 \to \hat{B} = 93°\ 17'\ 46{,}7''$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 54°\ 2'\ 38{,}9''$

g) • $\dfrac{15}{sen\,130°} = \dfrac{9}{sen\,\hat{B}} \to sen\,\hat{B} = \dfrac{9 \cdot sen\,130°}{15} = 0{,}4596 \to$

$\to \begin{cases} \hat{B}_1 = 27°\ 21'\ 46{,}8'' \\ \hat{B}_2 = 152°\ 38'\ 13{,}2'' \to \text{No válida} \end{cases}$

La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180°$.

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 22°\ 38'\ 13{,}2''$

• $\dfrac{15}{sen\,130°} = \dfrac{c}{sen\,\widehat{C}} \to c = \dfrac{15 \cdot sen\,\widehat{C}}{sen\,130°} = 7{,}54$ m

h) • $\dfrac{8}{sen\,57°} = \dfrac{6}{sen\,\hat{B}} \to sen\,\hat{B} = \dfrac{6 \cdot sen\,57°}{8} = 0{,}6290 \to$

$\to \begin{cases} \hat{B}_1 = 38°\ 58'\ 35{,}7'' \\ \hat{B}_2 = 141°\ 1'\ 24{,}3'' \to \text{No válida} \end{cases}$

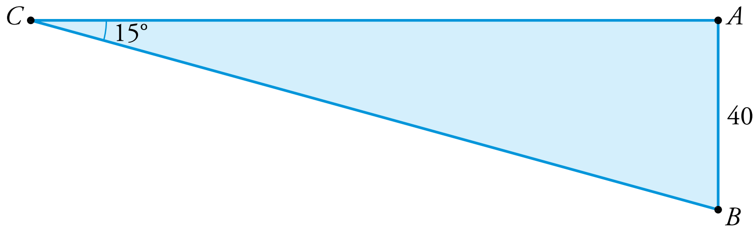
La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{C} + \hat{B}_2 > 180°$.

• $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 84°\ 1'\ 24{,}3''$

• $\dfrac{8}{sen\,57°} = \dfrac{a}{sen\,\widehat{A}} \to a = \dfrac{8 \cdot sen\,\widehat{A}}{sen\,57°} = 9{,}5$ m

Para resolver

25 **El radar de un barco detecta un objeto no identificado a 40 m de profundidad y en una dirección que forma 15° con la horizontal. ¿Qué distancia tiene que recorrer un buzo para llegar desde el barco hasta el objeto?**



El buzo tiene que recorrer la distancia $\overline{BC}$.

$$sen\ 15° = \frac{40}{\overline{BC}} \to \overline{BC} = \frac{40}{sen\ 15°} = 145{,}55 \text{ m}$$

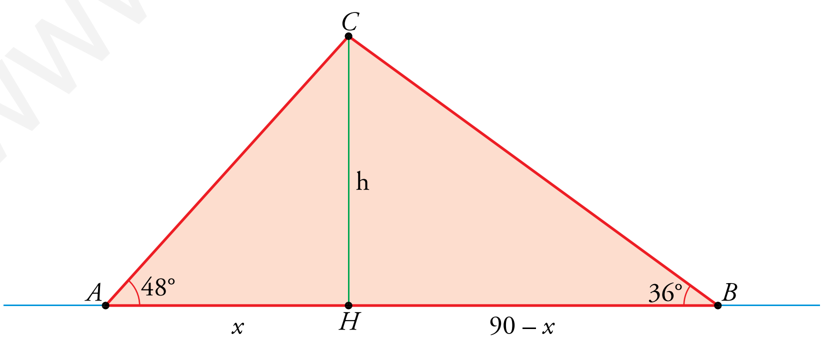
26 **Dos senderos rectos se cruzan formando un ángulo de 60°. En uno de ellos, a un kilómetro del cruce, hay una fuente. ¿Cuál es la distancia más corta que hay desde la fuente al otro sendero si vamos campo a través?**

La distancia más corta se da en la perpendicular desde la fuente al otro camino.

Podemos calcularla usando el seno del ángulo opuesto a la perpendicular.

$$\text{Distancia} = 1 \cdot sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866 \text{ km}$$

27 **Una antena de radio está sujeta al suelo con dos cables que forman con el suelo ángulos de 36° y 48°. Los puntos de sujección de los cables están alineados con el pie de la antena y distan entre sí 90 m. Calcula la altura de la antena.**



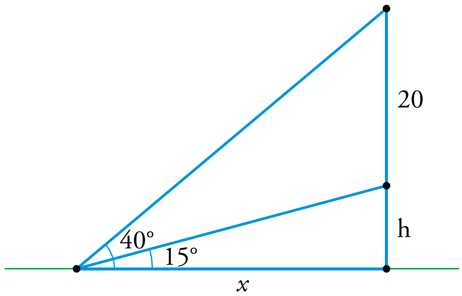
Llamemos x al segmento $\overline{AH}$. Entonces, el segmento $\overline{HB}$ será $90 - x$.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 48° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 36° = \dfrac{h}{90 - x} \end{array}\right\} \to x \cdot tg\ 48° = (90 - x) \cdot tg\ 36° \to 1{,}11x = 0{,}73(90 - x) \to$$

$$\to 1{,}84x = 65{,}7 \to x = \frac{65{,}7}{1{,}84} = 35{,}71$$

$$h = 35{,}71 \cdot tg\ 48° = 35{,}71 \cdot 1{,}11 = 39{,}64 \text{ m}$$

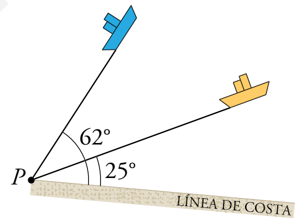
28 **Un faro de 20 m de altura está colocado sobre un promontorio. Un barco ve el pedestal bajo un ángulo de 15° y el faro, bajo un ángulo de 40°. Calcula la altura del promontorio.**



Llamamos h a la altura del promontorio y x a la distancia del barco a la base del pedestal.

$$\left.\begin{array}{l} tg\,15° = \dfrac{h}{x} \\ tg\,45° = \dfrac{20+h}{2} \end{array}\right\} \to \frac{h}{tg\,15°} = \frac{20+h}{tg\,45°} \to h \cdot tg\,45° = (20+h)\cdot tg\,15° \to h = \frac{20\,tg\,15°}{tg\,45° - tg\,15°} = 7{,}32 \text{ m}$$

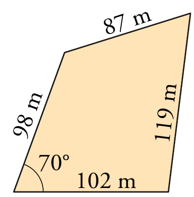
29 **Dos barcos salen simultáneamente de un punto P con rumbos de 62° y 25° respecto a la línea de costa. El primero lleva una velocidad de 7,5 nudos, y el otro, de 9 nudos. ¿Cuál será la distancia entre ellos al cabo de una hora de navegación?**



Después de una hora, los barcos han recorrido, respectivamente, 7,5 y 9 millas náuticas. La distancia que los separa es la longitud del tercer lado del triángulo cuyos vértices son los barcos y el punto P. Esta distancia, d, se puede hallar con el teorema del coseno.

$d^2 = 7{,}5^2 + 9^2 - 2 \cdot 7{,}5 \cdot 9 \cos 37° = 29{,}43 \to d = \sqrt{29{,}43} = 5{,}423$ millas náuticas

30 **Para hallar el área de una parcela irregular, hemos tomado las medidas indicadas en la figura. ¿Cuál es su área?**



La diagonal opuesta al ángulo de 70° divide al cuadrilátero en dos triángulos.

- Área del triángulo izquierdo:

  Su altura es $h = 98 \cdot sen\,70° = 92{,}09$ m $\to$ $\text{Área}_I = \dfrac{102 \cdot 92{,}09}{2} = 4\,696{,}6 \text{ m}^2$

- Área del triángulo derecho:

  La calcularemos usando la fórmula de Herón y, para ello, necesitamos la longitud, l, del tercer lado.

  $l^2 = 98^2 + 102^2 - 2 \cdot 98 \cdot 102 \cos 70° = 13\,170 \to l = \sqrt{13\,170} = 114{,}76$ m

  $s = \dfrac{87 + 119 + 114{,}76}{2} = 160{,}3$

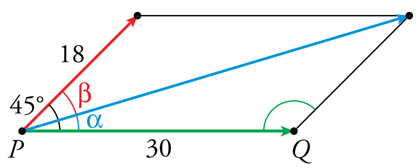
  $\text{Área}_D = \sqrt{160{,}3 \cdot (160{,}3 - 87) \cdot (160{,}3 - 119) \cdot (160{,}3 - 114{,}76)} = 4\,701 \text{ m}^2$

- El área del cuadrilátero es $4\,696{,}6 + 4\,701 = 9\,397{,}6$ m^2.

31 **Dos fuerzas de 18 N y 30 N actúan sobre un punto formando un ángulo de 45°. Calcula la intensidad de la resultante y el ángulo que forma con cada una de las fuerzas.**

$\hat{Q} = 180° - 45° = 135°$

Utilizando el teorema del coseno podemos hallar la longitud, l, de la resultante:



$l^2 = 18^2 + 30^2 - 2 \cdot 18 \cdot 30 \cos 135° = 1\,987{,}7 \to l = \sqrt{1\,987{,}7} = 44{,}58$ N

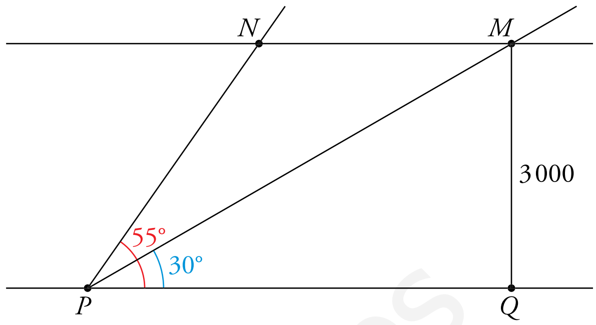
Ahora usamos el teorema de los senos:

$\dfrac{18}{sen\,\alpha} = \dfrac{44{,}58}{sen\,135°} \to sen\,\alpha = \dfrac{18 \cdot sen\,135°}{44{,}58} = 0{,}2855 \to \alpha = 16°\,35'\,19''$

$\beta = 45° - 16°\,35'\,19'' = 28°\,24'\,41''$

32 **Desde un punto P observamos un avión que se acerca bajo un ángulo de 30°. Quince segundos después, el ángulo es de 55°. Si el avión vuela a 3 000 m de altura, ¿cuál es su velocidad?**

Para hallar la velocidad del avión necesitamos calcular la longitud del segmento $\overline{NM}$:



$$sen\ 30° = \frac{3\,000}{\overline{PM}} \rightarrow \overline{PM} = \frac{3\,000}{sen\ 30°} = 6\,000$$

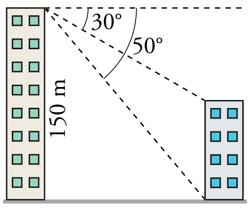
Por otro lado:

$\hat{N} = 360° - (55° + 2 \cdot 90°) = 125°$

Ahora usamos el teorema de los senos:

$$\frac{6\,000}{sen\,125°} = \frac{\overline{NM}}{sen\,25°} \rightarrow \overline{NM} = \frac{6\,000 \cdot sen\,25°}{sen\,125°} = 3\,095{,}53 \text{ m}$$

La velocidad del avión es $\dfrac{3\,095{,}53}{15} = 206{,}37$ m/s.

33 

Desde la terraza de un edificio de 150 m de altura medimos los ángulos que se indican en la figura. Calcula la altura del edificio más bajo y la anchura de la calle.

Representamos la anchura de la calle con la letra a. Usando el ángulo complementario de 50° tenemos que:

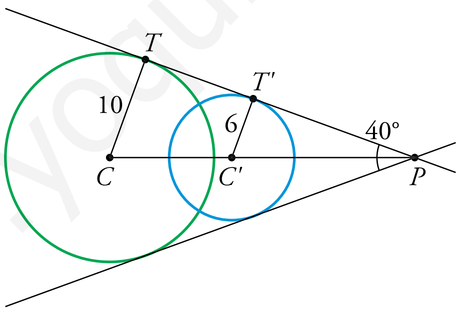
$$tg\ 40° = \frac{a}{150} \rightarrow a = 150 \cdot tg\ 40° = 125{,}86 \text{ m}$$

La diferencia, d, entre las alturas de las torres podemos obtenerla mediante el ángulo de 30°:

$$tg\ 30° = \frac{d}{125{,}86} \rightarrow d = 125{,}86 \cdot tg\ 30° = 72{,}67 \text{ m}$$

La altura del edificio más bajo es 150 – 72,67 = 77,33 m.

34 **Dos circunferencias secantes tienen radios de 6 cm y 10 cm. Sus tangentes comunes forman un ángulo de 40°. Calcula la distancia entre sus centros.**



Los triángulos PCT y $PC'T'$ son triángulos rectángulos con hipotenusas $\overline{PC}$ y $\overline{PC'}$, respectivamente.

$$sen\ 20° = \frac{6}{\overline{PC'}} \rightarrow \overline{PC'} = \frac{6}{sen\ 20°} = 17{,}54 \text{ cm}$$

$$sen\ 20° = \frac{10}{\overline{PC}} \rightarrow \overline{PC} = \frac{10}{sen\ 20°} = 29{,}24 \text{ cm}$$

$\overline{CC'} = 29{,}24 - 17{,}54 = 11{,}7$ cm

35 **En una circunferencia de 12 cm de radio trazamos una cuerda de 20 cm de longitud. ¿Cuál es el ángulo correspondiente a esa cuerda?**

Los radios trazados desde los extremos de la cuerda y esta, forman un triángulo isósceles. El ángulo pedido es el opuesto a la cuerda (lado desigual) y podemos hallarlo usando el teorema del coseno.

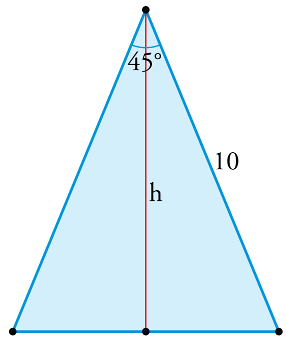
$$20^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 cos\ \alpha \rightarrow 400 = 144 + 144 - 288 cos\ \alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow 112 = -288 \cdot cos\ \alpha \rightarrow cos\ \alpha = -\frac{112}{288} = -0{,}3889 \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha = 112°\ 53'\ 10''$$

36 Calcula el área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.

El octógono está formado por 8 triángulos isósceles como el del dibujo.



El ángulo desigual de cada uno de ellos es de $\frac{360°}{8} = 45°$.

$h = 10 \cdot \cos 22{,}5° = 9{,}24$ cm

Por otro lado, la longitud de la mitad de la base del triángulo es:

$10 \cdot \operatorname{sen} 22{,}5° = 3{,}83$ cm

Luego el área del triángulo es:

$$A = \frac{2 \cdot 3{,}83 \cdot 9{,}24}{2} = 35{,}39 \text{ cm}^2$$

El área del octógono es 8 veces el área del triángulo, es decir, $8 \cdot 35{,}39 = 283{,}12$ cm^2.

37 Calcula el área de un hexágono regular circunscrito a una circunferencia de 15 cm de radio.

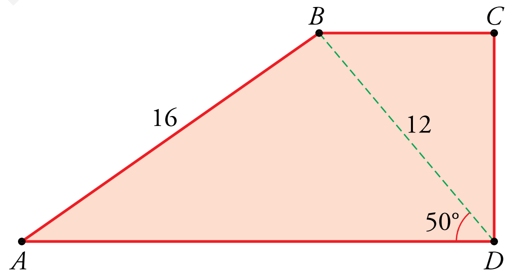
Este problema se resuelve de forma análoga al anterior. En este caso, el triángulo formado por los radios de la circunferencia y el lado del hexágono es equilátero, porque el ángulo central mide 60°. El lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita.

La altura, h, (que coincide con la apotema del hexágono) se obtiene así:

$h = 15 \cdot \cos 30° = 13$ cm

$$S_{\text{HEXÁGONO}} = \frac{6 \cdot 15 \cdot 13}{2} = 585 \text{ cm}^2$$

38 De un trapecio rectángulo conocemos el lado oblicuo, que mide 16 cm, la diagonal menor, 12 cm, y el ángulo que esta forma con la base mayor, 50°. Calcula el área y el perímetro del trapecio.



Utilizando el ángulo complementario de 50° tenemos:

$$\operatorname{sen} 40° = \frac{\overline{BC}}{12} \to \overline{BC} = 12 \cdot \operatorname{sen} 40° = 7{,}71 \text{ cm}$$

$$\cos 40° = \frac{\overline{CD}}{12} \to \overline{CD} = 12 \cdot \cos 40° = 9{,}19 \text{ cm}$$

Por otro lado, por el teorema de los senos:

$$\frac{12}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{16}{\operatorname{sen} 50°} \to \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{12 \cdot \operatorname{sen} 50°}{16} = 0{,}5745 \to \hat{A} = 35°\ 3'\ 53''$$

$$\widehat{ABD} = 180° - (50° + 35°\ 3'\ 53'') = 94°\ 56'\ 7''$$

$$\frac{\overline{AD}}{\operatorname{sen} \widehat{ABD}} = \frac{16}{\operatorname{sen} 50°} \to \overline{AD} = \frac{16 \cdot \operatorname{sen} \widehat{ABD}}{\operatorname{sen} 50°} = 20{,}81 \text{ cm}$$

Para terminar:

$$S_{ABCD} = \frac{20{,}81 + 7{,}71}{2} \cdot 9{,}19 = 131{,}05 \text{ cm}^2$$

Perímetro $= 20{,}81 + 9{,}19 + 7{,}71 + 16 = 43{,}71$ cm

39 En un rectángulo *ABCD* de lados 8 cm y 12 cm, se traza desde *B* una perpendicular a la diagonal *AC*, y desde *D*, otra perpendicular a la misma diagonal. Sean *M* y *N* los puntos donde esas perpendiculares cortan a la diagonal. Halla la longitud del segmento *MN*.

Los triángulos *AND* y *BMC* son iguales, luego $\overline{AN} = \overline{MC}$.

Como $\overline{MN} = \overline{AC} - \overline{AN} - \overline{MC}$, entonces $\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC}$.

Por tanto, basta con calcular $\overline{AC}$ en el triángulo *ABC* y $\overline{MC}$ en el triángulo *BMC*.

- En ABC:

  $\overline{AC}^2 = 8^2 + 12^2 = 208$ (por el teorema de Pitágoras) $\rightarrow$ $\overline{AC} = 14,4$ cm

  Calculamos $\hat{C}$ (en ABC):

  $tg\ \hat{C} = \frac{12}{8} = 1,5 \rightarrow \hat{C} = 56°\ 18'\ 35,8''$

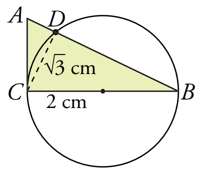
- En BMC:

  $cos\ \hat{C} = \frac{\overline{MC}}{8} \rightarrow \overline{MC} = 8 \cdot cos\ (56°\ 18'\ 35,8'') = 4,4$ cm

  Por último: $\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC} = 14,4 - 2 \cdot 4,4 = 5,6$ cm

Página 126

40 El triángulo ABC es rectángulo en C. Sabemos que el radio de la circunferencia mide 2 cm y $\overline{CD} = \sqrt{3}$ cm. Calcula $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$.



El triángulo CDB es rectángulo en D. Por tanto:

$\overline{DB}^2 = 4^2 - \sqrt{3}^2 \rightarrow \overline{DB} = \sqrt{13}$ cm $= 3,61$ cm

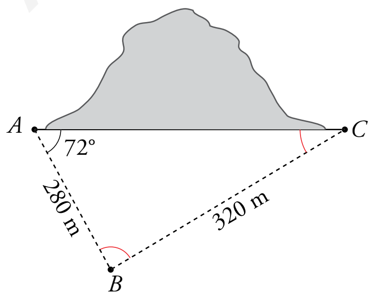
$cos\ \hat{C} = \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \hat{C} = 64°\ 20'\ 28''$

$\widehat{ACD} = 90° - \hat{C} = 25°\ 39'\ 32''$

El triángulo ADC es también rectángulo en D, y conocemos el ángulo $\hat{C}$ y el cateto CD:

$tg\ \widehat{ACD} = \frac{\overline{AD}}{\sqrt{3}} \rightarrow \overline{AD} = \sqrt{3}\ tg\ 25°\ 39'\ 32'' = 0,83$ cm

41 Para construir un túnel entre A y C necesitamos saber su longitud y dirección. Para ello, fijamos un punto B y tomamos las medidas indicadas en la figura. Calcula $\overline{AC}$ y los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$.



Usamos el teorema de los senos:

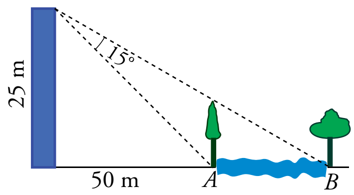
$\frac{320}{sen\ 72°} = \frac{280}{sen\ \hat{C}} \rightarrow sen\ \hat{C} = \frac{280 \cdot sen\ 72°}{320} = 0,8322 \rightarrow \hat{C} = 56°\ 19'\ 31''$

$\hat{B} = 180° - (72° + 56°\ 19'\ 31'') = 51°\ 40'\ 29''$

Aplicando de nuevo el teorema de los senos:

$\frac{320}{sen\ 72°} = \frac{AC}{sen\ \hat{B}} \rightarrow \overline{AC} = \frac{320 \cdot sen\ \hat{B}}{sen\ 72°} = 263,96$ m

42 **Desde una torre de vigilancia de 25 m, observamos dos árboles situados en orillas opuestas de un río bajo un ángulo de 15°. Los dos árboles están alineados con el pie de la torre y la distancia de esta al río es de 50 m. Calcula la anchura del río.**



Llamamos $\hat{C}$ al ángulo complementario de $\hat{A}$.

$tg\ \hat{C} = \dfrac{50}{25} = 2 \rightarrow \hat{C} = 63°\ 26'\ 6''$

Por tanto, respecto de la torre de vigilancia, se ve el árbol cuya base están en B con un ángulo de $15° + 63°\ 26'\ 6'' = 78°\ 26'\ 6''$.

$tg\ (78°\ 26'\ 6'') = \dfrac{50 + \overline{AB}}{25} \rightarrow \overline{AB} = 72{,}17$ m

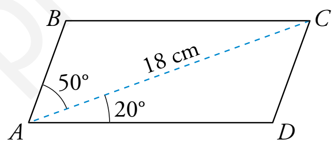
43 **En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?**

Si llamamos α al ángulo pedido, por el teorema de coseno tenemos que:

$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 cos\ \alpha \rightarrow 49 = 25 + 64 - 80 cos\ \alpha \rightarrow$

$\rightarrow 80 cos\ \alpha = 40 \rightarrow cos\ \alpha = \dfrac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60°$

44 **Calcula, en este paralelogramo *ABCD*, el área, las longitudes de los lados y la longitud de la otra diagonal:**



$\hat{D} = 180° - 70° = 110°$

$\dfrac{18}{sen\ \hat{D}} = \dfrac{\overline{AD}}{sen\ 50°} \rightarrow \overline{AD} = \dfrac{18 \cdot sen\ 50°}{sen\ 110°} = 14{,}67$ cm

La altura, h, del paralelogramo es:

$h = 18 \cdot sen\ 20° = 6{,}16$ cm

$S_{ABCD} = 14{,}67 \cdot 6{,}16 = 90{,}37\ cm^2$

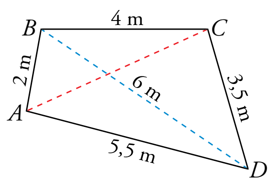
Para hallar la longitud de la otra diagonal calculamos primero $\overline{AB} = \overline{CD}$:

$\dfrac{\overline{CD}}{sen\ 20°} = \dfrac{18}{sen\ 110°} \rightarrow \overline{CD} = \dfrac{18 \cdot sen\ 20°}{sen\ 110°} = 6{,}55$ cm

Aplicamos el teorema del coseno al triángulo BAD:

$\overline{BD}^2 = 6{,}55^2 + 14{,}67^2 - 2 \cdot 6{,}55 \cdot 14{,}67 cos\ 70° = 192{,}38 \rightarrow \overline{BD} = 13{,}87$ cm

45 **En un cuadrilátero *ABCD* conocemos las medidas de los lados y de la diagonal *BD*. Calcula las medidas del ángulo $\hat{B}$ y de la diagonal *AC*.**



Aplicamos el teorema del coseno a los triángulos ABD y CBD.

$5{,}5^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 cos\ \widehat{ABD} \rightarrow 24 cos\ \widehat{ABD} = 9{,}75 \rightarrow \widehat{ABD} = 66°\ 1'\ 50''$

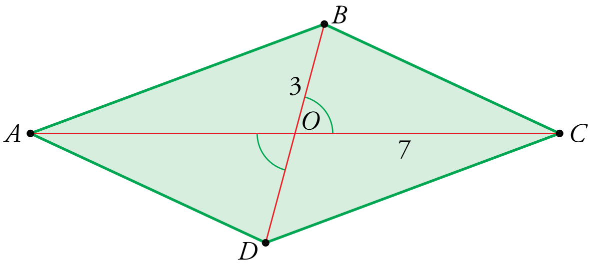
$3{,}5^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 cos\ \widehat{CBD} \rightarrow 48 cos\ \widehat{CBD} = 39{,}75 \rightarrow \widehat{CBD} = 34°\ 5'\ 36''$

$\hat{B} = 66°\ 1'\ 50'' + 34°\ 5'\ 36'' = 100°\ 7'\ 26''$

Ahora aplicamos de nuevo el teorema del coseno al triángulo ABC:

$\overline{AC}^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 cos\ (100°\ 7'\ 26'') = 22{,}81 \rightarrow \overline{AC} = 4{,}78$ cm

46 **Las diagonales de un paralelogramo miden 6 cm y 14 cm y forman un ángulo de 75°. Halla los lados y los ángulos del paralelogramo.**



Como las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio, los segmentos $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ miden, respectivamente, la mitad de la medida de las correspondientes diagonales.

Aplicamos el teorema del coseno:

$\overline{BC}^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos 75° = 47{,}13 \rightarrow \overline{BC} = \overline{AD} = 6{,}87$ cm

$\widehat{AOB} = 180° - 75° = 105°$

$\overline{AB}^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos 105° = 68{,}87 \rightarrow \overline{AB} = \overline{DC} = 8{,}3$ cm

Para calcular un ángulo, por ejemplo el ángulo $\hat{B}$, aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{7}{sen\, \widehat{OBC}} = \frac{6{,}87}{sen\, 75°} \rightarrow sen\, \widehat{OBC} = \frac{7 \cdot sen\, 75°}{6{,}87} = 0{,}9842 \rightarrow \widehat{OBC} = 79°\ 48'\ 5''$$

$$\frac{7}{sen\, \widehat{ABO}} = \frac{8{,}3}{sen\, 105°} \rightarrow sen\, \widehat{ABO} = \frac{7 \cdot sen\, 105°}{8{,}3} = 0{,}8146 \rightarrow \widehat{ABO} = 54°\ 33'\ 5''$$

$\hat{B} = \hat{D} = 79°\ 48'\ 5'' + 54°\ 33'\ 5'' = 134°\ 21'\ 10''$

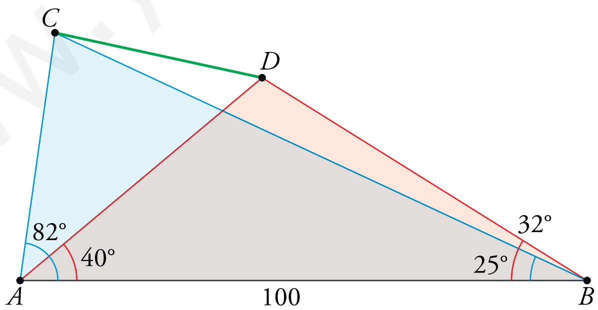
$\hat{A} = \hat{C} = 180° - 134°\ 21'\ 10'' = 45°\ 38'\ 50''$

47 **Dos árboles *C* y *D* se encuentran en la orilla opuesta de un río. Desde dos puntos *A* y *B*, situados en la orilla donde nos encontramos, tomamos las siguientes medidas:**

$\overline{AB} = 100$ m **$\widehat{CAB} = 82°$** **$\widehat{DAB} = 40°$**

$\widehat{DBA} = 32°$ **$\widehat{CBA} = 25°$**

Calcula la distancia que separa a los dos árboles.



Para calcular la distancia $\overline{CD}$ hallaremos primero $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$. De esta manera obtendremos el resultado aplicándole el teorema del coseno al triángulo *CAD*.

$\widehat{ACB} = 180° - (82° + 25°) = 73°$

$$\frac{100}{sen\, 73°} = \frac{\overline{AC}}{sen\, 25°} \rightarrow \overline{AC} = \frac{100 \cdot sen\, 25°}{sen\, 73°} = 44{,}19 \text{ m}$$

$\widehat{ADB} = 180° - (40° + 32°) = 108°$

$$\frac{100}{sen\, 108°} = \frac{\overline{AD}}{sen\, 32°} \rightarrow \overline{AD} = \frac{100 \cdot sen\, 32°}{sen\, 108°} = 55{,}72 \text{ m}$$

$\overline{CD}^2 = 44{,}19^2 + 55{,}72^2 - 2 \cdot 44{,}19 \cdot 55{,}72 \cos 42° = 1\,397{,}7 \rightarrow \overline{CD} = 37{,}39$ m

48 **Resuelve estos triángulos, teniendo en cuenta que puede que no exista solución, que la solución sea única o que existan dos soluciones:**

a) $a = 3$ **m;** $b = 8$ **m;** $\hat{A} = 25°$

b) $a = 12,6$ **m;** $b = 26,4$ **m;** $\hat{B} = 124°\ 34'$

c) $a = 82,6$ **m;** $b = 115$ **m;** $\hat{A} = 28°\ 4'$

a) $\dfrac{3}{sen\ 25°} = \dfrac{8}{sen\ \hat{B}} \to sen\ \hat{B} = \dfrac{8 \cdot sen\ 25°}{3} = 1{,}127 \to$ No tiene solución porque el seno de un ángulo siempre está comprendido entre –1 y 1.

b) $\dfrac{12,6}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{26,4}{sen\,(124°\,34')} \to sen\ \hat{A} = \dfrac{12,6 \cdot sen\,(124°\,34')}{26,4} = 0,393 \to \begin{cases} \hat{A} = 23°\ 8'\ 29'' \\ \hat{A} = 156°\ 51'\ 31'' \end{cases}$

El segundo resultado no es válido porque $\hat{A} + \hat{B}$ sería mayor que 180° y esto es imposible. En este caso, la solución es única.

$\hat{C} = 180° - (23°\ 8'\ 29'' + 124°\ 34') = 32°\ 17'\ 31''$

Ahora, con el teorema del coseno:

$c^2 = 12{,}6^2 + 26{,}4^2 - 2 \cdot 12{,}6 \cdot 26{,}4 cos\ (32°\ 17'\ 31'') = 293{,}33 \to c = 17{,}13$ m

c) $\dfrac{82,6}{sen\,(28°\,4')} = \dfrac{115}{sen\ \hat{B}} \to sen\ \hat{B} = \dfrac{115 \cdot sen\,(28°\,4')}{82,6} = 0,655 \to \begin{cases} \hat{B} = 40°\ 55'\ 11'' \\ \hat{B} = 139°\ 4'\ 49'' \end{cases}$

En este caso, tenemos dos soluciones posibles:

- Si $\hat{B} = 40°\ 55'\ 11''$:

  $\hat{C} = 180° - (28°\ 4' + 40°\ 55'\ 11'') = 111°\ 0'\ 49''$

  $c^2 = 82{,}6^2 + 115^2 - 2 \cdot 82{,}6 \cdot 115 cos\ (111°\ 0'\ 49'') = 26\,860 \to c = 163{,}89$ m

- Si $\hat{B} = 139°\ 4'\ 49''$

  $\hat{C} = 180° - (28°\ 4' + 139°\ 4'\ 49'') = 12°\ 51'\ 11''$

  $c^2 = 82{,}6^2 + 115^2 - 2 \cdot 82{,}6 \cdot 115 cos\ (12°\ 51'\ 11'') = 1\,525{,}8 \to c = 39{,}06$ m

Cuestiones teóricas

49 **Si** $sen\ \alpha = m$ **y** α **es un ángulo obtuso, expresa en función de** m**:**

a) $cos\ \alpha$ **b)** $tg\ \alpha$ **c)** $cos\ (180° - \alpha)$ **d)** $tg\ (-\alpha)$

a) $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to m^2 + cos^2\ \alpha = 1 \to cos^2\ \alpha = 1 - m^2 \to cos\ \alpha = -\sqrt{1-m^2}$ ya que el coseno de un ángulo obtuso es negativo.

b) $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$

c) $cos\ (180° - \alpha) = -cos\ \alpha = \sqrt{1-m^2}$

d) $tg\ (-\alpha) = -tg\ \alpha = \dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$

50 **Demuestra que en un triángulo** ABC, **rectángulo en** A, **se verifica:**

a) $\dfrac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} = cos^2\ \hat{C} - sen^2\ \hat{C}$ **b)** $sen\ \hat{B} - cos\ \hat{C} = 0$ **c)** $tg\ \hat{B} \cdot tg\ \hat{C} = 1$

a) Como a es la hipotenusa del rectángulo, $a^2 = b^2 + c^2$.

$$\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} = \frac{b^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 - \left(\frac{a}{c}\right)^2 = cos^2\ \hat{C} + sen^2\ \hat{C}$$

b) $sen\ \hat{B} - cos\ \hat{C} = \dfrac{b}{a} - \dfrac{b}{a} = 0$

c) $tg\ \hat{B} \cdot tg\ \hat{C} = \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{c}{b} = 1$

51 **¿Existe algún valor de $\alpha \neq 0$ que verifique $2\, sen\, \alpha = tg\, \alpha$? Justifícalo.**

Si $\alpha = 180°$ se cumple la igualdad, ya que el seno y la tangente de 180° valen 0.

Si $\alpha \neq 0$ y también $\alpha \neq 180°$, entonces:

$$sen\,\alpha \neq 0 \text{ y } 2sen\,\alpha = tg\,\alpha \;\to\; 2sen\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} \;\to$$

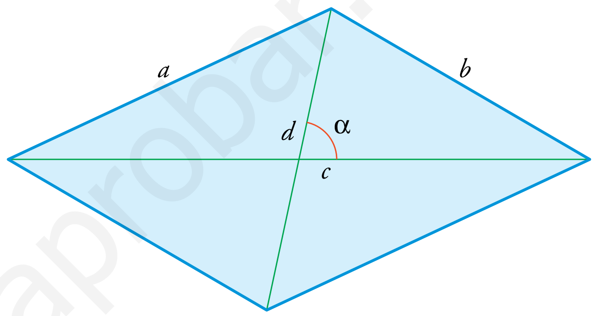
$$\to\; 2 = \frac{1}{cos\,\alpha} \;\to\; cos\,\alpha = \frac{1}{2} \;\to\; \alpha = \begin{cases} 60° \\ 300° \end{cases}$$

52 **Prueba que en cualquier paralelogramo de lados *a* y *b* y diagonales *c* y *d*, se verifica:**

$$c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$$

* ***Aplica el teorema del coseno en dos triángulos que tengan un vértice en el centro del paralelogramo.***

Utilizamos el hecho de que las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio y el teorema del coseno.

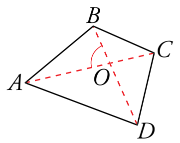


$$\left.\begin{array}{l} b^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{d}{2}\,cos\,\alpha \\ a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{d}{2}\,cos\,(180° - \alpha) \end{array}\right\} \to$$

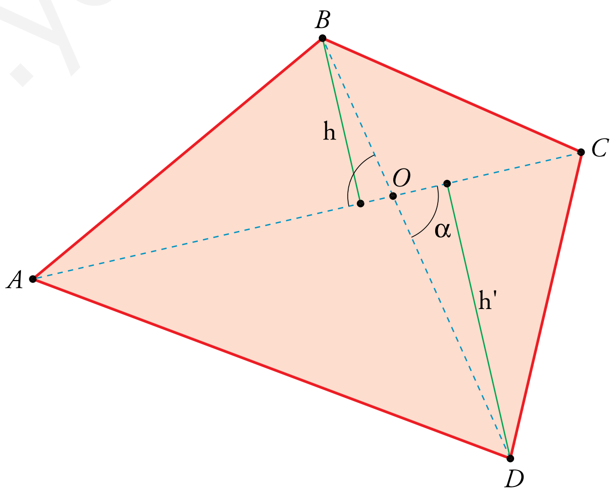
$$\to \begin{cases} b^2 = \dfrac{c^2}{4} + \dfrac{d^2}{4} - \dfrac{cd}{2}\,cos\,\alpha \\ a^2 = \dfrac{c^2}{4} + \dfrac{d^2}{4} - \dfrac{cd}{2}\,(-cos\,\alpha) \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro ambas ecuaciones, obtenemos que $b^2 + a^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2}$, de donde se obtiene la relación $c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$.

53 **Demuestra que el área de cualquier cuadrilátero es igual a la mitad del producto de sus diagonales por el seno del ángulo que forman.**



* ***Ten en cuenta que:*** $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}$

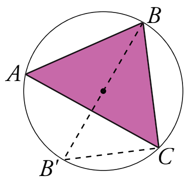


Descomponemos el área del cuadrilátero como la suma de las áreas de los triángulos *ABC* y *CDA*. Ambos tienen en común la base *AC*.

$h = \overline{OB}\cdot sen\,\alpha$

$h' = \overline{OD}\cdot sen\,\alpha$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{\overline{AC}\cdot h}{2} + \frac{\overline{AC}\cdot h'}{2} = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{OB}\cdot sen\,\alpha}{2} + \frac{\overline{AC}\cdot\overline{OD}\cdot sen\,\alpha}{2} = \frac{1}{2}\overline{AC}\,(\overline{OB} + \overline{OD})\cdot sen\,\alpha = \frac{1}{2}$$

54 

Demuestra que en un triángulo cualquiera ABC se verifica la siguiente igualdad:

$$\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} = 2R$$

R **es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.**

* ***Traza el diámetro de la circunferencia desde uno de los vértices. Aplica el teorema de los senos en los triángulos ABC y $BB'C$.***

Las dos primeras igualdades forman el enunciado del teorema de los senos.

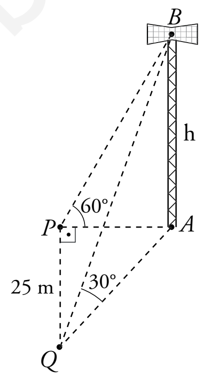
Por otra parte, los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}'$ son iguales porque abarcan el mismo arco BC. Por tanto, aplicando el teorema de los senos al triángulo $BB'C$ (ya que $\hat{C} = 90°$ porque abarca un arco de 180°):

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{a}{sen\ \widehat{B}'} = \frac{\overline{BB'}}{sen\ \widehat{C}} = \frac{2R}{1} = 2R$$

Página 127

Para profundizar

55 Para medir la altura de una antena, cuyo pie es inaccesible, nos situamos en un punto P al oeste de la antena y la observamos bajo un ángulo de 60°. Caminamos unos 25 metros hacia el sur y desde Q el ángulo de observación es de 30°. Halla la altura de la antena.



* ***Expresa PA y QA en función de h.***

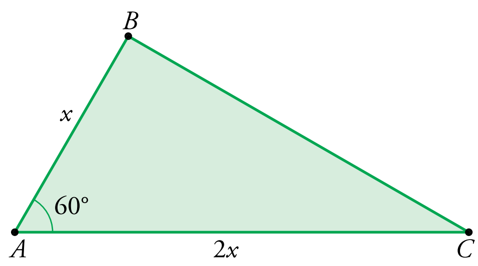
$$tg\ 30° = \frac{h}{\overline{QA}} \rightarrow \overline{QA} = \frac{h}{tg\ 30°} = h\sqrt{3}$$

$$tg\ 60° = \frac{h}{\overline{PA}} \rightarrow \overline{PA} = \frac{h}{tg\ 60°} = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

Aplicamos ahora el teorema de Pitágoras al triángulo APQ:

$$\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 + 25^2 = (h\sqrt{3})^2 \rightarrow \frac{h^2}{3} + 625 = 3h^2 \rightarrow \frac{8}{3}h^2 = 625 \rightarrow h = \frac{25}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 15{,}31 \text{ m}$$

56 Uno de los lados de un triángulo mide el doble que otro, y el ángulo comprendido entre ellos mide 60°. Halla los otros ángulos.



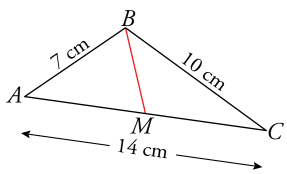
$$\overline{BC}^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x\cos 60° = x^2 + 4x^2 - 4x^2 \cdot \frac{1}{2} = 3x^2$$

$$\overline{BC} = x\sqrt{3}$$

$$\frac{x\sqrt{3}}{sen\ 60°} = \frac{x}{sen\ \widehat{C}} \rightarrow sen\ \hat{C} = \frac{x\sqrt{3}/2}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \rightarrow \hat{C} = 30°$$

$$\hat{B} = 180° - (60° + 30°) = 90°$$

57 En un triángulo ABC de lados $a = 10$ cm, $b = 14$ cm y $c = 7$ cm, halla la longitud de la mediana que parte de B.



Usamos el teorema del coseno para hallar el coseno del ángulo $\hat{A}$.

$$10^2 = 7^2 + 14^2 - 2 \cdot 7 \cdot 14\cos\hat{A} \rightarrow 196\cos\hat{A} = 145 \rightarrow \cos\hat{A} = \frac{145}{196}$$

Aplicamos ahora el teorema del coseno al triángulo ABM teniendo en cuenta que $\overline{AM} = 7$ por la definición de mediana.

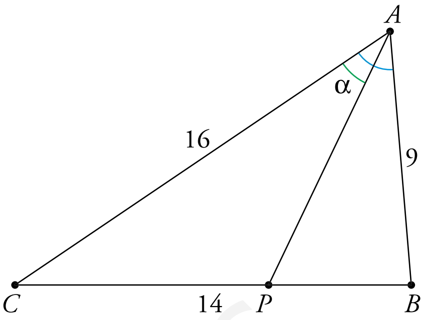
$$\overline{BM}^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7\cos\hat{A} = 98 - 98 \cdot \frac{145}{196} = \frac{51}{2} = 25{,}5 \rightarrow \overline{BM} = \sqrt{25{,}5} = 5{,}05 \text{ cm}$$

58 **De un triángulo ABC conocemos los tres lados, a = 14 cm, b = 16 cm y c = 9 cm. Halla la longitud de la bisectriz del ángulo $\hat{A}$.**

Calculamos primero el ángulo α:

$14^2 = 16^2 + 9^2 - 2 \cdot 16 \cdot 9 cos\, \hat{A} \to 288 cos\, \hat{A} = 141 \to \hat{A} = 60° \, 41' \, 12''$

$\alpha = \dfrac{\widehat{A}}{2} = 30° \, 20' \, 36''$



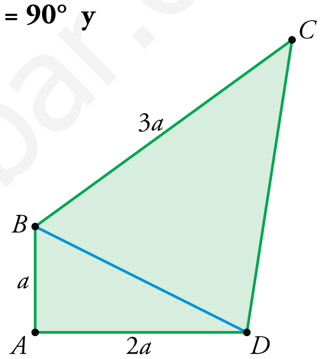
Calculamos el ángulo $\hat{C}$:

$9^2 = 16^2 + 14^2 - 2 \cdot 16 \cdot 14 cos\, \hat{C} \to 448 cos\, \hat{C} = 371 \to \hat{C} = 34° \, 5' \, 36''$

Ahora, $\widehat{APC} = 180° - (30° \, 20' \, 36'' + 34° \, 5' \, 36'') = 115° \, 33' \, 48''$

$$\frac{16}{sen\, \widehat{APC}} = \frac{\overline{AP}}{sen\, \widehat{C}} \to \overline{AP} = \frac{16 \cdot sen\, \widehat{C}}{sen\, \widehat{APC}} = 9{,}94 \text{ cm}$$

59 **En el cuadrilátero $ABCD$ sabemos que $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = 2a$, $\overline{BC} = 3a$, $\widehat{BAD} = 90°$ y $cos\, \widehat{DBC} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Calcula $\overline{DC}$ en función de a.**



Por el teorema de Pitágoras:

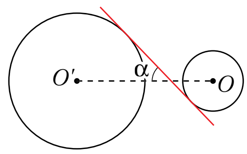
$\overline{BD} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$

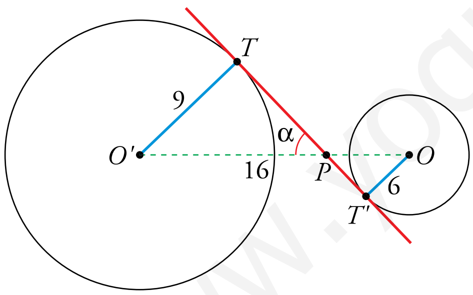
Ahora aplicamos el teorema del coseno:

$$\overline{DC}^2 = (3a)^2 + (a\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 3a \cdot a\sqrt{5}\, cos\, \widehat{DBC} =$$

$$= 9a^2 + 5a^2 - a^2 \cdot 6\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 8a^2 \to \overline{DC} = 2a\sqrt{2}$$

60 **Halla el ángulo que forma la tangente a estas circunferencias con la recta que une sus centros. Los radios miden 4 cm y 9 cm, y la distancia entre sus centros es de 16 cm.**





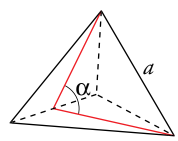
Los triángulos $OT'P$ y $O'TP$ son triángulos rectángulos.

$sen\, \alpha = \dfrac{9}{\overline{O'P}} \to \overline{O'P} = \dfrac{9}{sen\, \alpha}$

$sen\, \alpha = \dfrac{6}{\overline{OP}} \to \overline{OP} = \dfrac{6}{sen\, \alpha}$

$$16 = \overline{O'O} = \overline{O'P} + \overline{PO} = \frac{9}{sen\, \alpha} + \frac{6}{sen\, \alpha} \to 16 sen\, \alpha = 15 \to sen\, \alpha = \frac{15}{16} \to \alpha = 69° \, 38' \, 9''$$

61 **Halla el ángulo α que forman dos caras contiguas de un tetraedro regular de arista a.**

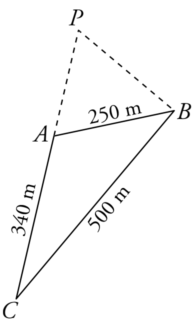


Como cada cara es un triángulo equilátero de lado a, la longitud de los segmentos dibujados es $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (altura del triángulo equilátero de lado a).

Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2a\frac{\sqrt{3}}{2} a\frac{\sqrt{3}}{2} cos\, \alpha \to a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{2}a^2 cos\, \alpha \to$$

$$\to \frac{3}{2} cos\, \alpha = \frac{1}{2} \to cos\, \alpha = \frac{1}{3} \to \alpha = 70° \, 31' \, 44''$$

62 

Queremos calcular la distancia desde A y B a un punto inaccesible P. Para ello, fijamos un punto C de modo que $\widehat{PBC} = 90°$ y tomamos las medidas indicadas en la figura. Calcula $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$.

Calculamos los ángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{CAB}$.

$340^2 = 250^2 + 500^2 - 2 \cdot 250 \cdot 500 \cos \widehat{ABC} \rightarrow 250\,000 \cos \widehat{ABC} = 196\,900 \rightarrow$

$\rightarrow \widehat{ABC} = 38°\ 2'\ 18''$

$500^2 = 250^2 + 340^2 - 2 \cdot 250 \cdot 340 \cos \widehat{CAB} \rightarrow 170\,000 \cos \widehat{CAB} = -71\,900 \rightarrow \widehat{CAB} = 115°\ 1'\ 14''$

$\widehat{PAB} = 180° - 115°\ 1'\ 14'' = 64°\ 58'\ 46''$

$\widehat{PBA} = 90° - 38°\ 2'\ 18'' = 51°\ 57'\ 42''$

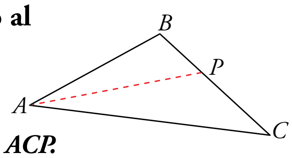
$\hat{P} = 180° - (64°\ 58'\ 46'' + 51°\ 57'\ 42'') = 63°\ 3'\ 32''$

Ahora aplicamos el teorema de los senos para calcular las distancias:

$$\frac{\overline{PA}}{sen\,\widehat{PBA}} = \frac{250}{sen\,\hat{P}} \rightarrow \overline{PA} = 220,87 \text{ m}$$

$$\frac{\overline{PB}}{sen\,\widehat{PAB}} = \frac{250}{sen\,\hat{P}} \rightarrow \overline{PB} = 254,12 \text{ m}$$

63 Demuestra que la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto al ángulo en segmentos proporcionales a los otros lados.



* ***Debes probar que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PC}}$. Aplica el teorema de los senos en los triángulos ABP y ACP.***

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\overline{AP}}{sen\,\hat{B}} = \dfrac{\overline{BP}}{sen\,\dfrac{\hat{A}}{2}} \rightarrow \overline{AP} \cdot sen\,\dfrac{\hat{A}}{2} = \overline{BP} \cdot sen\,\hat{B} \\ \dfrac{\overline{AP}}{sen\,\hat{C}} = \dfrac{\overline{PC}}{sen\,\dfrac{\hat{A}}{2}} \rightarrow \overline{AP} \cdot sen\,\dfrac{\hat{A}}{2} = \overline{PC} \cdot sen\,\hat{C} \end{array}\right\} \rightarrow \overline{BP} \cdot sen\,\hat{B} = \overline{PC} \cdot sen\,\hat{C}$$

Por otro lado:

$$\frac{\overline{AB}}{sen\,\hat{C}} = \frac{\overline{AC}}{sen\,\hat{B}} \rightarrow sen\,\hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot sen\,\hat{C}$$

Sustituyendo $sen\,\hat{B}$ en la primera relación, se obtiene:

$$\overline{BP} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot sen\,\hat{C} = \overline{PC} \cdot sen\,\hat{C} \rightarrow \overline{BP} \cdot \overline{AC} = \overline{PC} \cdot \overline{AB} \rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$$

Autoevaluación

Página 127

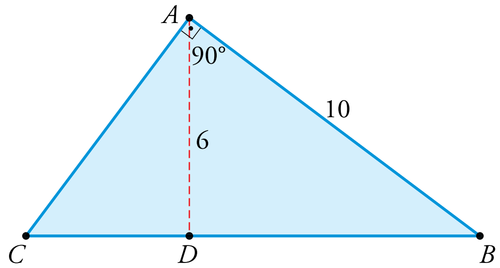
1 En un triángulo isósceles los lados iguales miden 7 cm y los ángulos iguales 52°. Halla la altura y el lado desigual.

Si representamos con la letra h a la altura sobre el lado desigual, b:

$$sen\ 52° = \frac{h}{7} \rightarrow h = 7 \cdot sen\ 52° = 5,52 \text{ cm}$$

$$cos\ 52° = \frac{b/2}{7} \rightarrow b = 14 \cdot cos\ 52° = 8,62 \text{ cm}$$

2 **En un triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, conocemos el cateto c = 10 cm y la altura relativa a la hipotenusa, h = 6 cm. Halla los lados y los ángulos desconocidos.**



$sen\ \hat{B} = \frac{6}{10} \rightarrow \hat{B} = 36°\ 52'\ 12''$

$\hat{C} = 90° - 36°\ 52'\ 12'' = 53°\ 7'\ 48''$

$sen\ \hat{C} = \frac{6}{b} \rightarrow b = 7{,}5$ cm

$a = \sqrt{7{,}5^2 + 10^2} = 12{,}5$ cm

3 **Expresa a través de las razones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos: 154°, 207°, 318°, 2 456°.**

$sen\ 154° = sen\ (180° - 154°) = sen\ 26°$

$cos\ 154° = -cos\ 26°$

$tg\ 154° = -tg\ 26°$

$sen\ 207° = sen\ (180° + 27°) = -sen\ 27°$

$cos\ 207° = -cos\ 27°$

$tg\ 207° = tg\ 27°$

$sen\ 318° = sen\ (360° - 42°) = -sen\ 42°$

$cos\ 318° = cos\ 42°$

$tg\ 318° = -tg\ 42°$

$sen\ 2\,456° = sen\ (360° \cdot 6 + 296°) = sen\ 296° = sen\ (360° - 64°) = -sen\ 64°$

$cos\ 2\,456° = cos\ 64°$

$tg\ 2\,456° = -tg\ 64°$

4 **Si $sen\ \alpha = \frac{4}{5}$ y $\alpha > 90°$, calcula sin hallar el ángulo α:**

a) $cos\ \alpha$ **b)** $tg\ \alpha$ **c)** $sen\ (180° + \alpha)$

d) $cos\ (90° + \alpha)$ **e)** $tg\ (180° - \alpha)$ **f)** $sen\ (90° + \alpha)$

a) $cos^2\ \alpha = 1 - sen^2\ \alpha \rightarrow cos^2\ \alpha = 1 - \frac{16}{25} \rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{9}{25} \rightarrow cos\ \alpha = \pm\frac{3}{5} \rightarrow cos\ \alpha = -\frac{3}{5}$

b) $tg\ \alpha = \frac{4/5}{-3/5} = -\frac{4}{3}$

c) $sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha = -\frac{4}{5}$

d) $cos\ (90° + \alpha) = -sen\ \alpha = -\frac{4}{5}$

e) $tg\ (180° - \alpha) = -tg\ \alpha = \frac{4}{3}$

f) $sen\ (90° + \alpha) = cos\ \alpha = -\frac{3}{5}$

5 **Si $tg\ \alpha = -3{,}5$, halla α con ayuda de la calculadora, exprésalo como un ángulo del intervalo [0, 180°) y obtén su seno y su coseno.**

$\alpha = 105°\ 56'\ 43''$

$sen\ \alpha = 0{,}9615$

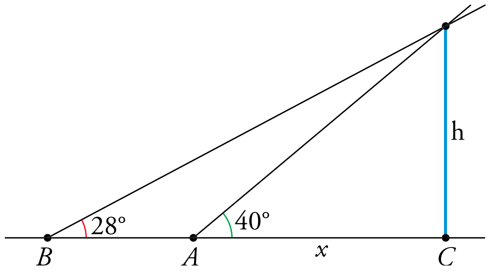
$cos\ \alpha = -0{,}2747$

6 **Desde un punto del suelo medimos el ángulo bajo el que se ve un edificio y obtenemos 40°. Nos alejamos 30 m y el ángulo es ahora de 28°. Calcula la altura del edificio y la distancia desde la que se hizo la primera observación.**

$$\left.\begin{array}{l} h = x \cdot tg\ 40° \\ h = (x+30) \cdot tg\ 28° \end{array}\right\} \to x \cdot tg\ 40° = (x+30) \cdot tg\ 28° \to$$

$$\to x = \frac{30 \cdot tg\ 28°}{tg\ 40° - tg\ 28°} = 51{,}89 \text{ m}$$

$h = 51{,}89 \cdot tg\ 40° = 43{,}54$ m

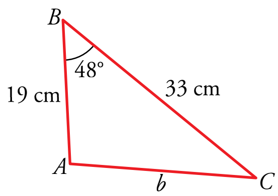


7 **Resuelve el triángulo** ABC **y halla su área en estos casos:**

a) $c = 19$ **cm,** $a = 33$ **cm,** $\hat{B} = 48°$

b) $a = 15$ **cm,** $b = 11$ **cm,** $\hat{B} = 30°$

a)



- Con el teorema del coseno, hallamos b:

  $b^2 = 19^2 + 33^2 - 2 \cdot 19 \cdot 33\ cos\ 48° = 610{,}9 \to$

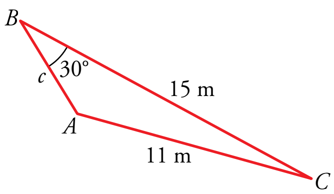
  $\to b = 24{,}72$ cm

- Del mismo modo, hallamos $\hat{A}$:

  $33^2 = 19^2 + 24{,}72^2 - 2 \cdot 19 \cdot 24{,}72\ cos\ \hat{A} \to cos\ \hat{A} = -0{,}1245 \to \hat{A} = 97°\ 9'$

- $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 34°\ 51'$

b)



- Hallamos $\hat{A}$ con el teorema de los senos:

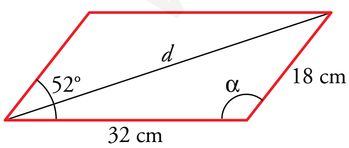
  $$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} \to \frac{15}{sen\ \hat{A}} = \frac{11}{sen\ 30°} \to sen\ \hat{A} = 0{,}6818$$

- Hay dos soluciones:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = 42°\ 59'\ 9'' \\ \hat{C}_1 = 107°\ 0'\ 51'' \end{array}\right\} \to \frac{11}{sen\ 30°} = \frac{c_1}{sen\ 107°\ 0'\ 51''} \to c_1 = 21{,}04 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_2 = 137°\ 0'\ 51'' \\ \hat{C}_2 = 12°\ 59'\ 9'' \end{array}\right\} \to \frac{11}{sen\ 30°} = \frac{c_2}{sen\ 12°\ 59'\ 9''} \to c_2 = 4{,}94 \text{ cm}$$

8 **Los lados de un paralelogramo miden 18 cm y 32 cm y forman un ángulo de 52°. Halla la longitud de la diagonal mayor.**



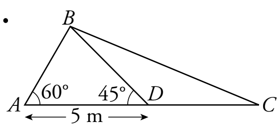
$\alpha = 180° - 52° = 128°$

Calculamos d aplicando el teorema del coseno:

$d^2 = 18^2 + 32^2 - 2 \cdot 18 \cdot 32\ cos\ 128° = 2\,057{,}24$

$d = 45{,}36$ cm es la medida de la diagonal.

9 **De esta figura, sabemos que** $\overline{BD} = \overline{DC}$**,** $\hat{A} = 60°$**,** $\widehat{ADB} = 45°$ **y** $\overline{AD} = 5$ **m. Calcula** $\overline{BC}$**.**



$\widehat{ABD} = 180° - (60° + 45°) = 75°$

$$\frac{5}{sen\ 75°} = \frac{\overline{BD}}{sen\ 60°} \to \overline{BD} = \frac{5 \cdot sen\ 60°}{sen\ 75°} = 4{,}48 \text{ m}$$

$\widehat{BDC} = 180° - 45° = 135°$

$\overline{BC}^{\,2} = 4{,}48^2 + 4{,}48^2 - 2 \cdot 4{,}48 \cdot 4{,}48 cos\ 135° = 68{,}525 \to \overline{BC} = 8{,}28$ m

1 Fórmulas trigonométricas

Página 131

1 Demuestra la fórmula II.2 a partir de la fórmula:

$$\boldsymbol{cos}\ (\alpha + \beta) = \boldsymbol{cos}\ \alpha\ \boldsymbol{cos}\ \beta - \boldsymbol{sen}\ \alpha\ \boldsymbol{sen}\ \beta$$

$$cos\ (\alpha - \beta) = cos\ (\alpha + (-\beta)) = cos\ \alpha\ cos\ (-\beta) - sen\ \alpha\ sen\ (-\beta) =$$
$$= cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ (-sen\ \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta$$

2 Demuestra II.3 a partir de $\boldsymbol{tg}\ (\alpha + \beta) = \dfrac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta}$.

$$tg\ (\alpha - \beta) = tg\ (\alpha + (-\beta)) = \frac{tg\ \alpha + tg\ (-\beta)}{1 - tg\ \alpha\ tg\ (-\beta)} \overset{(*)}{=} \frac{tg\ \alpha + (-tg\ \beta)}{1 - tg\ \alpha\ (-tg\ \beta)} = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha\ tg\ \beta}$$

(*) Como $\left.\begin{array}{l} sen\ (-\alpha) = -sen\ \alpha \\ cos\ (-\alpha) = cos\ \alpha \end{array}\right\} \rightarrow tg\ (-\alpha) = -tg\ \alpha$

3 Demuestra la fórmula II.3 a partir de las siguientes:

$$\boldsymbol{sen}\ (\alpha - \beta) = \boldsymbol{sen}\ \alpha\ \boldsymbol{cos}\ \beta - \boldsymbol{cos}\ \alpha\ \boldsymbol{sen}\ \beta$$
$$\boldsymbol{cos}\ (\alpha - \beta) = \boldsymbol{cos}\ \alpha\ \boldsymbol{cos}\ \beta + \boldsymbol{sen}\ \alpha\ \boldsymbol{sen}\ \beta$$

$$tg\ (\alpha - \beta) = \frac{sen\ (\alpha - \beta)}{cos\ (\alpha - \beta)} = \frac{sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta} \overset{(*)}{=} \frac{\dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta} - \dfrac{cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}}{\dfrac{cos\ \alpha\ cos\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta} + \dfrac{sen\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}} = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha\ tg\ \beta}$$

(*) Dividimos numerador y denominador por $cos\ \alpha\ cos\ \beta$.

4 Si $\boldsymbol{sen}\ 12° = 0{,}2$ **y** $\boldsymbol{sen}\ 37° = 0{,}6$**, halla** $\boldsymbol{cos}\ 12°$, $\boldsymbol{tg}\ 12°$, $\boldsymbol{cos}\ 37°$ **y** $\boldsymbol{tg}\ 37°$**. Calcula, a partir de ellas, las razones trigonométricas de 49° y de 25°, usando las fórmulas (I) y (II).**

- $sen\ 12° = 0{,}2$

  $cos\ 12° = \sqrt{1 - sen^2\ 12°} = \sqrt{1 - 0{,}04} = 0{,}98$

  $tg\ 12° = \dfrac{0{,}2}{0{,}98} = 0{,}2$

- $sen\ 37° = 0{,}6$

  $cos\ 37° = \sqrt{1 - sen^2\ 37°} = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$

  $tg\ 37° = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

- $49° = 12° + 37°$, luego:

  $sen\ 49° = sen\ (12° + 37°) = sen\ 12°\ cos\ 37° + cos\ 12°\ sen\ 37° = 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}98 \cdot 0{,}6 = 0{,}748$

  $cos\ 49° = cos\ (12° + 37°) = cos\ 12°\ cos\ 37° - sen\ 12°\ sen\ 37° = 0{,}98 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}664$

  $tg\ 49° = tg\ (12° + 37°) = \dfrac{tg\ 12° + tg\ 37°}{1 - tg\ 12°\ tg\ 37°} = \dfrac{0{,}2 + 0{,}75}{1 - 0{,}2 \cdot 0{,}75} = 1{,}12$

  $\left(\text{Podría calcularse } tg\ 49° = \dfrac{sen\ 49°}{cos\ 49°}\right)$.

- $25° = 37° - 12°$, luego:

$sen\ 25° = sen\ (37° - 12°) = sen\ 37°\ cos\ 12° - cos\ 37°\ sen\ 12° = 0{,}6 \cdot 0{,}98 - 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}428$

$cos\ 25° = cos\ (37° - 12°) = cos\ 37°\ cos\ 12° + sen\ 37°\ sen\ 12° = 0{,}8 \cdot 0{,}98 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}904$

$$tg\ 25° = tg\ (37° - 12°) = \frac{tg\ 37° - tg\ 12°}{1 + tg\ 37°\ tg\ 12°} = \frac{0{,}75 - 0{,}2}{1 + 0{,}75 \cdot 0{,}2} = 0{,}478$$

5 **Demuestra esta igualdad:**

$$\frac{cos\ (a+b) + cos\ (a-b)}{sen\ (a+b) + sen\ (a-b)} = \frac{1}{tg\ a}$$

$$\frac{cos\ (a+b) + cos\ (a-b)}{sen\ (a+b) + sen\ (a-b)} = \frac{cos\ a\ cos\ b - sen\ a\ sen\ b + cos\ a\ cos\ b + sen\ a\ sen\ b}{sen\ a\ cos\ b + cos\ a\ sen\ b + sen\ a\ cos\ b - cos\ a\ sen\ b} =$$

$$= \frac{2\ cos\ a\ cos\ b}{2\ sen\ a\ cos\ b} = \frac{cos\ a}{sen\ a} = \frac{1}{tg\ a}$$

6 **Demuestra las fórmulas (III.1) y (III.3) haciendo $\alpha = \beta$ en las fórmulas (I).**

$sen\ 2\alpha = sen\ (\alpha + \alpha) = sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos\ \alpha\ sen\ \alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$

$$tg\ 2\alpha = tg\ (\alpha + \alpha) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \alpha}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \alpha} = \frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\ \alpha}$$

7 **Halla las razones trigonométricas de 60° usando las de 30°.**

$$sen\ 60° = sen\ (2 \cdot 30°) = 2\ sen\ 30°\ cos\ 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 60° = cos\ (2 \cdot 30°) = cos^2\ 30° - sen^2\ 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$tg\ 60° = tg\ (2 \cdot 30°) = \frac{2\ tg\ 30°}{1 - tg^2\ 30°} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - (\sqrt{3}/3)^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - 3/9} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{2/3} = \sqrt{3}$$

8 **Halla las razones trigonométricas de 90° usando las de 45°.**

$$sen\ 90° = sen\ (2 \cdot 45°) = 2\ sen\ 45°\ cos\ 45° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$cos\ 90° = cos\ (2 \cdot 45°) = cos^2\ 45° - sen^2\ 45° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

$$tg\ 90° = tg\ (2 \cdot 45°) = \frac{2\ tg\ 45°}{1 - tg^2\ 45°} = \frac{2 \cdot 1}{1 - 1} \ \to \ \text{No existe.}$$

9 **Demuestra que:** $\dfrac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = \dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}$

$$\frac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = \frac{2\ sen\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{2\ sen\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \frac{2\ sen\ \alpha\ (1 - cos\ \alpha)}{2\ sen\ \alpha\ (1 + cos\ \alpha)} = \frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}$$

Página 132

Hazlo tú. **Halla $cos\ 15°$ y $tg\ 15°$.**

$$cos\ 15° = cos\ \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

$$tg\ 15° = \sqrt{\frac{1 - cos\ 30°}{1 + cos\ 30°}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{1 + \sqrt{3}/2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$$

10 Siguiendo las indicaciones que se dan, demuestra detalladamente las fórmulas IV.1, IV.2 y IV.3.

- $cos\ \alpha = cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = cos^2 \frac{\alpha}{2} - sen^2 \frac{\alpha}{2}$

  Por la igualdad fundamental:

  $cos^2 \frac{\alpha}{2} + sen^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \rightarrow 1 = cos^2 \frac{\alpha}{2} + sen^2 \frac{\alpha}{2}$

  De aquí:

  a) Sumando ambas igualdades:

  $1 + cos\ \alpha = 2\, cos^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + cos\ \alpha}{2} \rightarrow cos \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}}$

  b) Restando las igualdades (2.ª – 1.ª):

  $1 - cos\ \alpha = 2\, sen^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow sen^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\ \alpha}{2} \rightarrow sen \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}}$

- Por último:

  $tg \frac{\alpha}{2} = \frac{sen\ \alpha/2}{cos\ \alpha/2} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}$

11 Sabiendo que *cos* 78° = 0,2, calcula *sen* 78° y *tg* 78°. Averigua las razones trigonométricas de 39° aplicando las fórmulas del ángulo mitad.

- $cos\ 78° = 0{,}2$

  $sen\ 78° = \sqrt{1 - cos^2 78°} = \sqrt{1 - 0{,}2^2} = 0{,}98$

  $tg\ 78° = \frac{0{,}98}{0{,}2} = 4{,}9$

- $sen\ 39° = sen \frac{78°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 78°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}2}{2}} = 0{,}63$

  $cos\ 39° = cos \frac{78°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 78°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0{,}2}{2}} = 0{,}77$

  $tg\ 39° = tg \frac{78°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 78°}{1 + cos\ 78°}} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}2}{1 + 0{,}2}} = 0{,}82$

12 Halla las razones trigonométricas de 30° a partir de *cos* 60° = 0,5.

- $cos\ 60° = 0{,}5$
- $sen\ 30° = sen \frac{60°}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}5}{2}} = 0{,}5$

  $cos\ 30° = cos \frac{60°}{2} = \sqrt{\frac{1 + 0{,}5}{2}} = 0{,}866$

  $tg\ 30° = tg \frac{60°}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}5}{1 + 0{,}5}} = 0{,}577$

13 Halla las razones trigonométricas de 45° a partir de *cos* 90° = 0.

- $cos\ 90° = 0$
- $sen\ 45° = sen \frac{90°}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  $cos\ 45° = cos \frac{90°}{2} = \sqrt{\frac{1 + 0}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  $tg\ 45° = tg \frac{90°}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0}{1 + 0}} = \sqrt{1} = 1$

14 **Demuestra esta igualdad:** $2\,tg\,\alpha \cdot sen^2\,\frac{\alpha}{2} + sen\,\alpha = tg\,\alpha$

$$2\,tg\,\alpha \cdot sen^2\frac{\alpha}{2} + sen\,\alpha = 2\,tg\,\alpha \cdot \frac{1-cos\,\alpha}{2} + sen\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}(1-cos\,\alpha) + sen\,\alpha = sen\,\alpha\left(\frac{1-cos\,\alpha}{cos\,\alpha}+1\right) =$$

$$= sen\,\alpha\left(\frac{1-cos\,\alpha + cos\,\alpha}{cos\,\alpha}\right) = sen\,\alpha \cdot \frac{1}{cos\,\alpha} = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = tg\,\alpha$$

15 **Demuestra la siguiente igualdad:**

$$\frac{2\,sen\,\alpha - sen\,2\alpha}{2\,sen\,\alpha + sen\,2\alpha} = tg^2\,\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{2\,sen\,\alpha - sen\,2\alpha}{2\,sen\,\alpha + sen\,2\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha - 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha}{2\,sen\,\alpha + 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha\,(1-cos\,\alpha)}{2\,sen\,\alpha\,(1+cos\,\alpha)} = \frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha} = tg^2\,\frac{\alpha}{2}$$

Página 133

16 **Para demostrar las fórmulas (V.3) y (V.4), da los siguientes pasos:**

- **Expresa en función de α y β:**

  $cos\,(\alpha+\beta) = \ldots \qquad cos\,(\alpha-\beta) = \ldots$

- **Suma y resta como hemos hecho arriba y obtendrás dos expresiones.**
- **Sustituye en las expresiones anteriores:**

  $$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta = A\\ \alpha-\beta = B\end{array}\right\}$$

- $$\begin{array}{l} cos\,(\alpha+\beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta - sen\,\alpha\,sen\,\beta \\ cos\,(\alpha-\beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\alpha\,sen\,\beta \\ \hline \end{array}$$

Sumando $\rightarrow$ $cos\,(\alpha+\beta) + cos\,(\alpha-\beta) = 2\,cos\,\alpha\,cos\,\beta \quad (1)$

Restando $\rightarrow$ $cos\,(\alpha+\beta) - cos\,(\alpha-\beta) = -2\,sen\,\alpha\,sen\,\beta \quad (2)$

- Llamando $\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta = A\\ \alpha-\beta = B\end{array}\right\} \rightarrow \alpha = \frac{A+B}{2},\ \beta = \frac{A-B}{2}$ (al resolver el sistema)
- Luego, sustituyendo en (1) y (2), se obtiene:

  (1) $\rightarrow$ $cos\,A + cos\,B = 2\,cos\,\frac{A+B}{2}\,cos\,\frac{A-B}{2}$ (2) $\rightarrow$ $cos\,A - cos\,B = -2\,sen\,\frac{A+B}{2}\,sen\,\frac{A-B}{2}$

17 **Transforma en producto y calcula.**

a) $sen\,75° - sen\,15°$ **b)** $sen\,75° + sen\,15°$ **c)** $cos\,75° - cos\,15°$

a) $sen\,75° - sen\,15° = 2\,cos\,\frac{75°+15°}{2}\,sen\,\frac{75°-15°}{2} = 2\,cos\,45°\,sen\,30° = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $sen\,75° + sen\,15° = 2\,sen\,\frac{75°+15°}{2}\,cos\,\frac{75°-15°}{2} = 2\,sen\,45°\,cos\,30° = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $cos\,75° - cos\,15° = -2\,sen\,\frac{75°+15°}{2}\,sen\,\frac{75°-15°}{2} = -2\,sen\,45°\,cos\,30° = -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

18 **Expresa en forma de producto el numerador y el denominador de esta fracción y simplifica el resultado:**

$$\frac{sen\,4a + sen\,2a}{cos\,4a + cos\,2a}$$

$$\frac{sen\,4a + sen\,2a}{cos\,4a + cos\,2a} = \frac{2\,sen\,\frac{4a+2a}{2}\,cos\,\frac{4a-2a}{2}}{2\,cos\,\frac{4a+2a}{2}\,cos\,\frac{4a-2a}{a}} = \frac{2\,sen\,3a}{2\,cos\,3a} = tg\,3a$$

2 Ecuaciones trigonométricas

Página 134

Hazlo tú. Resuelve $sen\ (\alpha + 30°) = 2\ cos\ \alpha$.

$sen\ (\alpha + 30°) = 2\ cos\ \alpha$

$sen\ \alpha\ cos\ 30° + cos\ \alpha\ sen\ 30° = 2\ cos\ \alpha$

$\frac{1}{2} sen\ \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} cos\ \alpha = 2\ cos\ \alpha$

Dividimos los dos miembros entre $cos\ \alpha$:

$\frac{1}{2} tg\ \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \to tg\ \alpha + \sqrt{3} = 4 \to tg\ \alpha = 4 - \sqrt{3}$

Soluciones: $\begin{cases} \alpha_1 = 66°\ 12'\ 22'' \\ \alpha_2 = 246°\ 12'\ 22'' \end{cases}$

Hazlo tú. Resuelve $cos\ \alpha = sen\ 2\alpha$.

$cos\ \alpha = sen\ 2\alpha$

$cos\ \alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha \to cos\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha = 0 \to cos\ \alpha\ (1 - 2\ sen\ \alpha) = 0$

Posibles soluciones: $\begin{cases} cos\ \alpha = 0 \to \alpha_1 = 90°,\ \alpha_2 = 270° \\ 1 - 2\ sen\ \alpha = 0 \to sen\ \alpha = \frac{1}{2} \to \alpha_3 = 30°,\ \alpha_4 = 150° \end{cases}$

Al comprobarlas sobre la ecuación inicial, vemos que las cuatro soluciones son válidas.

Página 135

Hazlo tú. Resuelve $sen\ 3\alpha - sen\ \alpha = 0$.

$sen\ 3\alpha - sen\ \alpha = 0$

$2\ cos \frac{3\alpha + \alpha}{2}\ sen \frac{3\alpha - \alpha}{2} = 0 \to 2\ cos\ 2\alpha\ sen\ \alpha = 0 \to cos\ 2\alpha\ sen\ \alpha = 0$

Si $cos\ 2\alpha = 0 \to \begin{cases} 2\alpha = 90° \to \alpha_1 = 45° \\ 2\alpha = 270° \to \alpha_2 = 135° \\ 2\alpha = 90° + 360° = 450° \to \alpha_3 = 225° \\ 2\alpha = 270° + 360° = 630° \to \alpha_4 = 315° \end{cases}$

Si $sen\ \alpha = 0 \to \alpha_5 = 0°,\ \alpha_6 = 180°$

1 Resuelve.

a) $tg\ \alpha = -\sqrt{3}$ **b)** $sen\ \alpha = cos\ \alpha$ **c)** $sen^2\ \alpha = 1$ **d)** $sen\ \alpha = tg\ \alpha$

a) $x = 120° + k \cdot 360°$ o bien $x = 300° + k \cdot 360°$

Las dos soluciones quedan recogidas en:

$x = 120° + k \cdot 180° = \frac{2\pi}{3} + k\pi \text{ rad} = x$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ rad}$ con $k \in \mathbb{Z}$

c) $\left.\begin{array}{l} \text{Si } sen\ x = 1 \to x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ rad} \\ \text{Si } sen\ x = -1 \to x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ rad} \end{array}\right\} \to x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ rad}$ con $k \in \mathbb{Z}$

d) En ese caso debe ocurrir que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{O bien } sen\ x = 0 \ \rightarrow \ x = k\pi \text{ rad} \\ \text{O bien } cos\ x = 1 \ \rightarrow \ x = 2k\pi \text{ rad} \end{array}\right\} \rightarrow x = k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$$

2 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $2\, cos^2\, \alpha + cos\, \alpha - 1 = 0$

b) $2\, sen^2\, \alpha - 1 = 0$

c) $tg^2\, \alpha - tg\, \alpha = 0$

d) $2\, sen^2\, \alpha + 3\, cos\, \alpha = 3$

a) $cos\, \alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \ \rightarrow \ \alpha_1 = 60°,\ \alpha_2 = 300° \\ -1 \ \rightarrow \ \alpha_3 = 180° \end{cases}$

Las tres soluciones son válidas (se comprueba en la ecuación inicial).

b) $2\, sen^2\, \alpha - 1 = 0 \ \rightarrow \ sen^2\, \alpha = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow \ sen\, \alpha = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $sen\, \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow \ \alpha_1 = 45°,\ \alpha_2 = 135°$

- Si $sen\, \alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow \ \alpha_3 = -45° = 315°,\ \alpha_4 = 225°$

Todas las soluciones son válidas.

c) $tg^2\, \alpha - tg\, \alpha = 0 \ \rightarrow \ tg\, \alpha\, (tg\, \alpha - 1) = 0 \ \begin{cases} tg\, \alpha = 0 \ \rightarrow \ \alpha_1 = 0°,\ \alpha_2 = 180° \\ tg\, \alpha = 1 \ \rightarrow \ \alpha_3 = 45°,\ \alpha_4 = 225° \end{cases}$

Todas las soluciones son válidas.

d) $2\, sen^2\, \alpha + 3\, cos\, \alpha = 3 \ \overset{(*)}{\rightarrow} \ 2(1 - cos^2\, \alpha) + 3\, cos\, \alpha = 3$

(*) Como $sen^2\, \alpha + cos^2\, \alpha = 1 \ \rightarrow \ sen^2\, \alpha = 1 - cos^2\, \alpha$

$2 - 2\, cos^2\, \alpha + 3\, cos\, \alpha = 3 \ \rightarrow \ 2\, cos^2\, \alpha - 3\, cos\, \alpha + 1 = 0$

$cos\, \alpha = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \dfrac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$

Entonces:

- Si $cos\, \alpha = 1 \ \rightarrow \ \alpha_1 = 0°$

- Si $cos\, \alpha = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow \ \alpha_2 = 60°,\ \alpha_3 = -60° = 300°$

Las tres soluciones son válidas.

3 **Transforma en producto** $sen\ 5\alpha - sen\ 3\alpha$ **y resuelve después la ecuación** $sen\ 5\alpha - sen\ 3\alpha = 0$**.**

$$sen\ 5\alpha - sen\ 3\alpha = 0 \ \rightarrow \ 2\, cos\, \frac{5\alpha + 3\alpha}{2}\, sen\, \frac{5\alpha - 3\alpha}{2} = 0 \ \rightarrow \ 2\, cos\, \frac{8\alpha}{2}\, sen\, \frac{2\alpha}{2} = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 2\, cos\ 4\alpha\ sen\ \alpha = 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} cos\ 4\alpha = 0 \\ sen\ \alpha = 0 \end{cases}$$

- Si $cos\ 4\alpha = 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} 4\alpha = 90° & \rightarrow \ \alpha_1 = 22°\ 30' \\ 4\alpha = 270° & \rightarrow \ \alpha_2 = 67°\ 30' \\ 4\alpha = 90° + 36° & \rightarrow \ \alpha_3 = 112°\ 30' \\ 4\alpha = 270° + 360° & \rightarrow \ \alpha_4 = 157°\ 30' \end{cases}$

- Si $sen\ \alpha = 0 \ \rightarrow \ \alpha_5 = 0°,\ \alpha_6 = 180°$

Comprobamos que las seis soluciones son válidas.

4 Resuelve.

a) $4\cos 2\alpha + 3\cos\alpha = 1$

b) $tg\, 2\alpha + 2\cos\alpha = 0$

c) $\sqrt{2}\cos(\alpha/2) - \cos\alpha = 1$

d) $2\, sen\,\alpha \cos^2\alpha - 6\, sen^3\alpha = 0$

a) $4\cos 2\alpha + 3\cos\alpha = 1 \to 4(\cos^2\alpha - sen^2\alpha) + 3\cos\alpha = 1 \to$

$\to 4(\cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)) + 3\cos\alpha = 1 \to 4(2\cos^2\alpha - 1) + 3\cos\alpha = 1 \to$

$\to 8\cos^2\alpha - 4 + 3\cos\alpha = 1 \to 8\cos^2\alpha + 3\cos\alpha - 5 = 0 \to$

$\to \cos\alpha = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{16} = \dfrac{-3 \pm 13}{16} = \begin{cases} 10/16 = 5/8 = 0{,}625 \\ -1 \end{cases}$

• Si $\cos\alpha = 0{,}625 \to \alpha_1 = 51°\ 19'\ 4{,}13''$, $\alpha_2 = -51°\ 19'\ 4{,}13''$

• Si $\cos\alpha = -1 \to \alpha_3 = 180°$

Al comprobar las soluciones, las tres son válidas.

b) $tg\, 2\alpha + 2\cos\alpha = 0 \to \dfrac{2\, tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} + 2\cos\alpha = 0 \to$

$\to \dfrac{tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} + \cos\alpha = 0 \to \dfrac{\dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \dfrac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}} + \cos\alpha = 0 \to$

$\to \dfrac{sen\,\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - sen^2\alpha} + \cos\alpha = 0 \to sen\,\alpha\cos\alpha + \cos\alpha(\cos^2\alpha - sen^2\alpha) = 0 \to$

$\to \cos\alpha(sen\,\alpha + \cos^2\alpha - sen^2\alpha) = 0 \to \cos\alpha(sen\,\alpha + 1 - sen^2\alpha - sen^2\alpha) \to$

$\to \cos\alpha(1 + sen\,\alpha - 2\, sen^2\alpha) = 0 \to$

$\to \begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ 1 + sen\,\alpha - 2\, sen^2\alpha = 0 \to sen\,\alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \begin{cases} -1/2 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$

• Si $\cos\alpha = 0 \to \alpha_1 = 90°$, $\alpha_2 = 270°$

• Si $sen\,\alpha = -\dfrac{1}{2} \to \alpha_3 = 210°$, $\alpha_4 = 330° = -30°$

• Si $sen\,\alpha = 1 \to \alpha_5 = 90° = \alpha_1$

Al comprobar las soluciones, vemos que todas ellas son válidas.

c) $\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} - \cos\alpha = 1 \to \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} - \cos\alpha = 1 \to$

$\to \sqrt{1+\cos\alpha} - \cos\alpha = 1 \to \sqrt{1-\cos\alpha} = 1 + \cos\alpha \to$

$\to 1 + \cos\alpha = 1 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha \to \cos^2\alpha + \cos\alpha = 0 \to \cos\alpha(\cos\alpha + 1) = 0$

• Si $\cos\alpha = 0 \to \alpha_1 = 90°$, $\alpha_2 = 270°$

• Si $\cos\alpha = -1 \to \alpha_3 = 180°$

Al comprobar las soluciones, podemos ver que las únicas válidas son: $\alpha_1 = 90°$ y $\alpha_3 = 180°$

d) $2\, sen\,\alpha\cos^2\alpha - 6\, sen^3\alpha = 0 \to 2\, sen\,\alpha(\cos^2\alpha - 3\, sen^2\alpha) = 0 \to$

$\to 2\, sen\,\alpha(\cos^2\alpha + sen^2\alpha - 4\, sen^2\alpha) = 0 \to 2\, sen\,\alpha(1 - 4\, sen^2\alpha) = 0$

• Si $sen\,\alpha = 0 \to \alpha_1 = 0°$, $\alpha_2 = 180°$

• Si $sen^2\alpha = \dfrac{1}{4} \to sen\,\alpha = \pm\dfrac{1}{2} \to \alpha_3 = 30°$, $\alpha_4 = 150°$, $\alpha_5 = 210°$, $\alpha_6 = 330°$

Comprobamos las soluciones y observamos que son válidas todas ellas.

5 **Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:**

a) $\boldsymbol{sen\ (180° - \alpha) = cos\ (270° - \alpha) + cos\ 180°}$

b) $\boldsymbol{sen\ (45° - \alpha) + \sqrt{2}\ sen\ \alpha = 0}$

a) $sen\ (180° - \alpha) = cos\ (270° - \alpha) + cos\ 180°$

$sen\ 180°\ cos\ \alpha - cos\ 180°\ sen\ \alpha = cos\ 270°\ cos\ \alpha + sen\ 270°\ sen\ \alpha - 1$

$sen\ \alpha = -sen\ \alpha - 1 \ \rightarrow\ 2\ sen\ \alpha = -1 \ \rightarrow\ sen\ \alpha = -\frac{1}{2} \ \rightarrow\ \alpha_1 = 210°,\ \ \alpha_2 = 330°$

b) $sen\ (45° - \alpha) + \sqrt{2}\ sen\ \alpha = 0$

$sen\ 45°\ cos\ \alpha - cos\ 45°\ sen\ \alpha + \sqrt{2}\ sen\ \alpha = 0 \ \rightarrow\ \frac{\sqrt{2}}{2} cos\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} sen\ \alpha + \sqrt{2}\ sen\ \alpha = 0$

$cos\ \alpha - sen\ \alpha + 2\ sen\ \alpha = 0 \ \rightarrow\ cos\ \alpha + sen\ \alpha = 0$

Dividimos entre $cos\ \alpha$:

$1 + tg\ \alpha = 0 \ \rightarrow\ tg\ \alpha = -1 \ \rightarrow\ \alpha_1 = 135°,\ \ \alpha_2 = 315°$

3 Funciones trigonométricas

Página 137

1 ¿Verdadero o falso?

a) El radián es una medida de longitud equivalente al radio.

b) Un radián es un ángulo algo menor que 60°.

c) Puesto que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, un ángulo completo (360°) tiene 2π radianes.

d) 180° es algo menos de 3 radianes.

e) Un ángulo recto mide $\pi/2$ radianes.

a) Falso. El radián es una medida angular, no es una medida de longitud.

b) Verdadero, porque un radián tiene 57° 17' 45''.

c) Verdadero, porque cada radián abarca un arco de longitud r.

d) Falso. 180° es la mitad de un ángulo completo y equivale, por tanto, a π radianes, algo más de 3 radianes.

e) Verdadero. Un ángulo recto es la cuarta parte de un ángulo completo y tiene $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ radianes.

2 Pasa a radianes los siguientes ángulos:

a) 30° **b) 72°** **c) 90°**

d) 127° **e) 200°** **f) 300°**

Expresa el resultado en función de π y luego en forma decimal. Por ejemplo:

$$30° = 30 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 0{,}52 \text{ rad}$$

a) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 30° = \frac{\pi}{6}$ rad $\approx 0{,}52$ rad

b) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 72° = \frac{2\pi}{5}$ rad $\approx 1{,}26$ rad

c) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 90° = \frac{\pi}{2}$ rad $\approx 1{,}57$ rad

d) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 127° \approx 2{,}22$ rad

e) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 200° = \frac{10\pi}{9}$ rad $\approx 3{,}49$ rad

f) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 300° = \frac{5\pi}{3}$ rad $\approx 5{,}24$ rad

3 Pasa a grados los siguientes ángulos:

a) 2 rad **b) 0,83 rad** **c) $\frac{\pi}{5}$ rad**

d) $\frac{5\pi}{6}$ rad **e) 3,5 rad** **f) π rad**

a) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 2 = 114°\ 35'\ 29{,}6''$

b) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 0{,}83 = 47°\ 33'\ 19{,}8''$

c) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{5} = 36°$

d) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = 150°$

e) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 3{,}5 = 200°\ 32'\ 6{,}8''$

f) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \pi = 180°$

4 **Copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno y añade las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de cada uno de los ángulos:**

GRADOS	0°	30°		60°	90°		135°	150°	
RADIANES			$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2}{3}\pi$			π

GRADOS	210°	225°		270°			330°	360°
RADIANES			$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$		

La tabla completa está en el siguiente apartado (página siguiente) del libro de texto.

Página 138

5 **¿Verdadero o falso?**

a) Las funciones trigonométricas son periódicas.

b) Las funciones *sen* y *cos* tienen un periodo de 2π.

c) La función $tg\, x$ tiene periodo π.

d) La función $cos\, x$ es como $sen\, x$ desplazada $\pi/2$ a la izquierda.

a) Verdadero. La forma de sus gráficas se repite a lo largo del eje horizontal, cada 2π radianes.

b) Verdadero.

$$\left.\begin{array}{l} sen\,(x+2\pi) = sen\, x \\ cos\,(x+2\pi) = cos\, x \end{array}\right\} \text{ porque } 2\pi \text{ radianes equivalen a una vuelta completa.}$$

c) Verdadero.

$tg\,(x+\pi) = tg\, x$

Podemos observarlo en la gráfica de la función $tg\, x$ dibujada más arriba en esta página.

d) Verdadero. Se puede observar en las gráficas correspondientes de esta página.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 139

1. Razones trigonométricas a partir de otras

Hazlo tú. Sabiendo que *sen* 54° = 0,81 halla *cos* 108°, *tg* 27°, *sen* 24°, *cos* 99°.

$sen^2\ 54° + cos^2\ 54° = 1 \rightarrow 0{,}81^2 + cos^2\ 54° = 1 \rightarrow cos\ 54° = \sqrt{1-0{,}81^2} = 0{,}59$

$cos\ 108° = cos\ (2 \cdot 54°) = cos^2\ 54° - sen^2\ 54° = 0{,}59^2 - 0{,}81^2 = -0{,}31$

$$tg\ 27° = tg\left(\frac{54°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos\ 54°}{1+cos\ 54°}} = \sqrt{\frac{1-0{,}59}{1+0{,}59}} = 0{,}51$$

$$sen\ 24° = sen\ (54° - 30°) = sen\ 54°\ cos\ 30° - cos\ 54°\ sen\ 30° = 0{,}81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}59 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}41$$

$$cos\ 99° = cos\ (54° + 45°) = cos\ 54°\ cos\ 45° - sen\ 54°\ sen\ 45° = 0{,}59 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}81 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}16$$

2. Identidades trigonométricas

Hazlo tú. Demuestra que *sen* 2α – *tg* α *cos* 2α = *tg* α.

Aplicamos las fórmulas del ángulo doble y las relaciones fundamentales:

$$sen\ 2\alpha - tg\ \alpha\ cos\ 2\alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha - tg\ \alpha\ (cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) =$$

$$= 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha - \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}(cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) =$$

$$= \frac{2\ sen\ \alpha\ cos^2\ \alpha - sen\ \alpha\ cos^2\ \alpha + sen^3\ \alpha}{cos\ \alpha} =$$

$$= \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}(2\ cos^2\ \alpha - cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha) =$$

$$= \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}(cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha) = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$$

3. Simplificación de expresiones trigonométricas

Hazlo tú. Simplifica la expresión $\frac{2\ cos\ (45° + \alpha)\ cos\ (45° - \alpha)}{cos\ 2\alpha}$.

$$\frac{2\ cos\ (45° + \alpha)\ cos\ (45° - \alpha)}{cos\ 2\alpha} = \frac{2\ (cos\ 45°\ cos\ \alpha - sen\ 45°\ sen\ \alpha)\ (cos\ 45°\ cos\ \alpha + sen\ 45°\ sen\ \alpha)}{cos\ 2\alpha} =$$

$$= \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ \alpha\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ \alpha\right)}{cos\ 2\alpha} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{(cos\ \alpha - sen\ \alpha)\ (cos\ \alpha + sen\ \alpha)}{cos\ 2\alpha} =$$

$$= \frac{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha}{cos\ 2\alpha} = \frac{cos\ 2\alpha}{cos\ 2\alpha} = 1$$

Página 140

4. Resolución de ecuaciones trigonométricas

Hazlo tú. Resuelve estas ecuaciones:

a) $sen^3\, x - sen\, x\, cos^2\, x = 0$

b) $\sqrt{3}\ sen\, x + cos\, x = 2$

c) $tg^2\, \dfrac{x}{2} = 1 - cos\, x$

d) $\dfrac{cos\, 4x + cos\, 2x}{sen\, 4x - sen\, 2x} = 1$

a) Extraemos factor común: $sen\, x(sen^2\, x - cos^2\, x) = 0$

Igualamos a cero cada factor:

$sen\, x = 0 \ \rightarrow\ x = 0° + 360° \cdot k;\ x = 180° + 360° \cdot k$

$sen^2\, x - cos^2\, x = 0 \ \rightarrow\ sen^2\, x - (1 - sen^2\, x) = 0 \ \rightarrow\ 2sen^2\, x = 1 \ =\ sen^2\, x = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow\ sen\, x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Si $sen\, x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $x = 45° + 360° \cdot k;\ x = 135° + 360° \cdot k$

Si $sen\, x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $x = 225° + 360° \cdot k;\ x = 315° + 360° \cdot k$

b) Pasamos $cos\, x$ al segundo miembro y elevamos al cuadrado después:

$(\sqrt{3}\ sen\, x)^2 = (2 - cos\, x)^2 \ \rightarrow\ 3sen^2\, x = 4 - 4\, cos\, x + cos^2\, x \ \rightarrow$

$\rightarrow\ 3(1 - cos^2\, x) = 4 - 4cos\, x + cos^2\, x \ \rightarrow\ 4cos^2\, x - 4cos\, x + 1 = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow\ cos\, x = \dfrac{4 \pm 0}{8} = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow\ x = 60° + 360° \cdot k;\ x = 300° + 360° \cdot k$

Comprobamos las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

$x = 60° + 360° \cdot k \ \rightarrow\ \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} = 2 \ \rightarrow$ Vale.

$x = 300° + 360° \cdot k \ \rightarrow\ \sqrt{3} \cdot \dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} = 2 \ \rightarrow$ No vale.

c) Utilizamos la fórmula de la tangente del ángulo mitad:

$\left(\sqrt{\dfrac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}}\right)^2 = 1 - cos\, x \ \rightarrow\ \dfrac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x} = 1 - cos\, x \ \rightarrow\ 1 - cos\, x = 1 - cos^2\, x \ \rightarrow$

$\rightarrow\ cos^2\, x - cos\, x = 0 \ \rightarrow\ cos\, x\, (1 - cos\, x) = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} cos\, x = 0 \ \rightarrow\ x = 90° + 360° \cdot k;\ x = 270° + 360° \cdot k \\ cos\, x = 1 \ \rightarrow\ x = 0° + 360° \cdot k \end{cases}$$

d) Transformamos las sumas en productos:

$$\frac{2\, cos\, \dfrac{4x + 2x}{2}\, cos\, \dfrac{4x - 2x}{2}}{2\, cos\, \dfrac{4x + 2x}{2}\, sen\, \dfrac{4x - 2x}{2}} = 1 \ \rightarrow\ \frac{cos\, x}{sen\, x} = 1 \ \rightarrow\ \frac{1}{tg\, x} = 1 \ \rightarrow\ tg\, x = 1 \ \rightarrow$$

$\rightarrow\ x = 45° + 360° \cdot k;\ x = 225° + 360° \cdot k$

Ejercicios y problemas guiados

Página 141

1. Razones trigonométricas de $(\alpha + \beta)$; $(\alpha - \beta)$; 2α y $\alpha/2$

Si $sen\ \alpha = \frac{3}{5}$, $90° < \alpha < 180°$, ***y*** $cos\ \beta = -\frac{1}{4}$, $180° < \beta < 270°$, ***hallar:*** $cos\ (\alpha + \beta)$; $sen\ (\alpha - \beta)$; $tg\ 2\alpha$; $tg\ \frac{\beta}{2}$.

$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow \frac{9}{25} + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{16}{25} \rightarrow$

$\rightarrow cos\ \alpha = -\frac{4}{5}$ porque el ángulo está en el segundo cuadrante.

$tg\ \alpha = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$

$sen^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \rightarrow sen^2\ \beta + \frac{1}{16} = 1 \rightarrow sen^2\ \beta = \frac{15}{16} \rightarrow$

$\rightarrow sen\ \beta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ porque el ángulo está en el tercer cuadrante.

$tg\ \beta = \frac{-\sqrt{15}/4}{-1/4} = \sqrt{15}$

$$cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{15} + 4}{20}$$

$$sen\ (\alpha - \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{-4\sqrt{15} - 3}{5}$$

$$tg\ 2\alpha = \frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\ \alpha} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{24}{7}$$

$$tg\ \frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1 - cos\ \beta}{1 + cos\ \beta}} = -\sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)}} = -\sqrt{\frac{5}{3}}$$ ya que el ángulo $\frac{\beta}{2}$ está en el segundo cuadrante.

2. Identidades trigonométricas

Demostrar que: $cos\ 3x = 4\ cos^3\ x - 3\ cos\ x$

$cos\ 3x = cos(2x + x) = cos\ 2x\ cos\ x - sen\ 2x\ sen\ x = (cos^2\ x - sen^2\ x)\ cos\ x - 2\ sen\ x\ cos\ x\ sen\ x =$

$= cos^3\ x - sen^2\ x\ cos\ x - 2\ sen^2\ x\ cos\ x = cos^3\ x - 3\ sen^2\ x\ cos\ x$

3. Expresiones algebraicas equivalentes

Escribir la expresión $cos\ (\alpha + \beta)\ cos\ (\alpha - \beta)$ ***en función de*** $cos\ \alpha$ ***y*** $sen\ \beta$.

$cos\ (\alpha + \beta)\ cos\ (\alpha - \beta) = (cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta)\ (cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta) =$

$= cos^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha\ sen^2\ \beta = cos^2\ \alpha\ (1 - sen^2\ \beta) - (1 - cos^2\ \alpha)\ sen^2\ \beta =$

$= cos^2\ \alpha - cos^2\ \alpha\ sen^2\ \beta - sen^2\ \beta + cos^2\ \alpha\ sen^2\ \beta = cos^2\ \alpha - sen^2\ \beta$

4. Simplificación de expresiones trigonométricas

Simplificar esta expresión: $2\ tg\ \alpha\ cos^2\ \frac{\alpha}{2} - sen\ \alpha$

$$2\ tg\ \alpha\ cos^2\ \frac{\alpha}{2} - sen\ \alpha = 2\ tg\ \alpha \left(\pm\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}}\right)^2 - sen\ \alpha = 2\ \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \cdot \frac{1 + cos\ \alpha}{2} - sen\ \alpha =$$

$$= \frac{sen\ \alpha\ (1 + cos\ \alpha) - sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{sen\ \alpha + sen\ \alpha\ cos\ \alpha - sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$$

5. Ecuaciones trigonométricas

Resolver estas ecuaciones:

a) $\boldsymbol{\cos^2 (2x + 30°) = \frac{1}{4}}$ ***b)*** $\boldsymbol{4\, sen\, x + 4 \cos^2 x\, tg\, x + tg\, x = 0}$***, con*** $\boldsymbol{tg\, x \neq 0}$

a) $\cos (2x + 30°) = \pm\frac{1}{2}$

$$\text{Si } \cos (2x + 30°) = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x + 30° = 60° \rightarrow x = 15° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 300° \rightarrow x = 135° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 60° + 360° \rightarrow x = 195° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 300° + 360° \rightarrow x = 315° + 360° \cdot k \end{cases}$$

$$\text{Si } \cos (2x + 30°) = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x + 30° = 120° \rightarrow x = 45° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 240° \rightarrow x = 105° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 120° + 360° \rightarrow x = 225° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 240° + 360° \rightarrow x = 285° + 360° \cdot k \end{cases}$$

b) Si $tg\, x = 0$ entonces $x = 0° + 360° \cdot k$; $x = 180° + 360° \cdot k$ son soluciones de la ecuación, ya que el seno de estos ángulos también es 0.

Si $tg \neq 0$, dividimos entre esta función en los dos términos de la ecuación:

$$\frac{4\, sen\, x}{tg\, x} + 4\cos^2 x + 1 = 0 \rightarrow \frac{4\, sen\, x}{\frac{sen\, x}{\cos x}} + 4\cos^2 x + 1 = 0 \rightarrow 4\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos x = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120° + 360° \cdot k;\ x = 240° + 360° \cdot k$$

6. Resolución de sistemas de ecuaciones trigonométricas

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en el intervalo [0°, 360°]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\cos y - sen\, x = 1} \\ \boldsymbol{4\, sen\, x \cos y + 1 = 0} \end{cases}$$

$\cos y = 1 + sen\, x$

$4\, sen\, x (1 + sen\, x) + 1 = 0 \rightarrow 4\, sen^2 x + 4\, sen\, x + 1 = 0 \rightarrow sen\, x = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2}$

- Si $sen\, x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, que es imposible.
- Si $sen\, x = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Las diferentes posibilidades son:

$$\begin{cases} x = 210° + 360° \cdot k \\ y = 60° + 360° \cdot k \end{cases};\ \begin{cases} x = 210° + 360° \cdot k \\ y = 300° + 360° \cdot k \end{cases};\ \begin{cases} x = 330° + 360° \cdot k \\ y = 60° + 360° \cdot k \end{cases};\ \begin{cases} x = 330° + 360° \cdot k \\ y = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 142

Para practicar

Fórmulas trigonométricas

1 **Sabiendo que** $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$ **y** $90° < \alpha < 180°$**, calcula sin hallar el valor de** α**:**

a) $sen\ 2\alpha$ **b)** $tg\ \frac{\alpha}{2}$ **c)** $sen\ (\alpha + 30°)$

d) $\cos\ (60° - \alpha)$ **e)** $\cos\ \frac{\alpha}{2}$ **f)** $tg\ (45° + \alpha)$

$sen^2\ \alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha + \frac{9}{16} = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha = \frac{7}{16} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ya que el ángulo está en el 2.º cuadrante.

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{7}/4}{-3/4} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

a) $sen\ 2\alpha = 2\ sen\ \alpha \cos\alpha = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$

b) $tg\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)}} = \sqrt{7}$ ya que $\frac{\alpha}{2}$ está comprendido entre 45° y 90° (está en el 1.er cuadrante).

c) $sen\ (\alpha + 30°) = sen\ \alpha \cos 30° + \cos\alpha\ sen\ 30° = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{21}-3}{8}$

d) $\cos\ (60° - \alpha) = \cos 60° \cos\alpha + sen\ 60°\ sen\ \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{-\sqrt{21}-3}{8}$

e) $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(-\frac{3}{4}\right)}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ porque $\frac{\alpha}{2}$ está comprendido entre 45° y 90° (está en el 1.er cuadrante).

f) $tg\ (45° + \alpha) = \frac{tg\ 45° + tg\ \alpha}{1 - tg\ 45°\ tg\ \alpha} = \frac{1 + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)}{1 - 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)} = \frac{1-\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}$

2 **Calcula las razones trigonométricas de 22° 30' a partir de las de 45°.**

$sen\ (22°\ 30') = sen\ \frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\cos\ (22°\ 30') = \cos\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$tg\ (22°\ 30') = tg\ \frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{1-\sqrt{2}/2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$

3 **Si** $\cos 78° = 0,2$ **y** $sen\ 37° = 0,6$ **halla las razones trigonométricas de 41° y de 115°.**

$41° = 78° - 37°$

- $sen\ 78° = \sqrt{1-\cos^2 78°} = \sqrt{1-0,2^2} = 0,98$
- $\cos 37° = \sqrt{1-sen^2\ 37°} = \sqrt{1-0,6^2} = 0,8$

Ahora ya podemos calcular:

- $sen\ 41° = sen\ (78° - 37°) = sen\ 78°\ cos\ 37° - cos\ 78°\ sen\ 37° = 0,98 \cdot 0,8 - 0,2 \cdot 0,6 = 0,664$
- $cos\ 41° = cos\ (78° - 37°) = cos\ 78°\ cos\ 37° + sen\ 78°\ sen\ 37° = 0,2 \cdot 0,8 + 0,98 \cdot 0,6 = 0,748$
- $tg\ 41° = \dfrac{sen\ 41°}{cos\ 41°} = \dfrac{0,664}{0,748} = 0,8877$
- $sen\ 115° = sen\ (78° + 37°) = sen\ 78°\ cos\ 37° + cos\ 78°\ sen\ 37° = 0,98 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,904$
- $cos\ 115° = cos\ (78° + 37°) = cos\ 78°\ cos\ 37° - sen\ 78°\ sen\ 37° = 0,2 \cdot 0,8 - 0,98 \cdot 0,6 = -0,428$
- $tg\ 115° = \dfrac{sen\ 115°}{cos\ 115°} = -\dfrac{0,904}{0,428} = -2,112$

4 a) Halla el valor exacto de las razones trigonométricas de 75° a partir de las de 30° y 45°.

b) Utilizando los resultados del apartado anterior, calcula las razones trigonométricas de: 105°; 165°; 15°; 195° y 135°.

a) $sen\ 75° = sen\ (30° + 45°) = sen\ 30°\ cos\ 45° + cos\ 30°\ sen\ 45° = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$cos\ 75° = cos\ (30° + 45°) = cos\ 30°\ cos\ 45° - sen\ 30°\ sen\ 45° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$$tg\ 75° = tg\ (30° + 45°) = \frac{tg\ 30° + tg\ 45°}{1 - tg\ 30°\ tg\ 45°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} = \sqrt{3} + 2$$

b) $sen\ 105° = sen\ (30° + 75°) = sen\ 30°\ cos\ 75° + cos\ 30°\ sen\ 75° = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

$cos\ 105° = cos\ (30° + 75°) = cos\ 30°\ cos\ 75° - sen\ 30°\ sen\ 75° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$$tg\ 105° = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = -\sqrt{3} - 2$$

$sen\ 165° = sen\ (90° + 75°) = sen\ 90°\ cos\ 75° + cos\ 90°\ sen\ 75° = cos\ 75° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$cos\ 165° = cos\ (90° + 75°) = cos\ 90°\ cos\ 75° - sen\ 90°\ sen\ 75° = -sen\ 75° = \dfrac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$$tg\ 165° = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \sqrt{3} - 2$$

$sen\ 15° = sen\ (90° - 75°) = sen\ 90°\ cos\ 75° - cos\ 90°\ sen\ 75° = cos\ 75° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$cos\ 15° = cos\ (90° - 75°) = cos\ 90°\ cos\ 75° + sen\ 90°\ sen\ 75° = sen\ 75° = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$$tg\ 15° = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = 2 - \sqrt{3}$$

$sen\ 195° = sen\ (270° - 75°) = sen\ 270°\ cos\ 75° - cos\ 270°\ sen\ 75° = -cos\ 75° = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$cos\ 195° = (cos\ 270° - 75°) = cos\ 270°\ cos\ 75° + sen\ 270°\ sen\ 75° = -sen\ 75° = \dfrac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$$tg\ 195° = \frac{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{-\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

$sen\ 135° = sen\ (180° - 45°) = sen\ 180°\ cos\ 45° - cos\ 180°\ sen\ 45° = sen\ 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 135° = cos\ (180° - 45°) = cos\ 180°\ cos\ 45° + sen\ 180°\ sen\ 45° = -cos\ 45° = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 135° = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = -1$

5 **Desarrolla, en función de las razones trigonométricas de α, y simplifica las siguientes expresiones:**

a) $sen\ (45° + \alpha) - cos\ (\alpha - 45°)$

b) $\dfrac{cos\ 2\alpha}{cos\ \alpha + sen\ \alpha}$

c) $(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 - 2\ sen\ \alpha + cos\ 2\alpha$

d) $cos^2 \dfrac{\alpha}{2} \cdot sen^2 \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{4} cos^2\ \alpha$

a) $sen\ (45° + \alpha) - cos\ (\alpha - 45°) = sen\ 45°\ cos\ \alpha + cos\ 45°\ sen\ \alpha - (cos\ \alpha\ cos\ 45° + sen\ \alpha\ sen\ 45°) =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} cos\ \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} sen\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} cos\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} sen\ \alpha = 0$$

b) $\dfrac{cos\ 2\alpha}{cos\ \alpha + sen\ \alpha} = \dfrac{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha}{cos\ \alpha + sen\ \alpha} = \dfrac{(cos\ \alpha + sen\ \alpha)\ (cos\ \alpha - sen\ \alpha)}{cos\ \alpha + sen\ \alpha} = cos\ \alpha - sen\ \alpha$

c) $(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 - 2\ sen\ \alpha + cos\ 2\alpha = sen^2\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha - 2\ sen\ \alpha + cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha =$

$$= 2(cos^2\ \alpha + sen\ \alpha\ cos\ \alpha - sen\ \alpha)$$

d) $cos^2 \dfrac{\alpha}{2} \cdot sen^2 \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{4} cos^2\ \alpha = \left(\pm\sqrt{\dfrac{1 + cos\ \alpha}{2}}\right)^2 \cdot \left(\pm\sqrt{\dfrac{1 - cos\ \alpha}{2}}\right)^2 + \dfrac{1}{4} cos^2\ \alpha =$

$$= \frac{1 + cos\ \alpha}{2} \cdot \frac{1 - cos\ \alpha}{2} + \frac{1}{4} cos^2\ \alpha = \frac{1 - cos^2\ \alpha}{4} + \frac{cos^2\ \alpha}{4} = \frac{1}{4}$$

6 **Sabiendo que $cos\ \alpha = \dfrac{-7}{25}$ $(180° < \alpha < 270°)$ y $tg\ \beta = \dfrac{4}{3}$ $(180° < \beta < 270°)$, calcula $tg\ \dfrac{\alpha + \beta}{2}$.**

Usamos la relación $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$ para calcular $sen\ \alpha$:

$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha + \dfrac{49}{625} = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha = \dfrac{576}{625} \rightarrow sen\ \alpha = -\dfrac{24}{25}$ porque el ángulo está en el 3.^{er} cuadrante.

$\dfrac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = \dfrac{4}{3} \rightarrow sen\ \beta = \dfrac{4}{3} cos\ \beta$

$sen^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \rightarrow \dfrac{16}{9} cos^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \rightarrow \dfrac{25}{9} cos^2\ \beta = 1 \rightarrow cos^2\ \beta = \dfrac{9}{25} \rightarrow cos\ \beta = -\dfrac{3}{5}$ porque también pertenece al tercer cuadrante.

$sen\ \beta = \dfrac{4}{3} \cdot \left(-\dfrac{3}{5}\right) = -\dfrac{4}{5}$

Como $360° < \alpha + \beta < 540°$, dividiendo las desigualdades entre 2 tenemos que $180° < \dfrac{\alpha + \beta}{2} < 270°$.

Por tanto, $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ pertenece al tercer cuadrante y la tangente de $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ es positiva.

Calculamos $cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta = \dfrac{-7}{25} \cdot \dfrac{-3}{5} - \dfrac{-24}{25} \cdot \dfrac{-4}{5} = -\dfrac{3}{5}$

Por tanto, $tg\ \dfrac{\alpha + \beta}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\ (\alpha + \beta)}{1 + cos\ (\alpha + \beta)}} = \sqrt{\dfrac{1 - (3/5)}{1 + (-3/5)}} = 2$

7 **Si $tg\,\frac{\alpha}{2} = -3$ y $\alpha < 270°$, halla $sen\,\alpha$, $cos\,\alpha$ y $tg\,\alpha$.**

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = -3 \;\to\; \sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}} = -3 \;\to\; \frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha} = 9 \;\to$$

$$\to\; 1 - cos\,\alpha = 9 + 9\,cos\,\alpha \;\to\; 10\,cos\,\alpha = -8 \;\to\; cos\,\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$sen\,\alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$tg\,\alpha = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}$$

8 **Si $tg\,2\alpha = \sqrt{6}$ y $\alpha < 90°$, halla $sen\,\alpha$, $cos\,\alpha$ y $tg\,\alpha$.**

$$\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha} = \sqrt{6} \;\to\; 2\,tg\,\alpha = \sqrt{6} - \sqrt{6}\,tg^2\,\alpha \;\to\; \sqrt{6}\,tg^2\,\alpha + 2\,tg\,\alpha - \sqrt{6} = 0 \;\to\; tg\,\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2\sqrt{6}} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{6}}$$

Como α está en el primer cuadrante, solo puede darse que $tg\,\alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$.

$$sen\,\alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}}\,cos\,\alpha$$

$$\left(\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}}\right)^2 cos^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \;\to\; \frac{8-2\sqrt{7}}{6}\,cos^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \;\to$$

$$\to\; \frac{7-\sqrt{7}}{3}\,cos^2\,\alpha = 1 \;\to\; cos^2\,\alpha = \frac{3}{7-\sqrt{7}} \;\to\; cos\,\alpha = \sqrt{\frac{3}{7-\sqrt{7}}}$$

$$sen\,\alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{3}{7-\sqrt{7}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{2(7-\sqrt{7})}}$$

9 **Expresa en función de α y simplifica esta expresión:**

$$sen^2\,\frac{\alpha}{2} - cos^2\,\frac{\alpha}{2} + 2\,sen\,(90 - \alpha)$$

$$sen^2\,\frac{\alpha}{2} - cos^2\,\frac{\alpha}{2} + 2\,sen\,(90° - \alpha) = \frac{1-cos\,\alpha}{2} - \frac{1+cos\,\alpha}{2} + 2\,(sen\,90°\,cos\,\alpha - cos\,90°\,sen\,\alpha) = -cos\,\alpha + 2\,cos\,\alpha = cos\,\alpha$$

10 **Transforma las siguientes sumas en productos:**

a) $sen\,65° + sen\,35°$ **b)** $sen\,65° - sen\,35°$ **c)** $cos\,48° + cos\,32°$

d) $cos\,48° - cos\,32°$ **e)** $\frac{1}{2} + sen\,50°$ **f)** $\frac{\sqrt{2}}{2} + cos\,75°$

a) $sen\,65° + sen\,35° = 2\,sen\,\frac{65°+35°}{2}\,cos\,\frac{65°-35°}{2} = 2\,sen\,50°\,cos\,15°$

b) $sen\,65° - sen\,35° = 2\,cos\,\frac{65°+35°}{2}\,sen\,\frac{65°-35°}{2} = 2\,cos\,50°\,sen\,15°$

c) $cos\,48° + cos\,32° = 2\,cos\,\frac{48°+32°}{2}\,cos\,\frac{48°-32°}{2} = 2\,cos\,40°\,cos\,8°$

d) $cos\,48° - cos\,32° = -2\,sen\,\frac{48°+32°}{2}\,sen\,\frac{48°-32°}{2} = -2\,sen\,40°\,sen\,8°$

e) $\frac{1}{2} + sen\,50° = sen\,30° + sen\,50° = 2\,sen\,\frac{30°+50°}{2}\,cos\,\frac{30°-50°}{2} = 2\,sen\,40°\,cos\,(-10°) = 2\,sen\,40°\,cos\,10°$

f) $\frac{\sqrt{2}}{2} + cos\,75° = cos\,45° + cos\,75° = 2\,cos\,\frac{45°+75°}{2}\,cos\,\frac{45°-75°}{2} = 2\,cos\,60°\,cos\,(-15°) = 2\,cos\,60°\,cos\,15°$

Identidades trigonométricas

11 **Demuestra las siguientes identidades teniendo en cuenta las relaciones fundamentales:**

a) $(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 - (sen\ \alpha - cos\ \alpha)^2 = 4\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$

b) $sen\ \alpha \cdot cos^2\ \alpha + sen^3\ \alpha = sen\ \alpha$

c) $\dfrac{sen\ \alpha}{1 + cos\ \alpha} + \dfrac{sen\ \alpha}{1 - cos\ \alpha} = \dfrac{2}{sen\ \alpha}$

d) $\dfrac{cos\ \alpha + sen\ \alpha}{cos\ \alpha - sen\ \alpha} \cdot cos\ 2\alpha = 1 + sen\ 2\alpha$

a) $(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 - (sen\ \alpha - cos\ \alpha)^2 = sen^2\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha - (sen^2\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha) =$

$= sen^2\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha - cos^2\ \alpha = 4\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$

b) $sen\ \alpha \cdot cos^2\ \alpha + sen^3\ \alpha = sen\ \alpha\ (cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha) = sen\ \alpha \cdot 1 = sen\ \alpha$

c) $\dfrac{sen\ \alpha}{1 + cos\ \alpha} + \dfrac{sen\ \alpha}{1 - cos\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha - sen\ \alpha\ cos\ \alpha + sen\ \alpha + sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{(1 + cos\ \alpha)\ (1 - cos\ \alpha)} = \dfrac{2\ sen\ \alpha}{1 - cos^2\ \alpha} = \dfrac{2\ sen\ \alpha}{sen^2\ \alpha} = \dfrac{2}{sen\ \alpha}$

d) $\dfrac{cos\ \alpha + sen\ \alpha}{cos\ \alpha - sen\ \alpha} \cdot cos\ 2\alpha = \dfrac{cos\ \alpha + sen\ \alpha}{cos\ \alpha - sen\ \alpha}(cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) = \dfrac{cos\ \alpha + sen\ \alpha}{cos\ \alpha - sen\ \alpha}(cos\ \alpha + sen\ \alpha)\ (cos\ \alpha - sen\ \alpha) =$

$= (cos\ \alpha + sen\ \alpha)\ (cos\ \alpha + sen\ \alpha) = cos^2\ \alpha + 2\ cos\ \alpha\ sen\ \alpha + sen^2\ \alpha =$

$= 1 + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha = 1 + sen\ 2\alpha$

12 **Prueba que son verdaderas las identidades siguientes:**

a) $cos\ (x + 60°) - cos\ (x + 120°) = cos\ x$

b) $tg\ (x + 45°) - tg\ (x - 45°) = \dfrac{2 + 2\ tg^2\ x}{1 - tg^2\ x}$

a) $cos\ (x + 60°) - cos\ (x + 120°) = cos\ x\ cos\ 60° - sen\ x\ sen\ 60° - (cos\ x\ cos\ 120° - sen\ x\ sen\ 120°) =$

$= cos\ x\ cos\ 60° - sen\ x\ sen\ 60° - cos\ x\ cos\ 120° + sen\ x\ sen\ 120° =$

$= cos\ x\ cos\ 60° - sen\ x\ sen\ 60° - cos\ x \cdot (-cos\ 60°) + sen\ x\ sen\ 60° =$

$= 2\ cos\ x\ cos\ 60° = 2 \cdot \dfrac{1}{2} cos\ x = cos\ x$

b) $tg\ (x + 45°) - tg\ (x - 45°) = \dfrac{tg\ x + tg\ 45°}{1 - tg\ x\ tg\ 45°} - \dfrac{tg\ x - tg\ 45°}{1 + tg\ x\ tg\ 45°} = \dfrac{tg\ x + 1}{1 - tg\ x} - \dfrac{tg\ x - 1}{1 + tg\ x} =$

$= \dfrac{1 + 2\ tg\ x + tg^2\ x - (-1 + 2\ tg\ x - tg^2\ x)}{(1 - tg\ x)\ (1 + tg\ x)} = \dfrac{2 + 2\ tg^2\ x}{1 - tg^2\ x}$

13 **Comprueba que se verifican las dos identidades siguientes:**

a) $sen\ \alpha\ sen\ (\alpha + \beta) + cos\ \alpha\ cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \beta$

b) $\dfrac{sen\ (\alpha + \beta)}{sen\ (\alpha - \beta)} = \dfrac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{tg\ \alpha - tg\ \beta}$

* ***En b), divide numerador y denominador entre*** $cos\ \alpha\ cos\ \beta$**.**

a) $sen\ \alpha\ sen\ (\alpha + \beta) + cos\ \alpha\ cos\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha\ (sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta) + cos\ \alpha\ (cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta) =$

$= sen^2\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ cos\ \alpha\ sen\ \beta + cos^2\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \alpha\ sen\ \beta =$

$= (sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha)\ cos\ \beta = cos\ \beta$

b) $\dfrac{sen\ (\alpha + \beta)}{sen\ (\alpha - \beta)} = \dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta}{sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta} = \dfrac{\dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}}{\dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}} = \dfrac{\dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta} + \dfrac{cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}}{\dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta} - \dfrac{cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}} = \dfrac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{tg\ \alpha - tg\ \beta}$

14 **Demuestra.**

a) $tg\ \alpha + \dfrac{1}{tg\ \alpha} = \dfrac{2}{sen\ 2\alpha}$

b) $2\ tg\ \alpha\ cos^2\ \dfrac{\alpha}{2} - sen\ \alpha = tg\ \alpha$

a) $tg\ \alpha + \dfrac{1}{tg\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} + \dfrac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \dfrac{sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha}{sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \dfrac{1}{sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \dfrac{2}{2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \dfrac{2}{sen\ 2\alpha}$

b) $2\ tg\ \alpha\ cos^2 \dfrac{\alpha}{2} - sen\ \alpha = 2\ \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \cdot \dfrac{1 + cos\ \alpha}{2} - sen\ \alpha = \dfrac{2}{2}\ \dfrac{sen\ \alpha + sen\ \alpha\ cos\ \alpha - sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$

15 **Demuestra.**

a) $\boldsymbol{cos\ (\alpha + \beta)\ cos\ (\alpha - \beta) = cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha}$

b) $\boldsymbol{sen\ (\alpha + \beta)\ sen\ (\alpha - \beta) = sen^2\ \alpha - sen^2\ \beta}$

a) $cos\ (\alpha + \beta)\ cos\ (\alpha - \beta) = (cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta)\ (cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta) =$

$= cos^2\ \alpha\ cos^2\ \beta + cos\ \alpha\ cos\ \beta\ sen\ \alpha\ sen\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta\ cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen^2\ \alpha\ sen^2\ \beta =$

$= cos^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha\ sen^2\ \beta = (1 - sen^2\ \alpha)\ cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha\ (1 - cos^2\ \beta) =$

$= cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha + sen^2\ \alpha\ cos^2\ \beta = cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha$

b) $sen\ (\alpha + \beta)\ sen\ (\alpha - \beta) = (sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta)\ (sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta) =$

$= sen^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - sen\ \alpha\ cos\ \beta\ cos\ \alpha\ sen\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta\ sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos^2\ \alpha\ sen^2\ \beta =$

$= sen^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - cos^2\ \alpha\ sen^2\ \beta = sen^2\ \alpha\ (1 - sen^2\ \beta) - (1 - sen^2\ \alpha)\ sen^2\ \beta =$

$= sen^2\ \alpha - sen^2\ \alpha\ sen^2\ \beta - sen^2\ \beta + sen^2 \alpha\ sen^2\ \beta = sen^2\ \alpha - sen^2 \beta$

16 **Demuestra las siguientes igualdades:**

a) $\boldsymbol{\dfrac{2\ sen\ \alpha}{tg\ 2\alpha} + \dfrac{sen^2\ \alpha}{cos\ \alpha} = cos\ \alpha}$

b) $\boldsymbol{\dfrac{1 - cos\ 2\alpha}{sen^2\ \alpha + cos\ 2\alpha} = 2\ tg^2\ \alpha}$

c) $\boldsymbol{sen\ 2\alpha\ cos\ \alpha - sen\ \alpha\ cos\ 2\alpha = sen\ \alpha}$

d) $\boldsymbol{\dfrac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = tg^2\ \dfrac{\alpha}{2}}$

e) $\boldsymbol{\dfrac{sen\ 2\alpha}{1 + cos\ 2\alpha} = tg\ \alpha}$

a) $\dfrac{2\ sen\ \alpha}{tg\ 2\alpha} + \dfrac{sen^2\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{2\ sen\ \alpha\,(1 - tg^2\ \alpha)}{2\ tg\ \alpha} + \dfrac{sen^2\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha\ \dfrac{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha}}{\dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}} + \dfrac{sen^2\ \alpha}{cos\ \alpha} =$

$= \dfrac{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha}{cos\ \alpha} + \dfrac{sen^2\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{cos^2\ \alpha}{cos\ \alpha} = cos\ \alpha$

b) $\dfrac{1 - cos\ 2\alpha}{sen^2\ \alpha + cos\ 2\alpha} = \dfrac{1 - (cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha)}{sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha} = \dfrac{1 - cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} = \dfrac{2\ sen^2 \alpha}{cos^2\ \alpha} = 2\ tg^2\ \alpha$

c) $sen\ 2\alpha\ cos\ \alpha - sen\ \alpha\ cos\ 2\alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha\ cos\ \alpha - sen\ \alpha\,(cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) =$

$= 2\ sen\ \alpha\ cos^2\ \alpha - sen\ \alpha\ cos^2\ \alpha + sen^3\ \alpha = sen\ \alpha\ cos^2\ \alpha + sen^3\ \alpha =$

$= sen\ \alpha\,(cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha) = sen\ \alpha$

d) $\dfrac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = \dfrac{2\ sen\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \dfrac{2\ sen\ \alpha\,(1 - cos\ \alpha)}{2\ sen\ \alpha\,(1 + cos\ \alpha)} = \dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha} = tg^2\ \dfrac{\alpha}{2}$

e) $\dfrac{sen\ 2\alpha}{1 + cos\ 2\alpha} = \dfrac{2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{1 + cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha} \overset{(*)}{=} \dfrac{2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha} = \dfrac{2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{2\ cos^2\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$

(*) $1 = cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha\ \rightarrow\ -sen^2\ \alpha = cos^2\ \alpha - 1$

17 **Comprueba, sin utilizar la calculadora, las siguientes igualdades.**

a) $\boldsymbol{sen\ 130° + sen\ 50° = 2\ cos\ 40°}$

b) $\boldsymbol{cos\ 75° - cos\ 15° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

a) $sen\ 130° + sen\ 50° = 2\ sen\ \dfrac{130° + 50°}{2}\ cos\ \dfrac{130° - 50°}{2} = 2\ sen\ 90°\ cos\ 40° = 2\ cos\ 40°$

b) $cos\ 75° - cos\ 15° = -2\ sen\ \dfrac{75° + 15°}{2}\ sen\ \dfrac{75° - 15°}{2} = -2\ sen\ 45°\ sen\ 30° = -2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Página 143

Ecuaciones trigonométricas

18 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $2\ sen^2\ x = 1$ **b)** $3\ tg^2\ x - 1 = 0$ **c)** $1 - 4\ cos^2\ x = 0$ **d)** $3\ tg\ x + 4 = 0$

a) $2\ sen^2\ x = 1 \rightarrow sen^2\ x = \frac{1}{2} \rightarrow sen\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $sen\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 45° + 360° \cdot k;\ x = 135° + 360° \cdot k$
- Si $sen\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 225° + 360° \cdot k;\ x = 315° + 360° \cdot k$

Es decir, las soluciones son todos los ángulos del tipo $x = 45° + 90° \cdot k$

b) $3\ tg^2\ x - 1 = 0 \rightarrow tg^2\ x = \frac{1}{3} \rightarrow tg\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

- Si $tg\ x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 30° + 360° \cdot k;\ x = 210° + 360° \cdot k$
- Si $tg\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 150° + 360° \cdot k;\ x = 330° + 360° \cdot k$

c) $1 - 4\ cos^2\ x = 0 \rightarrow cos^2\ x = \frac{1}{4} \rightarrow cos\ x = \pm\frac{1}{2}$

- Si $cos\ x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60° + 360° \cdot k;\ x = 300° + 360° \cdot k$
- Si $cos\ x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120° + 360° \cdot k;\ x = 240° + 360° \cdot k$

d) $3\ tg\ x + 4 = 0 \rightarrow tg\ x = -\frac{4}{3} \rightarrow x = 126°\ 52'\ 12'' + 360° \cdot k;\ x = 306°\ 52'\ 12'' + 360° \cdot k$

19 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $2\ cos^2\ x - sen^2\ x + 1 = 0$

b) $sen^2\ x - sen\ x = 0$

c) $2\ cos^2\ x - \sqrt{3}\ cos\ x = 0$

a) $\left.2\ cos^2\ x \underbrace{-\ sen^2\ x + 1}_{cos^2\ x} = 0\right\} \rightarrow 2\ cos^2\ x - cos^2\ x = 0$

$cos^2 = 0 \rightarrow cos\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{cases}$

Al comprobarlas en la ecuación inicial, las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Lo que podemos expresar como:

$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $sen\ x\ (sen\ x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} sen\ x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 180° \\ sen\ x = 1 \rightarrow x_3 = 90° \end{cases}$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que las tres son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi \\ x_3 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, de otra forma:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k\,\pi = k \cdot 180° \\ x_3 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi = 90° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

(x_1 así incluye las soluciones x_1 y x_2 anteriores)

c) $cos\ x\,(2\,cos\ x - \sqrt{3}) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} cos\ x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 90°,\ x_2 = 270° \\ cos\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; x_3 = 30°,\ x_4 = 330° \end{cases}$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_3 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_4 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

NOTA: Obsérvese que las dos primeras soluciones podrían escribirse como una sola de la siguiente forma:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$$

20 **Resuelve.**

a) $\boldsymbol{sen^2\ x - cos^2\ x = 1}$ **b)** $\boldsymbol{cos^2\ x - sen^2\ x = 0}$ **c)** $\boldsymbol{2\ cos^2\ x + sen\ x = 1}$ **d)** $\boldsymbol{3\ tg^2\ x - \sqrt{3}\ tg\ x = 0}$

a) $(1 - cos^2\ x) - cos^2\ x = 1 \;\rightarrow\; 1 - 2\,cos^2\ x = 1 \;\rightarrow\; cos^2\ x = 0 \;\rightarrow\; cos\ x = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{cases}$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $(1 - sen^2\ x) - sen^2\ x = 0 \;\rightarrow\; 1 - 2\,sen^2\ x = 0 \;\rightarrow\; sen^2\ x = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; sen\ x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $sen\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; x_1 = 45°,\ x_2 = 135°$
- Si $sen\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; x_3 = 225°,\ x_4 = 315°$

Comprobamos que todas las soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 45° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_2 = 135° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_3 = 225° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_4 = 315° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$x = 45° + k \cdot 90° = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $2(1 - sen^2\, x) + sen\, x = 1 \;\to\; 2 - 2\, sen^2\, x + sen\, x = 1 \;\to\; 2sen^2\, x - sen\, x - 1 = 0 \;\to$

$$\to\; sen\, x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \;\to\; x_1 = 90° \\ -1/2 \;\to\; x_2 = 210°,\; x_3 = 330° \end{cases}$$

Las tres soluciones son válidas, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 210° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_3 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $tg\, x\,(3\, tg\, x - \sqrt{3}) = 0 \;\to\; \begin{cases} tg\, x = 0 \;\to\; x_1 = 0°,\; x_2 = 180° \\ tg\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \;\to\; x_3 = 30°,\; x_4 = 210° \end{cases}$

Comprobamos las posibles soluciones en la ecuación inicial y vemos que las cuatro son válidas. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_4 = 210° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Lo que podría expresarse con solo dos soluciones que englobaran las cuatro anteriores:

$x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi$ y $x_2 = 30° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{6} + k\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

21 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\boldsymbol{sen\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) + cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \dfrac{1}{2}}$

b) $\boldsymbol{sen\, 2x - 2\, cos^2\, x = 0}$

c) $\boldsymbol{cos\, 2x - 3\, sen\, x + 1 = 0}$

d) $\boldsymbol{sen\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2}\, sen\, x = 0}$

a) $sen\,\dfrac{\pi}{6}\, cos\, x - cos\,\dfrac{\pi}{6}\, sen\, x + cos\,\dfrac{\pi}{3}\, cos\, x + sen\,\dfrac{\pi}{3}\, sen\, x = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\, cos\, x - \frac{\sqrt{3}}{2}\, sen\, x + \frac{1}{2}\, cos\, x + \frac{\sqrt{3}}{2}\, sen\, x = \frac{1}{2} \;\to\; \frac{1}{2}\, cos\, x + \frac{1}{2}\, cos\, x = \frac{1}{2} \;\to\; cos\, x = \frac{1}{2} \begin{cases} x_1 = \pi/3 \\ x_2 = 5\pi/3 \end{cases}$$

Comprobamos y vemos que:

$$x_1 \;\to\; sen\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = sen\left(-\frac{\pi}{6}\right) + cos\, 0 = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 \;\to\; sen\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) = sen\left(-\frac{3\pi}{3}\right) + cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Son válidas las dos soluciones. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2k\,\pi = 60° + k \cdot 360° \\ x_2 = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\,\pi = 300° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $2\, sen\, x\, cos\, x - 2\, cos^2\, x = 0 \;\to\; 2\, cos\, x\,(sen\, x - cos\, x) = 0 \;\to$

$$\to \begin{cases} cos\, x = 0 \;\to\; x_1 = 90°,\; x_2 = 270° \\ sen\, x = cos\, x \;\to\; x_3 = 45°,\; x_4 = 225° \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones. Todas son válidas.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_3 = 45° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_4 = 225° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

También podríamos expresarlas como:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi \\ x_2 = 45° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{4} + k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $cos^2 x - sen^2 x - 3\, sen\, x + 1 = 0 \;\to\; 1 - sen^2 x - sen^2 x - 3\, sen\, x + 1 = 0 \;\to$

$\to\; 1 - 2\, sen^2 x - 3\, sen\, x + 1 = 0 \;\to\; 2\, sen^2 x + 3\, sen\, x - 2 = 0 \;\to$

$\to\; sen\, x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \dfrac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \;\to\; x_1 = 30°,\; x_2 = 150° \\ -2 \;\to\; \text{¡Imposible!, } pues\ |sen\, x| \le 1 \end{cases}$

Comprobamos que la dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_2 = 150° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $sen\, \dfrac{\pi}{4}\, cos\, x + cos\, \dfrac{\pi}{4}\, sen\, x - \sqrt{2}\, sen\, x = 0 \;\to\; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, cos\, x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, sen\, x - \sqrt{2}\, sen\, x = 0$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\, cos\, x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, sen\, x = 0 \;\to\; cos\, x - sen\, x = 0 \;\to\; cos\, x = sen\, x \;\to\; x_1 = \dfrac{\pi}{4},\; x_2 = \dfrac{5\pi}{4}$

Al comprobar, podemos ver que ambas soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2k\,\pi = 45° + k \cdot 360° \\ x_2 = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\,\pi = 225° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos agrupar las dos soluciones en: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\,\pi = 45° + k \cdot 180°$ con $k \in \mathbb{Z}$

22 Resuelve.

a) $\boldsymbol{cos^2 \dfrac{x}{2} + cos\, x - \dfrac{1}{2} = 0}$

b) $\boldsymbol{tg^2 \dfrac{x}{2} + 1 = cos\, x}$

c) $\boldsymbol{2\, sen^2 \dfrac{x}{2} + cos\, 2x = 0}$

d) $\boldsymbol{4\, sen^2 x\, cos^2 x + 2\, cos^2 x - 2 = 0}$

a) $\dfrac{1 + cos\, x}{2} + cos\, x - \dfrac{1}{2} = 0 \;\to\; 1 + cos\, x + 2\, cos\, x - 1 = 0 \;\to$

$\to\; 3\, cos\, x = 0 \;\to\; cos\, x = 0 \begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{cases}$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270 + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones: $x = 90° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}+1=\cos x \;\to\; 1-\cos x+1+\cos x=\cos x+\cos^2 x \;\to$

$\to\; 2=\cos x+\cos^2 x \;\to\; \cos^2 x+\cos x-2=0 \;\to$

$\to\; \cos x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2} \begin{cases} 1 \;\to\; x=0° \\ -2 \;\to\; \text{¡Imposible, pues } |\cos x|\le 1 \end{cases}$

Luego: $x=k\cdot 360°=2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$

c) $2\cdot\dfrac{1-\cos x}{2}+\cos^2 x-\text{sen}^2\, x=0 \;\to\; 1-\cos x+\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=0 \;\to$

$\to\; 1-\cos x+\cos^2 x-1+\cos^2 x=0 \;\to\; 2\cos^2 x-\cos x=0 \;\to$

$\to\; \cos x\,(2\cos x-1)=0 \;\to\; \begin{cases} \cos x=0 \;\to\; x_1=90°,\; x_2=270° \\ \cos x=1/2 \;\to\; x_3=60°,\; x_4=300° \end{cases}$

Se comprueba que son válidas todas. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=90°+k\cdot 360°=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ x_2=270°+k\cdot 360°=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi \\ x_3=60°+k\cdot 360°=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \\ x_4=300°+k\cdot 360°=\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones quedaría:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=90°+k\cdot 180°=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x_2=60°+k\cdot 360°=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \\ x_3=300°+k\cdot 360°=\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

d) $4(1-\cos^2 x)\cos^2 x+2\cos^2 x-2=0 \;\to\; 4\cos^2 x-4\cos^4 x+2\cos^2 x-2=0 \;\to$

$\to\; 4\cos^4 x-6\cos^2 x+2=0 \;\to\; 2\cos^4 x-3\cos^2 x+1=0$

Sea $\cos^2 x=z \;\to\; \cos^4 x=z^2$

Así:

$2z^2-3z+1=0 \;\to\; z=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\dfrac{3\pm 1}{4} \begin{cases} z_1=1 \;\to\; \cos x=\pm 1 \begin{cases} x_1=0° \\ x_2=180° \end{cases} \\ z_2=\dfrac{1}{2} \;\to\; \cos x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \begin{cases} x_3=45°,\; x_4=315° \\ x_5=135°,\; x_6=225° \end{cases} \end{cases}$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que todas son válidas. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=k\cdot 360°=2k\pi \\ x_2=180°+k\cdot 360°=\pi+2k\pi \\ x_3=45°+k\cdot 360°=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \\ x_4=315°+k\cdot 360°=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi \\ x_5=135°+k\cdot 360°=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi \\ x_6=225°+k\cdot 360°=\dfrac{7\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

O, agrupando las soluciones:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 45° + k \cdot 90° = \dfrac{\pi}{4} + k\,\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

23 **Transforma estas ecuaciones en otras equivalentes cuya incógnita sea $tg\,x$ y resuélvelas:**

a) $\boldsymbol{sen\,x + cos\,x = 0}$

b) $\boldsymbol{sen^2\,x - 2\sqrt{3}\;sen\,x\,cos\,x + 3\,cos^2\,x = 0}$

c) $\boldsymbol{sen^2\,x + sen\,x\,cos\,x = 0}$

a) Dividimos toda la ecuación entre $cos\,x$:

$$\frac{sen\,x}{cos\,x} + \frac{cos\,x}{cos\,x} = 0 \;\to\; tg\,x + 1 = 0 \;\to\; tg\,x = -1 \;\to\; x = 135° + 360° \cdot k;\, x = 315° + 360° \cdot k$$

b) Dividimos toda la ecuación entre $cos^2\,x$:

$$\frac{sen^2\,x}{cos^2\,x} - 2\sqrt{3}\,\frac{sen\,x\,cos\,x}{cos^2\,x} + 3\,\frac{cos^2\,x}{cos^2\,x} = 0 \;\to\; tg^2\,x - 2\sqrt{3}\,tg\,x + 3 = 0 \;\to$$

$$\to\; tg\,x = \frac{2\sqrt{3} \pm 0}{2} = \sqrt{3} \;\to\; x = 60° + 360° \cdot k;\;\; x = 240° + 360° \cdot k$$

c) Dividimos toda la ecuación entre $cos^2\,x$:

$$\frac{sen^2\,x}{cos^2\,x} + \frac{sen\,x\,cos\,x}{cos^2 x} = 0 \;\to\; tg^2\,x + tg\,x = 0 \;\to\; tg\,x\,(tg\,x + 1) = 0 \;\to \begin{cases} tg\,x = 0 \\ tg\,x = -1 \end{cases}$$

- Si $tg\,x = 0 \;\to\; x = 0° + 360° \cdot k;\;\; x = 180° + 360° \cdot k$
- Si $tg\,x = -1 \;\to\; x = 135° + 360° \cdot k;\;\; x = 315° + 360° \cdot k$

24 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\boldsymbol{\sqrt{3}\;cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) + cos\,(x - \pi) = 2}$

b) $\boldsymbol{cos\left(\dfrac{5\pi}{6} - x\right) + sen\,x - \sqrt{3}\;cos\,x = 0}$

c) $\boldsymbol{sen\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) + cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = 1}$

d) $\boldsymbol{cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) - \sqrt{3}\;sen\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 1}$

a) $\sqrt{3}\left(cos\,\dfrac{3\pi}{2}\,cos\,x - sen\,\dfrac{3\pi}{2}\,sen\,x\right) + cos\,x\,cos\,\pi + sen\,x\,sen\,\pi = 2 \;\to$

$\to\; \sqrt{3}\,sen\,x - cos\,x = 2 \;\to\; \sqrt{3}\,sen\,x - 2 = cos\,x$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$3\,sen^2\,x - 4\sqrt{3}\,sen\,x + 4 = cos^2\,x \;\to\; 3\,sen^2\,x - 4\sqrt{3}\,sen\,x + 4 = 1 - sen^2\,x \;\to$$

$$\to\; 4\,sen^2\,x - 4\sqrt{3}\,sen\,x + 3 = 0 \;\to\; sen\,x = \frac{4\sqrt{3} \pm 0}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\to$$

$$\to\; x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k;\;\; x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k$$

Ahora debemos comprobar las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

$x = \dfrac{\pi}{3} \;\to\; \sqrt{3} \cdot cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right) + cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \pi\right) = 1 \neq 2$ No vale.

$x = \dfrac{2\pi}{3} \;\to\; \sqrt{3} \cdot cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{2\pi}{3}\right) + cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - \pi\right) = 2$ Vale.

b) $cos\,\frac{5\pi}{6}\,cos\,x + sen\,\frac{5\pi}{6}\,sen\,x + sen\,x - \sqrt{3}\,cos\,x = 0 \;\to\; -\frac{\sqrt{3}\,cos\,x}{2} + \frac{sen\,x}{2} + sen\,x - \sqrt{3}\,cos\,x = 0 \;\to$

$$\to \frac{3}{2}\,sen\,x = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,cos\,x$$

Dividimos los dos miembros entre $cos\,x$:

$\frac{3}{2}\,tg\,x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \;\to\; tg\,x = \sqrt{3} \;\to\; x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k;\; x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi \cdot k$

c) $sen\,\frac{\pi}{4}\,cos\,x + cos\,\frac{\pi}{4}\,sen\,x + cos\,\frac{\pi}{4}\,cos\,x - sen\,\frac{\pi}{4}\,sen\,x = 1 \;\to$

$\to \frac{\sqrt{2}}{2}(cos\,x + sen\,x + cos\,x - sen\,x) = 1 \;\to\; 2\,cos\,x = \frac{2}{\sqrt{2}} \;\to$

$\to cos\,x = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\to\; x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k;\; x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi \cdot k$

d) $cos\,\frac{\pi}{3}\,cos\,x + sen\,\frac{\pi}{3}\,sen\,x - \sqrt{3}\left(sen\,\frac{\pi}{3}\,cos\,x - cos\,\frac{\pi}{3}\,sen\,x\right) = 1 \;\to$

$\to \frac{cos\,x}{2} + \frac{\sqrt{3}\,sen\,x}{2} - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}\,cos\,x}{2} - \frac{sen\,x}{2}\right) = 1 \;\to$

$\to cos\,x + \sqrt{3}\,sen\,x - 3\,cos\,x + \sqrt{3}\,sen\,x = 2 \;\to$

$\to -2\,cos\,x + 2\sqrt{3}\,sen\,x = 2 \;\to\; \sqrt{3}\,sen\,x = 1 + cos\,x$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$3\,sen^2\,x = 1 + 2\,cos\,x + cos^2\,x \;\to\; 3 - 3\,cos^2\,x = 1 + 2\,cos\,x + cos^2\,x \;\to$

$$\to 4\,cos^2\,x + 2\,cos\,x - 2 = 0 \;\to\; 2\,cos^2\,x + cos\,x - 1 = 0 \;\to\; cos\,x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

- Si $cos\,x = \frac{1}{2} \;\to\; x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k \;\to\; x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi \cdot k$
- Si $cos\,x = -1 \;\to\; x = \pi + 2\pi \cdot k$

Ahora debemos comprobar las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

- Si $x = \frac{\pi}{3} \;\to\; cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ Vale.
- Si $x = \frac{5\pi}{3} \;\to\; cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) = -2 \neq 1$ No vale.
- Si $x = \pi \;\to\; cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) - \sqrt{3} \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) = 1$ Vale.

25 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $cos\,2x + 3\,sen\,x = 2$

b) $tg\,2x \cdot tg\,x = 1$

c) $cos\,x\,cos\,2x + 2\,cos^2\,x = 0$

d) $2\,sen\,x = tg\,2x$

e) $\sqrt{3}\,sen\,\frac{x}{2} + cos\,x - 1 = 0$

f) $sen\,2x\,cos\,x = 6\,sen^3\,x$

g) $tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + tg\,x = 1$

a) $cos^2\,x - sen^2\,x + 3\,sen\,x = 2 \;\to\; 1 - sen^2\,x - sen^2\,x + 3\,sen\,x = 2 \;\to\; 2\,sen^2\,x - 3\,sen\,x + 1 = 0 \;\to$

$$\to sen\,x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} 1 \;\to\; x_1 = 90° \\ 1/2 \;\to\; x_2 = 30°,\; x_3 = 150° \end{cases}$$

Las tres soluciones son válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_3 = 150° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $\dfrac{2\,tg\,x}{1 - tg^2\,x} \cdot tg\,x = 1 \;\rightarrow\; 2\,tg^2\,x = 1 - tg^2\,x \;\rightarrow\; tg^2\,x = \dfrac{1}{3} \;\rightarrow\; tg\,x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 30°,\; x_2 = 210° \\ x_3 = 150°,\; x_4 = 330° \end{cases}$

Las cuatro soluciones son válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_2 = 210° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_3 = 150° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_4 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{6} + k\,\pi \\ x_2 = 150° + k \cdot 180° = \dfrac{5\pi}{6} + k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $cos\,x\,(cos^2\,x - sen^2\,x) + 2\,cos^2\,x = 0 \;\rightarrow\; cos\,x\,(cos^2\,x - 1 + cos^2\,x) + 2\,cos^2\,x = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2\,cos^3\,x - cos\,x + 2\,cos^2\,x = 0 \;\rightarrow\; cos\,x\,(2\,cos^2\,x + 2\,cos\,x - 1) = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} cos\,x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 90°,\; x_2 = 270° \\ cos\,x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \begin{array}{l} \approx -1{,}366 \;\rightarrow\; \text{¡Imposible!, pues } |\,cos\,x\,| \le -1 \\ \approx 0{,}366 \;\rightarrow\; x_3 = 68°\,31'\,51{,}1'',\; x_4 = 291°\,28'\,8{,}9'' \end{array} \end{cases}$$

Las soluciones son todas válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_3 = 68°\,31'\,51{,}5'' + k \cdot 360° \approx 0{,}38\pi + 2k\,\pi \\ x_4 = 291°\,28'\,8{,}9'' + k \cdot 360° \approx 1{,}62\pi + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupadas, serían:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi \\ x_2 = 68°\,31'\,51{,}1'' + k \cdot 360° \approx 0{,}38\pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 291°\,28'\,8{,}9'' + k \cdot 360° \approx 1{,}62\pi + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $2\,sen\,x = \dfrac{2\,tg\,x}{1 - tg^2\,x} \;\rightarrow\; 2\,sen\,x - 2\,sen\,x\,tg^2\,x = 2\,tg\,x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; sen\,x - sen\,x\,\dfrac{sen^2\,x}{cos^2\,x} = \dfrac{sen\,x}{cos\,x} \;\rightarrow\; sen\,x\,cos^2\,x - sen\,x\,sen^2\,x = sen\,x\,cos\,x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; sen\,x\,(cos^2\,x - sen^2\,x - cos\,x) = 0 \;\rightarrow\; sen\,x\,(cos^2\,x - 1 + cos^2 x - cos\,x) = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} sen\,x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0°,\; x_2 = 180° \\ 2\,cos^2\,x - cos\,x - 1 = 0° \;\rightarrow\; cos\,x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{array}{l} 1 \;\rightarrow\; x_3 = 0° = x_1 \\ -1/2 \;\rightarrow\; x_4 = 240°,\; x_5 = 120° \end{array} \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_4 = 240° + k \cdot 360° = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_5 = 120° + k \cdot 360° = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Que, agrupando soluciones, quedaría:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 120° + k \cdot 360° = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_3 = 240° + k \cdot 360° = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

e) $\sqrt{3}\,\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}} + \cos x - 1 = 0 \;\to\; \dfrac{3 - 3\cos x}{2} = (1 - \cos x)^2 \;\to$

$\to\; 3 - 3\cos x = 2\,(1 + \cos^2 x - 2\cos x) \;\to\; 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \;\to$

$$\to\; \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \;\to\; x_1 = 0° \\ -1/2 \;\to\; x_2 = 120°,\; x_3 = 240° \end{cases}$$

Al comprobar, vemos que las tres soluciones son válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 120° + k \cdot 360° = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_3 = 240° + k \cdot 360° = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

f) $2\,\text{sen}\,x\cos x\cos x = 6\,\text{sen}^3 x \;\to\; 2\,\text{sen}\,x\cos^2 x = 6\,\text{sen}^3 x \;\to$

$\to\; 2\,\text{sen}\,x\,(1 - \text{sen}^2 x) = 6\,\text{sen}^3 x \;\to\; 2\,\text{sen}\,x - 2\,\text{sen}^3 x = 6\,\text{sen}^3 x \;\to$

$\to\; \text{sen}\,x = 0 \;\to\; x_1 = 0°,\; x_2 = 180°$

$$\text{sen}^2 x = \frac{1}{4} \;\to\; \text{sen}\,x = \pm\frac{1}{2} \;\to\; \begin{cases} x_3 = 30°,\; x_4 = 150° \\ x_5 = 210°,\; x_6 = 330° \end{cases}$$

Comprobamos que todas las soluciones son válidas.

Damos las soluciones agrupando las dos primeras por un lado y el resto por otro:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 30° + k \cdot 90° = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

g) $\dfrac{tg\,(\pi/4) + tg\,x}{1 - tg\,(\pi/4)\,tg\,x} + tg\,x = 1 \;\to\; \dfrac{1 + tg\,x}{1 - tg\,x} + tg\,x = 1 \;\to\; 1 + tg\,x + tg\,x - tg^2 x = 1 - tg\,x \;\to$

$\to\; tg^2 x - 3\,tg\,x = 0 \;\to\; tg\,x\,(tg\,x - 3) = 0 \;\to$

$$\to \begin{cases} tg\,x = 0 \;\to\; x_1 = 0°,\; x_2 = 180° \\ tg\,x = 3 \;\to\; x_3 = 71°\,33'\,54{,}2'',\; x_4 = 251°\,33'\,54{,}2'' \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 71°\,33'\,54,2'' + k \cdot 360° \approx \dfrac{2\pi}{5} + 2k\,\pi \\ x_4 = 251°\,33'\,54,2'' + k \cdot 360° \approx \dfrac{7\pi}{5} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 71°\,33'\,54,2'' + k \cdot 180° \approx \dfrac{2\pi}{5} + k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Ángulos en radianes

26 Expresa en grados los siguientes ángulos dados en radianes:

$$\frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{3};\ \frac{4\pi}{9};\ \frac{3\pi}{5};\ 1{,}5;\ 3{,}2$$

$\frac{5\pi}{6}\,rad = \frac{5 \cdot 180°}{6} = 150°$ $\quad\frac{7\pi}{3}\,rad = \frac{7 \cdot 180°}{3} = 420°$ $\quad\frac{4\pi}{9}\,rad = \frac{4 \cdot 180°}{9} = 80°$

$\frac{3\pi}{5}\,rad = \frac{3 \cdot 180°}{5} = 108°$ $\quad 1{,}5\,rad = \frac{1{,}5 \cdot 180°}{\pi} = 85°\,56'\,37''$ $\quad 3{,}2\,rad = \frac{3{,}2 \cdot 180°}{\pi} = 183°\,20'\,47''$

27 Pasa a radianes los siguientes ángulos. Exprésalos en función de π:

135°; 210°; 108°; 72°; 126°; 480°

$$135° = \frac{135 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{4}\,rad$$

$$210° = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6}\,rad$$

$$108° = \frac{108 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{5}\,rad$$

$$72° = \frac{72 \cdot \pi}{180} = \frac{2\pi}{5}\,rad$$

$$126° = \frac{126 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{10}\,rad$$

$$480° = \frac{480 \cdot \pi}{180} = \frac{8\pi}{3}\,rad$$

28 Prueba que:

a) $4\,sen\,\frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\,cos\,\frac{\pi}{4} + cos\,\pi = 2$

b) $2\sqrt{3}\,sen\,\frac{2\pi}{3} + 4\,sen\,\frac{\pi}{6} - 2\,sen\,\frac{\pi}{2} = 3$

c) $sen\,\frac{2\pi}{3} - cos\,\frac{7\pi}{6} + tg\,\frac{4\pi}{3} + tg\,\frac{11\pi}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

a) $4\,sen\,\frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\,cos\,\frac{\pi}{4} + cos\,\pi = 4 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1) = 2 + 1 - 1 = 2$

b) $2\sqrt{3}\,sen\,\frac{2\pi}{3} + 4\,sen\,\frac{\pi}{6} - 2\,sen\,\frac{\pi}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 = 3 + 2 - 2 = 3$

c) $sen\,\frac{2\pi}{3} - cos\,\frac{7\pi}{6} + tg\,\frac{4\pi}{3} + tg\,\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

29 **Halla el valor exacto de cada una de estas expresiones sin utilizar la calculadora:**

a) $5\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 + 2\cos\pi - \cos\frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi$

b) $sen\frac{\pi}{4} + sen\frac{\pi}{2} + sen\,\pi$

c) $\cos\frac{5\pi}{3} + tg\frac{4\pi}{3} - tg\frac{7\pi}{6}$

d) $\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + sen\frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3}\,sen\frac{\pi}{3}$

Comprueba los resultados con calculadora.

a) $5 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot (-1) - 0 + 1 = -2$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$

c) $\frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

d) $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 3 = -2$

30 **Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos e indica, sin pasar a grados, en qué cuadrante está cada uno:**

a) 0,8 rad **b)** 3,2 rad **c)** 2 rad **d)** 4,5 rad

e) $\pi/8$ rad **f)** $7\pi/4$ rad **g)** $3\pi/5$ rad **h)** $1,2\pi$ rad

* ***Ten en cuenta que:*** $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$; $\pi \approx 3,14$; $\frac{3\pi}{2} \approx 4,7$; $2\pi \approx 6,28$.

Para saber en qué cuadrante está cada uno, podemos usar también los signos de las razones trigonométricas.

a) $sen\,0,8 = 0,72$ $\cos 0,8 = 0,50$ $tg\,0,8 = 1,03$ → Cuadrante I

b) $sen\,3,2 = -0,06$ $\cos 3,2 = -1$ $tg\,3,2 = 0,06$ → Cuadrante III

c) $sen\,2 = 0,91$ $\cos 2 = -0,42$ $tg\,2 = -2,19$ → Cuadrante II

d) $sen\,4,5 = -0,98$ $\cos 4,5 = -0,21$ $tg\,4,5 = 4,64$ → Cuadrante III

e) $sen\frac{\pi}{8} = 0,38$ $\cos\frac{\pi}{8} = 0,92$ $tg\frac{\pi}{8} = 0,41$ → Cuadrante I

f) $sen\frac{7\pi}{4} = -0,71$ $\cos\frac{7\pi}{4} = 0,71$ $tg\frac{7\pi}{4} = -1$ → Cuadrante IV

g) $sen\frac{3\pi}{5} = 0,95$ $\cos\frac{3\pi}{5} = -0,31$ $tg\frac{3\pi}{5} = -3,08$ → Cuadrante II

h) $sen\,1,2\pi = -0,59$ $\cos 1,2\pi = -0,81$ $tg\,1,2\pi = 0,73$ → Cuadrante III

31 **En cada caso halla, en radianes, dos valores para el ángulo α tales que:**

a) $sen\,\alpha = 0,32$

b) $\cos\alpha = 0,58$

c) $tg\,\alpha = -1,5$

d) $sen\,\alpha = -0,63$

a) $\alpha_1 = 0,33$; $\alpha_2 = 2,82$

b) $\alpha_1 = 0,95$; $\alpha_2 = 5,33$

c) $\alpha_1 = -0,98$; $\alpha_2 = 2,16$

d) $\alpha_1 = -0,68$; $\alpha_2 = 3,82$

Página 144

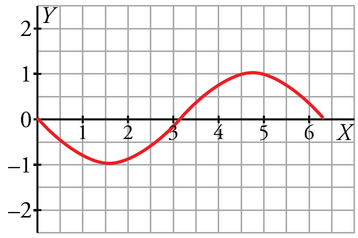
Para resolver

32 **Representa las siguientes funciones trigonométricas:**

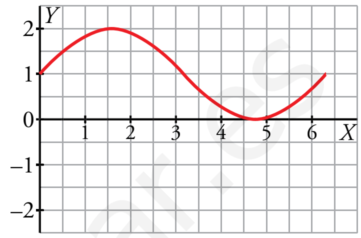
a) $y = -sen\ x$ **b)** $y = 1 + sen\ x$ **c)** $y = -cos\ x$ **d)** $y = 1 + cos\ x$

Todas estas funciones son periódicas, de período 2π. Están representadas en el intervalo $[0, 2\pi]$. A partir de aquí, se repite.

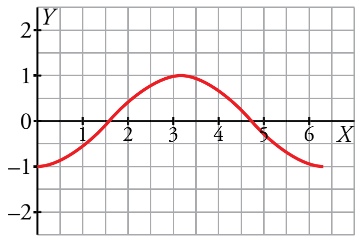
a) $y = -sen\ x$



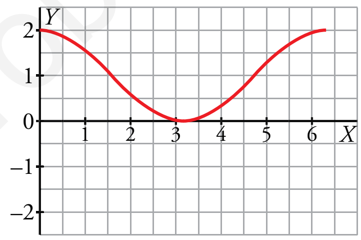
b) $y = 1 + sen\ x$



c) $y = -cos\ x$



d) $y = 1 + cos\ x$



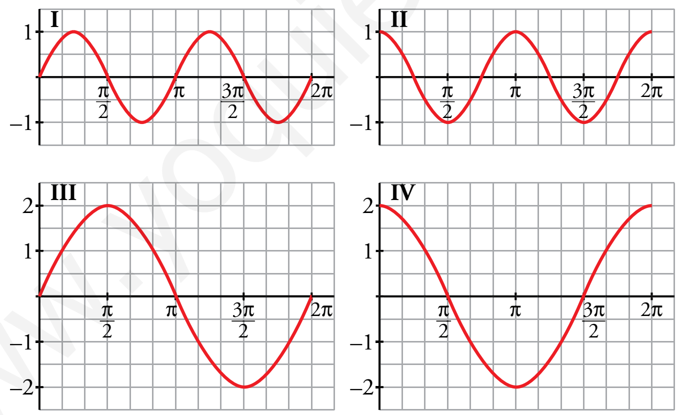
33 **Asocia a cada una de las siguientes funciones la gráfica que le corresponde:**

a) $y = 2\ sen\ x$

b) $y = cos\ 2x$

c) $y = 2\ cos\ x$

d) $y = sen\ 2x$



a) Grafica III. b) Gráfica II. c) Gráfica IV. d) Gráfica I.

34 **Halla los puntos de corte de las funciones** $y = sen\ x$ **e** $y = tg\ x$**.**

Los puntos de corte serán aquellos cuyas abscisas cumplan $sen\ x = tg\ x$.

Resolvemos la ecuación:

$$sen\ x - tg\ x = 0 \rightarrow sen\ x - \frac{sen\ x}{cos\ x} = 0 \rightarrow sen\ x\left(1 - \frac{1}{cos\ x}\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} sen\ x = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{cos\ x} = 0 \end{cases}$$

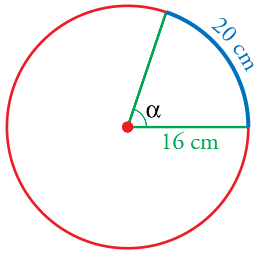
- Si $sen\ x = 0 \rightarrow x = 0 + 2\pi \cdot k;\ x = \pi + 2\pi \cdot k$
- Si $1 - \dfrac{1}{cos\ x} = 0 \rightarrow cos\ x = 1 \rightarrow x = 0 + 2\pi \cdot k$

En resumen, $x = \pi \cdot k$

En todos ellos tanto el seno como la tangente valen 0. Por tanto, los puntos de corte de las funciones son de la forma $(\pi \cdot k, 0)$.

35 **En una circunferencia de 16 cm de radio, un arco mide 20 cm. Halla el ángulo central que corresponde a ese arco en grados y en radianes.**

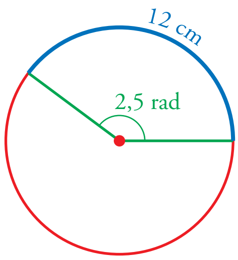
Como la circunferencia completa (100,53 cm) son 2π *rad*, entonces:



$$\frac{100,53}{20} = \frac{2\pi}{\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{20 \cdot 2\pi}{100,53} = 1,25\ rad$$

$$\alpha = \frac{360°}{2\pi} \cdot 1,25 = 71°\ 37'\ 11''$$

36 **En una determinada circunferencia, a un arco de 12 cm de longitud le corresponde un ángulo de 2,5 radianes. ¿Cuál es el radio de esa circunferencia?**



$$\frac{2,5\ rad}{1\ rad} = \frac{12\ \text{cm}}{R\ \text{cm}} \rightarrow R = \frac{12}{2,5} = 4,8\ \text{cm}$$

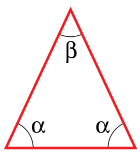
37 **Halla, en radianes, el ángulo comprendido entre 0 y 2π tal que sus razones trigonométricas coincidan con las de $\frac{19\pi}{5}$.**

Como $\frac{19}{5} = 3,8$, el ángulo α dado verifica $2\pi < \alpha < 4\pi$, luego tiene más de una vuelta completa y menos de dos vueltas.

Si le restamos una vuelta (2π) obtendremos el ángulo que nos piden.

Tiene las mismas razones trigonométricas que el ángulo $\frac{19\pi}{5} - 2\pi = \frac{9\pi}{5}$ y $0 < \frac{9\pi}{5}\ rad < 2\pi$.

38



Si en este triángulo isósceles sabemos que $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, calcula, sin hallar el ángulo α, el valor de $cos\ \beta$.

Para calcular $cos\ \beta$ necesitamos averiguar primero el valor de $sen\ \alpha$:

$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha + \frac{1}{8} = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha = \frac{7}{8} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{\frac{7}{8}}$ ya que es un ángulo agudo.

$$cos\ \beta = cos\ (180° - 2\alpha) = cos\ 180°\ cos\ 2\alpha + sen\ 180°\ sen\ 2\alpha = -cos\ 2\alpha = -(cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) = -\left(\frac{1}{8} - \frac{7}{8}\right) = \frac{3}{4}$$

39 **En un triángulo ABC conocemos $\hat{B} = 45°$ y $cos\ \hat{A} = -\frac{1}{5}$. Calcula, sin hallar los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$, las razones trigonométricas del ángulo $\hat{C}$.**

Calculamos primero las razones trigonométricas de $\hat{A}$ y de $\hat{B}$.

$sen^2\ \hat{A} + cos^2\ \hat{A} = 1 \rightarrow sen^2\ \hat{A} + \frac{1}{25} = 1 \rightarrow sen^2\ \hat{A} = \frac{24}{25} \rightarrow sen^2\ \hat{A} = \frac{\sqrt{24}}{5}$ ya que $\hat{A} < 180°$.

$$sen\ \hat{B} = sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad cos\ \hat{B} = cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\ \hat{C} = sen\ (180° - (\hat{A} + \hat{B})) = sen\ 180°\ cos\ (\hat{A} + \hat{B}) - cos\ 180°\ sen\ (\hat{A} + \hat{B}) = sen\ (\hat{A} + \hat{B}) =$$

$$= sen\ \hat{A}\ cos\ \hat{B} + cos\ \hat{A}\ sen\ \hat{B} = \frac{\sqrt{24}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{10}$$

$$\cos \hat{C} = \cos (180° - (\hat{A} + \hat{B})) = \cos 180° \cos (\hat{A} + \hat{B}) + \operatorname{sen} 180° \operatorname{sen} (\hat{A} + \hat{B}) = -\cos (\hat{A} + \hat{B}) =$$

$$= -(\cos \hat{A} \cos \hat{B} - \operatorname{sen} \hat{A} \operatorname{sen} \hat{B}) = -\left(-\frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{24}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{10}$$

$$tg\ \hat{C} = \frac{\operatorname{sen} \widehat{C}}{\cos \widehat{C}} = \frac{\frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{10}}{\frac{4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{10}} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{25 - 4\sqrt{6}}{23}$$

40 **Si $\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcula $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$, sin hallar el ángulo α.**

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \to \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \to 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \to 2\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \to$$

$\to \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \to \operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}}$ ya que el ángulo está en el cuarto cuadrante.

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{3 - \sqrt{3}}{6}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}}$ ya que el ángulo está en el cuarto cuadrante.

41 **Demuestra estas igualdades:**

a) $\frac{tg\ \alpha}{tg\ 2\alpha - tg\ \alpha} = \cos 2\alpha$ **b)** $\operatorname{sen} 4\alpha = 2 \operatorname{sen} 2\alpha\ (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha)$ **c)** $\cos 4\alpha + 2 \operatorname{sen}^2 2\alpha = 1$

a) $$\frac{tg\ \alpha}{tg\ 2\alpha - tg\ \alpha} = \frac{tg\ \alpha}{\frac{2\,tg\ \alpha}{1 - tg^2\ \alpha} - tg\ \alpha} = \frac{tg\ \alpha\,(1 - tg^2\ \alpha)}{2\,tg\ \alpha - tg\ \alpha\,(1 - tg^2\ \alpha)} = \frac{tg\ \alpha\,(1 - tg^2\ \alpha)}{tg\ \alpha + tg^3\ \alpha} =$$

$$= \frac{tg\ \alpha\,(1 - tg^2\ \alpha)}{tg\ \alpha\,(1 + tg^2\ \alpha)} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

b) $\operatorname{sen} 4\alpha = \operatorname{sen} (2 \cdot 2\alpha) = 2 \operatorname{sen} 2\alpha \cos 2\alpha = 2\operatorname{sen} 2\alpha\ (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) =$

$= 2 \operatorname{sen} 2\alpha\ (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = 2 \operatorname{sen} 2\alpha\ (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha)$

c) $\cos 4\alpha + 2 \operatorname{sen}^2 2\alpha = \cos (2 \cdot 2\alpha) + 2 \operatorname{sen}^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha - \operatorname{sen}^2 2\alpha + 2 \operatorname{sen}^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha + \operatorname{sen}^2 2\alpha = 1$

42 **Simplifica:**

a) $\frac{2 \cos (45° + \alpha) \cos (45° - \alpha)}{\cos 2\alpha}$ **b)** $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$

a) $$\frac{2 \cos (45° + \alpha) \cos (45° - \alpha)}{\cos 2\alpha} = \frac{2\,(\cos 45° \cos \alpha - \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} \alpha)\,(\cos 45° \cos \alpha + \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} \alpha)}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2\,(\cos^2 45° \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 45° \operatorname{sen}^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2 \cdot [(\sqrt{2}/2)^2 \cos^2 \alpha - (\sqrt{2}/2)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha]}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1/2 \cos^2 \alpha - 2 \cdot 1/2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = 1$$

b) $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos (2\alpha) - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} (2\alpha) = \operatorname{sen} \alpha\ (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - \cos \alpha\ 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha =$

$= \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha = -\operatorname{sen}^3 \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha =$

$= -\operatorname{sen} \alpha\ (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$

43 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\dfrac{sen\ 5x + sen\ 3x}{cos\ x + cos\ 3x} = 1$

b) $\dfrac{sen\ 3x + sen\ x}{cos\ 3x - cos\ x} = \sqrt{3}$

c) $sen\ 3x - sen\ x = cos\ 2x$

d) $sen\ 3x - cos\ 3x = sen\ x - cos\ x$

a) $$\frac{2\ sen \frac{5x+3x}{2} cos \frac{5x-3x}{2}}{2\ cos \frac{3x+x}{2} cos \frac{3x-x}{2}} = 1 \to \frac{2\ sen\ 4x\ cos\ x}{2\ cos\ 2x\ cos\ x} = 1 \to \frac{sen\ 4x}{cos\ 2x} = 1 \to \frac{sen\ (2 \cdot 2x)}{cos\ 2x} = 1 \to$$

$$\to \frac{2\ sen\ 2x\ cos\ 2x}{cos\ 2x} = 1 \to 2\ sen\ 2x = 1 \to sen\ 2x = \frac{1}{2} \to$$

$$\to \left. \begin{cases} 2x = 30° \to x_1 = 15° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 150° \to x_2 = 75° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 390° \to x_3 = 195° + k \cdot 360° = \dfrac{13\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 510° \to x_4 = 255° + k \cdot 360° = \dfrac{17\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Al comprobar, vemos que todas las soluciones son válidas.

b) $$\frac{2\ sen \frac{3x+x}{2} cos \frac{3x-x}{2}}{-2\ sen \frac{3x+x}{2} sen \frac{3x-x}{2}} = \sqrt{3} \to \frac{2\ sen\ 2x\ cos\ x}{-2\ sen\ 2x\ sen\ x} = \frac{cos\ x}{-sen\ x} = -\frac{1}{tg\ x} = \sqrt{3} \to tg\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \to \begin{cases} x_1 = 150° \\ x_2 = 330° \end{cases}$$

Ambas soluciones son válidas, luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 150° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= 330° + k \cdot 360° = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $2\ cos \dfrac{3x+x}{2}\ sen \dfrac{3x-x}{2} = cos\ 2x$

$2\ cos\ 2x\ sen\ x = cos\ 2x \to 2\ sen\ x = 1 \to sen\ x = \dfrac{1}{2} \to x_1 = 30°,\ x_2 = 150°$

Comprobando, vemos que las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 30° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= 150° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $sen\ 3x - sen\ x = cos\ 3x - cos\ x \to 2\ cos\ 2x\ sen\ x = -2\ sen\ 2x\ sen\ x \to$ (Dividimos entre $2\ sen\ x$)

$$\to cos\ 2x = -sen\ 2x \to \frac{sen\ 2x}{cos\ 2x} = -1 \to tg\ 2x = -1 \to$$

$$\to \left. \begin{cases} 2x = 315° \to x_1 = 157{,}5° + k \cdot 360° \\ 2x = 135° \to x_2 = 67{,}5° + k \cdot 360° \\ 2x = 675° \to x_3 = 337{,}5° + k \cdot 360° \\ 2x = 495° \to x_4 = 247{,}5° + k \cdot 360° \end{cases} \right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos comprobar que las cuatro soluciones son válidas. Agrupándolas:

$x = 67{,}5° + k \cdot 90°$ con $k \in \mathbb{Z}$

44 **a) Demuestra que** $\boldsymbol{sen\ 3x = 3\ sen\ x\ cos^2 x - sen^3 x}$. **b) Resuelve la ecuación** $\boldsymbol{sen\ 3x - 2\ sen\ x = 0}$.

a) $sen\ 3x = sen\ (2x + x) = sen\ 2x\ cos\ x + cos\ 2x\ sen\ x = 2\ sen\ x\ cos\ x\ cos\ x + (cos^2 x - sen^2 x)\ sen\ x =$

$= 2\ sen\ x\ cos^2 x + sen\ x\ cos^2 x - sen^3 x = 3\ sen\ x\ cos^2 x - sen^3 x$

b) $sen\ 3x - 2\ sen\ x = 0 \ \rightarrow$ por el resultado del apartado anterior:

$$3\ sen\ x\ cos^2 x - sen^3 x - 2\ sen\ x = 0 \ \rightarrow\ 3\ sen\ x\ (1 - sen^2 x) - sen^3 x - 2\ sen\ x = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 3\ sen\ x - 3\ sen^3 x - sen^3 x - 2\ sen\ x = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 4\ sen^3 x - sen\ x = 0 \ \rightarrow\ sen\ x\ (4\ sen^2 x - 1) = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} sen\ x = 0 \ \rightarrow\ x_1 = 0°,\ x_2 = 150° \\ sen\ x = \pm\dfrac{1}{2} \ \rightarrow\ x_3 = 30°,\ x_4 = 150°,\ x_5 = 210°,\ x_6 = 330° \end{cases}$$

Todas las soluciones son válidas y se pueden expresar como:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 30° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{6} + k\,\pi \\ x_3 = 150° + k \cdot 180° = \dfrac{5\pi}{6} + k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

45 **Demuestra las siguientes igualdades:**

a) $\boldsymbol{sen^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) - sen^2\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) = sen\ \alpha \cdot sen\ \beta}$ **b)** $\boldsymbol{cos^2\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) - cos^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = sen\ \alpha \cdot sen\ \beta}$

a) El primer miembro de la igualdad es una diferencia de cuadrados, luego podemos factorizarlo como una suma por una diferencia:

$$\left[sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] \cdot \left[sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] \overset{(*)}{=} \left[2\ sen\ \frac{\alpha}{2}\ cos\ \frac{\beta}{2}\right] \cdot \left[2\ cos\ \frac{\alpha}{2}\ sen\ \frac{\beta}{2}\right] =$$

$$= 4\sqrt{\frac{1-cos\ \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+cos\ \beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+cos\ \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1-cos\ \beta}{2}} =$$

$$= \sqrt{(1-cos\ \beta)\,(1+cos\ \beta)\,(1+cos\ \alpha)\,(1-cos\ \beta)} =$$

$$= \sqrt{(1-cos^2\ \alpha)\,(1-cos^2\ \beta)} = \sqrt{sen^2\ \alpha \cdot sen^2\ \beta} = sen\ \alpha\ sen\ \beta$$

(∗) Transformamos la suma y la diferencia en productos, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = \beta$$

b) Procedemos de manera análoga al apartado anterior, pero ahora:

$$\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} = -\beta$$

$$cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \left[cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] \cdot \left[cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] =$$

$$= \left[2\ cos\ \frac{\alpha}{2}\ cos\ \frac{-\beta}{2}\right] \cdot \left[-2\ sen\ \frac{\alpha}{2}\ sen\ \frac{-\beta}{2}\right] = \left[2\ cos\ \frac{\alpha}{2}\ cos\ \frac{\beta}{2}\right] \cdot \left[2\ sen\ \frac{\alpha}{2}\ sen\ \frac{\beta}{2}\right] =$$

$$= 4\sqrt{\frac{1+cos\ \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+cos\ \beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1-cos\ \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1-cos\ \beta}{2}} = \sqrt{(1-cos^2\ \alpha)\,(1-cos^2\ \beta)} = \sqrt{sen^2\ \alpha \cdot sen^2\ \beta} = sen\ \alpha\ sen\ \beta$$

NOTA: También podríamos haberlo resuelto aplicando el apartado anterior como sigue:

$$cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 1 - sen^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - 1 + sen^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$= sen^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \overset{(*)}{=} sen\ \alpha\ sen\ \beta$$

(∗) Por el apartado anterior.

46 **Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante:**

a) $\begin{cases} x + y = 120° \\ sen\ x - sen\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} sen\ x + cos\ y = 1 \\ x + y = 90° \end{cases}$ c) $\begin{cases} sen^2\ x + cos^2\ y = 1 \\ cos^2\ x - sen^2\ y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} sen\ x + cos\ y = 1 \\ 4\ sen\ x\ cos\ y = 1 \end{cases}$

a) De la segunda ecuación: $2\ cos\ \dfrac{x+y}{2}\ sen\ \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2}$

Como:

$x + y = 120° \to 2\ cos\ 60°\ sen\ \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2} \to 2 \cdot \dfrac{1}{2}\ sen\ \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2} \to$

$\to sen\ \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{x-y}{2} = 30° \to x - y = 60°$

Así: $x + y = 120°$

$x - y = 60°$

$2x = 180° \to x = 90° \to y = 30°$

Luego la solución es (90°, 30°)

b) $x + y = 90° \to$ complementarios $\to sen\ x = cos\ y$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$cos\ y + cos\ y = 1 \to 2\ cos\ y = 1 \to cos\ y = \dfrac{1}{2} \to y = 60° \to x = 90° - y = 90° - 60° = 30°$

Luego la solución es: (30°, 60°)

c) Como $\begin{cases} cos^2\ y = 1 - sen^2\ y \\ cos^2\ x = 1 - sen^2 x \end{cases}$

El sistema queda:

$\left.\begin{array}{l} sen^2\ x + 1 - sen^2\ y = 1 \\ 1 - sen^2\ x - sen^2\ y = 1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} sen^2\ x - sen^2\ y = 0 \\ -sen^2\ x - sen^2\ y = 0 \end{array}\right\}$

$-2\ sen^2\ y = 0 \to sen\ y = 0 \to y = 0°$

Sustituyendo en la segunda ecuación (por ejemplo) del sistema inicial, se obtiene:

$cos^2\ x - 0 = 1 \to cos^2\ x = 1 = \begin{cases} cos\ x = 1 \to x = 0° \\ cos\ x = -1 \to x = 180° \in 2.º \text{ cuadrante} \end{cases}$

Luego la solución es: (0°, 0°)

d) $\left.\begin{array}{r} sen\ x + cos\ y = 1 \\ 4\ sen\ x\ cos\ y = 1 \end{array}\right\}\ cos\ y = 1 - sen\ x$

$4\ sen\ x\ (1 - sen\ x) = 1 \to 4\ sen^2\ x - 4\ sen\ x + 1 = 0 \to sen\ x = \dfrac{4 \pm 0}{8} = \dfrac{1}{2} \to cos\ y = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Las diferentes posibilidades son:

$\begin{cases} x = 30° + 360° \cdot k \\ y = 60° + 360° \cdot k \end{cases}$

$\begin{cases} x = 30° + 360° \cdot k \\ y = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$

$\begin{cases} x = 150° + 360° \cdot k \\ y = 60° + 360° \cdot k \end{cases}$

$\begin{cases} x = 150° + 360° \cdot k \\ y = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$

47 **Sin desarrollar las razones trigonométricas de la suma o de la diferencia de ángulos, averigua para qué valores de *x* se verifica cada una de estas igualdades:**

a) ***sen*** **$(x - 60°) =$** ***sen*** **$2x$**

b) ***cos*** **$(x - 45°) =$** ***cos*** **$(2x + 60°)$**

c) ***sen*** **$(x + 60°) =$** ***cos*** **$(x + 45°)$**

d) ***cos*** **$(2x - 30°) =$** ***cos*** **$(x + 45°)$**

a) $sen\,(x - 60°) = sen\,2x \to sen\,2x - sen\,(x - 60°) = 0 \to$

$$\to 2\,cos\,\frac{2x + x - 60°}{2}\,sen\,\frac{2x - (x - 60°)}{2} = 0 \to cos\,\frac{3x - 60°}{2}\,sen\,\frac{x + 60°}{2} = 0$$

• Si $cos\,\dfrac{3x - 60°}{2} = 0 \to \begin{cases} \dfrac{3x - 60°}{2} = 90° \to x = 80° + 360° \cdot k \\ \dfrac{3x - 60°}{2} = 270° \to x = 200° + 360° \cdot k \end{cases}$

Si sumamos 360° encontramos otra solución:

$$\frac{3x - 60°}{2} = 90° + 360° \to x = 320° + 360° \cdot k$$

• Si $sen\,\dfrac{x + 60°}{2} = 0 \to \begin{cases} \dfrac{x + 60}{2} = 0° \to x = 300° + 360° \cdot k \\ \dfrac{x + 60°}{2} = 180° \to x = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$

b) $cos\,(x - 45°) = cos\,(2x + 60°) \to cos\,(2x + 60°) - cos\,(x - 45°) = 0 \to$

$$\to -2\,sen\,\frac{2x + 60° + x - 45°}{2}\,sen\,\frac{2x + 60° - (x - 45°)}{2} = 0 \to sen\,\frac{3x + 15°}{2}\,sen\,\frac{x + 105°}{2} = 0$$

• Si $sen\,\dfrac{3x + 15°}{2} = 0 \to \begin{cases} \dfrac{3x + 15°}{2} = 0° \to x = 355° + 360° \cdot k \\ \dfrac{3x + 15°}{2} = 180° \to x = 115° + 360° \cdot k \end{cases}$

Si sumamos 360° encontramos otra solución: $\dfrac{3x + 15°}{2} = 0° + 360° \to x = 235° + 360° \cdot k$

• Si $sen\,\dfrac{x + 105°}{2} = 0 \to \begin{cases} \dfrac{x + 105°}{2} = 0° \to x = 255° + 360° \cdot k \\ \dfrac{x + 105°}{2} = 180° \to x = 255° + 360° \cdot k \end{cases}$

c) $sen\,(x + 60°) = cos\,(x + 45°)$

Como $cos\,x = sen\,(x + 90°)$, podemos sustituir en el segundo miembro obteniendo:

$sen\,(x + 60°) = sen\,(x + 45° + 90°) \to sen\,(x + 60°) = sen\,(x + 135°) \to sen\,(x + 135°) - sen\,(x + 60°) = 0$

$$-2\,cos\,\frac{x + 135° + x + 60°}{2}\,sen\,\frac{x + 135° - (x + 60°)}{2} = 0 \to cos\,\frac{2x + 195°}{2}\,sen\,\frac{75°}{2} = 0 \to$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{2x + 195°}{2} = 90° \to x = 352°\,30' + 360° \cdot k \\ \dfrac{2x + 195°}{2} = 270° \to x = 172°\,30' + 360° \cdot k \end{cases}$$

d) $cos\,(2x - 30°) = cos\,(x + 45°) \to cos\,(2x - 30°) - cos\,(x + 45°) = 0 \to$

$$\to -2\,sen\,\frac{2x - 30° + x + 45°}{2}\,sen\,\frac{2x - 30° - (x + 45°)}{2} = 0 \to sen\,\frac{3x + 15°}{2}\,sen\,\frac{x - 75°}{2} = 0$$

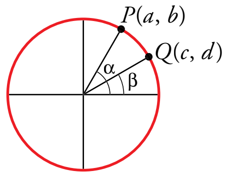
• Si $sen\,\dfrac{3x + 15°}{2} = 0 \to \begin{cases} \dfrac{3x + 15°}{2} = 0° \to x = 355° + 360° \cdot k \\ \dfrac{3x + 15°}{2} = 180° \to x = 115° + 360° \cdot k \end{cases}$

Si sumamos 360° encontramos otra solución: $\dfrac{3x + 15°}{2} = 0 + 360° \to x = 235° + 360° \cdot k$

• Si $sen\,\dfrac{x - 75°}{2} = 0 \to \begin{cases} \dfrac{x - 75°}{2} = 0° \to x = 75° + 360° \cdot k \\ \dfrac{x - 75°}{2} = 180° \to x = 75° + 360° \cdot k \end{cases}$

48 **En una circunferencia goniométrica dibujamos los ángulos α y β. Llamamos $\gamma = \alpha - \beta$.**

a) ¿Cuál de estas expresiones es igual a *sen* γ?



I. *ac* + *bd* II. *bc* – *ad* III. *ad* – *bc* IV. *ab* + *cd*

b) ¿Alguna de ellas es igual a *cos* γ?

a) $sen\ \gamma = sen\ (\alpha - \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta = ad - bc$ (III)

b) $cos\ \gamma = cos\ (\alpha - \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta = bd + ac$ (I)

Página 145

Cuestiones teóricas

49 **¿Cuál de las siguientes condiciones deben cumplir *x* e *y* para que se verifique *cos* (*x* + *y*) = 2 *cos x cos y*?**

(I) $x = y$ (II) $x - y = \pi$ (III) $x + y = \pi$ (IV) $x - y = \dfrac{\pi}{2}$

$cos\ (x + y) = cos\ x\ cos\ y - sen\ x\ sen\ y$

Si $cos\ (x + y) = 2\ cos\ x\ cos\ y \rightarrow cos\ x\ cos\ y - sen\ x\ sen\ y = 2\ cos\ x\ cos\ y \rightarrow -sen\ x\ sen\ y = cos\ x\ cos\ y$

Dividiendo entre $cos\ x\ cos\ y$ se obtiene que $\dfrac{-sen\ x\ sen\ y}{cos\ x\ cos\ y} = 1$, es decir, $-tg\ x\ tg\ y = 1$ y esto ocurre solo cuando se cumple (IV) porque despejando y tenemos: $y = x + \dfrac{\pi}{2}$, luego:

$$\left.\begin{array}{l} sen\ y = sen\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = cos\ x \\ cos\ y = cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -sen\ x \end{array}\right\} \rightarrow tg\ y = \frac{sen\ y}{cos\ y} = \frac{cos\ x}{-sen\ x} = -\frac{1}{\dfrac{sen\ x}{cos\ x}} = -\frac{1}{tg\ x}$$

50 **Expresa *sen* 4α y *cos* 4α en función de *sen* α y *cos* α.**

$sen\ 4\alpha = sen\ (2 \cdot 2\alpha) = 2\ sen\ 2\alpha\ cos\ \alpha = 2 \cdot 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha\ (cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) = 4\ cos^3\ \alpha\ sen\ \alpha - 4\ cos\ \alpha\ sen^3\ \alpha$

$cos\ 4\ \alpha = cos\ (2 \cdot 2\alpha) = cos^2\ \alpha - sen^2\ 2\alpha = (cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha)^2 - (2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha)^2 =$

$= cos^4\ \alpha - 2\ cos^2\ \alpha\ sen^2\ \alpha + sen^4\ \alpha - 4\ sen^2\ \alpha\ cos^2\ \alpha = cos^4\ \alpha - 6\ cos^2\ \alpha\ sen^2\ \alpha + sen^4\ \alpha$

51 **Al duplicarse un ángulo, ¿se duplica su seno? Prueba si se cumple *sen* 2*x* = 2 *sen x* para cualquier valor de *x*.**

La afirmación es falsa porque, por ejemplo, $sen\ 60° = \sqrt{3}\ sen\ 30° \neq 2\ sen\ 30°$.

Veamos ahora si existe algún ángulo que cumpla la relación $sen\ 2x = 2\ sen\ x$.

$2\ sen\ x\ cos\ x = 2\ sen\ x\ = \ sen\ x\ cos\ x - sen\ x = 0 \rightarrow sen\ x\ (cos\ x - 1) = 0$

- Si $sen\ x = 0 \rightarrow x = 0° + 360° \cdot k,\ x = 180° + 360° \cdot k$
- Si $cos\ x = 1 \rightarrow x = 0° + 360° \cdot k$ (solución botenida anteriormente)

Por tanto, los únicos ángulos que cumplen la relación dada son de la forma $180° \cdot k$.

52 **Justifica que en un triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, se verifica la siguiente igualdad:**

$sen\ 2B = sen\ 2C$

Como el triángulo es rectángulo en $\hat{A}$, se tiene que $\hat{B} = 90° - \hat{C}$ y, por tanto,

$sen\ \hat{B} = sen\ (90° - \hat{C}) = cos\ \hat{C}$ y $cos\ \hat{B} = cos\ (90° - \hat{C}) = sen\ \hat{C}$

Luego, $sen\ 2\hat{B} = 2\ sen\ \hat{B}\ cos\ \hat{B} = 2\ cos\ \hat{C}\ sen\ \hat{C} = sen\ 2\hat{C}$

53 **¿Para qué valores de α y β se verifica la igualdad *sen* ($\alpha + \beta$) = 2 *sen* α *cos* β?**

Como $sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta,\ sen\ (\alpha + \beta) = 2sen\ \alpha\ cos\ \beta \rightarrow$

$\rightarrow sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \beta \rightarrow cos\ \alpha\ sen\ \beta = sen\ \alpha\ cos\ \beta$

Esta relación es cierta, obviamente si $\alpha = \beta$.

Por otro lado, dividiendo entre $cos\ \alpha\ cos\ \beta$ se tiene que $\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{sen\ \beta}{cos\ \alpha}$, luego los ángulos α y β deben tener la misma tangente.

Esto ocurre cuando $\beta = \alpha + 180° \cdot k$ por la periodicidad de la función $y = tg\ x$.

Si $cos\ \alpha = 0$ entonces $0 = sen\ \alpha\ cos\ \beta \to cos\ \beta = 0$ ya que $sen\ \alpha = \pm 1$.

Por tanto, la relación también es cierta si α y β son simultáneamente de la forma $90° + 360° \cdot k$ o $270° + 360° \cdot k$.

En resumen, se verifica la igualdad cuando $\beta = \alpha + 180° \cdot k$.

54 **¿Qué relación existe entre las gráficas de $y = sen\ x$ e $y = cos\ x$ y la de cada una de las funciones siguientes?:**

a) $y = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $y = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **c)** $y = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **d)** $y = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

La relación que existe es que la gráfica de la función $y = cos\ x$ está desplazada horizontalmente hacia la izquierda $\frac{\pi}{2}$ unidades respecto de $sen\ x$.

a) Coincide con la gráfica de la función $y = cos\ x$.

b) Es la gráfica de la función $y = -sen\ x$.

c) Coincide con la gráfica de la función $y = sen\ x$.

d) Coincide con la gráfica de la función $y = cos\ x$.

(Además de comprobarse mediante la representación gráfica, puede probarse fácilmente usando las fórmulas de las razones trigonométricas de la suma o diferencia de ángulos).

55 **¿En qué puntos del intervalo [0, 4π] corta al eje X cada una de las siguientes funciones?:**

a) $y = cos\ \frac{x}{2}$ **b)** $y = sen\ (x - \pi)$ **c)** $y = cos\ (x + \pi)$

Los puntos de corte con el eje X son aquellos para los que $y = 0$.

a) $$cos\ \frac{x}{2} = 0 \to \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \to x = \pi \\ \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{2} \to x = 3\pi \end{cases}$$

b) $$sen\ (x - \pi) = 0 \to \begin{cases} x - \pi = -\pi \to x = 0 \\ x - \pi = 0 \to x = \pi \\ x - \pi = \pi \to x = 2\pi \\ x - \pi = 2\pi \to x = 3\pi \\ x - \pi = 3\pi \to x = 4\pi \end{cases}$$

c) $$y = cos\ (x + \pi) = 0 \to \begin{cases} x + \pi = \frac{3\pi}{2} \to x = \frac{\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{5\pi}{2} \to x = \frac{3\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{7\pi}{2} \to x = \frac{5\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{9\pi}{2} \to x = \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

Para profundizar

56 **Demuestra que si $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, se verifica: $tg\ \alpha + tg\ \beta + tg\ \gamma = tg\ \alpha \cdot tg\ \beta \cdot tg\ \gamma$**

$$tg\ \alpha + tg\ \beta + tg\ \gamma = tg\ \alpha + tg\ \beta + tg\ (360° - (\alpha + \beta)) = tg\ \alpha + tg\ \beta + \frac{tg\ 360° - tg\ (\alpha + \beta)}{1 + tg\ 360° \cdot tg\ (\alpha + \beta)} =$$

$$= tg\ \alpha + tg\ \beta - tg\ (\alpha + \beta) = tg\ \alpha + tg\ \beta - \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta - tg^2\ \alpha\ tg\ \beta - tg\ \alpha\ tg^2\ \beta - tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} =$$

$$= \frac{-tg^2\ \alpha\ tg\ \beta - tg\ \alpha\ tg^2 \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} = tg\ \alpha\ tg\ \beta\ \frac{-tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} = tg\ \alpha\ tg\ \beta\ [-tg\ (\alpha + \beta)] =$$

$$= tg\ \alpha\ tg\ \beta\ tg\ (360° - (\alpha + \beta)) = tg\ \alpha\ tg\ \beta\ tg\ \gamma$$

57 Prueba si existe algún triángulo isósceles en el que el coseno del ángulo distinto sea igual a la suma de los cosenos de los ángulos iguales.

Si llamamos x a cada uno de los ángulos iguales, entonces el ángulo desigual es $180° - 2x$.

Se trata de ver si la siguiente ecuación tiene solución: $cos\,(180° - 2x) = 2\,cos\,x$

Veámoslo:

$$cos\,180°\,cos\,2x + sen\,180°\,sen\,2x = 2\,cos\,x \to -cos\,2x = 2\,cos\,x \to -cos^2 x + sen^2 x = 2\,cos\,x \to$$

$$\to -cos^2 x + 1 - cos^2 x = 2\,cos\,x \to 2\,cos^2 x + 2\,cos\,x - 1 = 0 \to$$

$$\to cos\,x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Si $cos\,x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \to x = 68°\,31'\,45''$ tiene cada uno de los ángulos iguales y el ángulo desigual tiene $180° - 2 \cdot 68°\,31'\,45'' = 42°\,56'\,30''$

$cos\,x = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} > 1$ que no es posible porque el coseno de un ángulo no puede ser mayor que 1.

Luego no existe ningún triángulo con esas condiciones.

58 Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$:

a) $\begin{cases} cos\,x + cos\,y = -1/2 \\ cos\,x\,cos\,y = -1/2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = \pi/2 \\ \sqrt{3}\,cos\,x - cos\,y = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} sen\,x + sen\,y = \sqrt{3}/2 \\ sen^2 x + sen^2 y = 3/4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} sen\,x \cdot cos\,y = 1/4 \\ cos\,x \cdot sen\,y = 1/4 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} cos\,x + cos\,y = -\frac{1}{2} \\ cos\,x \cdot cos\,y = -\frac{1}{2} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} cos\,y = -\frac{1}{2} - cos\,x \\ cos\,x\left(-\frac{1}{2} - cos\,x\right) = -\frac{1}{2} \to -\frac{1}{2}\,cos\,x - cos^2 x = -\frac{1}{2} \to cos\,x + 2\,cos^2 x = 1 \end{array}$

$$2\,cos^2 x + cos\,x - 1 = 0 \to cos\,x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} \frac{-1-3}{4} = -1 \\ \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Si $cos\,x = -1 \to x = \pi$

  $cos\,y = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2} \begin{cases} y = \pi/3 \\ y = 5\pi/3 \end{cases}$

- Si $cos\,x = \frac{1}{2} \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \to cos\,y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \to y = \pi \end{cases}$

  Soluciones: $\left(\pi, \frac{\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{5\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \left(\frac{5\pi}{3}, \pi\right)$

b) $y = \frac{\pi}{2} - x$

$$\sqrt{3}\,cos\,x - cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 \to \sqrt{3}\,cos\,x - cos\,\frac{\pi}{2}\,cos\,x - sen\,\frac{\pi}{2}\,sen\,x = 1 \to \sqrt{3}\,cos\,x = sen\,x + 1$$

Elevamos al cuadrado:

$$3\,cos^2 x = sen^2 x + 2\,sen\,x + 1 \to 3\,(1 - sen^2 x) = sen^2 x + 2\,sen\,x + 1 \to 4\,sen^2 x + 2\,sen\,x - 2 = 0 \to$$

$$\to 2\,sen^2 x + sen\,x - 1 = 0 \to sen\,x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

- Si $sen\,x = \frac{1}{2} \to x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{5\pi}{6}$

  $x = \frac{\pi}{6} \to y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ y $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ vale.

  $x = \frac{5\pi}{6} \to y = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$ no puede ser porque no está en el intervalo dado.

- Si $sen\,x = -1 \to x = \frac{3\pi}{2} \to y = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = -\pi$ tampoco es posible por el mismo motivo.

c) Elevamos al cuadrado la primera ecuación:

$sen^2\, x + 2\, sen\, x\, sen\, y + sen^2\, y = \frac{3}{4} \to 2\, sen\, x\, sen\, y + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \to sen\, x\, sen\, y = 0$

Si $sen\, x = 0 \to x = 0,\ x = \pi$

Además, $sen\, y = \frac{\sqrt{3}}{2} \to y = \frac{\pi}{3},\ y = \frac{2\pi}{3}$

Sustituimos en el sistema para comprobarlas porque pueden aparecer soluciones falsas al elevar al cuadrado.

$\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{2\pi}{3}\right)$ Valen.

Si $sen\, y = 0 \to y = 0,\ y = \pi$

Además, $sen\, x = \frac{\sqrt{3}}{2} \to x = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{2\pi}{3}$

Sustituimos en el sistema para comprobarlas porque pueden aparecer soluciones falsas al elevar al cuadrado.

$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \left(\frac{2\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ Valen.

d) Elevamos al cuadrado la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$sen^2\, x\, cos^2\, y = \frac{1}{16} \to cos^2\, y = \frac{1}{16\, sen^2 x}$

$cos^2\, x\, sen^2\, y = \frac{1}{16} \to cos^2\, x\,(1 - cos^2\, y) = \frac{1}{16} \to cos^2\, x\left(1 - \frac{1}{16\, sen^2\, x}\right) = \frac{1}{16} \to$

$\to (1 - sen^2\, x)\left(1 - \frac{1}{16\, sen^2\, x}\right) = \frac{1}{16} \to 1 - \frac{1}{16\, sen^2\, x} - sen^2\, x + \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \to$

$\to 1 - \frac{1}{16\, sen^2\, x} - sen^2\, x = 0 \to 16\, sen^2\, x - 1 - 16\, sen^4\, x = 0 \to$

$\to 16\, sen^4\, x - 16\, sen^2\, x + 1 = 0 \to sen^2\, x = \frac{16 + \sqrt{192}}{32} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$

- Si $sen\, x = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \to cos\, y = \frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

  $x = 75°,\ x = 105°,\ y = 75°,\ y = 285°$

  Ahora comprobamos las soluciones porque al elevar al cuadrado pueden aparecer resultados falsos:

  (75°, 75°) $\to$ Vale.

  (75°, 285°) $\to$ No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

  (105°, 75°) $\to$ No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

  (105°, 285°) $\to$ Vale.

- Si $sen\, x = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \to cos\, y = -\frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

  $x = 285°,\ x = 255°,\ y = 105°,\ y = 255°$

  Ahora comprobamos las soluciones porque al elevar al cuadrado pueden aparecer resultados falsos:

  (285°, 105°) $\to$ Vale.

  (285°, 255°) $\to$ No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

  (255°, 105°) $\to$ No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

  (255°, 255°) $\to$ Vale.

59 **Demuestra que:**

a) $sen\ x = \dfrac{2\ tg\ (x/2)}{1 + tg^2\ (x/2)}$ b) $cos\ x = \dfrac{1 - tg^2\ (x/2)}{1 + tg^2\ (x/2)}$ c) $tg\ x = \dfrac{2\ tg\ (x/2)}{1 - tg^2\ (x/2)}$

a) Desarrollamos y operamos en el segundo miembro de la igualdad:

$$\frac{2\ tg\ \frac{x}{2}}{1 + tg^2\ \frac{x}{2}} = \frac{2\sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}}}{1 + \frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} = \frac{2\sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}}}{\frac{1 + cos\ x + 1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}}}{\frac{2}{1 + cos\ x}} = (1 + cos\ x)\sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} =$$

$$= \sqrt{(1 + cos\ x)^2\ \frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} = \sqrt{(1 + cos\ x)\ (1 - cos\ x)} = \sqrt{1 - cos^2\ x} = \sqrt{sen^2\ x} = sen\ x$$

b) $$\frac{1 - tg^2\ \frac{x}{2}}{1 + tg^2\ \frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}}{1 + \frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} = \frac{\frac{1 + cos\ x - 1 + cos\ x}{1 + cos\ x}}{\frac{1 + cos\ x + 1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} = \frac{2\ cos\ x}{2} = cos\ x$$

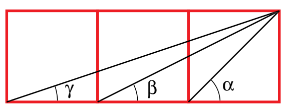
c) $$\frac{2\ tg\ \frac{x}{2}}{1 - tg^2\ \frac{x}{2}} = \frac{2\sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}}}{1 - \frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} = \frac{2\sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}}}{\frac{1 + cos\ x - 1 + cos\ x}{1 + cos\ x}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}}}{\frac{2\ cos\ x}{1 + cos\ x}} = \frac{1 + cos\ x}{cos\ x}\sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} =$$

$$= \frac{1}{cos\ x} \cdot \sqrt{(1 + cos\ x)^2\ \frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} = \frac{1}{cos\ x} \cdot \sqrt{(1 + cos\ x)\ (1 - cos\ x)} =$$

$$= \frac{1}{cos\ x}\sqrt{1 - cos^2\ x} = \frac{1}{cos\ x} \cdot \sqrt{sen^2\ x} = \frac{1}{cos\ x} \cdot sen\ x = tg\ x$$

60 **Demuestra que, en la siguiente figura,** $\alpha = \beta + \gamma$**:**



Supongamos que los cuadrados tienen lado l.

Por una parte,

$$tg\ \alpha = \frac{l}{l} = 1$$

Por otro lado,

$$tg\ (\beta + \gamma) = \frac{tg\ \beta + tg\ \gamma}{1 - tg\ \beta\ tg\ \gamma} = \frac{\frac{l}{2l} + \frac{l}{3l}}{1 - \frac{l}{2l} \cdot \frac{l}{3l}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$$

Así, α y $\beta + \gamma$ son dos ángulos comprendidos entre 0° y 90° cuyas tangentes coinciden. Por tanto, los ángulos tienen que ser iguales, es decir, $\alpha = \beta + \gamma$.

Autoevaluación

Página 145

1 **Si $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ y $\alpha < \pi$, halla:**

a) $\boldsymbol{sen\,\alpha}$ **b)** $\boldsymbol{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$ **c)** $\boldsymbol{tg\,\frac{\alpha}{2}}$ **d)** $\boldsymbol{sen\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}$

a) $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \to sen^2\alpha + \frac{1}{16} = 1 \to sen^2\alpha = \frac{15}{16} \to sen\,\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ya que el ángulo está en el 2.º cuadrante.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha - sen\frac{\pi}{3}\,sen\,\alpha = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-3\sqrt{5}-1}{8}$

c) $tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ porque $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$

d) $sen\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) = sen\frac{\pi}{6}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{6}\,sen\,\alpha = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-3\sqrt{5}-1}{8}$

2 **Demuestra cada una de estas igualdades:**

a) $\boldsymbol{tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}}$

b) $\boldsymbol{sen\,(\alpha+\beta)\cdot sen\,(\alpha-\beta) = sen^2\alpha - sen^2\beta}$

a) $tg\,2\alpha = \frac{sen\,2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2sen\,\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - sen^2\alpha} = \frac{\frac{2sen\,\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{1-\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$

b) $sen\,(\alpha+\beta)\cdot sen\,(\alpha-\beta) = (sen\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,sen\,\beta)\,(sen\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,sen\,\beta) =$

$= sen^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\,sen^2\beta = sen^2\alpha\,(1-sen^2\beta) - (1-sen^2\alpha)\,sen^2\beta =$

$= sen^2\alpha - sen^2\alpha\,sen^2\beta - sen^2\beta + sen^2\alpha\,sen^2\beta = sen^2\alpha - sen^2\beta$

3 **Resuelve:**

a) $\boldsymbol{\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = 1}$ **b)** $\boldsymbol{2\,tg\,x\cos^2\frac{x}{2} - sen\,x = 1}$

a) $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = 1$

$\cos^2 x - sen^2 x - (-sen\,x) = 1 \to 1 - sen^2 x - sen^2 x + sen\,x - 1 = 0 \to$

$\to -2\,sen^2 x + sen\,x = 0 \to sen\,x(-2\,sen\,x + 1) = 0 \begin{cases} sen\,x = 0 \to x = 0°,\ x = 180° \\ sen\,x = \frac{1}{2} \to x = 30°,\ x = 150° \end{cases}$

Soluciones:

$x_1 = 360°\cdot k;\ x_2 = 180° + 360°\cdot k;\ x_3 = 30° + 360°\cdot k;\ x_4 = 150° + 360°\cdot k,$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $2tg\,x\cos^2\frac{x}{2} - sen\,x = 1 \to 2tg\,x\,\frac{1+\cos x}{2} - sen\,x = 1 \to tg\,x + tg\,x\cos x - sen\,x = 1 \to$

$\to tg\,x + \frac{sen\,x}{\cos x}\cos x - sen\,x = 1 \to tg\,x = 1 \begin{cases} x_1 = 45° + 360°\cdot k \\ x_2 = 225° + 360°\cdot k \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

4 **Simplifica:**

a) $\dfrac{sen\ 60° + sen\ 30°}{cos\ 60° + cos\ 30°}$ **b)** $\dfrac{sen^2\ \alpha}{1 - cos\ \alpha}\left(1 + tg^2\ \dfrac{\alpha}{2}\right)$

a) $\dfrac{sen\ 60° + sen\ 30°}{cos\ 60° + cos\ 30°} = \dfrac{2\ sen\ \dfrac{60° + 30°}{2}\ cos\ \dfrac{60° - 30°}{2}}{2\ cos\ \dfrac{60° + 30°}{2}\ cos\ \dfrac{60° - 30°}{2}} = \dfrac{sen\ 45°}{cos\ 45°} = tg\ 45° = 1$

b) $\dfrac{sen^2\ \alpha}{1 - cos\ \alpha}\left(1 - tg^2\ \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{sen^2\ \alpha}{1 - cos\ \alpha}\left(1 + \dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}\right) = \dfrac{sen^2\ \alpha}{1 - cos\ \alpha}\left(\dfrac{2}{1 + cos\ \alpha}\right) = \dfrac{2sen^2\ \alpha}{1 - cos^2\ \alpha} = \dfrac{2sen^2\ \alpha}{sen^2\ \alpha} = 2$

5 **Expresa en grados:** $\dfrac{3\pi}{4}$ **rad,** $\dfrac{5\pi}{2}$ **rad, 2 rad.**

$\dfrac{3\pi}{4}$ rad = 135° $\dfrac{5\pi}{2}$ rad = 450° 2 rad = 114° 35' 30''

6 **Expresa en radianes dando el resultado en función de π y como número decimal.**

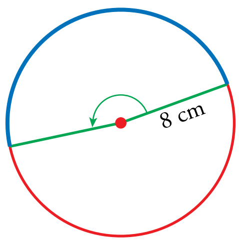
a) **60°** **b)** **225°** **c)** **330°**

a) $60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad = 1,05 rad

b) $225° = \dfrac{5\pi}{4}$ rad = 3,93 rad

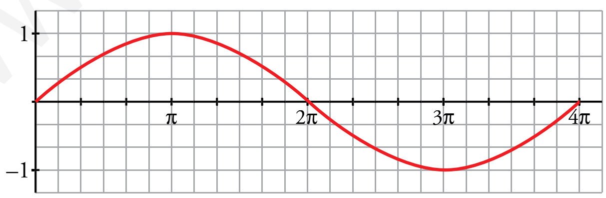
c) $330° = \dfrac{11\pi}{6}$ rad = 5,76 rad

7 **En una circunferencia de 16 cm de diámetro dibujamos un ángulo de 3 rad. ¿Qué longitud tendrá el arco correspondiente?**



$l = 8 \cdot 3 = 24$ cm

8 **Asocia a esta gráfica una de las siguientes expresiones y di cuál es su periodo:**



a) $y = \dfrac{sen\ x}{2}$ **b)** $y = sen\ 2x$ **c)** $y = sen\ \dfrac{x}{2}$

La función representada es de periodo 4π y se corresponde con la del apartado c).

Podemos comprobarlo estudiando algunos puntos. Por ejemplo:

$x = \pi \;\rightarrow\; y = sen\ \dfrac{\pi}{2} = 1$

$x = 2\pi \;\rightarrow\; y = sen\ \dfrac{2\pi}{2} = sen\ \pi = 0$

$x = 3\pi \;\rightarrow\; y = sen\ \dfrac{3\pi}{2} = -1$

$x = 4\pi \;\rightarrow\; y = sen\ \dfrac{4\pi}{2} = sen\ 2\pi = 0$

Resuelve

Página 147

¿Cómo operar con $\sqrt{-1}$?

Vamos a proceder como los antiguos algebristas: cuando nos encontremos con $\sqrt{-1}$ seguiremos adelante operando con ella con naturalidad y teniendo en cuenta que $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

1. Para comprobar que a y b son las raíces de un polinomio, podemos poner $(x-a)(x-b)$ y operar para obtener dicho polinomio. Por ejemplo, vamos a aplicar esta técnica para comprobar que $2 + 3\sqrt{-1}$ y $2 - 3\sqrt{-1}$ son las raíces del polinomio $x^2 - 4x + 13$:

$$[x - (2 + 3\sqrt{-1})][x - (2 - 3\sqrt{-1})] =$$
$$= x^2 - (2 + 3\sqrt{-1})x - (2 - 3\sqrt{-1})x + (2 + 3\sqrt{-1})(2 - 3\sqrt{-1}) =$$
$$= x^2 - 2x - 3\sqrt{-1}x - 2x + 3\sqrt{-1}x + 2^2 - (3\sqrt{-1})^2 = x^2 - 4x + 4 - 9 \cdot (-1) = x^2 - 4x + 13$$

■ **Halla las raíces de la ecuación $x^2 - 4x + 5$ y, aplicando la técnica que acabamos de ver, comprueba que efectivamente lo son.**

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = 2 \pm \sqrt{-1}$$

$$\left[x - (2 + \sqrt{-1})\right]\left[x - (2 - \sqrt{-1})\right] = x^2 - x(2 - \sqrt{-1}) - x(2 + \sqrt{-1}) + (2 + \sqrt{-1})(2 - \sqrt{-1}) =$$
$$= x^2 - 4x + 4 - 2\sqrt{-1} + 2\sqrt{-1} - (-1) = x^2 - 4x + 5$$

2. Comprobemos ahora que -8 tiene tres raíces cúbicas: -2, $1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}$ y $1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}$.

La primera es clara:

$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$

Veamos la segunda:

$$(1 + \sqrt{3}\sqrt{-1})^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot (\sqrt{3}\sqrt{-1}) + 3 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3}\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{3}\sqrt{-1})^3 =$$
$$= 1 + 3\sqrt{3}\sqrt{-1} + 3(\sqrt{3})^2(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{3})^3(\sqrt{-1})^3 =$$
$$= 1 + 3\sqrt{3}\sqrt{-1} + 9(-1) + 3\sqrt{3}(-1 \cdot \sqrt{-1}) =$$
$$= 1 + 3\sqrt{3}\sqrt{-1} - 9 - 3\sqrt{3}\sqrt{-1} = -8$$

■ **Comprueba tú la tercera viendo que $(1 - \sqrt{3}\sqrt{-1})^3$ es igual a -8.**

$$(1 - \sqrt{3}\sqrt{-1})^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3}\sqrt{-1} + 3 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3}\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{3}\sqrt{-1})^3 =$$
$$= 1 - 3\sqrt{3}\sqrt{-1} + 3 \cdot 3 \cdot (-1) - 3\sqrt{3} \cdot (-1)\sqrt{-1} = 1 - 3\sqrt{3}\sqrt{-1} - 9 + 3\sqrt{3}\sqrt{-1} = -8$$

1 En qué consisten los números complejos

Página 148

1 ¿Verdadero o falso?

a) El número 7 es un número real. Por tanto, no es un número complejo.

b) Si $a + bi$ es un número complejo, entonces no puede ser número real.

c) Para que el número complejo $a + bi$ sea imaginario hace falta que a sea cero.

d) Para que el número complejo $a + bi$ sea imaginario es necesario que b sea distinto de cero.

e) El número $0 + 0i$ ni es complejo ni es real.

f) El número 5 no tiene conjugado.

g) Si un número complejo coincide con su conjugado, entonces es un número real.

h) Si un número complejo coincide con su opuesto, entonces es el cero.

i) Si el opuesto de un número complejo coincide con su conjugado, entonces es imaginario puro.

a) Falso. Los números reales son números complejos cuya parte imaginaria es cero.

b) Falso. Si $b = 0$ el número complejo también es un número real.

c) Falso. La parte real no influye. Es imaginario si su parte imaginaria no es nula.

d) Verdadero.

e) Falso. El número $0 + 0i$ es real pero no es imaginario porque su parte imaginaria es cero.

f) Falso. El conjugado de $5 = 5 + 0i$ es $\overline{5} = 5 - 0i$.

g) Verdadero. Si $a + bi = a - bi \rightarrow b = -b \rightarrow 2b = 0 \rightarrow b = 0$

Por tanto, su parte imaginaria es cero y es un número real.

h) Verdadero. Si $a + bi = -a - bi \rightarrow 2a + 2bi = 0 \rightarrow \begin{cases} 2a = 0 \rightarrow a = 0 \\ 2b = 0 \rightarrow b = 0 \end{cases}$

i) Verdadero (siempre que el número no sea cero).

Si $-a - bi = a - bi \rightarrow -a = a \rightarrow 2a = 0 \rightarrow a = 0$

2 De los siguientes números complejos:

$$3 + 2i,\ -\sqrt{3} + 5i,\ 2i,\ 7,\ 0$$

a) ¿Cuáles son números reales? Ponlos en forma binómica.

b) ¿Cuáles son imaginarios?

c) ¿Cuáles son imaginarios puros? Ponlos en forma binómica.

d) Escribe el opuesto de cada uno de ellos.

e) Escribe el conjugado de cada uno de ellos.

a) $7 = 7 + 0i$ y $2 = 2 + 0i$ son números reales.

b) Los números imaginarios son $3 + 2i$, $-\sqrt{3} + 5i$ y $2i$.

c) $2i = 0 + 2i$ es imaginario puro.

d) El opuesto de $z = 3 + 2i$ es $-z = -3 - 2i$.

El opuesto de $z = 2i$ es $-z = -2i$.

El opuesto de $z = 0$ es $-z = 0$.

El opuesto de $z = -\sqrt{3} + 5i$ es $-z = \sqrt{3} - 5i$.

El opuesto de $z = 7$ es $-z = -7$.

e) El conjugado de $z = 3 + 2i$ es $\overline{z} = 3 - 2i$.

El conjugado de $z = 2i$ es $\overline{z} = -2i$.

El conjugado de $z = 0$ es $\overline{z} = 0$.

El conjugado de $z = -\sqrt{3} + 5i$ es $\overline{z} = -\sqrt{3} - 5i$.

El conjugado de $z = 7$ es $\overline{z} = 7$.

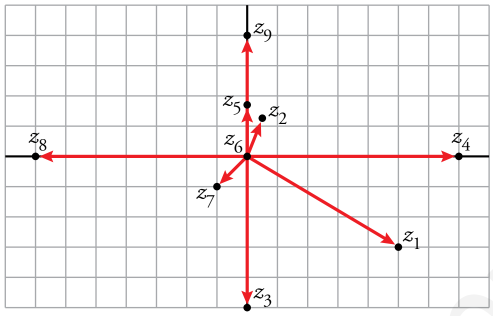
Página 149

3 **Representa gráficamente los siguientes números complejos y di cuáles son reales, cuáles imaginarios y, de estos, cuáles son imaginarios puros:**

$$\mathbf{5 - 3i;\ \frac{1}{2} + \frac{5}{4}i;\ -5i;\ 7;\ \sqrt{3}\,i;\ 0;\ -1 - i;\ -7;\ 4i}$$

Si llamamos:

$z_1 = 5 - 3i$	$z_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}i$	$z_3 = -5i$
$z_4 = 7$	$z_5 = \sqrt{3}\,i$	$z_6 = 0$
$z_7 = -1 - i$	$z_8 = -7$	$z_9 = 4i$



Son reales z_4, z_6 y z_8. El resto son imaginarios. Son imaginarios puros z_3, z_5 y z_9.

4 **Resuelve las ecuaciones y representa las soluciones.**

a) $\mathbf{z^2 + 4 = 0}$

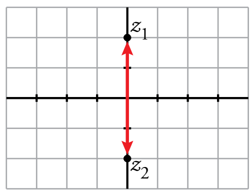
b) $\mathbf{z^2 + 6z + 10 = 0}$

c) $\mathbf{3z^2 + 27 = 0}$

d) $\mathbf{3z^2 - 27 = 0}$

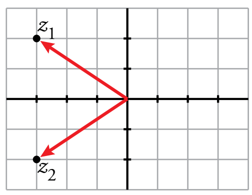
a) $z^2 + 4 = 0 \rightarrow z^2 = -4 \rightarrow z = \pm\sqrt{-4} \rightarrow z = \pm 2i$

Las soluciones son $z_1 = 2i$ y $z_2 = -2i$.



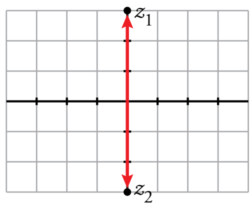
b) $z^2 + 6z + 10 = 0 \rightarrow z = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm 2i$

Las soluciones son: $z_1 = -3 + 2i$ y $z_2 = -3 - 2i$.



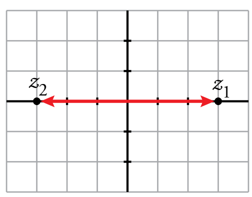
c) $3z^2 + 27 = 0 \rightarrow z^2 = -9 \rightarrow z = \pm\sqrt{-9} \rightarrow z = \pm 3i$

Las soluciones son $z_1 = 3i$ y $z_2 = -3i$.



d) $3z^2 - 27 = 0 \rightarrow z^2 = 9 \rightarrow z = \pm\sqrt{9} \rightarrow z = \pm 3$

Las soluciones son: $z_1 = 3$ y $z_2 = -3$.



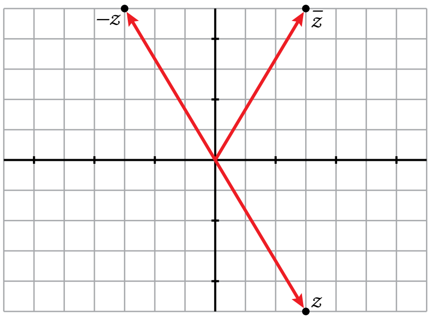
5 **Representa gráficamente cada número complejo, su opuesto y su conjugado:**

a) $3 - 5i$ **b)** $5 + 2i$ **c)** $-1 - 2i$

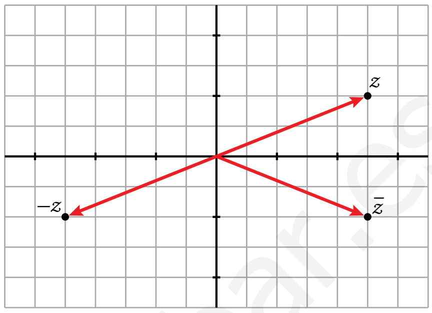
d) $-2 + 3i$ **e)** 5 **f)** 0

g) $2i$ **h)** $-5i$ **i)** -2

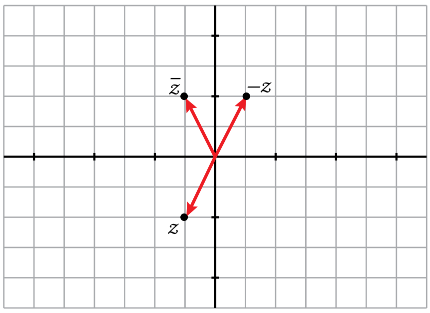
a) $z = 3 - 5i \;\to\; \begin{cases} -z = -3 + 5i \\ \overline{z} = 3 + 5i \end{cases}$



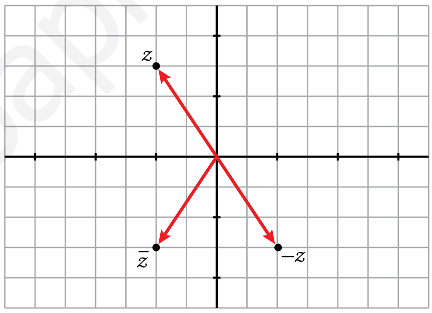
b) $z = 5 + 2i \;\to\; \begin{cases} -z = -5 - 2i \\ \overline{z} = 5 - 2i \end{cases}$



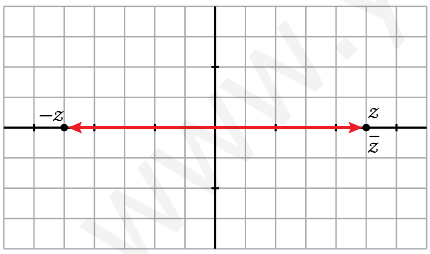
c) $z = -1 - 2i \;\to\; \begin{cases} -z = 1 + 2i \\ \overline{z} = -1 + 2i \end{cases}$



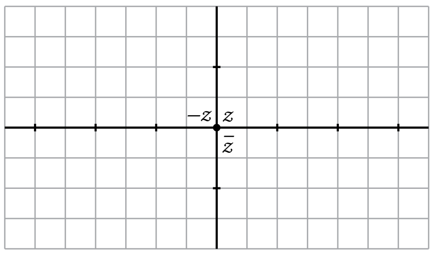
d) $z = -2 + 3i \;\to\; \begin{cases} -z = 2 - 3i \\ \overline{z} = -2 - 3i \end{cases}$



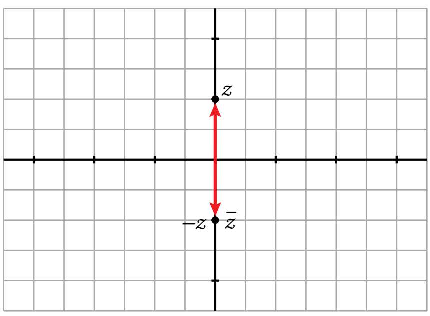
e) $z = 5 + 0i \;\to\; \begin{cases} -z = -5 + 0i \\ \overline{z} = 5 - 0i \end{cases}$



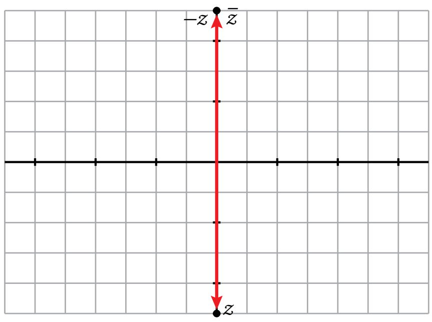
f) $z = 0 + 0i \;\to\; \begin{cases} -z = 0 + 0i \\ \overline{z} = 0 - 0i \end{cases}$



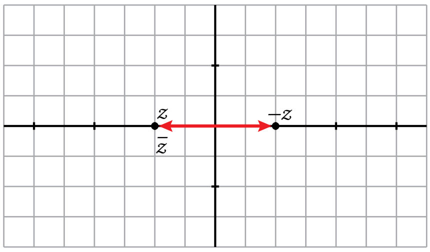
g) $z = 0 + 2i \;\to\; \begin{cases} -z = 0 - 2i \\ \overline{z} = 0 - 2i \end{cases}$



h) $z = 0 - 5i \;\to\; \begin{cases} -z = 0 + 5i \\ \overline{z} = 0 + 5i \end{cases}$



i) $z = -2 + 0i \to \begin{cases} -z = 2 - 0i \\ \overline{z} = -2 - 0i \end{cases}$



6 **Calcula i^3, i^4, i^5, i^6, i^{20}, i^{21}, i^{22}, i^{23}. Da un criterio para simplificar potencias de i de exponente natural.**

$$\left.\begin{array}{llllll} i^1 = i & i^5 = i & i^9 = i & i^{13} = i & i^{17} = i & i^{21} = i \\ i^2 = -1 & i^6 = -1 & i^{10} = -1 & i^{14} = -1 & i^{18} = -1 & i^{22} = -1 \\ i^3 = -i & i^7 = -i & i^{11} = -i & i^{15} = -i & i^{19} = -i & i^{23} = -i \\ i^4 = 1 & i^8 = 1 & i^{12} = 1 & i^{16} = 1 & i^{20} = 1 & i^{24} = 1 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} i^{4n+1} = i \\ i^{4n+2} = -1 \\ i^{4n+3} = -i \\ i^{4n} = 1 \end{array}$$

Criterio válido desde $n = 0$.

2 Operaciones con números complejos en forma binómica

Página 150

1 ¿Verdadero o falso?

a) La suma de un número complejo y su opuesto es 0.

b) La suma de un número complejo y su conjugado es un número imaginario puro.

c) La suma de un número complejo y su conjugado es un número real.

d) El cuadrado de un número complejo cualquiera es un número real.

e) El cuadrado de un número imaginario puro es un número real.

f) El cociente de dos números imaginarios puros es un número real pues $\frac{ai}{a'i} = \frac{a}{a'}$**.**

a) Verdadero. En efecto, $(a + bi) + (-a - bi) = 0$.

b) Falso. Por ejemplo, $(5 + 3i) + (5 - 3i) = 8$.

c) Verdadero. Porque $(a + bi) + (a - bi) = 2a$ es un número real.

d) Falso. Por ejemplo, $(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$ no es un número real.

e) Verdadero. En efecto, $(bi)^2 = b^2i^2 = -b^2$ es un número real.

f) Verdadero. Podemos simplificar la fracción dividiendo numerador y denominador entre i.

Página 151

Hazlo tú. Obtén un polinomio de segundo grado cuyas raíces sean $\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2}i$.

$P(x) = (x - \sqrt{2}i)[x - (-\sqrt{2}i)] = (x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i) = x^2 - (\sqrt{2}i)^2 = x^2 - (-2) = x^2 + 2$

Hazlo tú. ¿Cuánto ha de valer x para que $(4 + 3i)(3 - xi)$ sea real?

$(4 + 3i)(3 - xi) = 12 - 4xi + 9i - 3xi^2 = 12 + 3x + (9 - 4x)i$

Para que sea un número real su parte imaginaria debe ser cero. Por tanto: $9 - 4x = 0 \to x = \frac{9}{4}$

2 Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i)$

b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i)$

c) $(3 + 2i)(4 - 2i)$

d) $(2 + 3i)(5 - 6i)$

e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i)$

f) $\frac{2 + 4i}{4 - 2i}$

g) $\frac{1 - 4i}{3 + i}$

h) $\frac{4 + 4i}{-3 + 5i}$

i) $\frac{5 + i}{-2 - i}$

j) $\frac{1 + 5i}{3 + 4i}$

k) $\frac{4 - 2i}{i}$

l) $6 - 3\left(5 + \frac{2}{5}i\right)$

m) $\frac{(-3i)^2(1 - 2i)}{2 + 2i}$

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i) = 6 - 5i + 2 - i + 10 - 12i = 18 - 18i$

b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i) = 2 - 3i - 5 - 4i + 3 - 2i = -9i$

c) $(3 + 2i)(4 - 2i) = 12 - 6i + 8i - 4i^2 = 12 + 2i + 4 = 16 + 2i$

d) $(2 + 3i)(5 - 6i) = 10 - 12i + 15i - 18i^2 = 10 + 3i + 18 = 28 + 3i$

e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i) = (-3i + 2i^2 + 3 - 2i)(1 + 3i) = (3 - 2 - 5i)(1 + 3i) =$

$= (1 - 5i)(1 + 3i) = 1 + 3i - 5i - 15i^2 = 1 + 15 - 2i = 16 - 2i$

f) $\frac{2 + 4i}{4 - 2i} = \frac{(2 + 4i)(4 + 2i)}{(4 - 2i)(4 + 2i)} = \frac{8 + 4i + 16i + 8i^2}{16 - 4i^2} = \frac{20i}{16 + 4} = \frac{20i}{20} = i$

g) $\dfrac{1-4i}{3+i}=\dfrac{(1-4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{3-i-12i+4i^2}{9-i^2}=\dfrac{3-13i-4}{9+1}=\dfrac{-1-13i}{10}=\dfrac{-1}{10}-\dfrac{13}{10}i$

h) $\dfrac{4+4i}{-3+5i}=\dfrac{(4+4i)(-3-5i)}{(-3+5i)(-3-5i)}=\dfrac{-12-20i-12i-20i^2}{9-25i^2}=\dfrac{-12-32i+20}{9+25}=$

$=\dfrac{8-32i}{34}=\dfrac{8}{34}-\dfrac{32}{34}i=\dfrac{4}{17}-\dfrac{16}{17}i$

i) $\dfrac{5+1}{-2-i}=\dfrac{(5+i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)}=\dfrac{-10+5i-2i+i^2}{4+1}=\dfrac{-10+3i-1}{5}=\dfrac{-11+3i}{5}=\dfrac{-11}{5}+\dfrac{3}{5}i$

j) $\dfrac{1+5i}{3+4i}=\dfrac{(1+5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\dfrac{3-4i+15i-20i^2}{9-16i^2}=\dfrac{3+11i+20}{9+16}=\dfrac{23+11i}{25}=\dfrac{23}{25}+\dfrac{11}{25}i$

k) $\dfrac{4-2i}{i}=\dfrac{(4-2i)(-i)}{i(-i)}=\dfrac{-4i+2i^2}{1}=-4i-2=-2-4i$

l) $6-3\left(5+\dfrac{2}{5}i\right)=6-15+\dfrac{6}{5}i=-9+\dfrac{6}{5}i$

m) $\dfrac{(-3i)^2(1-2i)}{(2+2i)}=\dfrac{9i^2(1-2i)}{(2+2i)}=\dfrac{-9(1-2i)}{(2+2i)}=\dfrac{-9+18i}{(2+2i)}=\dfrac{(-9+18i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}=$

$=\dfrac{-18+18i+36i-36i^2}{4-4i^2}=\dfrac{-18+54i+36}{4+4}=\dfrac{18+54i}{8}=\dfrac{18}{8}+\dfrac{54}{8}i=\dfrac{9}{4}+\dfrac{27}{4}i$

3 Obtén polinomios cuyas raíces sean:

a) $2+\sqrt{3}i$ y $2-\sqrt{3}i$ **b) $-3i$ y $3i$** **c) $1+2i$ y $3-4i$**

(Observa que solo cuando las dos raíces son conjugadas, el polinomio tiene coeficientes reales).

a) $[x-(2+\sqrt{3}i)]\,[x-(2-\sqrt{3}i)]=[(x-2)-\sqrt{3}i]\,[(x-2)+\sqrt{3}i]=(x-2)^2-(\sqrt{3}i)^2=$

$=x^2-4x+4-3i^2=x^2-4x+4+3=x^2-4x+7$

b) $[x-(-3i)]\,[x-3i]=[x+3i]\,[x-3i]=x^2-9i^2=x^2+9$

c) $[x-(1+2i)]\,[x-(3-4i)]=[(x-1)-2i]\,[(x-3)+4i]=$

$=(x-1)(x-3)+4(x-1)i-2(x-3)i-8i^2=$

$=x^2-4x+3+(4x-4-2x+6)i+8=x^2-4x+11+(2x+2)i=$

$=x^2-4x+11+2ix+2i=x^2+(-4+2i)x+(11+2i)$

4 ¿Cuánto debe valer x para que $(25-xi)^2$ sea imaginario puro?

$(25-xi)^2=625+x^2i^2-50xi=(625-x^2)-50xi$

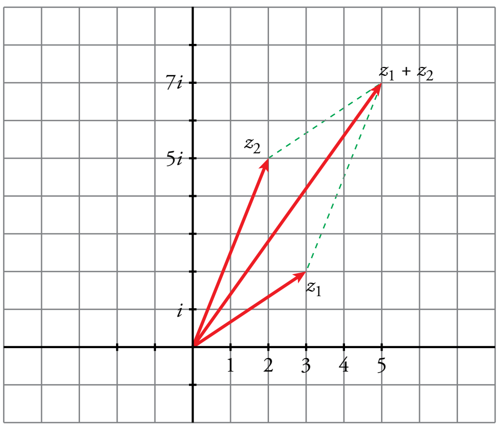
Para que sea imaginario puro:

$625-x^2=0 \;\rightarrow\; x^2=625 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{625}=\pm 25$

Hay dos soluciones: $x_1=-25$, $x_2=25$

5 Representa gráficamente $z_1=3+2i$, $z_2=2+5i$, z_1+z_2. Comprueba que z_1+z_2 es una diagonal del paralelogramo de lados z_1 y z_2.

$z_1+z_2=5+7i$



3 Números complejos en forma polar

Página 153

1 **¿Verdadero o falso?**

a) Los módulos de dos números complejos opuestos son iguales pero con signos distintos.

b) Los módulos de dos complejos opuestos son iguales.

c) Los módulos de dos complejos conjugados son iguales.

d) Los argumentos de dos números complejos opuestos difieren en 180°.

e) Los argumentos de dos números complejos conjugados son opuestos (α y $-\alpha$).

f) El argumento de cualquier número real es 0.

g) El argumento de los números reales negativos es 180°.

h) El argumento de un imaginario puro es 90° o 270°.

a) Falso. El módulo de un número complejo no nulo siempre es un número positivo.

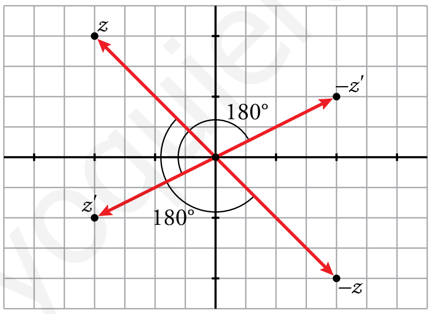
b) Verdadero.

Si $z = a + bi \rightarrow -z = -a - bi \rightarrow |-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

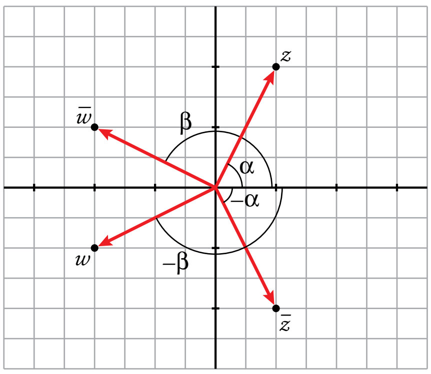
c) Verdadero.

Si $z = a + bi \rightarrow \overline{z} = a - bi \rightarrow |\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

d) Verdadero. Podemos verlo en el gráfico siguiente:



e) Verdadero. Podemos verlo en el gráfico siguiente:



f) Falso. Solo los números reales positivos tienen argumento 0°.

g) Verdadero, porque sus afijos están en el eje horizontal negativo que forma 180° con el eje horizontal positivo.

h) Verdadero. Porque su afijo está en el eje vertical que forma 90° con el eje horizontal positivo en caso de que la parte imaginaria sea positiva y 270° en caso de que la parte imaginaria sea negativa.

2 **Escribe en forma polar los siguientes números complejos:**

a) $1+\sqrt{3}i$ **b)** $\sqrt{3}+i$ **c)** $-1+i$

d) $5-12i$ **e)** $3i$ **f)** -5

a) $1+\sqrt{3}i=2_{60°}$ b) $\sqrt{3}+i=2_{30°}$ c) $-1+i=\sqrt{2}_{135°}$

d) $5-12i=13_{292°\,37'}$ e) $3i=3_{90°}$ f) $-5=5_{180°}$

3 **Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:**

a) $5_{(\pi/6)\ rad}$ **b)** $2_{135°}$ **c)** $2_{495°}$

d) $3_{240°}$ **e)** $5_{180°}$ **f)** $4_{90°}$

a) $5_{(\pi/6)}=5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)=5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$

b) $2_{135°}=2(\cos 135°+i\,\text{sen}\,135°)=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

c) $2_{495°}=2_{135°}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

d) $3_{240°}=3(\cos 240°+i\,\text{sen}\,240°)=3\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

e) $5_{180°}=-5$

f) $4_{90°}=4i$

4 **Expresa en forma polar el opuesto y el conjugado del número complejo** $z=r_\alpha$**.**

Opuesto: $-z=r_{180°+\alpha}$

Conjugado: $\bar{z}=r_{360°-\alpha}$

5 **Escribe en forma binómica y en forma polar el complejo:**

$$z=8(\cos 30°+i\,\text{sen}\,30°)$$

$z=8_{30°}=8(\cos 30°+i\,\text{sen}\,30°)=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{8\sqrt{3}}{2}+\frac{8}{2}i=4\sqrt{3}+4i$

6 **Sean los números complejos** $z_1=4_{60°}$ **y** $z_2=3_{210°}$**.**

a) Expresa z_1 **y** z_2 **en forma binómica.**

b) Halla $z_1\cdot z_2$ **y** z_2/z_1**, y pasa los resultados a forma polar.**

c) Compara los módulos y los argumentos de $z_1\cdot z_2$ **y de** z_2/z_1 **con los de** z_1 **y** z_2 **e intenta encontrar relaciones entre ellos.**

a) $z_1=4_{60°}=4(\cos 60°+i\,\text{sen}\,60°)=4\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2+2\sqrt{3}i$

$z_2=3_{210°}=3(\cos 210°+i\,\text{sen}\,210°)=3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

b) $z_1\cdot z_2=(2+2\sqrt{3}i)\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)=-3\sqrt{3}-3i-9i-3\sqrt{3}i^2=-3\sqrt{3}-12i+3\sqrt{3}=-12i=12_{270°}$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)}{(2+2\sqrt{3}i)}=\frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)(2-2\sqrt{3}i)}{(2+2\sqrt{3}i)(2-2\sqrt{3}i)}=\frac{-3\sqrt{3}-3i+9i+3\sqrt{3}i^2}{4-12i^2}=$$

$$=\frac{-3\sqrt{3}+6i-3\sqrt{3}}{4+12}=\frac{-6\sqrt{3}+6i}{16}=\left(\frac{3}{4}\right)_{150°}$$

c) $z_1\cdot z_2=4_{60°}\cdot 3_{210°}=(4\cdot 3)_{60°+210°}=12_{270°}$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{3_{210°}}{4_{60°}}=\left(\frac{3}{4}\right)_{210°-60°}=\left(\frac{3}{4}\right)_{150°}$$

4 Operaciones con complejos en forma polar

Página 154

1 ¿Verdadero o falso?

a) Al multiplicar un número complejo z por la unidad imaginaria i, se gira 90° alrededor del origen.

b) Al dividir z por i, se gira 90° alrededor del origen en el sentido de las agujas del reloj.

c) El módulo del producto $r_\alpha \cdot r'_\beta$ puede ser menor que r.

d) $(r_{45°})^4$ es un número real negativo.

e) $r_{30°}$ y $r_{330°}$ son conjugados.

f) $r_{30°}$ y $r_{210°}$ son opuestos.

a) Verdadero, porque $i = 1_{90°}$. Al multiplicar por i mantenemos el módulo del número complejo y sumamos un ángulo de 90° a su argumento, es decir, lo giramos 90° en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

b) Verdadero, porque $i = 1_{90°}$. Al dividir por i mantenemos el módulo del número complejo y restamos un ángulo de 90° a su argumento, es decir, lo giramos 90° en el sentido de las agujas del reloj.

c) Verdadero. Si $r' < 1$ el módulo del producto, que es $r \cdot r'$, es menor que r.

d) Verdadero. $(r_{45°})^4 = (r^4)_{4 \cdot 45°} = (r^4)_{180°}$ que está en la parte negativa del eje real.

e) Verdadero. 330° = –30°. Por tanto, son números complejos conjugados.

f) Verdadero. Los ángulos 210° y 30° se diferencian en 180°. Por tanto, son números complejos opuestos.

Página 155

Hazlo tú. Halla z_1/z_2; z_1^6; z_2^3.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4_{60°}}{3_{210°}} = \left(\frac{4}{3}\right)_{60° - 210°} = \left(\frac{4}{3}\right)_{-150°} = \left(\frac{4}{3}\right)_{210°}$$

$$z_1^6 = (4_{60°})^6 = (4^6)_{6 \cdot 60°} = 4\,096_{360°} = 4\,096_{0°}$$

$$z_2^3 = (3_{210°})^3 = (3^3)_{3 \cdot 210°} = 27_{630°} = 27_{270°}$$

2 Efectúa estas operaciones y da el resultado en forma polar y en forma binómica:

a) $1_{150°} \cdot 5_{30°}$ b) $6_{45°} : 3_{15°}$ c) $2_{10°} \cdot 1_{40°} \cdot 3_{70°}$

d) $5_{(2\pi/3)\ rad} : 1_{60°}$ e) $(1 - \sqrt{3}i)^5$ f) $(3 + 2i) + (-3 + 2i)$

a) $1_{150°} \cdot 5_{30°} = 5_{180°} = -5$

b) $6_{45°} : 3_{15°} = 2_{30°} = 2\,(\cos 30° + i\ \mathrm{sen}\ 30°) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

c) $2_{10°} \cdot 1_{40°} \cdot 3_{70°} = 6_{120°} = 6\,(\cos 120° + i\ \mathrm{sen}\ 120°) = 6\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 + 3\sqrt{3}\,i$

d) $5_{(2\pi/3)\,rad} : 1_{60°} = 5_{120°} : 1_{60°} = 5_{60°} = 5\,(\cos 60° + i\ \mathrm{sen}\ 60°) = 5\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

e) $(1 - \sqrt{3}\,i)^5 = (2_{300°})^5 = 32_{1500°} = 32_{60°} = 32\,(\cos 60° + i\ \mathrm{sen}\ 60°) = 32\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 + 16\sqrt{3}\,i$

f) $4i = 4_{90°}$

3 **Compara los resultados en cada caso.**

a) $(2_{30°})^3$, $(2_{150°})^3$, $(2_{270°})^3$

b) $(2_{60°})^4$, $(2_{150°})^4$, $(2_{270°})^4$, $(2_{330°})^4$

a) $(2_{30°})^3 = 2^3_{3 \cdot 30°} = 8_{90°}$

$(2_{150°})^3 = 2^3_{3 \cdot 150°} = 8_{450°} = 8_{90°}$

$(2_{270°})^3 = 8_{3 \cdot 270°} = 8_{810°} = 8_{90°}$

b) $(2_{60°})^4 = 2^4_{4 \cdot 60°} = 16_{240°}$

$(2_{150°})^4 = 16_{600°} = 16_{240°}$

$(2_{270°})^4 = 16_{1\,080°} = 16_{0°}$

$(2_{330°})^4 = 16_{1\,320°} = 16_{240°}$

4 **Dados los complejos $z = 5_{45°}$, $w = 2_{15°}$, $t = 4i$, obtén en forma polar:**

a) $z \cdot t$ **b)** $\dfrac{z}{w^2}$ **c)** $\dfrac{z^3}{w \cdot t^2}$ **d)** $\dfrac{z \cdot w^3}{t}$

$z = 5_{45°}$ $w = 2_{15°}$ $t = 4i = 4_{90°}$

a) $z \cdot w = 10_{60°}$

b) $\dfrac{z}{w^2} = \dfrac{z}{4_{30°}} = \dfrac{5_{45°}}{4_{30°}} = \left(\dfrac{5}{4}\right)_{15°}$

c) $\dfrac{z^3}{w \cdot t^2} = \dfrac{125_{135°}}{2_{15°} \cdot 16_{180°}} = \left(\dfrac{125}{32}\right)_{-60°} = \left(\dfrac{125}{32}\right)_{300°}$

d) $\dfrac{z \cdot w^3}{t} = \dfrac{5_{45°} \cdot 8_{45°}}{4_{90°}} = 10_{0°} = 10$

5 **Expresa $cos\,3\alpha$ y $sen\,3\alpha$ en función de $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$ utilizando la fórmula de Moivre. Ten en cuenta que:**

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$(1_\alpha)^3 = 1\,(cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha)^3 = cos^3\,\alpha + i\,3\,cos^2\,\alpha\,sen\,\alpha + 3\,i^2\,cos\,\alpha\,sen^2\,\alpha + i^3\,sen^3\,\alpha =$

$= cos^3\,\alpha + 3\,cos^2\,\alpha\,sen\,\alpha\,i - 3\,cos\,\alpha\,sen^2\,\alpha - i\,sen^3\,\alpha =$

$= (cos^3\,\alpha - 3\,cos\,\alpha\,sen^2\,\alpha) + (3\,cos^2\,\alpha\,sen\,\alpha - sen^3\,\alpha)\,i$

Por otra parte: $(1_\alpha)^3 = 1_{3\alpha} = cos\,3\alpha + i\,sen\,3\alpha$

Por tanto: $cos\,3\alpha = cos^3\,\alpha - 3\,cos\,\alpha\,sen^2\,\alpha$

$sen\,3\,\alpha = 3\,cos^2\,\alpha\,sen\,\alpha - sen^3\,\alpha$

5 Radicación de números complejos

Página 157

1 ¿Verdadero o falso?

a) Los números reales negativos no tienen raíces cuadradas en el campo complejo.

b) El real –9 tiene dos raíces imaginarias puras: $3i$ y $-3i$.

c) El número 16 tiene dos raíces cuartas reales, 2 y –2, y otras dos imaginarias puras, $2i$ y $-2i$.

d) Ninguna de las cuatro raíces cuartas de –16 es un número real.

e) El número –8 tiene una raíz cúbica real, el –2. Las otras dos raíces cúbicas son números imaginarios conjugados.

f) $2_{84°}$ es una raíz quinta de $32_{60°}$.

a) Falso. Las raíces cuadradas de los números reales negativos son números complejos imaginarios puros.

b) Verdadero. Porque $(3i)^2 = 3^2 i^2 = -9$ y $(-3i)^2 = (-3)^2 i^2 = -9$.

c) Verdadero. Porque $2^4 = 16$, $(-2)^4 = 16$, $(2i)^4 = 2^4 i^4 = 16$ y $(-2i)^4 = (-2)^4 i^4 = 16$.

d) Verdadero. La potencia cuarta de un número real no nulo siempre es un número positivo y no puede dar nunca –16.

e) Verdadero. Las raíces están en los vértices de un triángulo equilátero y son $2_{60°}$, $-2 = 2_{180°}$ y $2_{300°}$.

Como los ángulos 300° y 60° son opuestos porque 300° = 360° – 60°, los correspondientes números son conjugados.

f) Verdadero: $(2_{84°})^5 = (2^5)_{5 \cdot 84°} = 32_{420°} = 32_{60°}$

2 Halla las seis raíces sextas de 1. Represéntalas y exprésalas en forma binómica.

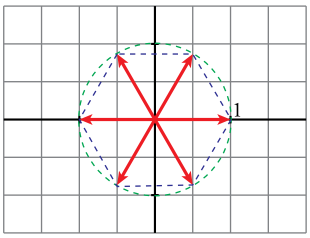
$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1_{0°}} = 1_{(360° \cdot k)/6} = 1_{60° \cdot k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$1_{0°} = 1$ $\quad 1_{60°} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad 1_{120°} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$1_{180°} = -1$ $\quad 1_{240°} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad 1_{300°} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Representación



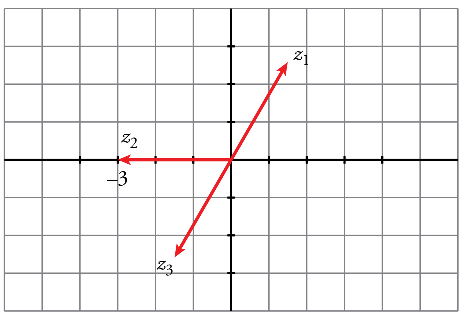
3 Resuelve $z^3 + 27 = 0$. Representa sus soluciones.

$z^3 + 27 = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180°}} = 3_{(180° + 360°\, n)/3} = 3_{60° + 120°\, n}$; $n = 0, 1, 2$

$z_1 = 3_{60°} = 3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$z_2 = 3_{180°} = -3$

$z_3 = 3_{240°} = 3(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) = 3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$



4 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $z^4 + 1 = 0$ **b)** $z^6 + 64 = 0$

a) $z^4 + 1 = 0 \to z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1_{180°}} = 1_{(180° + 360°\,k)/2} = 1_{45° + 90°\,k};\ k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$1_{45°} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;\ 1_{135°} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;\ 1_{225°} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i;\ 1_{315°} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

b) $z^6 + 64 = 0 \to z = \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180°}} = 2_{(180° + 360°\,k)/6} = 2_{30° + 60°\,k};\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$2_{30°} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + 1$ $\quad 2_{90°} = 2i$

$2_{150°} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$ $\quad 2_{210°} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$

$2_{270°} = -2i$ $\quad 2_{330°} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$

5 **Calcula.**

a) $\sqrt[3]{-i}$ **b)** $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$ **c)** $\sqrt{-25}$ **d)** $\sqrt{\frac{-2 + 2i}{1 + \sqrt{3}i}}$

a) $\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270°}} = 1_{(270° + 360°\,k)/3};\ k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$1_{90°} = i$ $\quad 1_{210°} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ $\quad 1_{330°} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

b) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{16_{120°}} = 2_{(120° + 360°\,k)/4} = 2_{30° + 90°\,k};\ k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$2_{30°} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$ $\quad 2_{120°} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}i$

$2_{210°} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}i$ $\quad 2_{300°} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$

c) $\sqrt{-25} = \sqrt{25_{180°}} = 5_{(180° + 360°\,k)/2} = 5_{90° + 180°\,k};\ k = 0, 1$

Las dos raíces son: $5_{90°} = 5i;\ 5_{270°} = -5i$

d) $\sqrt[3]{\frac{-2 + 2i}{1 + \sqrt{3}i}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{8}_{135°}}{2_{60°}}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{75°}} = \sqrt[6]{2}_{(75° + 360°\,k)/3} = \sqrt[6]{2}_{25° + 120°\,k};\ k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son: $\sqrt[6]{2}_{25°};\ \sqrt[6]{2}_{145°};\ \sqrt[6]{2}_{265°}$

6 **Comprueba que si z y w son dos raíces sextas de 1, entonces también lo son los resultados de las siguientes operaciones:**

$$z \cdot w,\ \frac{z}{w},\ z^2,\ z^3$$

z y w raíces sextas de 1 $\to z^6 = 1,\ w^6 = 1$

$(z \cdot w)^6 = z^6 \cdot w^6 = 1 \cdot 1 = 1 \to z \cdot w$ es raíz sexta de 1.

$\left(\frac{z}{w}\right)^6 = \frac{z^6}{w^6} = \frac{1}{1} = 1 \to \frac{z}{w}$ es raíz sexta de 1.

$z^2 = (z^2)^6 = z^{12} = (z^4)^3 = 1^3 = 1 \to z^2$ es raíz sexta de 1.

$z^3 = (z^3)^6 = z^{18} = z^{16} \cdot z^2 = (z^4)^4 \cdot z^2 = 1^4 \cdot 1^2 = 1 \cdot 1 = 1 \to z^3$ es raíz sexta de 1.

7 **El número $4 + 3i$ es la raíz cuarta de un cierto número complejo, z. Halla las otras tres raíces cuartas de z.**

$4 + 3i = 5_{36^\circ\, 52'}$

Las otras tres raíces cuartas de z serán:

$5_{36^\circ\, 52' + 90^\circ} = 5_{126^\circ\, 52'} = -3 + 4i$

$5_{36^\circ\, 52' + 180^\circ} = 5_{216^\circ\, 52'} = -4 - 3i$

$5_{36^\circ\, 52' + 270^\circ} = 5_{306^\circ\, 52'} = 3 - 4i$

8 **Calcula las siguientes raíces y representa gráficamente sus soluciones:**

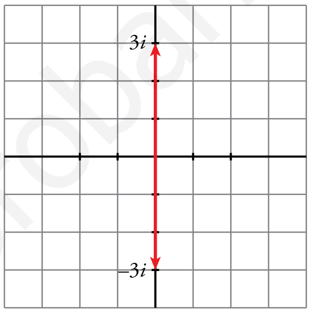
a) $\sqrt{-9}$ **b)** $\sqrt[3]{-27}$ **c)** $\sqrt[3]{2-2i}$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i}}$ **e)** $\sqrt[5]{\dfrac{-32}{i}}$ **f)** $\sqrt[3]{8i}$

a) $\sqrt{-9} = \sqrt{9_{180^\circ}} = 3_{(180^\circ + 360^\circ k)/2} = 3_{90^\circ + 180^\circ k};\ k = 0, 1$

Las dos raíces son:

$3_{90^\circ} = 3i;\ 3_{270^\circ} = -3i$



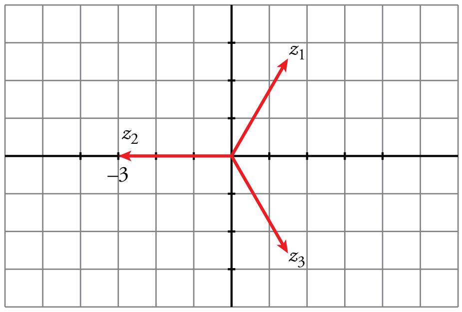
b) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^\circ}} = 3_{(180^\circ + 360^\circ k)/3} = 3_{60^\circ + 120^\circ k};\ k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$z_1 = 3_{60^\circ} = 3\,(cos\ 60^\circ + i\ sen\ 60^\circ) = 3\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

$z_2 = 3_{180^\circ} = -3$

$z_3 = 3_{300^\circ} = 3\,(cos\ 300^\circ + i\ sen\ 300^\circ) = 3\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$



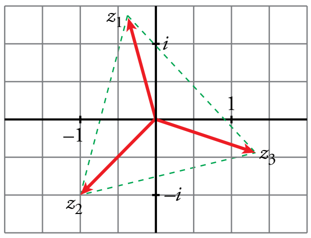
c) $\sqrt[3]{2-2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{315^\circ}} = \sqrt{2}_{(315^\circ + 360^\circ k)/3} = \sqrt{2}_{105^\circ + 120^\circ k};\ k = 0,\ 1,\ 2$

Las tres raíces son:

$z_1 = \sqrt{2}_{105^\circ} = -0,37 + 1,37i$

$z_2 = \sqrt{2}_{225^\circ} = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 - i$

$z_3 = \sqrt{2}_{345^\circ} = 1,37 - 0,37i$



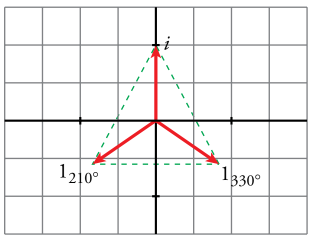
d) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i}} = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}_{315^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}}} = \sqrt[3]{1_{270^\circ}} = 1_{(270^\circ + 360^\circ k)/3} = 1_{90^\circ + 120^\circ k};\ k = 0,\ 1,\ 2$

Las tres raíces son:

$1_{90^\circ} = i$

$1_{210^\circ} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

$1_{330^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$



e) $\sqrt[5]{-\dfrac{32}{i}} = \sqrt[5]{-\dfrac{32(-i)}{i(-i)}} = \sqrt[5]{32i} = \sqrt[5]{32_{90°}} = 2_{(90° + 360°\,k)/5} = 2_{18° + 72°\,k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son:

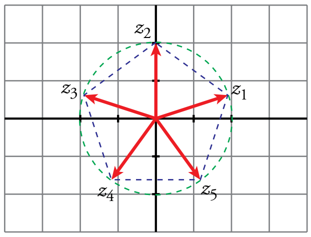
$z_1 = 2_{18°} = 1{,}9 + 0{,}6i$

$z_2 = 2_{90°} = 2i$

$z_3 = 2_{162°} = -1{,}9 + 0{,}6i$

$z_4 = 2_{234°} = -1{,}2 - 1{,}6i$

$z_5 = 2_{306°} = 1{,}2 - 1{,}6i$



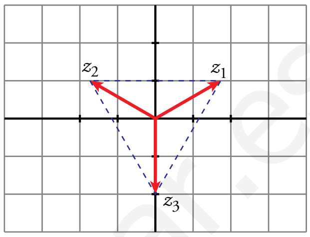
f) $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90°}} = 2_{(90° + 360°\,k)/3} = 2_{30° + 120°\,k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$z_1 = 2_{30°}$

$z_2 = 2_{150°}$

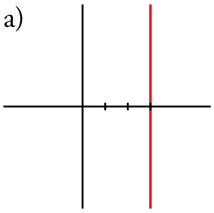
$z_3 = 2_{270°}$

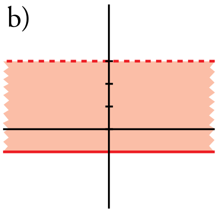


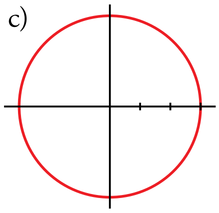
6 Descripciones gráficas con números complejos

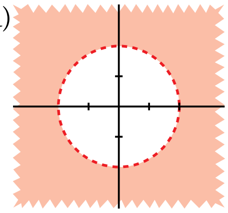
Página 158

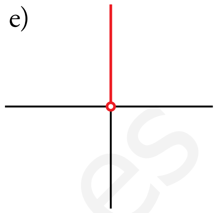
1 **Describe con palabras cada una de las familias ("son los números complejos cuya parte real vale …"), escribe su ecuación o inecuación (usando *Re*, *Im*, | |, *arg*) y da un representante de cada una de ellas.**

a)


b)


c)


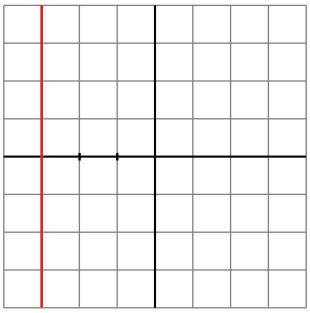
d)


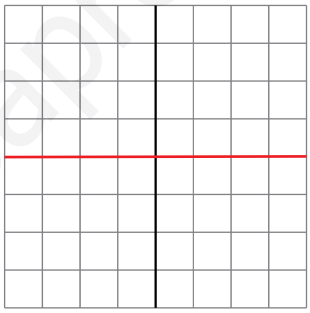
e)


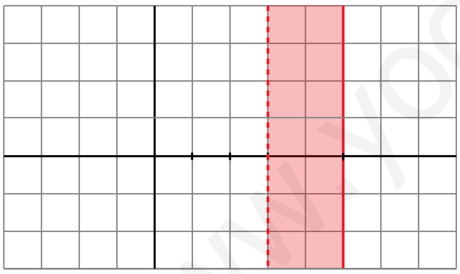
a) $Re\ z = 3$　　b) $-1 \le Im\ z < 3$　　c) $|z| = 3$　　d) $|z| > 2$　　e) $Arg\ z = 90°$

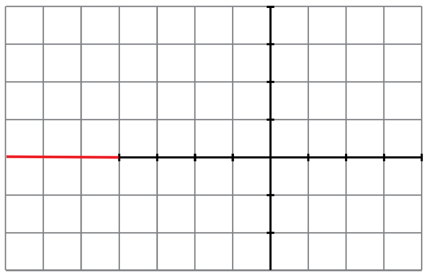
2 **Represent a.**

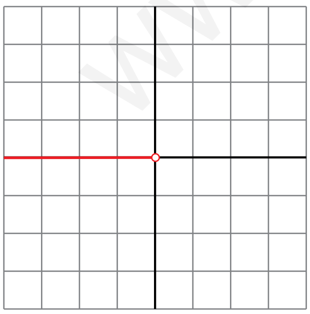
a) $Re\ (z) = -3$　　**b)** $Im\ (z) = 0$　　**c)** $3 < Re\ (z) \le 5$　　**d)** $|z| < 4$　　**e)** $Arg\ z = 180°$

a)


b)


c)


d)


e)


Ejercicios y problemas resueltos

Página 159

1. Operaciones con números complejos en forma binómica

Hazlo tú. Calcula el valor de a y b para que se verifique $a - 3i = \dfrac{1+bi}{5-3i}$.

Calculamos el segundo miembro de la igualdad.

$$\frac{1+bi}{5-3i} = \frac{(1+bi)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)} = \frac{5+3i+5bi+3bi^2}{25+9} = \frac{5-3b+(3+5b)\,i}{34}$$

Igualamos las partes real e imaginaria.

$$\begin{cases} a = \dfrac{5-3b}{34} \\ -3 = \dfrac{3+5b}{34} \end{cases} \to -102 = 3+5b \to b = -21$$

$$a = \frac{5-3b}{34} \to a = \frac{5-3(-21)}{34} \to a = 2$$

2. Números complejos conjugados

Hazlo tú. El producto de dos números complejos conjugados es $48_{0°}$ y el argumento de su cociente es 60°. Hállalos.

Llamemos r_α y $r_{-\alpha}$ a los dos números complejos conjugados que buscamos.

$$r_\alpha \cdot r_{-\alpha} = 48_{0°} \to \begin{cases} r^2 = 48° \\ \alpha - \alpha = 0° \end{cases} \to r = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$r_\alpha / r_{-\alpha} = 1_{2\alpha} \to 2\alpha = 60° \to \alpha = 30°$$

Por tanto, los números son:

$$z_1 = (4\sqrt{3})_{30°}$$

$$z_2 = (4\sqrt{3})_{-30°} = (4\sqrt{3})_{330°}$$

3. Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo y los números complejos

Hazlo tú. Halla $sen\ 15°$ y $cos\ 15°$ a partir del cociente $1_{45°} : 1_{30°}$.

$$1_{45°} : 1_{30°} = 1_{15°} = 1\,(cos\,15° + i\,sen\,15°) = cos\,15° + i\,sen\,15°$$

$$\left.\begin{array}{l} 1_{45°} = 1\,(cos\,45° + i\,sen\,45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ 1_{30°} = 1\,(cos\,30° + i\,sen\,30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \end{array}\right\} \to$$

$$\to \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i+\sqrt{6}\,i+\sqrt{2}}{3+1} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\,i}{4}$$

Por tanto:

$$cos\,15° + i\,sen\,15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i \to \begin{cases} cos\,15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ sen\,15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Página 160

4. Operaciones con números complejos en forma polar

Hazlo tú. Calcula y representa las soluciones de $\sqrt[4]{(-2+2\sqrt{3}\,i)^3}$.

Pasamos $z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$ a forma polar teniendo en cuenta que se encuentra en el segundo cuadrante.

$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

$tg\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = 120°$

Ahora calculamos $z^3 = (4_{210°})^3 = (4^3)_{3\,\cdot\,120°} = 64_{360°} = 64_{0°}$

Las raíces cuartas buscadas son:

$\sqrt[4]{64_{0°}} = \sqrt[4]{64}_{\frac{0\cdot 360k}{4}}$; $k = 0, 1, 2, 3$

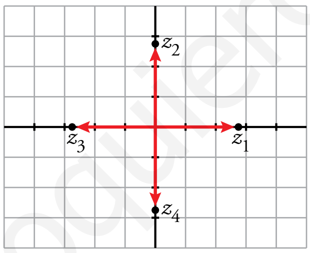
Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2\sqrt{2}_{0°} = 2\sqrt{2}\,(cos\ 0° + i\ sen\ 0°) = 2\sqrt{2}$

Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2\sqrt{2}_{90°} = 2\sqrt{2}\,(cos\ 90° + i\ sen\ 90°) = 2\sqrt{2}\,i$

Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2\sqrt{2}_{180°} = 2\sqrt{2}\,(cos\ 180° + i\ sen\ 180°) = -2\sqrt{2}$

Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2\sqrt{2}_{270°} = 2\sqrt{2}\,(cos\ 270° + i\ sen\ 270°) = -2\sqrt{2}\,i$

La representación gráfica de las raíces es:



5. Resolución de ecuaciones en ℂ

Hazlo tú. Resuelve estas ecuaciones:

a) $z^4 + 1 = 0$

b) $iz + 3i - 2 = 1 + i$

a) $z^4 + 1 = 0 \rightarrow z^4 = -1 \rightarrow z = \sqrt[4]{-1}$

$-1 = 1_{180°}$. Por tanto, $z = \sqrt[4]{1_{180°}} = 1_{(180+360k)/4}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 1_{45°} = 1\,(cos\ 45° + i\ sen\ 45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 1_{135°} = 1\,(cos\ 135° + i\ sen\ 135°) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 1_{225°} = 1\,(cos\ 225° + i\ sen\ 225°) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 1_{315°} = 1\,(cos\ 315° + i\ sen\ 315°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

b) $iz + 3i - 2 = 1 + i \rightarrow iz = 1 + i - 3i + 2 \rightarrow iz = 3 - 2i \rightarrow z = \dfrac{3-2i}{i} = \dfrac{(3-2i)\,i}{i\cdot i} = -2 - 3i$

Ejercicios y problemas guiados

Página 161

1. Números reales y números imaginarios

Hallar el valor que debe tener x para que el cociente $\frac{1+3xi}{3-4i}$ sea:

a) Un número real.

b) Un número imaginario puro.

$$\frac{1+3xi}{3-4i}=\frac{(1+3xi)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3+4i+9xi+12xi^2}{9+16}=\frac{3-12x+(4+9x)i}{25}$$

a) Para que sea real, la parte imaginaria debe ser 0.

$$4+9x=0 \;\rightarrow\; x=-\frac{9}{4}$$

b) Para que sea imaginario puro, la parte real debe ser 0.

$$3-12x=0 \;\rightarrow\; x=\frac{1}{4}$$

2. Números complejos que cumplen ciertas condiciones

Hallar un número complejo que tenga el mismo módulo que $4\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ y cuyo afijo esté en la bisectriz del primer o tercer cuadrante.

El número buscado debe ser de la forma $a+ai$ para que esté en la bisectriz del primer o tercer cuadrante.

$$|a+ai|=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}$$

$$|4\sqrt{2}+3\sqrt{2}i|=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2}=5\sqrt{2}$$

Luego:

$$\sqrt{2a^2}=5\sqrt{2} \;\rightarrow\; 2a^2=50 \;\rightarrow\; a^2=25 \;\rightarrow\; \begin{cases} a_1=5 \\ a_2=-5 \end{cases}$$

Por tanto, los números complejos buscados son $z_1=5+5i$ y $z_2=-5-5i$.

3. Suma de números complejos expresados en forma polar

Calcular:

$$\boldsymbol{2_{\frac{\pi}{6}}-\sqrt{3}_{\pi}+3_{\frac{3\pi}{2}}}$$

$$2_{\frac{\pi}{6}}=2\left(cos\,\frac{\pi}{6}+i\,sen\,\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$$

$$\sqrt{3}_{\pi}=\sqrt{3}\,(cos\,\pi+i\,sen\,\pi)=-\sqrt{3}$$

Por tanto:

$$2_{\frac{\pi}{6}}-\sqrt{3}_{\pi}+3_{\frac{3\pi}{2}}=\sqrt{3}+i-(-\sqrt{3})+(-3i)=2\sqrt{3}-2i \quad \text{(que está en el cuarto cuadrante)}$$

$$|2\sqrt{3}-2i|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=4$$

$$tg\,\alpha=\frac{-2}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; \alpha=330°=\frac{11\pi}{6}\text{ rad}$$

4. Potencia y raíces de números complejos

Una de las raíces sextas de un número complejo z es $-\sqrt{3}+i$. Calcular z y el área del hexágono cuyos vértices son los afijos de las raíces sextas de z. Hallar esos afijos.

Como $z = (-\sqrt{3}+i)^6$, pasamos a forma polar el número $-\sqrt{3}+i$ que está en el segundo cuadrante.

$$|-\sqrt{3}+i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = 2$$

$$tg\ \alpha = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \to \alpha = 150°$$

$$z = (2_{150°})^6 = (2^6)_{6 \cdot 150°} = 64_{900°} = 64_{180°}$$

$$\sqrt[6]{64_{180°}} = \sqrt[6]{64}_{(180 \cdot 360k)/6};\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Las raíces y los afijos son:

Si $k = 0 \to z_1 = 2_{30°} = 2(cos\ 30° + i\ sen\ 30°) = \sqrt{3}+i \to A(\sqrt{3}, 1)$

Si $k = 1 \to z_2 = 2_{90°} = 2(cos\ 90° + i\ sen\ 90°) = 2i \to B(0, 2)$

Si $k = 2 \to z_3 = 2_{150°} = 2(cos\ 150° + i\ sen\ 150°) = -\sqrt{3}+i \to C(-\sqrt{3}, 1)$

Si $k = 3 \to z_4 = 2_{210°} = 2(cos\ 210° + i\ sen\ 210°) = -\sqrt{3}-i \to D(-\sqrt{3}, -1)$

Si $k = 4 \to z_5 = 2_{270°} = 2(cos\ 270° + i\ sen\ 270°) = -2i \to E(0, -2)$

Si $k = 5 \to z_6 = 2_{330°} = 2(cos\ 330° + i\ sen\ 330°) = \sqrt{3}-i \to F(\sqrt{3}, -1)$

La longitud del lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita, que es igual al módulo de cualquiera de las raíces, es decir, 2. El apotema del hexágono regular es $2 \cdot cos\ 30° = \sqrt{3}$.

Por tanto, el área del hexágono es:

$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ \text{u}^2$$

5. Interpretación gráfica de igualdades con números complejos

Representar, en cada caso, los números complejos que cumplen la condición dada.

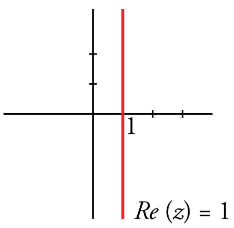
a) $z + \bar{z} = 2$ ***b)*** $z - \bar{z} = -4i$ ***c)*** $|z| = 3$

a) Si $z = a + bi \to a + bi + a - bi = 2 \to 2a = 2 \to a = 1 \to Re(z) = 1$ y se obtiene la figura a).

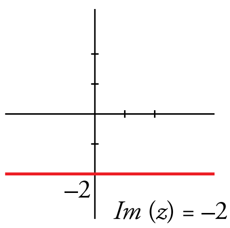
b) Si $z = a + bi \to a + bi - (a - bi) = -4i \to 2bi = -4i \to 2b = -4 \to b = -2 \to Im(z) = -2$ y se obtiene la figura b).

c) Como $|z| = 3$ y el argumento puede ser cualquiera, se obtiene la circunferencia de radio 3.

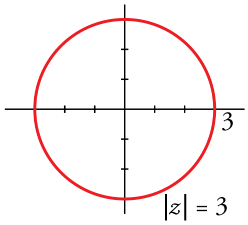
a)



b)



c)



Ejercicios y problemas propuestos

Página 162

Para practicar

Números complejos en forma binómica. Operaciones

1 **Calcula.**

a) $(3 + 2i)\ (2 - i) - (1 - i)\ (2 - 3i)$

b) $3 + 2i(-1 + i) - (5 - 4i)$

c) $-2i - (4 - i)5i$

d) $(4 - 3i)\ (4 + 3i) - (4 - 3i)^2$

a) $(3 + 2i)\ (2 - i) - (1 - i)\ (2 - 3i) = 6 - 3i + 4i - 2i^2 - 2 + 3i + 2i - 3i^2 =$

$= 6 - 3i + 4i + 2 - 2 + 3i + 2i + 3 = 9 + 6i$

b) $3 + 2i\ (-1 + i) - (5 - 4i) = 3 - 2i + 2i^2 - 5 + 4i = 3 - 2i - 2 - 5 + 4i = -4 + 2i$

c) $-2i - (4 - i)5i = -2i - 20i + 5i^2 = -22i - 5 = -5 - 22i$

d) $(4 - 3i)\ (4 + 3i) - (4 - 3i)^2 = 16 - (3i)^2 - 16 - 9i^2 + 24i = 16 + 9 - 16 + 9 + 24i = 18 + 24i$

2 **Los puntos A, B, C, D corresponden a los afijos de los números complejos z_1, z_2, z_3, z_4.**

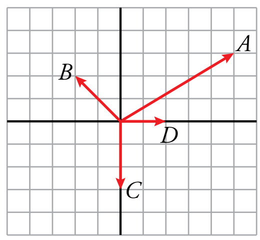
Efectúa y representa.

a) $z_1 \cdot z_4 - z_2 \cdot z_3$

b) $(z_2 - z_1)^2$

c) $\dfrac{5\,(z_1 - z_4)}{z_2 + z_3}$

d) $\dfrac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{z_3 + z_4}$



$z_1 = 5 + 3i \qquad z_2 = -2 + 2i \qquad z_3 = -3i \qquad z_4 = 2$

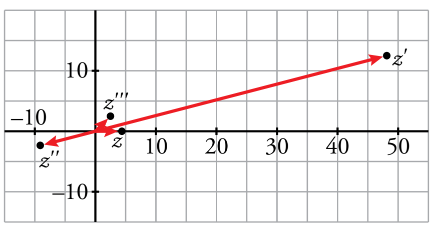
a) $z = z_1 \cdot z_4 - z_2 \cdot z_3 = (5 + 3i)\,2 - (-2 + 2i)\,(-3i) = 10 + 6i - 6i + 6i^2 = 4$

b) $z' = (z_2 - z_1)^2 = [-2 + 2i - (5 + 3i)]^2 = (-7 - i)^2 = 49 + 14i + i^2 = 48 + 14i$

c) $z'' = \dfrac{5\,(z_1 - z_4)}{z_2 + z_3} = \dfrac{5\,(5 + 3i - 2)}{-2 + 2i + (-3i)} = \dfrac{5\,(3 + 3i)}{-2 - i} = \dfrac{(15 + 15i)\,(-2 + i)}{(-2 - i)\,(-2 + i)} = \dfrac{-30 + 15i - 30i + 15i^2}{4 + 1} = -9 - 3i$

d) $z''' = \dfrac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{z_3 + z_4} = \dfrac{5 - 3i - (-2 - 2i)}{2 - 3i} = \dfrac{(7 - i)\,(2 + 3i)}{(2 - 3i)\,(2 + 3i)} = \dfrac{14 + 21i - 2i - 3i^2}{4 + 9} = \dfrac{18 + 19i}{13}$

Representación gráfica:



3 **Calcula en forma binómica.**

a) $\dfrac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i}$ b) $\dfrac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)}$ c) $\dfrac{2+5i}{3-2i}(1-i)$ d) $\dfrac{1+i}{2-i}+\dfrac{-3-2i}{1+3i}$

a) $\dfrac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i}=\dfrac{12-6i+12i-6i^2}{2-2i}=\dfrac{18+6i}{2-2i}=\dfrac{(18+6i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)}=$

$=\dfrac{36+36i+12i-12}{4+4}=\dfrac{24+48i}{8}=3+6i$

b) $\dfrac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)}=\dfrac{-2+3i}{-4+4i-2i-2}=\dfrac{-2+3i}{-6+2i}=\dfrac{(-2+3i)(-6-2i)}{(-6+2i)(-6-2i)}=$

$=\dfrac{12+4i-18i+6}{36+4}=\dfrac{18-14i}{40}=\dfrac{9-7i}{20}=\dfrac{9}{20}-\dfrac{7}{20}i$

c) $\dfrac{2+5i}{3-2i}(1-i)=\dfrac{2-2i+5i+5}{3-2i}=\dfrac{7+3i}{3-2i}=\dfrac{(7+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{21+14i+9i-6}{9+4}=\dfrac{15+23i}{13}=\dfrac{15}{13}+\dfrac{23}{13}i$

d) $\dfrac{1+i}{2-i}+\dfrac{-3-2i}{1+3i}=\dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}+\dfrac{(-3-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{2+i+2i-1}{4+1}+\dfrac{-3+9i-2i-6}{1+9}=$

$=\dfrac{1+3i}{5}+\dfrac{-9+7i}{10}=\dfrac{2+6i-9+7i}{10}=\dfrac{-7+13i}{10}=\dfrac{-7}{10}+\dfrac{13}{10}i$

4 **Dados los números complejos $z=1-3i$, $w=-3+2i$, $t=-2i$, calcula:**

a) zwt b) $zt-w(t+z)$ c) $\dfrac{w}{z}t$

d) $\dfrac{2z-3t}{w}$ e) $\dfrac{3z+it}{3}w$ f) $\dfrac{z^2-wt^2}{2}$

$z=1-3i;\ w=-3+2i;\ t=-2i$

a) $zwt=(1-3i)(-3+2i)(-2i)=(-3+2i+9i-6i^2)(-2i)=(3+11i)(-2i)=-6i-22i^2=22-6i$

b) $zt-w(t+z)=(1-3i)(-2i)-(-3+2i)(-2i+1-3i)=(-2i+6i^2)-(-3+3i)(1-5i)=$

$=(-6-2i)-(-3+2i)(1-5i)=(-6-2i)-(-3+15i+2i-10i^2)=$

$=(-6-2i)-(7+17i)=-13-19i$

c) $\dfrac{w}{z}t=\dfrac{-3+2i}{1-3i}(-2i)=\dfrac{6i-4i^2}{1-3i}=\dfrac{(4+6i)(1+3i)}{1^2-(3i)^2}=\dfrac{4+12i+6i+18i^2}{1+9}=$

$=\dfrac{-14+18i}{10}=-\dfrac{7}{5}+\dfrac{9}{5}i$

d) $\dfrac{2z-3t}{w}=\dfrac{2(1-3i)-3(-2i)}{-3+2i}=\dfrac{2-6i+6i}{-3+2i}=\dfrac{2(-3-2i)}{(-3)^2-(2i)^2}=\dfrac{-6-4i}{9+4}=-\dfrac{6}{13}-\dfrac{4}{13}i$

e) $\dfrac{3z+it}{3}w=\dfrac{3(1-3i)+i(-2i)}{3}(-3+2i)=\dfrac{3-9i+2}{3}(-3+2i)=$

$=\left(\dfrac{5}{3}-3i\right)(-3+2i)=-5+\dfrac{10}{3}i+9i-6i^2=1+\dfrac{37}{3}i$

f) $\dfrac{z^2-wt^2}{2}=\dfrac{(1-3i)^2-(-3+2i)(-2i)^2}{2}=\dfrac{1-6i+9i^2-(-3+2i)(-4)}{2}=$

$=\dfrac{-8-6i-12+8i}{2}=\dfrac{-20}{2}+\dfrac{2}{2}i=-10+i$

5 **Calcula.**

a) i^{37} **b)** i^{126} **c)** i^{-7} **d)** i^{64} **e)** i^{-216}

a) $i^{37} = i^1 = i$ b) $i^{126} = i^2 = -1$ c) $i^{-7} = \frac{1}{i^7} = \frac{1}{-i} = i$ d) $i^{64} = i^0 = 1$ e) $i^{-216} = \frac{1}{i^{216}} = \frac{1}{i^0} = \frac{1}{1} = 1$

6 **Dado el número complejo** $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$**, prueba que:**

a) $1 + z + z^2 = 0$ **b)** $\frac{1}{z} = z^2$

a) $z^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$1 + z + z^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$

b) $\frac{1}{z} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{3}i} = \frac{2(-1-\sqrt{3}i)}{(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)} =$

$= \frac{2(-1-\sqrt{3}i)}{1+3} = \frac{2(-1-\sqrt{3}i)}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (lo habíamos calculado en a).

Por tanto; $\frac{1}{z} = z^2$.

7 **Calcula** m **y** n **para que se verifique la igualdad** $(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$**.**

$(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$

$(2+n) + (m+5)\,i = 7 - 2i \;\rightarrow\; \left.\begin{cases} 2 + n = 7 \\ m + 5 = -2 \end{cases}\right\} \begin{matrix} n = 5 \\ m = -7 \end{matrix}$

8 **Determina** k **para que el cociente** $\frac{k+i}{1+i}$ **sea igual a** $2 - i$**.**

$\frac{k+i}{1+i} = \frac{(k+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{k - ki + i + 1}{1+1} = \frac{(k+1)+(1-k)\,i}{2} = \left(\frac{k+1}{2}\right) + \left(\frac{1-k}{2}\right)i = 2 - i \;\rightarrow\; \begin{cases} \frac{k+1}{2} = 2 \;\rightarrow\; k = 3 \\ \frac{1-k}{2} = -1 \;\rightarrow\; k = 3 \end{cases}$

Por tanto, $k = 3$.

9 **Dados los complejos** $2 - ai$ **y** $3 - bi$**, halla** a **y** b **para que su producto sea igual a** $8 + 4i$**.**

$(2 - ai)(3 - bi) = 8 + 4i$

$6 - 2bi - 3ai + abi^2 = 8 + 4i$

$6 - 2bi - 3ai - ab = 8 + 4i$

$(6 - ab) + (-2b - 3a)\,i = 8 + 4i$

$\begin{cases} 6 - ab = 8 \\ -2b - 3a = 4 \end{cases}$

$b = \frac{4 + 3a}{-2}$

$6 - a\left(\frac{4+3a}{-2}\right) = 8 \;\rightarrow\; 6 + \frac{4a + 3a^2}{2} = 8$

$\frac{4a + 3a^2}{2} = 2 \;\rightarrow\; 4a + 3a^2 = 4 \;\rightarrow\; 3a^2 + 4a - 4 = 0$

$a = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6} \begin{cases} a = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \;\rightarrow\; b = -3 \\ a = \frac{-12}{6} = -2 \;\rightarrow\; b = 1 \end{cases}$

Números complejos en forma polar

10 **Representa estos números complejos, sus opuestos y sus conjugados. Exprésalos en forma polar:**

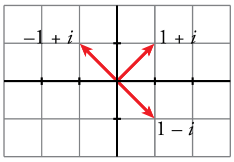
a) $1 - i$ **b)** $-1 + i$ **c)** $\sqrt{3} + i$ **d)** $-\sqrt{3} - i$

e) -4 **f)** $2i$ **g)** $-\dfrac{3}{4}i$ **h)** $2 + 2\sqrt{3}i$

a) $1 - i = \sqrt{2}_{315°}$

Opuesto: $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

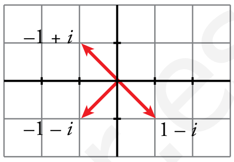
Conjugado: $1 + i = \sqrt{2}_{45°}$



b) $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

Opuesto: $1 - i = \sqrt{2}_{315°}$

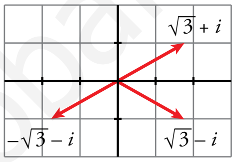
Conjugado: $-1 - i = \sqrt{2}_{225°}$



c) $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$

Opuesto: $-\sqrt{3} - i = 2_{210°}$

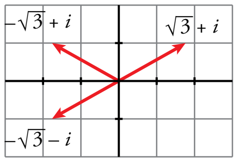
Conjugado: $\sqrt{3} - i = 2_{330°}$



d) $-\sqrt{3} - i = 2_{210°}$

Opuesto: $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$

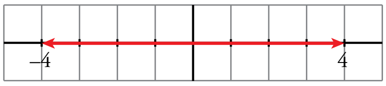
Conjugado: $-\sqrt{3} + i = 2_{150°}$



e) $-4 = 4_{180°}$

Opuesto: $4 = 4_{0°}$

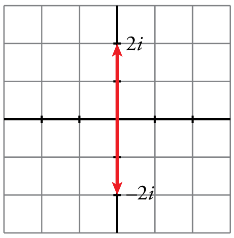
Conjugado: $-4 = 4_{180°}$



f) $2i = 2_{90°}$

Opuesto: $-2i = 2_{270°}$

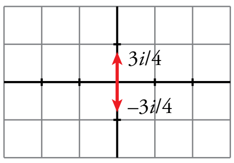
Conjugado: $-2i = 2_{270°}$



g) $-\dfrac{3}{4}i = \left(\dfrac{3}{4}\right)_{270°}$

Opuesto: $\dfrac{3}{4}i = \left(\dfrac{3}{4}\right)_{90°}$

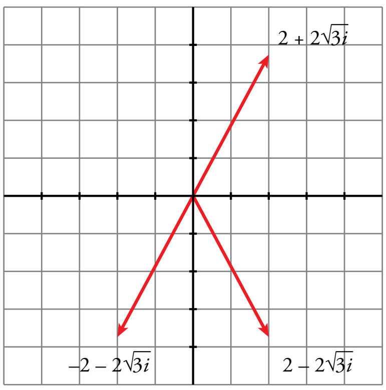
Conjugado: $\dfrac{3}{4}i = \left(\dfrac{3}{4}\right)_{90°}$



h) $2 + 2\sqrt{3}i = \sqrt{14}_{60°}$

Opuesto: $-2 - 2\sqrt{3}i = \sqrt{14}_{240°}$

Conjugado: $2 - 2\sqrt{3}i = \sqrt{14}_{300°}$



11 Escribe en forma binómica estos números complejos:

a) $2_{45°}$ **b)** $3_{(\pi/6)}$ **c)** $\sqrt{2}_{180°}$ **d)** $17_{0°}$

e) $1_{(\pi/2)}$ **f)** $5_{270°}$ **g)** $1_{150°}$ **h)** $4_{100°}$

a) $2_{45°} = 2\,(cos\,45° + i\,sen\,45°) = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

b) $3_{(\pi/6)} = 3\left(cos\,\dfrac{\pi}{6} + i\,sen\,\dfrac{\pi}{6}\right) = 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

c) $\sqrt{2}_{180°} = \sqrt{2}\,(cos\,180° + i\,sen\,180°) = \sqrt{2}\,(-1 + i \cdot 0) = -\sqrt{2}$

d) $17_{0°} = 17$

e) $1_{(\pi/2)} = cos\,\dfrac{\pi}{2} + i\,sen\,\dfrac{\pi}{2} = i$

f) $5_{270°} = -5i$

g) $1_{150°} = cos\,150° + i\,sen\,150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

h) $4_{100°} = 4\,(cos\,100° + i\,sen\,100°) = 4\,(-0,17 + i \cdot 0,98) = -0,69 + 3,94i$

12 Dados los números complejos: $z_1 = 2_{270°}$, $z_2 = 4_{120°}$; $z_3 = 3_{315°}$, calcula:

a) $z_1 \cdot z_2$ **b)** $z_2 \cdot z_3$ **c)** $z_1 \cdot z_3$

d) $\dfrac{z_3}{z_1}$ **e)** $\dfrac{z_2}{z_1}$ **f)** $\dfrac{z_1 \cdot z_3}{z_2}$

g) z_1^2 **h)** z_2^3 **i)** z_3^4

a) $z_1 \cdot z_2 = 8_{30°}$ b) $z_2 \cdot z_3 = 12_{75°}$ c) $z_1 \cdot z_3 = 6_{225°}$

d) $\dfrac{z_3}{z_1} = 1,5_{45°}$ e) $\dfrac{z_2}{z_1} = 2_{-150°} = 2_{210°}$ f) $\dfrac{z_1 \cdot z_3}{z_2} = 1,5_{105°}$

g) $z_1^2 = 4_{180°}$ h) $z_2^3 = 64_{0°}$ i) $z_3^4 = 81_{180°}$

13 Expresa en forma polar y calcula.

a) $(-1 - i)^5$ **b)** $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}\,i}$ **c)** $\sqrt[6]{64}$

d) $\sqrt[3]{8i}$ **e)** $(-2\sqrt{3} + 2i)^6$ **f)** $(3 - 4i)^3$

a) $(-1 - i)^5 = (\sqrt{2}_{225°})^5 = 4\sqrt{2}_{1\,125°} = 4\sqrt{2}_{45°} = 4\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 4 + 4i$

b) $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}\,i} = \sqrt[4]{2_{300°}} = \sqrt[4]{2}_{(300° + 360°\,n)/4} = \sqrt[4]{2}_{75° + 90°\,n}$; $n = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son: $\sqrt[4]{2}_{75°}$ $\sqrt[4]{2}_{165°}$ $\sqrt[4]{2}_{255°}$ $\sqrt[4]{2}_{345°}$

c) $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{64_{0°}} = \sqrt[4]{2^6}_{(360°\,k)/4} = 2\sqrt{2}_{90°\,k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son: $2\sqrt{2}_{0°} = 2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}_{90°} = 2\sqrt{2}\,i$ $2\sqrt{2}_{180°} = -2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}_{270°} = -2\sqrt{2}\,i$

d) $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90°}} = 2_{(90° + 360°\,k)/3} = 2_{30° + 120°\,k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son: $2_{30°} = \sqrt{3} + i$ $2_{150°} = -\sqrt{3} + i$ $2_{270°} = -2i$

e) $(-2\sqrt{3} + 2i)^6 = (4_{150°})^6 = 4\,096_{900°} = 4\,096_{180°} = -4\,096$

f) $(3 - 4i)^3 = (5_{306°\,52'})^3 = 125_{920°\,36'} = 125_{200°\,36'}$

14 **Calcula y representa gráficamente el resultado.**

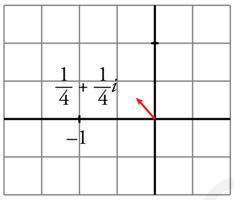
a) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{2-i}}$

a) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}_{315°}}{2_{30°}}\right)^3 = \left(\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{285°}\right)^3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)_{855°} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)_{135°} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}(cos\,135 + i\,sen\,135°) =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{-1}{4} + \dfrac{1}{4}i$



b) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{2-i}} = \sqrt[3]{\dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}} = \sqrt[3]{\dfrac{1+3i}{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i} =$

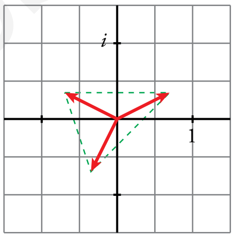
$= \sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)_{71°\,34'}} = \left(\dfrac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{(71°\,34' + 360°\,k)/3} = \sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{\,23°\,51' + 120°\,k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{\,23°\,51'} = 0,785 + 0,347i$

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{\,143°\,51'} = -0,693 + 0,56i$

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{\,263°\,51'} = -0,092 - 0,853i$



15 **Calcula y representa las soluciones.**

a) $\sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}\,i}$ **b)** $\sqrt[4]{-16}$ **c)** $\sqrt[3]{-27i}$

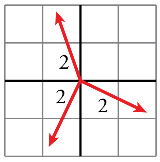
a) $\sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}\,i} = \sqrt[3]{8_{300°}} = 2_{(300° + 360°\,k)/3} = 2_{100° + 120°\,k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$2_{100°} = -0,35 + 1,97i$

$2_{220°} = -1,53 - 1,26i$

$2_{340°} = 1,88 - 0,68i$

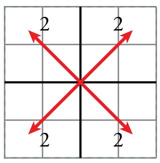


b) $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180°}} = 2_{(180° + 360°\,k)/4} = 2_{45° + 90°\,k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$2_{45°} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ $\quad 2_{135°} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$2_{225°} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$ $\quad 2_{315°} = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$



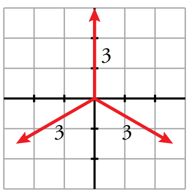
c) $\sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270°}} = 3_{(270° + 360°\,k)/3}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$3_{90°} = 3i$

$3_{210°} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

$3_{330°} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$



16 **Calcula pasando a forma polar.**

a) $(1 + i\sqrt{3})^5$

b) $\dfrac{8}{(1-i)^5}$

c) $\sqrt[6]{-64}$

d) $\sqrt{\dfrac{2-2i}{-3+3i}}$

a) $(1+i\sqrt{3})^5 = (2_{60°})^5 = 32_{300°} = 32\,(\cos 300° + i\,\text{sen}\,300°) = 32\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16 - 16\sqrt{3}\,i$

b) $\dfrac{8}{(1-i)^5} = \dfrac{8_{0°}}{(\sqrt{2}_{315°})^5} = \dfrac{8_{0°}}{4\sqrt{2}_{1\,575°}} = \dfrac{8_{0°}}{4\sqrt{2}_{135°}} = \left(\dfrac{8}{4\sqrt{2}}\right)_{-135°} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)_{225°} =$

$= \sqrt{2}_{225°} = \sqrt{2}\,(\cos 225° + i\,\text{sen}\,225°) = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 - i$

c) $\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180°}} = \sqrt[6]{2^6}_{(180° + 360°\,k)/6} = 2_{30° + 60°\,k};\quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$2_{30°} = \sqrt{3} + i \qquad 2_{90°} = 2i \qquad 2_{150°} = -\sqrt{3} + i$

$2_{210°} = -\sqrt{3} - i \qquad 2_{270°} = -2 \qquad 2_{330°} = \sqrt{3} - i$

d) $\sqrt{\dfrac{2-2i}{-3+3i}} = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}_{315°}}{3\sqrt{2}_{135°}}} = \sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)_{180°}} = \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{(180° + 360°\,k)/2} = \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{90° + 180°\,k};\quad k = 0, 1$

Las dos raíces son:

$\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{90°} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i \qquad \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{270°} = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i$

17 **Expresa en forma polar z, su opuesto $-z$, y su conjugado $\bar{z}$ en cada uno de estos casos:**

a) $z = 1 - \sqrt{3}\,i$

b) $z = -2 - 2i$

c) $z = -2\sqrt{3} + 2i$

d) $z = -5$

e) $z = 7i$

f) $z = -3 - 4i$

a) $z = 1 - \sqrt{3}\,i = 2_{300°};\ -z = -1 + \sqrt{3}\,i = 2_{120°};\ \bar{z} = 1 + \sqrt{3}\,i = 2_{60°}$

b) $z = -2 - 2i = 2\sqrt{2}_{225°};\ -z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}_{45°};\ \bar{z} = -2 + 2i = 2\sqrt{2}_{135°}$

c) $z = -2\sqrt{3} + 2i = 4_{150°};\ -z = 2\sqrt{3} - 2i = 4_{330°};\ \bar{z} = -2\sqrt{3} - 2i = 4_{210°}$

d) $z = -5 = 5_{180°};\ -z = 5 = 5_{0°};\ \bar{z} = -5 = 5_{180°}$

e) $z = 7i = 7_{90°};\ -z = -7i = 7_{270°};\ \bar{z} = -7i = 7_{270°}$

f) $z = -3 - 4i = 5_{233,13°};\ -z = 3 + 4i = 5_{53,13°};\ \bar{z} = -3 + 4i = 5_{126,87°}$

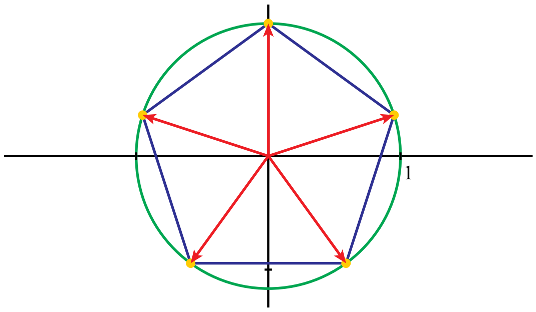
18 Representa los polígonos regulares que tienen por vértices los afijos de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{i}$ **b)** $\sqrt[6]{-1}$ **c)** $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$

a) $\sqrt[5]{i} = \sqrt[5]{1_{90°}} = 1_{(90° + 360°\,k)/5} = 1_{18° + 72°\,k};\ \ k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son: $1_{18°};\ 1_{90°};\ 1_{162°};\ 1_{234°};\ 1_{306°}$

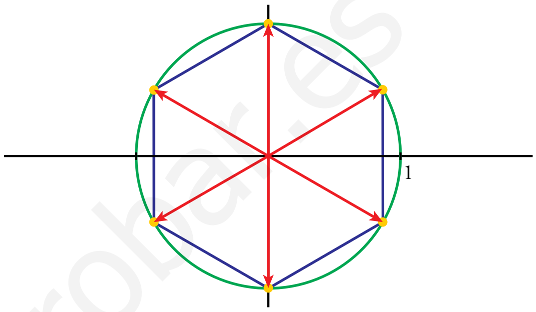
Representación del polígono (pentágono):



b) $\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180°}} = 1_{(180° + 360°\,k)/6} = 1_{30° + 60°\,k};\ \ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son: $1_{30°};\ 1_{90°};\ 1_{150°};\ 1_{210°};\ 1_{270°};\ 1_{330°}$

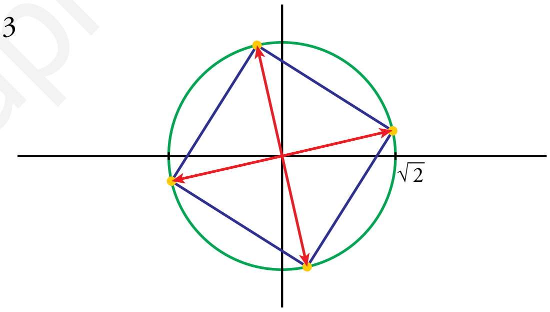
Representación del polígono (hexágono):



c) $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i} = \sqrt[4]{4_{30°}} = \sqrt[4]{2^2}_{(30° + 360°\,k)/4} = \sqrt{2}_{7°\,30' + 90°\,k};\ \ k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son: $\sqrt{2}_{7°\,30'};\ \sqrt{2}_{97°\,30'};\ \sqrt{2}_{187°\,30'};\ \sqrt{2}_{277°\,30'}$

Representación del polígono (cuadrado):



19 Calcula $\bar{z}^5$ **y** $\sqrt[4]{z}$**, siendo** $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$**.**

Primero, pasamos z a forma polar:

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$tg\ \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \ \rightarrow\ \alpha = 120° \ \text{ porque } z \text{ está en el segundo cuadrante.}$$

Luego $z = 1_{120°}$.

$$\bar{z}^5 = (1_{-120°})^5 = (1_{240°})^5 = (1^5)_{5 \cdot 240°} = 1_{120°} = z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1_{240°}} = (\sqrt[4]{1})_{(240° + 360°\,k)/4};\ \ k = 0, 1, 2, 3$$

Si $k = 0 \ \rightarrow\ z_1 = 1_{60°} = 1\,(cos\ 60° + i\ sen\ 60°) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Si $k = 1 \ \rightarrow\ z_2 = 1_{150°} = 1\,(cos\ 150° + i\ sen\ 150°) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Si $k = 2 \ \rightarrow\ z_3 = 1_{240°} = 1\,(cos\ 240° + i\ sen\ 240°) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Si $k = 3 \ \rightarrow\ z_4 = 1_{330°} = 1\,(cos\ 330° + i\ sen\ 330°) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Página 163

Ecuaciones y sistemas en $\mathbb{C}$

20 **Resuelve las siguientes ecuaciones y expresa las soluciones en forma binómica:**

a) $z^2 + 4 = 0$

b) $z^2 + z + 4 = 0$

c) $z^2 + 3z + 7 = 0$

d) $z^2 - z + 1 = 0$

a) $z^2 + 4 = 0 \to z^2 = -4 \to z = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i \quad \begin{cases} z_1 = -2i \\ z_2 = 2i \end{cases}$

b) $z^2 + z + 4 = 0 \to z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{15}\,i}{2} \quad \begin{cases} z_1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{15}}{2}i \\ z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{15}}{2}i \end{cases}$

c) $z^2 + 3z + 7 = 0 \to z = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-28}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{19}\,i}{2} \quad \begin{cases} z_1 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{19}}{2}i \\ z_2 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{19}}{2}i \end{cases}$

d) $z^2 - z + 1 = 0 \to z = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} \quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

21 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $z^5 + 32 = 0$ **b)** $iz^3 - 27 = 0$ **c)** $z^3 + 8i = 0$ **d)** $iz^4 + 4 = 0$

a) $z^5 + 32 = 0 \to z^5 = -32$

$z = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32_{180°}} = 2_{(180° + 360°\,k)/5} = 2_{36° + 72°\,k};\; k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son:

$2_{36°} \quad 2_{108°} \quad 2_{180°} \quad 2_{252°} \quad 2_{324°}$

b) $iz^3 - 27 = 0 \to z^3 + 27i = 0 \to z^3 = -27i$

$z = \sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270°}} = 3_{(270° + 360°\,k)/3} = 3_{90° + 120°\,k};\; k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$3_{90°} \quad 3_{210°} \quad 3_{330°}$

c) $z^3 + 8i = 0 \to z = \sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8_{270°}} = 2_{(270° + 360°\,k)/3} = 2_{90° + 120°\,k};\; k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$2_{90°} = 2i \quad 2_{210°} = -\sqrt{3} - i \quad 2_{330°} = \sqrt{3} - i$

d) $iz^4 + 4 = 0 \to z^4 - 4i = 0 \to z^4 = 4i$

$z = \sqrt[4]{4i} = \sqrt[4]{4_{90°}} = \sqrt{2}_{(90° + 360°\,k)/4} = \sqrt{2}_{22°\,30' + 90°\,k};\; k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$\sqrt{2}_{22°\,30'} = 1,3 + 0,5i$

$\sqrt{2}_{112°\,30'} = -0,5 + 1,3i$

$\sqrt{2}_{202°\,30'} = -1,3 - 0,5i$

$\sqrt{2}_{292°\,30'} = 0,5 - 1,3i$

22 **Resuelve las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$:**

a) $z^2 + 4i = 0$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0$

c) $2z^2 + 10 = 0$

d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

a) $z^2 + 4i = 0 \rightarrow z^2 = -4i \rightarrow z = \sqrt{-4i} = \sqrt{4_{270°}} \rightarrow z = 2_{(270° + 360°\,k)/2};\ k = 0, 1$

Las dos raíces son: $z_1 = 2_{135°}$, $z_2 = 2_{315°}$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0 \rightarrow z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{1 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i \begin{cases} z_1 = 1 - 2i \\ z_2 = 1 + 2i \end{cases}$

c) $2z^2 + 10 = 0 \rightarrow 2z^2 = -10 \rightarrow z^2 = -5 \rightarrow z = \pm\sqrt{5}\,i \begin{cases} z_1 = -\sqrt{5}\,i \\ z_2 = \sqrt{5}\,i \end{cases}$

d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

$z^2 = t$

$t^2 + 13t + 36 = 0$

$t = \dfrac{-13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \dfrac{-13 \pm 5}{2} \begin{cases} t = -4 \\ t = -9 \end{cases}$

$z^2 = -4 \rightarrow z = \pm 2i$

$z^2 = -9 \rightarrow z = \pm 3i$

Las soluciones son: $2i = 2_{90°}$; $-2i = 2_{270°}$; $3i = 3_{90°}$; $-3i = 3_{270°}$

23 **Obtén las cuatro soluciones de las siguientes ecuaciones:**

a) $z^4 - 1 = 0$

b) $z^4 + 16 = 0$

c) $z^4 - 8z = 0$

a) $z^4 - 1 = 0 \rightarrow z^4 = 1 \rightarrow z = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1_{0°}} = 1_{360°\,k/4} = 1_{90°k};\ k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$1_{0°} = 1$

$1_{90°} = i$

$1_{180°} = -1$

$1_{270°} = -i$

b) $z^4 + 16 = 0 \rightarrow z^4 = -16 \rightarrow z^4 = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180°}} = 2_{(180° + 360°\,k)/4} = 2_{45° + 90°\,k};\ k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$2_{45°} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$2_{135°} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$2_{225°} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

$2_{315°} = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

c) $z^4 - 8z = 0 \rightarrow z(z^3 - 8) = 0 \begin{cases} z = 0 \\ z = \sqrt[3]{8} \end{cases}$

$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8_{0°}} = 2_{(360°\,k)/3} = 2_{120°\,k};\ k = 0, 1, 2$

Las soluciones de la ecuación son: 0; $2_{0°} = 2$; $2_{120°} = -1 + \sqrt{3}\,i$; $2_{240°} = -1 - \sqrt{3}\,i$

24 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 3z - w = 1 - i \\ 2z - 3w = 8 - 8i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z + 3w = 8 - 3i \\ 2z + w = 6 - i \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5z + 4w = 11i \\ 3z - 2w = 11i \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2z - 5w = -5 + 2i \\ 4z - 3w = -3 - 10i \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3z - w = 1 - i \\ 2z - 3w = 8 - 8i \end{cases} \xrightarrow{-3\cdot(1.^{a})} \begin{cases} -9z + 3w = -3 + 3i \\ 2z - 3w = 8 - 8i \end{cases}$

Sumando obtenemos: $-7z = 5 - 5i \rightarrow z = -\frac{5}{7} + \frac{5}{7}i$

$3\left(-\frac{5}{7} + \frac{5}{7}i\right) - w = 1 - i \rightarrow w = -\frac{15}{7} + \frac{15}{7}i - 1 + i = -\frac{22}{7} + \frac{22}{7}i$

b) $\begin{cases} z + 3w = 8 - 3i \\ 2z + w = 6 - i \end{cases} \xrightarrow{-2\cdot(1.^{a})} \begin{cases} -2z - 6w = -16 + 6i \\ 2z + w = 6 - i \end{cases}$

Sumando obtenemos: $-5w = -10 + 5i \rightarrow w = 2 - i$

$z + 3(2 - i) = 8 - 3i \rightarrow z = 8 - 3i - 6 + 3i = 2$

c) $\begin{cases} 5z + 4w = 11i \\ 3z - 2w = 11i \end{cases} \xrightarrow{2\cdot(2.^{a})} \begin{cases} 5z + 4w = 11i \\ 6z - 4w = 22i \end{cases}$

Sumando obtenemos: $11z = 33i \rightarrow z = 3i$

$5(3i) + 4w = 11i \rightarrow 4w = -4i \rightarrow w = -i$

d) $\begin{cases} 2z - 5w = -5 + 2i \\ 4z - 3w = -3 - 10i \end{cases} \xrightarrow{-2\cdot(1.^{a})} \begin{cases} -4z + 10w = 10 - 4i \\ 4z - 3w = -3 - 10i \end{cases}$

Sumando obtenemos: $7w = 7 - 14i \rightarrow w = 1 - 2i$

$2z - 5(1 - 2i) = -5 + 2i \rightarrow 2z = -5 + 2i + 5 - 10i \rightarrow z = -4i$

Para resolver

25 **Calcula a y b de modo que se verifique:**

$$(a + bi)^2 = 3 + 4i$$

$(a + bi)^2 = 3 + 4i \rightarrow a^2 + bi^2 + 2abi = 3 + 4i \rightarrow$

$\rightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 3 + 4i \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \rightarrow b = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a} \end{cases}$

$a^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 3 \rightarrow a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \rightarrow a^4 - 4 = 3a^2 \rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0$

$a^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$ $\begin{cases} a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2 \\ a^2 = -1 \text{ (no vale)} \end{cases}$

$a = -2 \rightarrow b = -1$

$a = 2 \rightarrow b = 1$

26 **Halla el valor de b para que el producto $(3-6i)(4+bi)$ sea un número:**

a) imaginario puro. **b) real.**

$$(3-6i)(4+bi)=12+3bi-24i+6b=(12+6b)+(3b-24)i$$

a) $12+6b=0 \to b=-2$

b) $3b-24=0 \to b=8$

27 **Determina a para que $(a-2i)^2$ sea un número imaginario puro.**

$$(a-2i)^2=a^2+4i^2-4ai=(a^2-4)-4ai$$

Para que sea imagiario puro, ha de ser:

$$a^2-4=0 \to a=\pm 2 \begin{cases} a_1=-2 \\ a_2=2 \end{cases}$$

28 **Calcula x para que el resultado de $(x+2+ix)(x-i)$ sea un número real.**

$$(x+2+ix)(x-i)=x^2-xi+2x-2i+x^2i-xi^2=$$

$$=x^2-xi+2x-2i+ix^2+x=(x^2+3x)+(x^2-x-2)i$$

Para que sea real, ha de ser:

$$x^2-x-2=0 \to x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{cases}$$

29 **Calcula el valor que debe tener a para que el módulo del cociente $\frac{a+2i}{1-i}$ sea $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.**

$$z=\frac{a+2i}{1-i}=\frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{a+ai+2i+2i^2}{1+1}=\frac{a-2+(a+2)i}{2}$$

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{a-2}{2}\right)^2+\left(\frac{a+2}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+4}{2}} \to \sqrt{\frac{a^2+4}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$\frac{a^2+4}{2}=\frac{9}{2} \to a^2=5 \begin{cases} a_1=\sqrt{5} \\ a_2=-\sqrt{5} \end{cases}$$

30 **La suma de dos números complejos es $3+i$. La parte real del primero es 2 y el cociente entre este y el segundo es un número real. Hállalos.**

Sean $z=2+bi$ y $w=c+di$ los números complejos buscados.

$$z+w=3+i \to 2+bi+c+di=3+i \to \begin{cases} 2+c=3 \to c=1 \\ b+d=1 \ (1) \end{cases}$$

Por otro lado:

$$\frac{z}{w}=k \to z=kw \to 2+bi=k(1+di) \to \begin{cases} 2=k \\ bi=kdi \to b=2d \end{cases}$$

Ahora sustituimos en (1):

$$b+d=1 \to 2d+d=1 \to d=\frac{1}{3} \to b=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Los números buscados son $z=2+\frac{2}{3}i$ y $w=1+\frac{1}{3}i$.

31 **Si $z=(i^0+i^1+i^2+i^3+\ldots+i^{10})(3+ki)$, halla el valor de k para que el módulo de z sea 5.**

$i^0+i^1+\ldots+i^{10}=\frac{i\cdot i^{10}-i^0}{i-1}$ porque es la suma de los términos de una progresión geométrica de razón i.

$$\frac{i\cdot i^{10}-i^0}{i-1}=\frac{i^{11}-i^0}{i-1}=\frac{-i-1}{i-1}=\frac{(-i-1)(i+1)}{(i-1)(i+1)}=\frac{-i^2-i-i-1}{i^2-1}=\frac{-2i}{-2}=i$$

Por tanto: $z = i \cdot (3 + ki) = -k + 3i$

$|z| = \sqrt{(-k)^2 + 3^2} = \sqrt{k^2 + 9}$

$|z| = 5 \rightarrow \sqrt{k^2 + 9} = 5 \rightarrow k_1 = 2,\ k_2 = -2$

32 **¿Para qué valores de x es imaginario puro el cociente $\frac{x - 4i}{x + i}$?**

$$\frac{x - 4i}{x + i} = \frac{(x - 4i)(x - i)}{(x + i)(x - i)} = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} + \frac{-5x}{x^2 + 1} i$$

Para que sea imaginario puro, ha de ser:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array} \right.$$

33 **Halla dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos $\pi/3$, y la suma de sus módulos 8.**

* ***Llámalos r_α y s_β y escribe las condiciones que los relacionan.***

$\frac{r}{s} = 3$

$r + s = 8$

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$

$\alpha - \beta = 0°$

Hallamos sus módulos:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{r}{s} = 3 \\ r + s = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} r = 3s \\ 3s + s = 8;\ 4s = 8;\ s = 2;\ r = 6 \end{array}$$

Hallamos sus argumentos:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \\ \alpha - \beta = 0 \end{array}\right\} \alpha = \beta;\ 2\beta = \frac{\pi}{3};\ \beta = \frac{\pi}{6};\ \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Los números serán: $6_{\pi/6}$ y $2_{\pi/6}$

34 **El producto de dos números complejos es $2_{90°}$ y el cubo del primero dividido por el otro es $(1/2)_{0°}$. Hállalos.**

Llamamos a los números: $z = r_\alpha$ y $w = s_\beta$

$$r_\alpha \cdot s_\beta = 2_{90°} \left\langle \begin{array}{l} r \cdot s = 2 \\ \alpha + \beta = 90° \end{array} \right.$$

$$\frac{(r_\alpha)^3}{s_\beta} = \left(\frac{1}{2}\right)_{0°} \left\langle \begin{array}{l} r^3/s = \frac{1}{2} \\ 3\alpha - \beta = 90° \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{array}{l} r \cdot s = 2 \\ \frac{r^3}{s} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} r \cdot s = 2 \\ s = 2r^3 \end{array}\right\} r \cdot 2r^3 = 2 \rightarrow r^4 = 1 \rightarrow r = \left\langle \begin{array}{l} 1 \rightarrow s = 2 \cdot 1^3 = 2 \\ -1 \text{ (no vale)} \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 90° \\ 3\alpha - \beta = 0° \end{array}\right\} \rightarrow 4\alpha = 90° + 360°\,k \rightarrow \alpha = \frac{90° + 360°\,k}{4};\ k = 0, 1, 2, 3$$

$\beta = 90° - \alpha$

Hay cuatro soluciones:

$z_1 = 1_{22^\circ 30'} \to w_1 = 2z_1^3 = 2 \cdot 1_{67^\circ 30'} = 2_{67^\circ 30'}$

$z_2 = 1_{112^\circ 30'} \to w_2 = 2_{337^\circ 30'}$

$z_3 = 1_{202^\circ 30'} \to w_3 = 2_{607^\circ 30'} = 2_{247^\circ 30'}$

$z_4 = 1_{292^\circ 30'} \to w_4 = 2_{877^\circ 30'} = 2_{157^\circ 30'}$

35 El producto de dos números complejos es –27 y uno de ellos es igual al cuadrado del otro. Calcúlalos.

Llamemos z y w a los complejos buscados.

$$\begin{cases} zw = -27 \to w^3 = -27 \to w = \sqrt[3]{-27} \to w = \sqrt[3]{27_{180^\circ}} = 3_{(180^\circ \cdot 360^\circ k)/3};\ k = 0, 1, 2 \\ z = w^2 \end{cases}$$

- Si $k = 0 \to w_1 = 3_{60^\circ} = 3\,(cos\,60^\circ + i\ sen\,60^\circ) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

  $z_1 = w_1^2 = (3_{60^\circ})^2 = 9_{120^\circ} = 9\,(cos\,120^\circ + i\ sen\,120^\circ) = -\dfrac{9}{2} + \dfrac{9\sqrt{3}}{2}i$

- Si $k = 1 \to w_2 = 3_{180^\circ} = 3\,(cos\,180^\circ + i\ sen\,180^\circ) = -3$

  $z_2 = w_2^2 = (3_{180^\circ})^2 = 9_{0^\circ} = 9\,(cos\,0^\circ + i\ sen\,0^\circ) = 9$

- Si $k = 2 \to w_3 = 3_{300^\circ} = 3\,(cos\,300^\circ + i\ sen\,300^\circ) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

  $z_3 = w_3^2 = (3_{300^\circ})^2 = 9_{240^\circ} = 9\,(cos\,240^\circ + i\ sen\,240^\circ) = -\dfrac{9}{2} - \dfrac{9\sqrt{3}}{2}i$

Hemos obtenido tres soluciones del problema.

36 Halla, en función de x, el módulo de $z = \dfrac{1+xi}{1-xi}$.

Demuestra que $|z| = 1$ para cualquier valor de x.

$$|z| = \left|\frac{1+xi}{1-xi}\right| = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$

O bien:

$$z = \frac{1+xi}{1-xi} = \frac{(1+xi)(1+xi)}{(1-xi)(1+xi)} = \frac{1+x^2+2xi}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+x^4-2x^2+4x^2}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{1} = 1$$

37 Halla dos números complejos conjugados sabiendo que su suma es 8 y que la suma de sus módulos es 10.

$$\left.\begin{array}{l} z + \overline{z} = 8 \\ |z| + |\overline{z}| = 10 \end{array}\right\} \text{ Como } |z| = |\overline{z}| \to |z| = 5$$

Si llamamos:

$z = a + bi \to \overline{z} = a - bi$

$z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a = 8 \to a = 4$

$|z| = |\overline{z}| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{16+b^2} = 5 \to 16 + b^2 = 25 \to b^2 = 9 \to b = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Hay dos soluciones:

$z_1 = 4 + 3i \to \overline{z}_1 = 4 - 3i$

$z_2 = 4 - 3i \to \overline{z}_2 = 4 + 3i$

38 **Representa gráficamente los resultados que obtengas al hallar $\sqrt[3]{-2-2i}$ y calcula el lado del triángulo que se forma al unir esos tres puntos.**

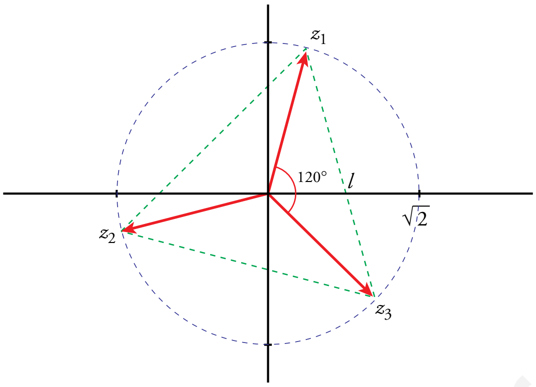
$\sqrt[3]{-2-2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{225°}} = \sqrt{2}_{(225° + 360°\,k)/3} = \sqrt{2}_{75° + 120°\,k}$

Las tres raíces son:

$z_1 = \sqrt{2}_{75°}$

$z_2 = \sqrt{2}_{195°}$

$z_3 = \sqrt{2}_{315°}$



Para hallar la longitud del lado, aplicamos el teorema del coseno:

$l^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\, cos\, 120° = 2 + 2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + 2 = 6$

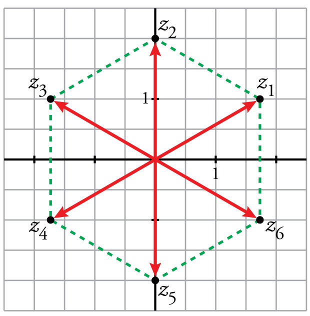
$l = \sqrt{6}$

39 **Dibuja el hexágono cuyos vértices son los afijos de $\sqrt[6]{-64}$.**
¿Obtienes el mismo hexágono con los afijos de $\sqrt[6]{64i}$; $\sqrt[6]{64}$; $\sqrt[6]{-64i}$?
Compruébalo y representa los resultados obtenidos.

$\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180°}} = 2_{(180° + 360°\,k)/6}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{30°} = 2\,(cos\, 30° + i\, sen\, 30°) = \sqrt{3} + i$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{90°} = 2\,(cos\, 90° + i\, sen\, 90°) = 2i$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{150°} = 2\,(cos\, 150° + i\, sen\, 150°) = -\sqrt{3} + i$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{210°} = 2\,(cos\, 210° + i\, sen\, 210°) = -\sqrt{3} - i$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{270°} = 2\,(cos\, 270° + i\, sen\, 270°) = -2i$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{330°} = 2\,(cos\, 330° + i\, sen\, 330°) = \sqrt{3} - i$

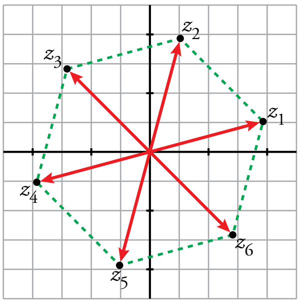
Representación gráfica:



No se obtiene el mismo hexágono porque las raíces sextas de dos números distintos son diferentes. Se obtienen hexágonos girados con respecto al primero. Veamos los siguientes casos:

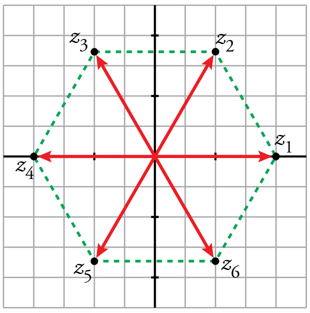
$\sqrt[6]{64i} = \sqrt[6]{64_{90°}} = 2_{(90° + 360°k)/6}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{15°}$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{75°}$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{135°}$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{195°}$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{255°}$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{315°}$



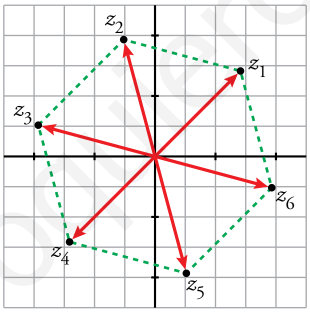
$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64_{0°}} = 2_{(0° + 360°k)/6}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{0°}$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{60°}$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{120°}$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{180°}$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{240°}$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{300°}$

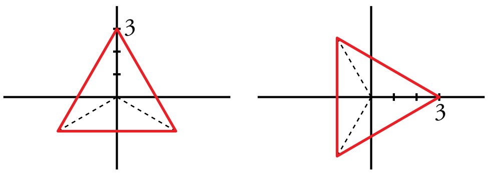


$\sqrt[6]{-64i} = \sqrt[6]{64_{270°}} = 2_{(270° + 360°k)/6}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{45°}$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{105°}$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{165°}$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{225°}$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{285°}$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{345°}$



40 Halla los números complejos que corresponden a los vértices de estos triángulos equiláteros.



Como los afijos están en los vértices de un triángulo equilátero, los números complejos son:

a) $z_1 = 3_{90°} = 3i$

$z_2 = 3_{210°} = 3\,(cos\ 210° + i\ sen\ 210°) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

$z_3 = 3_{330°} = 3\,(cos\ 330° + i\ sen\ 330°) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

b) $z_1 = 3_{0°} = 3$

$z_2 = 3_{120°} = 3\,(cos\ 120° + i\ sen\ 120°) = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

$z_3 = 3_{240°} = 3\,(cos\ 240° + i\ sen\ 240°) = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

41 **¿Pueden ser las raíces de un complejo z los números $2_{28°}$, $2_{100°}$, $2_{172°}$, $2_{244°}$ y $2_{316°}$? En caso afirmativo, halla z.**

* ***Comprueba si el ángulo que forman cada dos de ellas es el de un pentágono regular.***

$$28° + 72° = 100° \qquad 100° + 72° = 172°$$
$$172° + 72° = 244° \qquad 244° + 72° = 316°$$

Sí son las raíces quintas de un número complejo. Lo hallamos elevando a la quinta cualquiera de ellas:

$$z = (2_{28°})^5 = 32_{140°}$$

42 **El número complejo $3_{40°}$ es vértice de un pentágono regular. Halla los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.**

Los otros vértices serán:

$$3_{112°} \qquad 3_{184°} \qquad 3_{256°} \qquad 3_{328°}$$

El número será: $z = (3_{40°})^5 = 243$

43 **Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es $1 + i$. Halla z y las otras raíces cúbicas.**

$1 + i = \sqrt{2}_{45°}$

Las otras raíces cúbicas son:

$\sqrt{2}_{45° + 120°} = \sqrt{2}_{165°} \qquad \sqrt{2}_{165° + 120°} = \sqrt{2}_{285°}$

Hallamos z:

$$z = (1+i)^3 = (\sqrt{2}_{45°})^3 = \sqrt{8}_{135°} = \sqrt{8}\,(cos\,135° + i\,sen\,135°) = \sqrt{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 + 2i$$

44 **Busca dos números complejos cuya suma sea $-3 + 3i$ y que una de las raíces cuadradas de su cociente sea $2i$.**

Sean z y w los números complejos buscados. Entonces,

$$\begin{cases} z + w = -3 + 3i \\ \dfrac{z}{w} = (2i)^2 \end{cases} \to \begin{cases} z + w = -3 + 3i \to -4w + w = -3 + 3i \to w = 1 - i \\ z = -4w \end{cases}$$

$z = -4(1 - i) = -4 + 4i$

45 **Calcula el valor que debe tener b para que el módulo de $\dfrac{-3 + bi}{1 - 2i}$ sea igual a $\sqrt{2}$.**

$$\frac{-3+bi}{1-2i} = \frac{(-3+bi)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-3-6i+bi+2bi^2}{1+4} = \frac{-3-2b}{14} + \frac{b-6}{14}i$$

Como el módulo de este número debe ser $\sqrt{2}$, obtenemos:

$$\sqrt{\left(\frac{-3-2b}{14}\right)^2 + \left(\frac{b-6}{14}\right)^2} = \sqrt{2} \to \frac{\sqrt{5b^2+45}}{14} = \sqrt{2} \to$$

$$\to \frac{5b^2+45}{196} = 2 \to 5b^2 = 347 \to b_1 = \sqrt{\frac{347}{5}},\ b_2 = -\sqrt{\frac{347}{5}}$$

46 **Expresa $cos\,4\alpha$ y $sen\,4\alpha$ en función de $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$, utilizando la fórmula de Moivre. Ten en cuenta que $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.**

$$cos\,4\alpha + i\,sen\,4\alpha = (cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha)^4 = cos^4\alpha + 4i\,cos^3\alpha\,sen\,\alpha - 6\,cos^2\alpha\,sen^2\alpha - 4i\,cos\,\alpha\,sen^3\alpha + sen^4\alpha =$$
$$= cos^4\alpha - 6\,cos^2\alpha\,sen^2\alpha + sen^4\alpha + i(4\,cos^3\alpha\,sen\,\alpha - 4\,cos\,\alpha\,sen^3\alpha)$$

De aquí obtenemos que:

$cos\,4\alpha = cos^4\alpha - 6\,cos^2\alpha\,sen^2\alpha + sen^4\alpha$

$sen\,4\alpha = 4\,cos^3\alpha\,sen\,\alpha - 4\,cos\,\alpha\,sen^3\alpha$

Página 164

47 **Un pentágono regular con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Halla los otros vértices y la longitud de su lado.**

El punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ corresponde al afijo del número complejo $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i = 2_{45°}$.

Para hallar los otros vértices, multiplicamos z por $1_{72°}$:

$z_2 = 2_{117°} = -0,91 + 1,78i$ $\quad z_3 = 2_{189°} = -1,97 - 0,31i$

$z_4 = 2_{261°} = -0,31 - 1,97i$ $\quad z_5 = 2_{333°} = 1,78 - 0,91i$

Los otros tres vértices serán:

$(-0,91;\ 1,78)\quad (-1,97;\ -0,31)\quad (-0,31;\ -1,97)\quad (1,78;\ -0,91)$

Hallamos la longitud del lado aplicando el teorema del coseno:

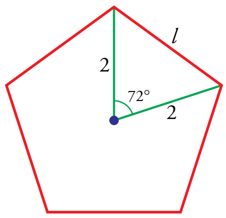
$l^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2\cos 72°$

$l^2 = 4 + 4 - 4 \cdot 0,31$

$l^2 = 8 - 1,24$

$l^2 = 6,76$

$l = 2,6$ unidades



48 **El afijo de $3 + 2i$ es uno de los vértices de un cuadrado con centro en el origen de coordenadas. Halla los otros vértices y el área del cuadrado.**

Si tenemos un vértice de un cuadrado centrado en el origen, para calcular los otros vértices tenemos que multiplicar por $i = 1_{90°}$ y así hacer giros de 90°.

$z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = (3 + 2i)i = -2 + 3i \quad z_3 = (-2 + 3i)i = -3 - 2i \quad z_4 = (-3 - 2i)i = 2 - 3i$

Los otros vértices serán: (–2, 3), (–3, –2) y (2, –3).

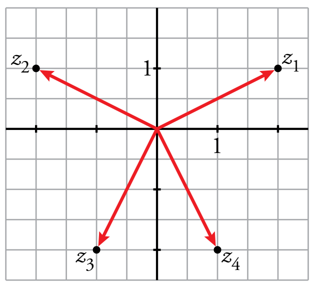
La diagonal del cuadrado mide: $2|z_1| = 2\sqrt{9+4} = 2\sqrt{13}$ porque está centrado en el origen.

El área del cuadrado es (usando la fórmula del área de un rombo):

$$A = \frac{2\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{13}}{2} = 26\ \text{u}^2$$

49 **¿Pueden ser $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -1 - 2i$ y $z_4 = 1 - 2i$, las raíces de un número complejo? Justifica tu respuesta.**

No, porque sus afijos no se encuentran en los vértices de un polígono regular centrado en el origen. Podemos comprobarlo en el siguiente gráfico:



50 **Sean A, B, C, D los afijos de los números $z_0 = 4$; $z_1 = \frac{1+i}{2}z_0$; $z_2 = \frac{1+i}{2}z_1$; $z_3 = \frac{1+i}{2}z_2$.**

a) ¿Cuáles son las coordenadas de A, B, C, D?

b) Calcula $d_0 = |z_0 - z_1|$; $d_1 = |z_1 - z_2|$; $d_2 = |z_2 - z_3|$ e interpreta geométricamente estos números.

c) ¿Cuánto mide la línea poligonal $ABCD$?

a) $z_0 = 4 \quad z_1 = \frac{1+i}{2} \cdot 4 = 2 + 2i \quad z_2 = \frac{1+i}{2} \cdot (2+2i) = (1+i)^2 = 2i \quad z_3 = \frac{1+i}{2} \cdot 2i = -1 + i$

Los afijos son: $A(4, 0)$; $B(2, 2)$; $C(0, 2)$; $D(-1, 1)$.

b) $d_0 = |4-(2+2i)| = |2-2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$d_1 = |2+2i-2i| = |2| = 2$

$d_2 = |2i-(-1+i)| = |1+i| = \sqrt{2}$

Las distancias calculadas forman una progresión geométrica de razón $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) La línea poligonal $ABCD$ mide $2\sqrt{2}+2+\sqrt{2} = 3\sqrt{2}+2$

51 Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:

a) $1+i$ y $1-i$ **b) $5i$ y $-5i$** **c) $2-3i$ y $2+3i$** **d) $4-i$ y $1+2i$**

a) $[x-(1+i)][x-(1-i)] = x^2-(1-i)x-(1+i)x+(1-i^2) =$

$= x^2-(1-i+1+i)x+(1-i^2) = x^2-2x+2 = 0$

b) $(x-5i)(x+5i) = x^2+5xi-5xi-25i^2 = x^2+25 = 0$

c) $[x-(2-3i)][x-(2+3i)] = (x-2-3i)(x-2+3i) =$

$= x^2-2x+3xi-2x+4-6i-3xi+6i-9i^2 = x^2-4x+13 = 0$

d) En este caso, la ecuación de segundo grado no tendrá coeficientes reales porque las soluciones no son números complejos conjugados.

$[x-(4-i)][x-(1+2i)] = (x-4+i)(x-1-2i) = x^2-(5+i)x+6+7i = 0$

52 Halla el valor que debe tener m para que $1-2i$ sea una solución de la ecuación $z^2-mz+5=0$.

Calculamos las soluciones de la ecuación:

$$z = \frac{m \pm \sqrt{m^2-20}}{2} = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2-20}{4}}$$

Si $\frac{m}{2} = 1 \to m = 2 \to \frac{m^2-20}{4} = \frac{4-20}{4} = -4$

Comprobamos ahora cuáles son las soluciones si $m = 2$.

$z = \frac{2}{2} \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$

Luego, en efecto, $1-2i$ es una de ellas.

53 Resuelve estas ecuaciones:

a) $2z+3i-2 = 3+zi$

b) $(5+i)z = 3z+4i-2$

c) $(1-i)z^2 = 1+i$

d) $(i^{23}-i^{37})z = 2i^{22}-3i^{19}$

a) $2z-zi = 3-3i+2 \to z(2-i) = 5-3i \to z = \frac{5-3i}{2-i} = \frac{(5-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{13-i}{5}$

b) $(5+i)z-3z = 4i-2 \to (2+i)z = 4i-2 \to z = \frac{4i-2}{2+i} = \frac{2i(2+i)}{2+i} = 2i$

c) $z^2 = \frac{1+i}{1-i} \to z^2 = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \to z^2 = \frac{(1+i)^2}{2}$

$z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_2 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

d) $(-i-i)z = 2(-1)-3(-i) \to -2iz = -2+3i \to z = \frac{-2+3i}{-2i} = -\frac{3}{2}-i$

54 **Halla los números complejos z y w que verifican cada uno de estos sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} z+w=-1+2i \\ z-w=-3+4i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z+2w=2+i \\ iz+w=5+5i \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} z+w=-1+2i \\ z-w=-3+4i \end{array}\right\}$ Sumando miembro a miembro:

$2z=-4+6i \rightarrow z=-2+3i$

$w=(-1+2i)-(-2+3i)=1-i$

Solución: $z=-2+3i$; $w=1-i$

b) $\left.\begin{array}{l} z+2w=2+i \\ iz+w=5+5i \end{array}\right\}$ Multiplicamos por –2 la 2.ª ecuación y sumamos:

$\left.\begin{array}{l} z+2w=2+i \\ -2iz-2w=-10-10i \end{array}\right\}(1-2i)z=-8-9i \rightarrow z=\dfrac{-8-9i}{1-2i}=2-5i$

$w=\dfrac{2+i-(2-5i)}{2}=\dfrac{6i}{2}=3i$

Solución: $z=2-5i$; $w=3i$

55 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} z+w=-1+2i \\ iz+(1-i)w=1+3i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z-w=5-3i \\ (2+i)z+iw=3-3i \end{cases}$

a) Multiplicamos por $-i$ la primera ecuación:

$\left.\begin{array}{l} -iz-iw=i+2 \\ iz+(1-i)w=1+3i \end{array}\right\}$ Sumamos miembro a miembro:

$-iw+(1-i)w=i+2+1+3i \rightarrow (1-2i)w=3+4i$

$w=\dfrac{3+4i}{1-2i}=\dfrac{(3+4i)(1+2i)}{1^2-2i^2}=\dfrac{-5+10i}{5}=-1+2i$

$z=-1+2i-w=-1+2i+1-2i=0$

Solución: $z=0$; $w=-1+2i$

b) Multiplicamos por i la primera ecuación:

$\left.\begin{array}{l} zi-wi=5i+3 \\ (2+i)z+wi=3-3i \end{array}\right\}$ Sumamos miembro a miembro:

$zi+(2+i)z=5i+3+3-3i \rightarrow (2+2i)z=6+2i$

$z=\dfrac{6+2i}{2+2i}=\dfrac{(6+2i)(2-2i)}{4-4i^2}=\dfrac{16-8i}{8}=2-i$

$w=z-5+3i=2-i-5+3i=-3+2i$

Solución: $z=2-i$; $w=-3+2i$

56 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $z^3 + z^2 - 2 = 0$

b) $z^3 - 3z^2 + z + 5 = 0$

c) $z^4 - 7z^2 - 144 = 0$

d) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$

a) Usando el método de Ruffini, obtenemos:

$$z^3 + z^2 - 2 = (z-1)(z^2+2z+2) \to z_1 = 1$$

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \to z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i \to z_2 = -1+i,\ z_3 = -1-i$$

b) Usando el método de Ruffini, obtenemos:

$$z^3 - 3z^2 + z + 5 = (z+1)(z^2-4z+5) \to z_1 = -1$$

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \to z = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i \to z_2 = 2+i,\ z_3 = 2-i$$

c) $z^4 - 7z^2 - 144 = 0$

Se trata de una ecuación bicuadrada. Haciendo el correspondiente cambio de variable, obtenemos:

$$z^2 = -9 \to z = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i \to z_1 = 3i,\ z_2 = -3i$$

$$z^2 = 16 \to z = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \to z_3 = 4,\ z_4 = -4$$

d) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$

Se trata de una ecuación bicuadrada. Haciendo el correspondiente cambio de variable, obtenemos:

$$z^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$$

$$z^2 = -1+i = \sqrt{2}_{135°} \to z = \sqrt{\sqrt{2}_{135°}} = \sqrt[4]{2}_{(135+360°k)/2};\ k = 0, 1 \to z_1 = \sqrt[4]{2}_{67,5°};\ z_2 = \sqrt[4]{2}_{247,5°}$$

$$z^2 = -1-i = \sqrt{2}_{225°} \to z = \sqrt{\sqrt{2}_{225°}} = \sqrt[4]{2}_{(225°+360°k)/2};\ k = 0, 1 \to z_1 = \sqrt[4]{2}_{112,5°};\ z_2 = \sqrt[4]{2}_{292,5°}$$

57 **Halla los números complejos cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.**

Buscamos los números tales que $z^2 = \overline{z}$.

En forma polar, $(r_\alpha)^2 = r_{-\alpha}$

$$(r^2)_{2\alpha} = r_{-\alpha} \to \begin{cases} r^2 = r \\ 2\alpha = -\alpha \end{cases} \to \begin{cases} r(r-1) = 0 \\ 3\alpha = 0° + 360°k \end{cases} \to \begin{cases} r_1 = 0,\ r_2 = 1 \\ \alpha_1 = 0°,\ \alpha_2 = 120°,\ \alpha_3 = 240° \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} r_1 = 0 \to z_1 = 0 \text{ es una solución} \\ r_2 = 1 \to z_2 = 1_{0°},\ z_3 = 1_{120°},\ z_4 = 1_{240°} \text{ son las demás soluciones} \end{cases}$$

(Para calcular los valores de α hemos igualado 3α a 0°, 360° y 720°.)

Los números son:

$z_1 = 0 \qquad z_2 = 1_{0°} \qquad z_3 = 1_{120°} \qquad z_4 = 1_{240°}$

Interpretación gráfica de igualdades y desigualdades entre complejos

58 **Representa y describe con palabras cada una de estas familias de números complejos:**

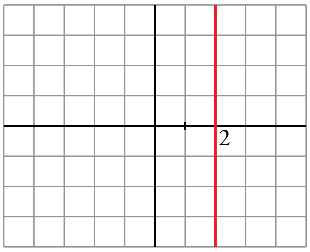
a) $Re\ z = 2$ **b)** $Im\ z = 1$

c) $Re\ z \le 0$ **d)** $-1 \le Im\ z \le 3$

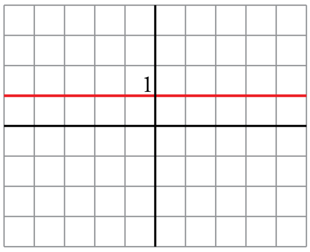
e) $-2 < Re\ z < 5$ **f)** $|z| \le 3$

g) $Arg\ z = 45°$ **h)** $0° \le Arg\ z \le 90°$

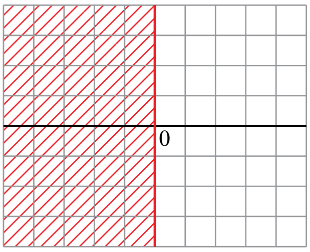
a)



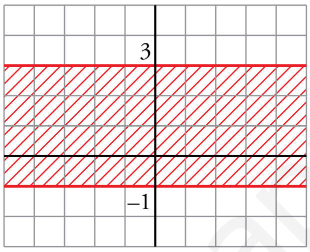
b)



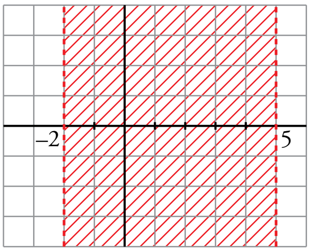
c)



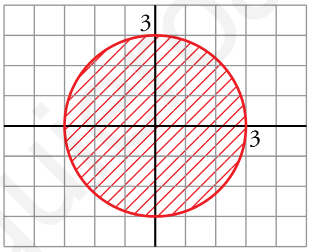
d)



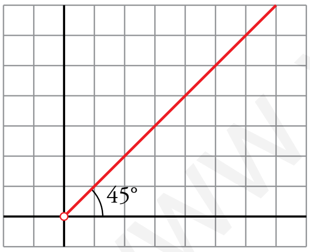
e)



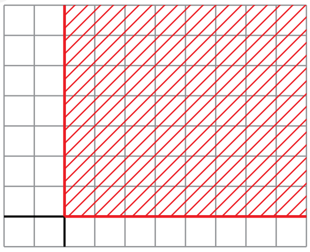
f)



g)



h)



59 **Representa los números complejos z tales que $z + \bar{z} = -3$.**

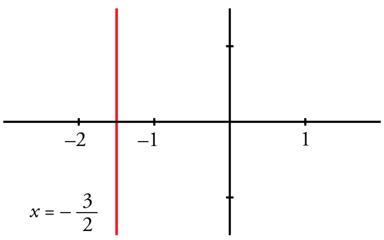
* ***Escribe z en forma binómica, súmale su conjugado y representa la condición que obtienes.***

Llamamos $z = x + iy$.

Entonces: $\bar{z} = x - iy$

Así, $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = -3 \rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

Representación:

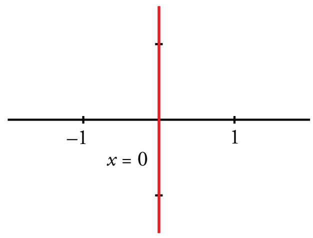


60 **Representa los números complejos que verifican:**

a) $\bar{z} = -z$ **b)** $|z + \bar{z}| = 3$ **c)** $|z - \bar{z}| = 4$

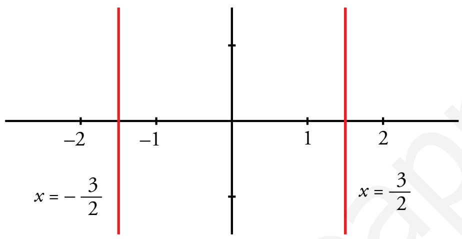
a) $z = x + iy \rightarrow \bar{z} = x - iy$

$\bar{z} = -z \rightarrow x - iy = -x - iy \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$ (es el eje imaginario)



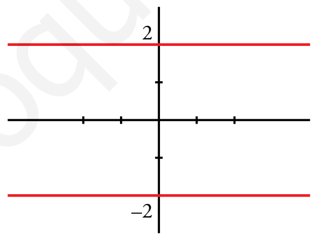
b) $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x$

$$|z + \bar{z}| = |2x| = 3 \begin{cases} 2x = 3 \rightarrow x = 3/2 \\ 2x = -3 \rightarrow x = -3/2 \end{cases}$$



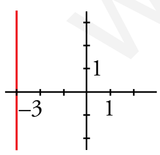
c) $z - \bar{z} = x + iy - z + iy = 2yi$

$$|z - \bar{z}| = |2yi| = |2y| = 4 \begin{cases} 2y = 4 \rightarrow y = 2 \\ 2y = -4 \rightarrow y = -2 \end{cases}$$

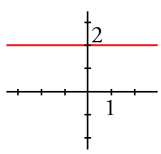


61 **Escribe las condiciones que deben cumplir los números complejos cuya representación gráfica es la siguiente:**

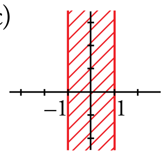
a)



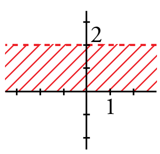
b)



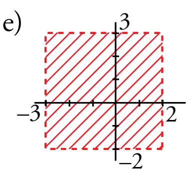
c)



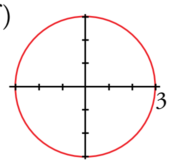
d)



e)



f)



* ***En a), b) y f) es una igualdad. En c) y d), una desigualdad. En e), dos desigualdades.***

a) $Re\ z = -3$ b) $Im\ z = 2$ c) $-1 \le Re\ z \le 1$

d) $0 \le Im\ z < 2$ e) $\begin{cases} -3 < Re\ z < 2 \\ -2 < Im\ z < 3 \end{cases}$ f) $|z| = 3$

Cuestiones teóricas

62 **¿Se puede decir que un número complejo es real si su argumento es 0°?**

No, también son reales los números con argumento 180° (los negativos).

63 **Si $z = r_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha + 180°}$ y $r_{360° - \alpha}$?**

$r_{\alpha + 180°} = -z$ (opuesto de z)

$r_{360° - \alpha} = \overline{z}$ (conjugado de z)

64 **Comprueba que:**

a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

c) $\overline{kz} = k\,\overline{z}$, **con** $k \in \mathbb{R}$

$z = a + bi = r_\alpha \rightarrow \overline{z} = a - bi = r_{360° - \alpha}$

$w = c + di = r'_\beta \rightarrow \overline{w} = c - di = r'_{360° - \beta}$

a) $z + w = (a + c) + (b + d)\,i \rightarrow \overline{z + w} = (a + c) - (b + d)\,i$

$\overline{z} + \overline{w} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)\,i = \overline{z + w}$

b) $x \cdot w = (r \cdot r')_{\alpha + \beta} \rightarrow \overline{z \cdot w} = (r \cdot r')_{360° - (\alpha + \beta)}$

$\overline{z} \cdot \overline{w} = (r \cdot r')_{360° - \alpha + 360° - \beta} = (r \cdot r')_{360° - (\alpha + \beta)} = \overline{z \cdot w}$

c) $kz = ka + kbi \rightarrow \overline{kz} = ka - kbi$

$k\overline{z} = ka - kbi = \overline{kz}$

65 **Demuestra que** $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1_{0°}}{r_\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{360° - \alpha} \rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|}$$

66 **El producto de dos números complejos imaginarios, ¿puede ser real? Acláralo con un ejemplo.**

Sí. Por ejemplo:

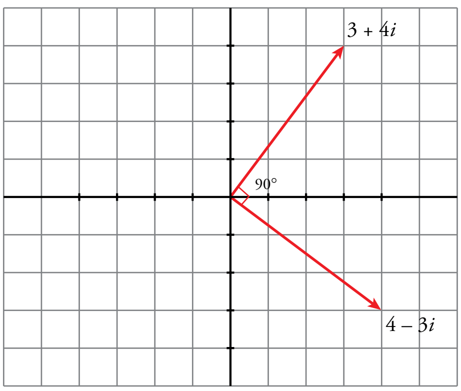
$z = i, \quad w = i$

$z \cdot w = i \cdot i = i^2 = -1 \in \mathbb{R}$

Página 165

67 **Representa el número complejo $z = 4 - 3i$. Multiplícalo por i y comprueba que el resultado que obtienes es el mismo que si aplicas a z un giro de 90°.**

$iz = 4i - 3i^2 = 3 + 4i$



68 **¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su opuesto?**

Se diferencian en 180°. Si el argumento del número es α, el de su opuesto es:

$$180° + \alpha$$

69 **¿Qué condición debe cumplir un número complejo $z = a + bi$ para que $\bar{z} = \frac{1}{z}$?**

* ***Halla $\frac{1}{z}$, e iguala a $a - bi$.***

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = a - bi$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{a^2+b^2} = a \\ \dfrac{-b}{a^2+b^2} = -b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{a}{a} = a^2 + b^2 \rightarrow a^2 + b^2 = 1 \text{ (módulo 1)} \\ \text{Ha de tener módulo 1.} \end{array}$$

70 **Sean z y w dos números complejos tales que $|z| = \sqrt{2}$ y $|w| = \sqrt{2}$. Justifica si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:**

a) $|z + w| = 2\sqrt{2}$ **b)** $|3z| = 3\sqrt{2}$ **c)** $|z \cdot w| = 2$ **d)** $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Para resolver este problema debemos tener en cuenta que $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$:

$z = a + bi \rightarrow z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

a) Falso, porque $z + w$ representa la diagonal del cuadrado cuyos lados son z y w. Por tanto, su longitud no puede ser la suma de las longitudes de los lados.

b) Verdadero.

Si $z = a + bi \rightarrow 3z = 3a + 3bi$

$|3z| = |3a + 3bi| = \sqrt{(3a)^2 + (3b)^2} = 3\sqrt{a^2 + b^2} = 3|z| = 3\sqrt{2}$

c) Verdadero. El módulo del producto de dos números complejos es el producto de los módulos, tal como hemos visto en las operaciones en forma polar.

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

d) Verdadero. En forma polar $\frac{1}{z} = \frac{1_{0°}}{r_\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}$ y, por tanto, el módulo del inverso de un número complejo es el inverso del módulo.

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

71 **Si $z = r_\alpha$ y $w = s_\beta$, ¿qué relación debe existir entre α y β para que ocurra cada una de las siguientes afirmaciones?**

a) **$z \cdot w$ es imaginario puro.**

b) **z/w es un número real.**

c) **$z \cdot w$ está en la bisectriz del primer o tercer cuadrante.**

a) $z \cdot w = r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$

Por tanto $\alpha + \beta = 90°$ o $\alpha + \beta = 270°$, es decir, $\beta = 90° - \alpha$, $\beta = 450° - \alpha$ o $\beta = 270° - \alpha$, $\beta = 630° - \alpha$.

b) $\frac{z}{w} = \frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha - \beta}$

Por tanto, $\alpha - \beta = 0°$ o $\alpha - \beta = 180°$, es decir, $\beta = \alpha$ o $\beta = \alpha - 180°$.

c) $z \cdot w = r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$

Por tanto, $\alpha + \beta = 45°$ o $\alpha + \beta = 225°$, es decir, $\beta = 45° - \alpha$, $\beta = 405° - \alpha$ o $\beta = 225° - \alpha$, $\beta = 585° - \alpha$.

72 **Sea $z \neq 0$ un número complejo y $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Justifica que los afijos de z, zw y zw^2 son los vértices de un triángulo equilátero.**

$$|w| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$tg\,\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \to \alpha = 120°$$

El afijo de $zw = z \cdot (1_{120°})$ es el punto que se obtiene girando z un ángulo de 120° respecto del origen de coordenadas.

De la misma forma, el afijo de $zw^2 = z \cdot (1_{240°})$ es el punto que se obtiene girando z un ángulo de 240° respecto del origen de coordenadas.

Por tanto, los afijos de los tres números complejos están en los vértices de un triángulo equilátero.

Para profundizar

73 **Halla los números complejos cuyo cubo coincide con el cuadrado de su conjugado.**

Si el número complejo es r_α tenemos que:

$$(r_\alpha)^3 = (r_{-\alpha})^2 \to (r^3)_{3\alpha} = (r^2)_{-2\alpha} \to \begin{cases} r^3 = r^2 \\ 3\alpha = -2\alpha \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} r^3 - r^2 = 0 \\ 5\alpha = 0° + 360°k \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} r^2(r-1) = 0 \\ 5\alpha = 0° + 360°k \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} r_1 = 0,\ r_2 = 1 \\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 72°,\ \alpha_3 = 144°,\ \alpha_4 = 216°,\ \alpha_5 = 288° \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} r_1 = 0 \to z_1 = 0 \text{ es una solución} \\ r_2 = 1 \to z_2 = 1_{0°},\ z_3 = 1_{72°},\ z_4 = 1_{144°},\ z_5 = 1_{216°},\ z_6 = 1_{288°} \text{ son las demás soluciones.} \end{cases}$$

Los números son: 0, $1_{0°}$, $1_{72°}$, $1_{144°}$, $1_{216°}$ y $1_{288°}$.

74 **Si el producto de dos números complejos es –8 y dividiendo el cubo de uno de ellos entre el otro obtenemos de resultado 2, ¿cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?**

$$\left.\begin{array}{l} z = r_\alpha \\ w = r'_\beta \\ -8 = 8_{180°} \\ 2 = 2_{0°} \end{array}\right\} r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta} = 8_{180°} \to \begin{cases} r \cdot r' = 8 \\ \alpha + \beta = 180° \end{cases}$$

$$\frac{(r_\alpha)^3}{r'_\beta} = \frac{r^3{}_{3\alpha}}{r'_\beta} = \left(\frac{r^3}{r'}\right)_{3\alpha-\beta} = 2_{0°} \to \begin{cases} \frac{r^3}{r'} = 2 \\ 3\alpha - \beta = 0° \end{cases}$$

Así:

$$\left.\begin{array}{l} r \cdot r' = 8 \\ r^3 = 2r' \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} r' = \dfrac{8}{r} \\ r' = \dfrac{r^3}{2} \end{array}\right\} \dfrac{8}{r} = \dfrac{r^3}{2} \;\to\; 16 = r^4 \;\to\; \begin{cases} r = 2 \\ r' = 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 180° \\ 3\alpha = \beta \end{array}\right\} \alpha + 3\alpha = 180° \;\to\; 4\alpha = 180° \;\to\; \begin{cases} \alpha = 45° \\ \beta = 135° \end{cases}$$

Por tanto, $z = 2_{45°}$, $w = 4_{135°}$

75 **Calcula el inverso de los números complejos siguientes y representa gráficamente el resultado que obtengas:**

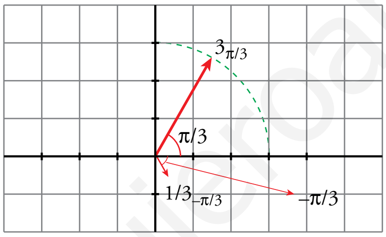
a) $3_{\pi/3}$

b) $2i$

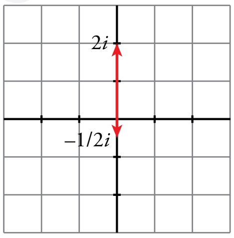
c) $-1 + i$

¿Qué relación existe entre el módulo y el argumento de un número complejo y de su inverso?

a) $\dfrac{1}{3_{\pi/3}} = \dfrac{1_{0°}}{3_{\pi/3}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{-\pi/3} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{5\pi/3}$



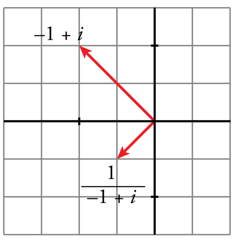
b) $\dfrac{1}{2i} = \dfrac{-i}{2} = \dfrac{-1}{2}i = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{270°}$



c) $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

$$\dfrac{1}{-1+i} = \dfrac{1_{0°}}{\sqrt{2}_{135°}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)_{-135°} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)_{225°} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$$

Si $z = r_\alpha$ entonces $\dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{1}{r}\right)_{360° - \alpha}$.

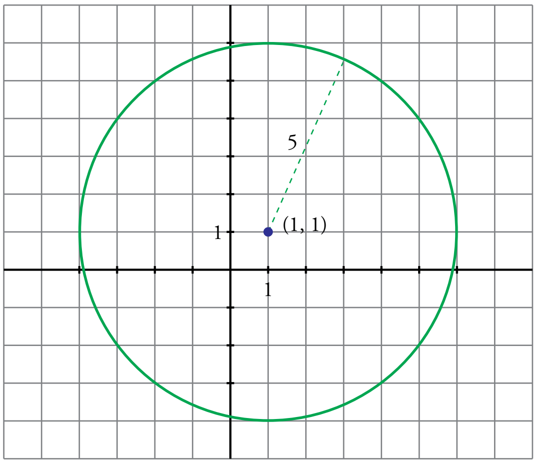


76 **Representa gráficamente las igualdades siguientes. ¿Qué figura se determina en cada caso?**

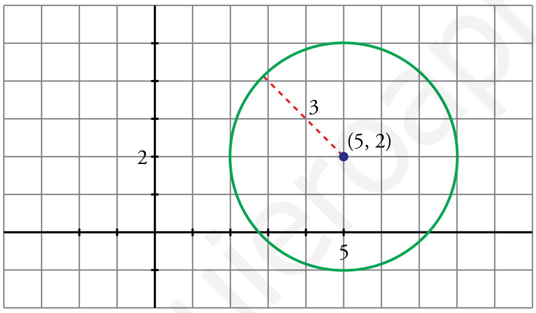
a) $|z - (1 + i)| = 5$

b) $|z - (5 + 2i)| = 3$

a) Circunferencia con centro en (1, 1) y radio 5.



b) Circunferencia con centro en (5, 2) y radio 3.



77 **Escribe la condición que verifican todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro (1, 1) y radio 3.**

$|z - (1 + i)| = 3$

78 **La suma de los números complejos $z = a + 3i$ y $w = b - 5i$ dividida por su diferencia es un número imaginario puro. Prueba que z y w han de tener el mismo módulo.**

$z + w = a + b - 2i$

$z - w = a - b + 8i$

$\frac{a + b - 2i}{a - b + 8i} = ki$ con k número real $\to$ $a + b - 2i = (a - b + 8i)ki$ $\to$

$$\to a + b - 2i = -8k + k(a - b)\,i \to \begin{cases} a + b = -8k \\ -2 = k(a - b) \end{cases} \to \begin{cases} a + b = -8k \\ a - b = -\dfrac{2}{k} \end{cases}$$

Multiplicando miembro a miembro obtenemos: $a^2 - b^2 = 16$

Por otro lado:

$|z| = \sqrt{a^2 + 3^2} = \sqrt{a^2 + 9}$

$|w| = \sqrt{b^2 + (-5)^2} = \sqrt{b^2 + 25}$

Para que los módulos sean iguales, debería ser:

$\sqrt{a^2 + 9} = \sqrt{b^2 + 25} \to a^2 + 9 = b^2 + 25 \to a^2 - b^2 = 16$ y esto es exactamente lo que hemos obtenido a partir de los datos del problema.

79 **Sea z un número complejo cuyo afijo está en la bisectriz del primer cuadrante. Comprueba que $\dfrac{z-1-i}{z+1+i}$ es un número real.**

El número complejo que está en la bisectriz del primer cuadrante es de la forma $z = a + ai$.

$$\frac{a+ai-1-i}{a+ai+1+i} = \frac{a-1+(a-1)\,i}{a+1+(a+1)\,i} = \frac{[a-1+(a-1)\,i]\cdot[a+1-(a+1)\,i]}{[a+1+(a+1)\,i]\cdot[a+1-(a+1)\,i]} =$$

$$= \frac{(a-1)\,(a+1)-(a-1)\,(a+1)\,i+(a-1)\,(a+1)\,i-(a-1)\,(a+1)\,i^2}{(a+1)^2+(a+1)^2} =$$

$$= \frac{2\,(a-1)\,(a+1)}{2\,(a+1)^2} = \frac{a-1}{a+1}, \text{ que es un número real.}$$

Autoevaluación

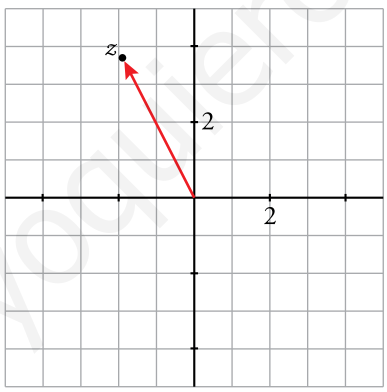
Página 165

1 **Efectúa y representa la solución.**

$$\frac{(3-2i)^2-(1+i)\,(2-i)}{-3+i}$$

$$\frac{(3-2i)^2-(1+i)\,(2-i)}{-3+i} = \frac{9+4i^2-12i-(2-i+2i-i^2)}{-3+i} = \frac{5-12i-3-i}{-3+i} =$$

$$= \frac{(2-13i)\,(-3-i)}{(-3+i)\,(-3-i)} = \frac{-6+13i^2-2i+39i}{9-i^2} = \frac{-19+37i}{10} = -\frac{19}{10}+\frac{37}{10}i$$



2 **Calcula z y expresa los resultados en forma binómica.**

$$\sqrt[4]{z} = \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}\,i}$$

$$z = \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}\,i}\right)^4$$

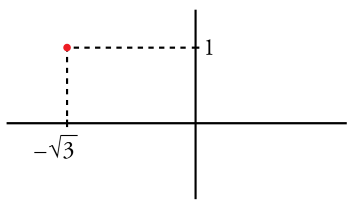
Pasamos numerador y denominador a forma polar:

$$-\sqrt{3}+i \begin{cases} r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = 2 \\ tg\ \alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \ \rightarrow\ \alpha = 150° \end{cases}$$

$$\sqrt{2}\,i \ \rightarrow\ \sqrt{2}_{90°}$$

$$z = \left(\frac{2_{150°}}{\sqrt{2}_{90°}}\right)^4 = (\sqrt{2}_{60°})^4 = 4_{240°} \ \rightarrow\ z = 4\,(\cos 240° + i\ sen\ 240°)$$

$$z = 4\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2-2\sqrt{3}\,i$$



3 **Halla a y b para que se verifique la igualdad:**

$$\mathbf{5(a-2i)=(3+i)(b-i)}$$

$5a-10i=3b-i^2-3i+bi \rightarrow 5a-10i=3b+1+(-3+b)\,i$

Igualando las componentes $\left.\begin{cases}5a=3b+1\\ -10=-3+b\end{cases}\right\} \rightarrow b=-7,\ a=-4$

4 **Resuelve la ecuación: $z^2-10z+29=0$**

$$z=\frac{10\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{10\pm 4i}{2}\ \begin{cases}z_1=5+2i\\ z_2=5-2i\end{cases}$$

Soluciones; $z_1=5+2i,\ z_2=5-2i$

5 **Calcula el valor que debe tomar x para que el módulo de $\dfrac{x+2i}{1-i}$ sea igual a 2.**

$$\frac{x+2i}{1-i}=\frac{(x+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{x+2i^2+xi+2i}{1-i^2}=\frac{x-2+(x+2)\,i}{1+1}=\frac{x-2}{2}+\frac{x+2}{2}\,i$$

$$\text{Módulo}=\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2}=2\ \rightarrow\ \sqrt{\frac{x^2+4}{2}}=2\ \rightarrow\ \frac{x^2+4}{2}=4\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ x^2+4=8\ \rightarrow\ x^2=4\ \begin{cases}x_1=2\\ x_2=-2\end{cases}$$

Soluciones: $x_1=2,\ x_2=-2$

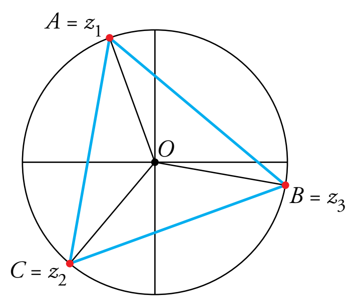
6 **Halla el lado del triángulo cuyos vértices son los afijos de las raíces cúbicas de $4\sqrt{3}-4i$.**

$z=\sqrt[3]{4\sqrt{3}-4i}$

Expresamos $4\sqrt{3}-4i$ en forma polar:

$$\left.\begin{aligned}&r=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+(-4)^2}=8\\ &tg\ \alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ \rightarrow\ \alpha=330°\end{aligned}\right\}\ 4\sqrt{3}-4i=8_{330°}$$

$$z=\sqrt[3]{8_{330°}}=\sqrt[3]{8}_{(330°+360°k)/3}\ \begin{cases}z_1=2_{110°}\\ z_2=2_{230°}\\ z_3=2_{350°}\end{cases}$$



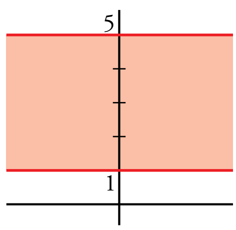
En el triángulo AOB conocemos dos lados, $\overline{OA}=\overline{OB}=2$, y el ángulo comprendido, 120°. Aplicando el teorema del coseno, obtenemos el lado del triángulo, $\overline{AB}$:

$\overline{AB}^2=2^2+2^2-2\cdot 2\cdot 2\cos 120°=12\ \rightarrow\ \overline{AB}=\sqrt{12}=3\sqrt{3}$ u

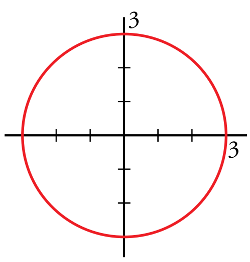
7 **Representa gráficamente.**

a) $1\le Im\ z\le 5$ **b) $|z|=3$** **c) $z+\bar{z}=-4$**

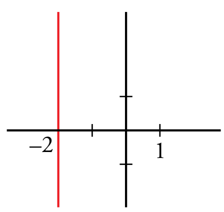
a)



b)



c) $a+bi+a-bi=-4\ \rightarrow\ 2a=-4\ \rightarrow\ a=-2$



8 **Halla dos números complejos tales que su cociente sea $2_{150°}$ y su producto $18_{90°}$.**

$\dfrac{r_\alpha}{s_\beta} = 2_{150°} \to \dfrac{r}{s} = 2;\ \alpha - \beta = 150°$

$r_\alpha \cdot s_\beta = 18_{90°} \to r \cdot s = 18;\ \alpha + \beta = 90°$

Resolvemos los sistemas:

$\begin{cases} \dfrac{r}{s} = 2 \\ r \cdot s = 18 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha - \beta = 150° \\ \alpha + \beta = 90° \end{cases}$

Obtenemos:

$\begin{cases} r = 6 \\ s = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 120° \\ \beta = -30° = 330° \end{cases}$

Los números son $6_{120°}$ y $3_{330°}$. Otra posible solución es: $6_{300°}$ y $3_{150°}$.

9 **Demuestra que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.**

Supongamos que $z = a + bi$. Entonces:

$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + bai - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

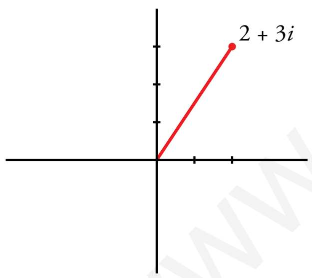
10 **Calcula el valor de *cos* 120° y de *sen* 120° a partir del producto $1_{90°} \cdot 1_{30°}$.**

$1_{90°} \cdot 1_{30°} = 1\,(cos\,90° + i\,sen\,90°) \cdot 1\,(cos\,30° + i\,sen\,30°) =$

$= i \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$1_{90°} \cdot 1_{30°} = 1_{120°} = 1\,(cos\,120° + i\,sen\,120°) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \to cos\,120° = -\dfrac{1}{2};\ sen\,120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

11 **Halla el número complejo z que se obtiene al transformar el complejo $2 + 3i$ mediante un giro de 30° con centro en el origen.**



Multiplicamos por $1_{30°} = 1\,(cos\,30° + i\,sen\,30°)$.

$z = (2 + 3i) \cdot 1_{30°} = (2 + 3i)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right)$

$z = \sqrt{3} + \dfrac{3}{2}i^2 + i + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

$z = \dfrac{2\sqrt{3} - 3}{2} + \dfrac{2 + 3\sqrt{3}}{2}i$

Resuelve

Página 171

Descomposición de una fuerza

I. Una cuerda de 10 m de larga cuelga de dos escarpias, A y B, situadas a la misma altura y a 8 m de distancia entre sí. De ella se cuelga una pesa de 50 kg de masa que permanece en equilibrio en un punto situado a 3 m de A y a 7 m de B.

Observa que descomponemos el peso, P, que produce los 50 kg de masa, en dos componentes, P_1 y P_2, cada una de las cuales tira de uno de los trozos de cuerda. Estima, midiendo y teniendo en cuenta la escala, la magnitud de cada una de las dos componentes del peso.

II. Repite la construcción suponiendo que la masa se coloca simétricamente respecto a las dos escarpias (5 m de cuerda a cada lado). Estima, midiendo, la tracción que, en este caso, debe soportar cada trozo de cuerda.

III. Vuelve a repetir la construcción para una cuerda de doble longitud y en la que se coloca la pesa simétricamente.

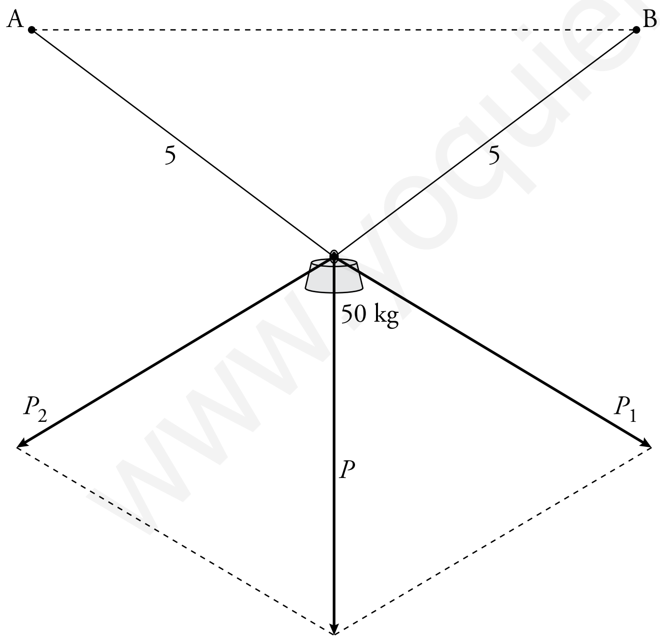
Si la cuerda fuera débil y temieras que pudiera romperse con tracciones fuertes, ¿cuál de las tres situaciones I, II o III te parecería la más adecuada para colgar la pesa?

I. $P = 50$ kg

$P_1 = 48$ kg

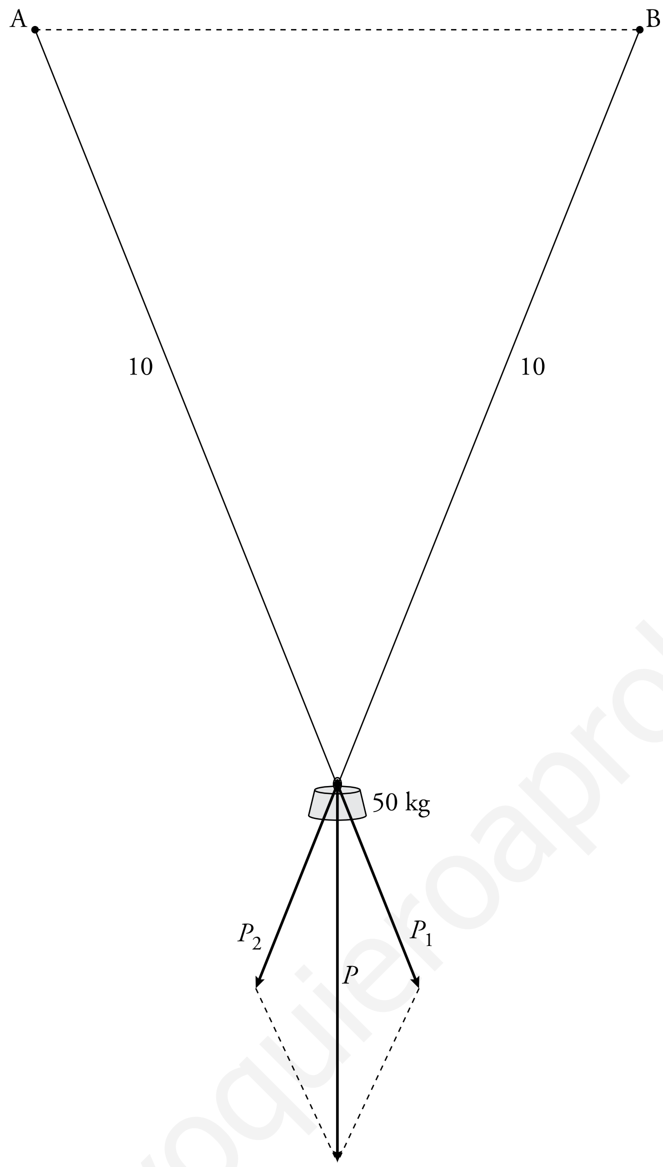
$P_2 = 27$ kg

II.



Cada componente del peso es de unos 42 kg.

III.



Cada componente del peso es de unos 27 kg.

Conclusiones: Si la cuerda es débil, tenemos que colgar el peso en el centro y cuanto más larga sea la cuerda, mejor.

2 Coordenadas de un vector

Página 175

1 **Si $\vec{u}(-2, 5)$ y $\vec{v}(1, -4)$ son las coordenadas de dos vectores respecto de una base, halla las coordenadas respecto de la misma base de:**

a) $2\vec{u} + \vec{v}$ **b)** $\vec{u} - \vec{v}$ **c)** $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$ **d)** $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$

a) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-2, 5) + (1, -4) = (-4, 10) + (1, -4) = (-3, 6)$

b) $\vec{u} - \vec{v} = (-2, 5) - (1, -4) = (-2, 5) + (-1, 4) = (-3, 9)$

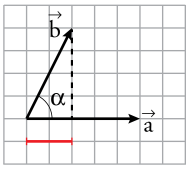
c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = 3(-2, 5) + \frac{1}{3}(1, -4) = (-6, 15) + \left(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \left(\frac{-17}{3}, \frac{41}{3}\right)$

d) $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} = -\frac{1}{2}(-2, 5) - 2(1, -4) = \left(1, \frac{-5}{2}\right) + (-2, 8) = \left(-1, \frac{11}{2}\right)$

3 Producto escalar de vectores

Página 176

1 ¿Verdadero o falso?

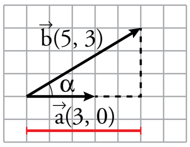


Demostramos que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$:

$$cos\ \alpha = \frac{2}{|\vec{b}|} \Rightarrow |\vec{b}|\ cos\ \alpha = 2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\ cos\ \alpha = 5 \cdot 2 = 10$$

Verdadero. Partimos de la longitud de la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ y de su expresión en relación con el producto escalar de dos vectores para calcular el producto escalar de dichos vectores.

2 

Observando el razonamiento del ejercicio anterior, calcula $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

$$|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}|cos\ \alpha = 5 \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\ \alpha = 3 \cdot 5 = 15$$

3 Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cumplen que: $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = \frac{3}{2}$, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 30°$. Calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b) $\vec{v} \cdot \vec{u}$** **c) $(-\vec{u}) \cdot \vec{v}$**

d) $(3\vec{u}) \cdot (-5\vec{v})$ **e) $\vec{u} \cdot \vec{u}$** **f) $\vec{v} \cdot (-\vec{v})$**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot cos\ 30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

b) $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{3}$

c) $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -3\sqrt{3}$

d) $(3\vec{u}) \cdot (-5\vec{v}) = 3(-5)(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -15 \cdot 3\sqrt{3} = -45\sqrt{3}$

e) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2\ cos\ 0° = 16$

f) $\vec{v} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{v} \cdot \vec{v} = -|\vec{v}|^2 = -\frac{9}{4}$

4 Si $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$, averigua el ángulo $(\vec{u}, \vec{v})$. (Usa la calculadora).

$$cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-2}{3 \cdot 5} = -\frac{2}{15} \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 97°\ 39'\ 44''$$

5 Halla $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{u})$ y $\vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{u})$ sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 120°$.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\ cos\ 120° + |\vec{u}|\,|\vec{u}|\ cos\ 0° =$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot 3 = -\frac{15}{2} + 9 = \frac{3}{2}$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} = 25 - \left(-\frac{15}{2}\right) = \frac{65}{2}$$

Página 178

6 Las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respecto a una base ortonormal son $\vec{u}(3, -4)$ y $\vec{v}(-1, 3)$. Halla:

a) $\vec{u} \bullet \vec{v}$ y $\vec{v} \bullet \vec{u}$

b) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

c) El valor de k para que $(4, k)$ sea perpendicular a $\vec{v}$.

d) Un vector unitario perpendicular a $\vec{u}$.

a) $\vec{u} \bullet \vec{v} = (3, -4) \bullet (-1, 3) = 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 = -15$

$\vec{v} \bullet \vec{u} = (-1, 3) \bullet (3, -4) = (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = -15$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{-15}{5\sqrt{10}} = -0{,}9486832981 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 161°\ 33'\ 54''$

c) $(4, k) \perp (-1, 3) \rightarrow (4, k) \bullet (-1, 3) = 0 \rightarrow -4 + 3k = 0 \rightarrow k = \dfrac{4}{3}$

Para que $(4, k)$ sea perpendicular a $\vec{v}$, ha de ser $k = \dfrac{4}{3}$.

d) Un vector perpendicular a $\vec{u}(3, -4)$ es, por ejemplo, $(4, 3)$.

Un vector unitario paralelo a $(4, 3)$ es $\dfrac{1}{|(4, 3)|} \cdot (4, 3) = \dfrac{1}{5}(4, 3) = \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

Hay dos vectores unitarios perpendiculares a $(3, -4)$, son $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ y $\left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 179

1. Producto escalar en bases no ortonormales

Hazlo tú. **Calcula el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$, siendo $\vec{a}(0, 3)$ y $\vec{b}(-1, 1)$ sus coordenadas respecto a la base *B*.**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3\vec{v} \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) = 3\vec{v} \cdot (-\vec{u}) + 3\vec{v} \cdot \vec{v} = -3\vec{u} \cdot \vec{v} + 3\,|\vec{v}|^2 = -9 + 9 = 0$

Página 180

4. Descomponer un vector

Hazlo tú. **Resuelve este mismo problema si $\vec{a} = (-1, 4)$ y $\vec{b} = (2, 9)$.**

$$\begin{cases} \vec{u} = k\vec{a} \\ \vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{b} = \vec{u} + \vec{v} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{u} = k(-1, 4) = (-k, 4k) \\ \vec{v} = h(4, 1) = (4h, h) \\ (2, 9) = (-k, 4k) + (4h, 4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = -k + 4h \\ 9 = 4k + h \end{cases} \rightarrow k = 2,\ h = 1$$

Los vectores buscados son $\vec{u} = (-2, 8)$ y $\vec{v} = (4, 1)$.

Ejercicios y problemas guiados

Página 181

1. Obtención de vectores paralelos y perpendiculares a uno dado

Dado el vector $\vec{v}(9, 12)$, calcular las coordenadas de los siguientes vectores:

a) $\vec{u}$, unitario y de la misma dirección que el vector $\vec{v}$.

b) $\vec{w}$, ortogonal al vector $\vec{v}$ y del mismo módulo.

c) $\vec{z}$, de módulo 5 y ortogonal a $\vec{v}$.

a) $|\vec{v}| = \sqrt{81+144} = 15$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{15}(9,12) = \left(\frac{9}{15}, \frac{12}{15}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Otra solución: $\vec{u}_2 = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

b) $\vec{w}_1 = (-12, 9)$

Otra solución: $\vec{w}_2 = (12, -9)$

c) $|\vec{w}| = \sqrt{144+81} = 15$

$$\vec{z}_1 = 5 \cdot \frac{1}{15}(-12, 9) = (-4, 3)$$

$$\vec{z}_2 = 5 \cdot \frac{1}{15}(12, -9) = (4, -3)$$

2. Cálculo de los módulos de la suma y de la diferencia de dos vectores

De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ conocemos sus módulos, 1 y $\sqrt{2}$, respectivamente, y sabemos que forman un ángulo de 45°.

Hallar $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \bullet \vec{a} + \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{b} \bullet \vec{a} + \vec{b} \bullet \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \bullet \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45° + 2 =$$

$$= 1 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 5$$

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5}$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \bullet \vec{a} - \vec{a} \bullet \vec{b} - \vec{b} \bullet \vec{a} + \vec{b} \bullet \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \bullet \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45° + 2 =$$

$$= 1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 1$$

$|\vec{a} - \vec{b}| = 1$

3. Determinación de parámetros para que un vector cumpla ciertas condiciones

Sean los vectores $\vec{a}(3, n)$ y $\vec{b}(-2, m)$. Calcular el valor de los parámetros n y m en cada uno de los siguientes casos, para que se cumpla:

a) $|\vec{a}| = 5$

b) $\vec{a} \perp \vec{b}$ ***y*** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

c) $\vec{a}$ ***forme un ángulo de 45° con el vector*** $\vec{u} = (1, 1)$.

a) $|\vec{a}| = \sqrt{9 + n^2} = 5 \;\rightarrow\; 9 + n^2 = 25 \;\rightarrow\; n = -4,\;\; n = 4$

b) $\begin{cases} \vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6 + nm = 0 \\ \sqrt{9 + n^2} = \sqrt{4 + m^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6 + nm = 0 \\ 9 + n^2 = 4 + m^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{6}{n} \\ 9 + n^2 = 4 + \left(\dfrac{6}{n}\right)^2 \end{cases}$

Soluciones: $n = -2,\; m = -3;\;\; n = 2,\; m = 3$

c) $\vec{a} \bullet \vec{v} = |\vec{a}|\,|\vec{v}|\cos 45° = |\vec{a}|\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = |\vec{a}| = \sqrt{9 + n^2}$

$\vec{a} \bullet \vec{v} = (3, n) \bullet (1, 1) = 3 + n$

Luego $\sqrt{9 + n^2} = 3 + n \;\rightarrow\; n = 0$

4. Coordenadas de un vector en una base no ortonormal

En una base ortonormal se consideran los vectores $\vec{u}(3, 0)$, $\vec{v}(2, 1)$ y $\vec{w}(-1, -2)$.

Comprobar que $B(\vec{u}, \vec{v})$ es también una base y calcular las coordenadas de $\vec{w}$ en esta base.

$\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{0}{1}$, luego no tienen la misma dirección. Por tanto, forman una base.

$\vec{w} = m\vec{u} + n\vec{v} \;\rightarrow\; (-1, -2) = m(3, 0) + n(2, 1) \;\rightarrow\; (-1, -2) = (3m + 2n, n)$

Igualando ambas coordenadas: $\begin{cases} -1 = 3m + 2n \\ -2 = n \end{cases}$

Solución: $m = 1,\;\; n = -2$

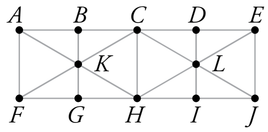
Ejercicios y problemas propuestos

Página 182

Para practicar

Los vectores y sus operaciones

1 **Observa la siguiente figura:**



a) Compara el módulo, la dirección y el sentido de las siguientes parejas de vectores:
$\overrightarrow{AB}$ **e** $\overrightarrow{IJ}$; $\overrightarrow{AH}$ **y** $\overrightarrow{LC}$.

b) Calcula $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH}$ **y** $\overrightarrow{HC}+2\overrightarrow{CL}$.

c) Completa las siguientes igualdades: $\overrightarrow{LC}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{L\ldots}$; $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{H\ldots}=\overrightarrow{HC}$

a) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{IJ}$ tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

$\overrightarrow{AH}$ y $\overrightarrow{LC}$ tienen misma dirección, sentido contrario y $|\overrightarrow{AH}|=2|\overrightarrow{LC}|$.

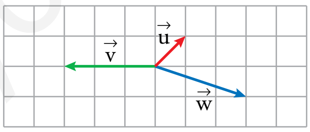
b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{HC}+2\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{HJ}$

c) $\overrightarrow{LC}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{LC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{LD}$

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{HC}$

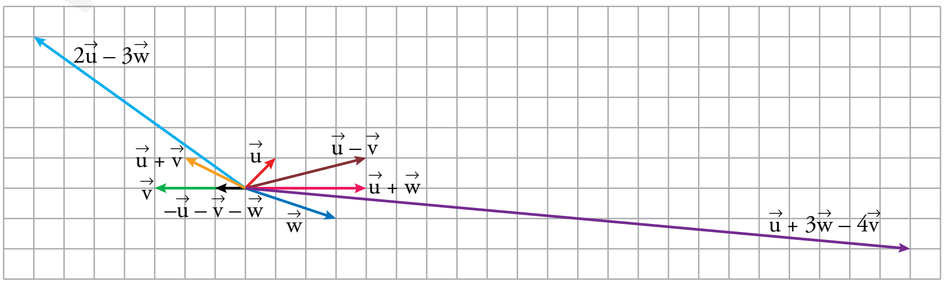
2 **Sean** $\vec{u}$, $\vec{v}$ **y** $\vec{w}$ **los siguientes vectores:**



Calcula gráficamente los vectores:

a) $\vec{u}+\vec{v}$ **b)** $\vec{u}-\vec{v}$ **c)** $\vec{u}+\vec{w}$

d) $2\vec{u}-3\vec{w}$ **e)** $\vec{u}+3\vec{w}-4\vec{v}$ **f)** $-\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}$



3 **Observa el rombo de la figura y calcula:**

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

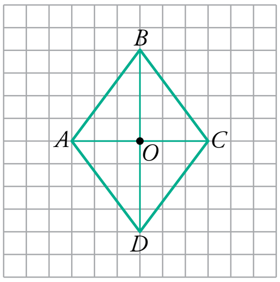
b) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

f) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA}$

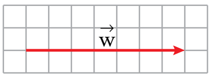


Expresa los resultados utilizando los vértices del rombo.

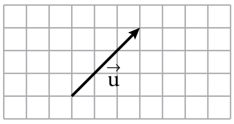
a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD}$

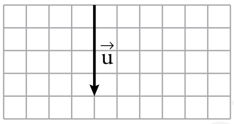
d) $\overrightarrow{AA} = 0$ e) $\overrightarrow{AC}$ f) $2\overrightarrow{DC}$

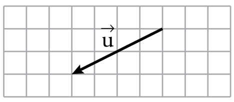
4 **Considera el vector $\vec{w}$:**

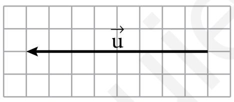


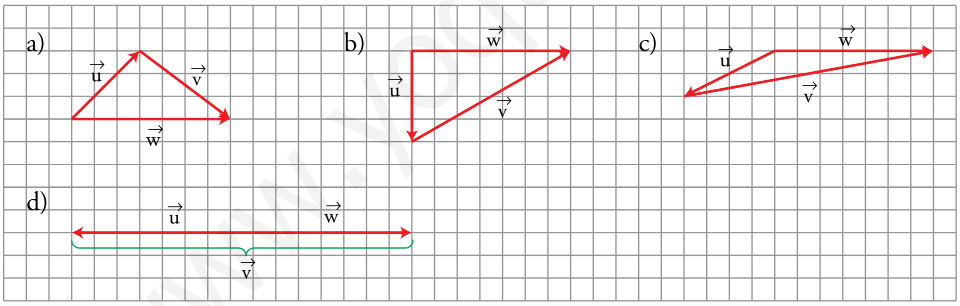
Dibuja en cada uno de estos casos un vector $\vec{v}$ que sumado con $\vec{u}$ dé como resultado $\vec{w}$:

a)


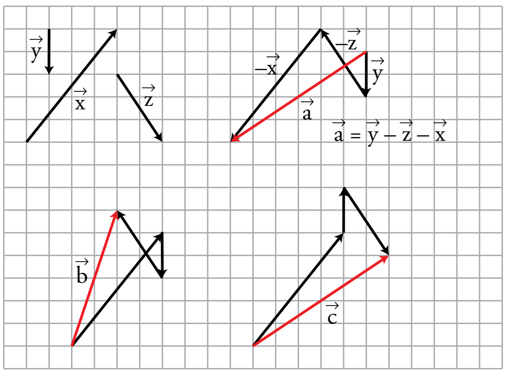
b)


c)


d)




5 **Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ los hemos obtenido operando con los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$. ¿Qué operaciones hemos hecho en cada caso?**

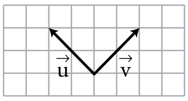


$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}$ $\vec{c} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z}$

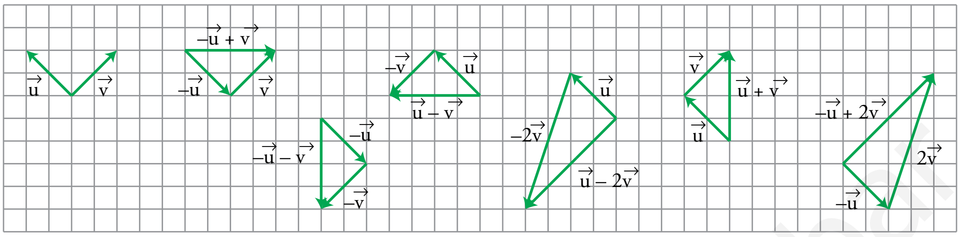
Bases y coordenadas

6 **A la vista de la figura, dibuja los vectores:**

$$-\vec{u}+\vec{v} \qquad \vec{u}-\vec{v} \qquad \vec{u}+\vec{v}$$
$$-\vec{u}-\vec{v} \qquad -\vec{u}+2\vec{v} \qquad \vec{u}-2\vec{v}$$



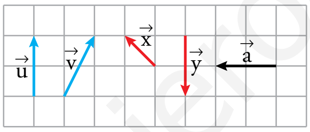
Si tomamos como base $B(\vec{u}, \vec{v})$, ¿cuáles son las coordenadas de los vectores que has dibujado?



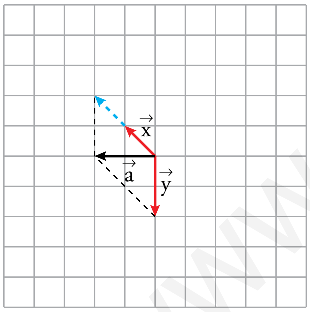
$-\vec{u}+\vec{v}=(-1, 1)$ $\qquad$ $\vec{u}-\vec{v}=(1, -1)$ $\qquad$ $\vec{u}+\vec{v}=(1, 1)$

$-\vec{u}-\vec{v}=(-1, -1)$ $\qquad$ $-\vec{u}+2\vec{v}=(-1, 2)$ $\qquad$ $\vec{u}-2\vec{v}=(1, -2)$

7 **Escribe el vector $\vec{a}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Escríbelo también como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

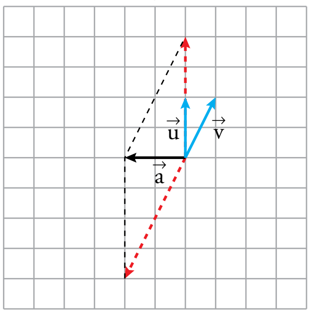


¿Cuáles son las coordenadas de $\vec{a}$ respecto de la base $B(\vec{x}, \vec{y})$? ¿Y respecto de la base $B'(\vec{u}, \vec{v})$?



$\vec{a}=2\vec{x}+\vec{y}$

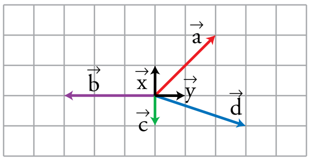
En la base $B(\vec{x}, \vec{y})$, las coordenadas de $\vec{a}$ son $\vec{a}=(2, 1)$.



$\vec{a}=2\vec{u}-2\vec{v}$

En la base $B'(\vec{u}, \vec{v})$, las coordenadas de $\vec{a}$ son $\vec{a}=(2, -2)$.

8 **Escribe las coordenadas de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ respecto a la base $B(\vec{x}, \vec{y})$.**



$\vec{a} = (2, 2)$; $\vec{b} = (0, -3)$; $\vec{c} = (-1, 0)$; $\vec{d} = (-1, 3)$

9 **¿Cuáles de los siguientes pares de vectores forman una base?**

a) $\vec{u}(3, -1)$, $\vec{v}(1, 3)$ **b)** $\vec{u}(2, 6)$, $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

a) Sí, tienen distinta dirección ($\vec{u} \neq k\vec{v}$ para cualquier k). Basta con representarlos gráficamente para comprobarlo.

b) No, pues tienen la misma dirección ($\vec{u} = 3\vec{v}$).

10 **Considera el vector $\vec{u}(-1, -3)$. Da un vector $\vec{v}$ tal que $B(\vec{u}, \vec{v})$ sea una base, y un vector $\vec{w}$ tal que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ no formen una base.**

Para que formen una base sus coordenadas no pueden ser proporcionales. Hay muchas soluciones, pero una de ellas es $\vec{v} = (1, 4)$.

Para que no formen una base, sus coordenadas tienen que ser proporcionales. Hay muchas soluciones, pero una de ellas es $\vec{w} = (2, 6)$.

Página 183

11 **Dados los vectores $\vec{u}(3, -5)$ y $\vec{v}(-2, 1)$, calcula:**

a) $-2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ **b)** $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v})$

a) $-2\,(3, -5) + \frac{1}{2}(-2, 1) = (-6, 10) + \left(-1, \frac{1}{2}\right) = \left(-7, \frac{21}{2}\right)$

b) $\frac{1}{2}[(3, -5) + (-2, 1)] - \frac{2}{3}[(3, -5) - (-2, 1)] = \frac{1}{2}(1, -4) - \frac{2}{3}(5, -6) = \left(\frac{1}{2}, -2\right) + \left(\frac{-10}{3}, 4\right) = \left(\frac{-17}{6}, 2\right)$

12 **Halla el vector $\vec{b}$ tal que $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, siendo $\vec{a}(-1, 3)$ y $\vec{c}(7, -2)$.**

$$(7, -2) = 3(-1, 3) - \frac{1}{2}(b_1, b_2) \rightarrow \begin{cases} 7 = -3 - (1/2)\,b_1 \rightarrow b_1 = -20 \\ -2 = 9 - (1/2)\,b_2 \rightarrow b_2 = 22 \end{cases}$$

$\vec{b}\,(-20, 22)$

13 **Dados los vectores $\vec{a}(3, -2)$, $\vec{b}(-1, 2)$ y $\vec{c}(0, -5)$, calcula m y n de modo que: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.**

$$(0, -5) = m(3, -2) + n(-1, 2) \rightarrow \begin{cases} 0 = 3m - n \\ -5 = -2m + 2n \end{cases}$$

Despejando en la primera ecuación, $n = 3m$, y sustituyendo en la segunda:

$$-5 = -2m + 6m \rightarrow -5 = 4m \rightarrow m = \frac{-5}{4} \rightarrow n = \frac{-15}{4}$$

14 **Expresa el vector $\vec{a}(-1, -8)$ como combinación lineal de $\vec{b}(3, -2)$ y $\vec{c}\left(4, -\frac{1}{2}\right)$.**

$$(-1, -8) = m(3, -2) + n\left(4, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} -1 = 3m + 4n \\ -8 = -2m - \frac{1}{2}n \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por reducción (por ejemplo). Para ello, multiplicamos la segunda ecuación por 8 (en los dos miembros) y sumamos miembro a miembro las dos:

$$\begin{array}{rl} -1 = & 3m + 4n \\ -64 = & -16m - 4n \\ \hline -65 = & -13m \;\rightarrow\; m = \dfrac{-65}{-13} = 5 \end{array}$$

Sustituyendo en una de las dos ecuaciones y despejando n:

$-1 = 3m + 4n \rightarrow -1 = 3 \cdot (5) + 4n \rightarrow -16 = 4n \rightarrow n = -4$

Así, podemos decir: $\vec{a} = 5\vec{b} - 4\vec{c}$

15 **En una base ortonormal las coordenadas de un vector son $\vec{v}(2, -5)$. Halla las coordenadas de $\vec{v}$ en la base $B = ((1, -1), (0, -1))$.**

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x}(1,-1) \\ \vec{y}(0,-1) \\ \vec{v}(2,-5) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y} \rightarrow (2,-5) = a(1,-1) + b(0,-1) = (a,-a) + (0,-b) = (a, -a-b) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{cases} 2 = a \\ -5 = -a - b \end{cases}\right\} \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 3 \end{array}$$

Las coordenadas de $\vec{v}$ en la nueva base son (2, 3).

Producto escalar. Módulo y ángulo

16 **Dados los vectores $\vec{x}(5, -2)$, $\vec{y}(0, 3)$, $\vec{z}(-1, 4)$, calcula:**

a) $\vec{x} \cdot \vec{y}$

b) $\vec{x} \cdot \vec{z}$

c) $\vec{y} \cdot \vec{z}$

a) $\vec{x} \cdot \vec{y} = (5, -2) \cdot (0, 3) = -6$

b) $\vec{x} \cdot \vec{z} = (5, -2) \cdot (-1, 4) = -5 - 8 = -13$

c) $\vec{y} \cdot \vec{z} = (0, 3) \cdot (-1, 4) = 12$

17 **De los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sabemos que:**

$$\vec{u}(-1, 1);\ |\vec{v}| = 1;\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 45°;\ \vec{w} \perp \vec{v}$$

Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

$|\vec{u}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot cos\,45° = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

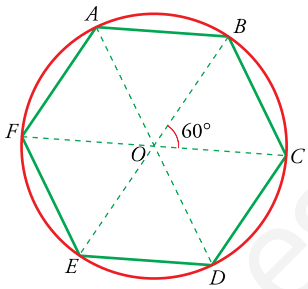
$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, porque $cos\,90° = 0$.

18 **En una circunferencia de centro O y de radio 2 cm, se inscribe un hexágono regular de vértices A, B, C, D, E, F. Calcula los productos:**

a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ **b)** $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$ **c)** $\vec{AB} \cdot \vec{ED}$ **d)** $\vec{BC} \cdot \vec{EF}$

a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cos(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}}) = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60° = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

b) $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120° = 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$



c) $\vec{AB} \cdot \vec{ED} \overset{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot \cos 0° \overset{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

(*) OAB es un triángulo equilátero, luego:

$|\vec{AB}| = |\vec{OA}| = 2$

Razonamos igual para $|\vec{ED}|$.

d) $\vec{BC} = -\vec{EF}$ (mismo módulo, misma dirección y sentido opuesto)

Luego: $\vec{BC} \cdot \vec{EF} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 180° = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4$

19 **Dados $\vec{u}(2, 3)$, $\vec{v}(-3, 1)$ y $\vec{w}(5, 2)$, calcula:**

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

d) $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v})$

a) $3\vec{u} + 2\vec{v} = 3(2, 3) + 2(-3, 1) = (6, 9) + (-6, 2) = (0, 11)$

$(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w} = (0, 11) \cdot (5, 2) = 0 \cdot 5 + 11 \cdot 2 = 0 + 22 = 22$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{w} = (2, 3) \cdot (5, 2) = 10 + 6 = 16 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = (-3, 1) \cdot (5, 2) = -15 + 2 = -13 \end{array}\right\} \to \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{w} = 16 - (-13) = 16 + 13 = 29$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3) \cdot (-3, 1) = -6 + 3 = -3$

$(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = -3(5, 2) = (-15, -6)$

d) $\vec{v} \cdot \vec{v} = (-3, 1) \cdot (-3, 1) = 9 + 1 = 10$

$\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (2, 3) \cdot 10 = (20, 30)$

20 **Si A, B y C son los vértices de un triángulo equilátero de lado 1, calcula:**

a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

b) $2\vec{AB} \cdot (-3\vec{AC})$

c) $(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{AB}$

d) $(2\vec{AB} - 3\vec{AC}) \cdot \vec{AC}$

En un triángulo equilátero, los lados miden 1 y forman un ángulo de 60°.

a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos 60° = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) $2\vec{AB} \cdot (-3\vec{AC}) = 2 \cdot (-3)\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\frac{6}{2} = 3$

c) $(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{AB} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AC} \cdot \vec{AB} = 1^2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

d) $(2\vec{AB} - 3\vec{AC}) \cdot \vec{AC} = 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} - 3\vec{AC} \cdot \vec{AC} = 2 \cdot \frac{1}{2} - 3|\vec{AC}|^2 = 1 - 3 \cdot 1 = -2$

21 **Comprueba si las siguientes parejas de vectores son perpendiculares:**

a) $\vec{u}(0, 1)$, $\vec{v}(2, 4)$

b) $\vec{u}(0, 7)$, $\vec{v}(-5, 0)$

c) $\vec{u}(2, 5)$, $\vec{v}(5, 2)$

d) $\vec{u}(3, 6)$, $\vec{v}(-2, 1)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0,1) \cdot (2, 4) = 4 \neq 0 \rightarrow$ No son perpendiculares.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 7) \cdot (-5, 0) = 0 \rightarrow$ Sí son perpendiculares.

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 5) \cdot (5, 2) = 20 \neq 0 \rightarrow$ No son perpendiculares

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 6) \cdot (-2, 1) = 0 \rightarrow$ Sí son perpendiculares.

22 **Obtén, en cada caso, un vector paralelo y otro perpendicular al vector dado.**

a) $\vec{u}(0, 3)$ **b)** $\vec{u}(-5, 0)$ **c)** $\vec{u}(3, 8)$ **d)** $\vec{u}(-1, -1)$

	PARALELO	PERPENDICULAR
a)	(0, 9)	(3, 0)
b)	(10, 0)	(0, –5)
c)	(30, 80)	(–8, 3)
d)	(2, 2)	(1, –1)

23 **Calcula k para que el producto $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sea igual a 0 en los siguientes casos:**

a) $\vec{u}(6, k)$, $\vec{v}(-1, 3)$

b) $\vec{u}\left(\frac{1}{5}, -2\right)$, $\vec{v}(k, 3)$

c) $\vec{u}(-3, -2)$, $\vec{v}(5, k)$

d) $\vec{u}(k, -k)$, $\vec{v}(5, 5)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 3k = 0 \rightarrow k = 2$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{1}{5}, -2\right) \cdot (k, 3) = \frac{1}{5}k - 6 = 0 \rightarrow k = 30$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, -2) \cdot (5, k) = -2k - 15 = 0 \rightarrow k = -\frac{15}{2}$

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (k, -k) \cdot (5, 5) = 0 \rightarrow$ Cualquier $k \in \mathbb{R}$ es válido.

24 **Halla el módulo de cada uno de los siguientes vectores:**

$\vec{u}(3, 2)$ $\vec{v}(-2, 3)$ $\vec{w}(5, 0)$

$|\vec{u}| = |(3, 2)| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

$|\vec{v}| = |(-2, 3)| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$|\vec{w}| = |(5, 0)| = \sqrt{25 + 0} = 5$

25 **Halla el valor de m para que el módulo del vector $\vec{u}\left(\frac{3}{5}, m\right)$ sea igual a 1.**

$|\vec{u}| = \left|\left(\frac{3}{5}, m\right)\right| = \sqrt{\frac{9}{25} + m^2} = 1 \rightarrow m = -\frac{4}{5},\ m = \frac{4}{5}$

26 **Dada la base $B = (\vec{u}, \vec{v})$ donde $\vec{u}(3, -4)$ y $\vec{v}(0, -8)$, determina, en cada caso, una base B' de vectores unitarios tales que:**

a) Los vectores de B' sean paralelos a los de B.

b) Los vectores de B' sean perpendiculares a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $B' = (\vec{u}', \vec{v}')$

$|\vec{u}| = \sqrt{9+16} = 5$; $|\vec{v}| = \sqrt{0+64} = 8$

$\vec{u}' = \frac{1}{5}\vec{u} = \frac{1}{5}(3, -4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ $\quad\quad$ $\vec{v}' = \frac{1}{8}\vec{v} = \frac{1}{8}(0, -8) = (0, -1)$

b) $B' = (\vec{u}', \vec{v}')$

$\vec{u}' \perp \vec{u} \to \vec{u}' = (4, 3)$

$\vec{v}' \perp \vec{v} \to \vec{v}' = (8, 0)$

27 **Dado el vector $\vec{u}(-5, k)$ calcula k de modo que:**

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$.

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{34}$.

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \to (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \to -20 - 2k = 0 \to k = -10$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{(-5)^2 + k^2} = \sqrt{25 + k^2} = \sqrt{34} \to 25 + k^2 = 34 \to k^2 = 9 \to k = \pm 3$

Hay, pues, dos soluciones.

28 **Dado el vector $\vec{u}(5, 12)$, determina:**

a) Los vectores unitarios paralelos a $\vec{u}$.

b) Los vectores ortogonales a $\vec{u}$ que tengan el mismo módulo que $\vec{u}$.

c) Los vectores unitarios y perpendiculares a $\vec{u}$.

$|\vec{u}| = \sqrt{25+144} = 13$

a) $\vec{v}_1 = \frac{1}{13}(5, 12) = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$

$\vec{v}_2 = -\frac{1}{13}(5, 12) = \left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

b) $\vec{v}_1 = (-12, 5)$

$\vec{v}_2 = (12, -5)$

c) $\vec{v}_1 = \frac{1}{13}(-12, 5) = \left(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$

$\vec{v}_2 = -\frac{1}{13}(-12, 5) = \left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

29 **Halla un vector de módulo 50 que sea perpendicular al vector $\vec{a}(8, 6)$.**

$\vec{u}' = (6, -8)$ es perpendicular a $\vec{a}$.

$|\vec{u}'| = \sqrt{36+64} = 10$

Un vector con esta dirección y de módulo 1 es:

$\vec{u} = \frac{1}{10}(6, -8) = \left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

El vector que buscamos es:

$\vec{v} = 50\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = (30, -40)$

También es solución $\vec{v}' = (-30, 40)$.

30 **Halla el ángulo que forman estos pares de vectores:**

a) $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(1, -5)$ **b)** $\vec{m}(4, 6)$, $\vec{n}(3, -2)$ **c)** $\vec{a}(1, 6)$, $\vec{b}\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$

a) $cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 5}{\sqrt{9+4}\,\sqrt{1+25}} = -\dfrac{7}{26}\sqrt{2} \approx -0{,}38 \to (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 112°\ 20'\ 12''$

b) $cos\,(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \dfrac{4 \cdot 3 - 6 \cdot 2}{\sqrt{16+36}\,\sqrt{9+4}} = 0 \to (\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 90°$

c) $cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 \cdot 3}{\sqrt{1+36}\,\sqrt{\frac{1}{4}+9}} = -1 \to (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180°$

31 **Dados** $\vec{u}\left(\frac{1}{2}, k\right)$ **y** $\vec{v}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, **calcula** k **para que** $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$ **formen un ángulo de 60°.**

$$cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + k \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}\,\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}} = cos\ 60° = \frac{1}{2} \to$$

$$\to \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}} = \frac{1}{2} \to \sqrt{\frac{1}{4}+k^2} = 1 \to k = -\frac{1}{2}\sqrt{3};\ k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

32 **Calcula** x, **de modo que el producto escalar de** $\vec{a}(3, -5)$ **y** $\vec{b}(x, 2)$ **sea igual a 7. ¿Qué ángulo forman los vectores** $\vec{a}$ **y** $\vec{b}$**?**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3, -5) \cdot (x, 2) = 7 \to 3x - 10 = 7 \to x = \dfrac{17}{3}$

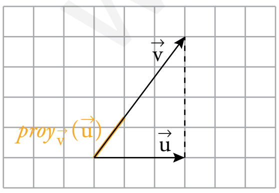
$$cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{7}{\sqrt{9+25}\,\sqrt{\left(\frac{17}{3}\right)^2+4}} = \frac{21\sqrt{442}}{2\,210} \approx 0{,}2 \to (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 79°\ 31'\ 17''$$

33 **Calcula la proyección de** $\vec{u}$ **sobre** $\vec{v}$, **la de** $\vec{v}$ **sobre** $\vec{u}$ **y representa gráficamente cada situación.**

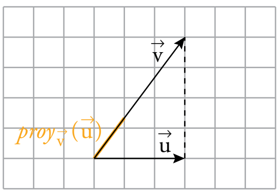
a) $\vec{u}(3, 0)$ **y** $\vec{v}(3, 4)$ **b)** $\vec{u}(1, 3)$ **y** $\vec{v}(-4, 2)$ **c)** $\vec{u}(-2, -5)$ **y** $\vec{v}(5, -2)$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{9+0} = 3$; $|\vec{v}| = \sqrt{9+16} = 5$; $cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{9}{3 \cdot 5} = \dfrac{3}{5}$

$proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}|\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 5 \cdot \dfrac{3}{5} = 3$

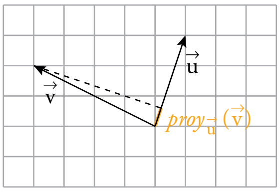


$proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}|\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 3 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{5}$

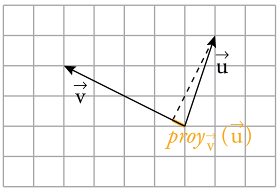


b) $|\vec{u}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$; $|\vec{v}| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$; $cos\,(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{-4\cdot 6}{\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$

$proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}|\ cos\,(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 2\sqrt{5}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{10} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$



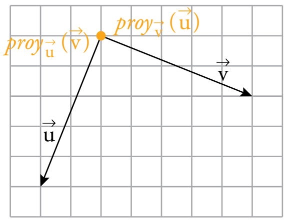
$proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}|\ cos\,(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \sqrt{10}\cdot\dfrac{1}{10}\sqrt{2} = \dfrac{1}{5}\sqrt{5}$



c) $|\vec{u}| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$; $|\vec{v}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$; $cos\,(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 0$

$proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}|\ cos\,(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 0$

$proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}|\ cos\,(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 0$



Página 184

Para resolver

34 Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, entonces $B = (\vec{u}, \vec{v})$ es una base.

b) Dos vectores paralelos pueden tener sus coordenadas no proporcionales.

c) Si dos vectores son perpendiculares, sus coordenadas no pueden ser proporcionales.

d) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ tienen el mismo módulo, pero distinta dirección.

e) El módulo de $-3\vec{v}$ es el triple que el módulo de $\vec{v}$.

a) Verdadera, porque los vectores son perpendiculares, luego no tienen la misma dirección.

b) Falsa. Si son paralelos, sus coordenadas son proporcionales porque $\vec{u} = k\vec{v}$.

c) Verdadera. Si las coordenadas fueran proporcionales, serían paralelos.

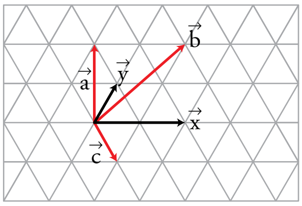
d) Falsa. Tienen el mismo módulo y la misma dirección, pero sentidos contrarios.

e) Verdadera: $|-3\vec{v}| = |-3|\,|\vec{v}| = 3|\vec{v}|$

35 **¿Cómo es el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en los siguientes casos?:**

a) $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) > 0$ **b)** $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) < 0$ **c)** $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = 0$

a) $0° < (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) < 90°$ b) $90° < (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) < 180°$ c) $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 90°$

36 

Expresa los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

$\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y}$ $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y}$ $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{x} - \vec{y}$

37 **Sean A, B y C los vértices de un triángulo. Si $\overrightarrow{AB}(-1, 4)$, $\overrightarrow{AC}(3, -1)$ y $\overrightarrow{BC}(4, -5)$, ¿puede tratarse de un triángulo rectángulo?**

$\overrightarrow{AB} = (-1, 4)$; $\overrightarrow{AC} = (3, -1)$; $\overrightarrow{BC} = (4, -5)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1, 4) \cdot (3, -1) = -7$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1, 4) \cdot (4, -5) = -24$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (3, -1) \cdot (4, -5) = 17$

Ninguno de los tres productos escalares es cero, luego ningún par de vectores es perpendicular.

Los lados no son perpendiculares. Por tanto, el triángulo no es rectángulo.

38 **Sean A, B, C y D los vértices de un cuadrilátero. Señala, en cada caso, las condiciones que deben cumplir los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{DA}$ para que el cuadrilátero $ABCD$ sea un:**

a) Cuadrado. **b) Paralelogramo.** **c) Trapecio isósceles.** **d) Trapecio escaleno.**

a) Lados iguales y perpendiculares:

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

b) Lados iguales dos a dos:

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$

c) Dos lados paralelos y los otros dos no paralelos y con el mismo módulo:

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \to \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \nparallel \overrightarrow{DA}$; $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$

d) Dos lados paralelos y los otros dos no paralelos y con distinto módulo:

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \to \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \nparallel \overrightarrow{DA}$; $|\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{DA}|$

39 **Sean $\vec{a}(-6, 8)$ y $\vec{b}(3, 4)$. Halla, en cada caso, un vector $\vec{c}(x, y)$ perpendicular a $\vec{b}$ tal que:**

a) $|\vec{c}| = |\vec{a}|$ **b)** $|\vec{c}| = 1$ **c)** $\vec{c} \cdot \vec{a} = 4$

a) $|\vec{a}| = \sqrt{36 + 64} = 10$; $|\vec{b}| = \sqrt{9 + 16} = 5$

Un vector $\vec{c} \perp \vec{b}$ es de la forma $\vec{c} = k \cdot (-4, 3)$.

$\vec{c} = k(-4, 3) = 10 \cdot \frac{1}{5}(-4, 3) = (-8, 6)$

b) $\vec{c} = \frac{1}{5}(-4, 3) = \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

c) $\vec{c} \cdot \vec{a} = k \cdot (-4, 3) \cdot (-6, 8) = 24k + 24k = 48k = 4 \to k = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$

$\vec{c} = \frac{1}{12}(-4, 3) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$

40 **Dados los vectores $\vec{u}(-1, a)$ y $\vec{v}(b, 15)$, halla a y b, en cada caso, de modo que:**

a) $\vec{u} \perp \vec{v}$ **y** $|\vec{u}| = \sqrt{10}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$ **y** $|\vec{v}| = 17$

a) $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ |\vec{u}| = \sqrt{10} \end{cases} \to \begin{cases} (-1, a) \cdot (b, 15) = 0 \\ \sqrt{1 + a^2} = \sqrt{10} \end{cases} \to \begin{cases} 15a - b = 0 \\ 1 + a^2 = 10 \end{cases}$

Soluciones: $a = -3,\ b = -45;\ a = 3,\ b = 45$

b) $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 7 \\ |\vec{v}| = 17 \end{cases} \to \begin{cases} (-1, a) \cdot (b, 15) = 7 \\ \sqrt{b^2 + 15^2} = 17 \end{cases} \to \begin{cases} 15a - b = 7 \\ b^2 + 15^2 = 17^2 \end{cases}$

Soluciones: $a = -\frac{1}{15},\ b = -8;\ a = 1,\ b = 8$

41 **Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$, siendo $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 0)$, halla k de modo que $(\vec{a} + \vec{b})$ sea ortogonal a $(\vec{a} - \vec{b})$.**

$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = 2(2, 3) - (-3, 0) = (7, 6) \\ \vec{b} = -3(2, 3) + k(-3, 0) = (-6 - 3k, -9) \end{array}\right\} \to \begin{cases} \vec{a} + \vec{b} = (1 - 3k, -3) \\ \vec{a} - \vec{b} = (13 + 3k, 15) \end{cases}$

Ahora, como el producto escalar de ambos vectores debe ser 0, por ser ortogonales:

$(1 - 3k, -3) \cdot (13 + 3k, 15) = 0 \to (1 - 3k)(13 + 3k) + (-3) \cdot 15 = 0 \to$

$\to 13 + 3k - 39k - 9k^2 - 45 = 0 \to 9k^2 + 36k + 32 = 0 \to$

$\to k = \frac{-36 \pm \sqrt{1296 - 1152}}{18} = \frac{-36 \pm \sqrt{144}}{18} = \frac{-36 \pm 12}{18} = \begin{cases} -24/18 = -4/3 = k_1 \\ -48/18 = -8/3 = k_2 \end{cases}$

42 **Calcula la proyección de $\vec{u} + \vec{v}$ sobre $\vec{u}$ sabiendo que $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$ y $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 45°$.**

Por ser $|\vec{u}| = |\vec{v}| \to cos\,(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \frac{1}{2}\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 22°\ 30'$

$proy_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u} + \vec{v}|\ cos\,(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \sqrt{|\vec{u} + \vec{v}|^2}\ cos\,(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \sqrt{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})}\ cos\,(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) =$

$= \sqrt{|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2}\ cos\ 22°\ 30' = \sqrt{4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4}\ cos\ 22°\ 30' =$

$= \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} \cdot 0{,}92 \approx 3{,}4$

43 **De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabemos que $|\vec{a}| = 3$ y $|\vec{b}| = 5$ y que forman un ángulo de 120°. Calcula $|\vec{a} - \vec{b}|$.**

Como: $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|\,|\vec{v}|\ cos\ 0° = |\vec{v}|^2 \cdot 1 = |\vec{v}|^2$

Entonces podemos decir que:

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$

$= |\vec{a}|^2 - 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\ cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 =$

$= 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot cos\ 120° + 5^2 = 9 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 25 = 49$

Luego: $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$

44 **Halla el valor que debe tener k para que los vectores $\vec{x} = k\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{y} = k\vec{a} - \vec{b}$ sean perpendiculares, siendo $\vec{a}(3/2, 4)$ y $\vec{b}(5, 0)$.**

$$|\vec{a}|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 16 = \frac{73}{4}$$

$$|\vec{b}|^2 = 25$$

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (k\vec{a} + \vec{b}) \cdot (k\vec{a} - \vec{b}) = k^2\vec{a} \cdot \vec{a} - k\vec{a} \cdot \vec{b} + k\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = k^2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = k^2\,\frac{73}{4} - 25$$

Este producto erscalar tiene que ser cero, luego:

$$k^2\,\frac{73}{4} - 25 = 0 \to k = \frac{10}{73}\sqrt{73};\ k = -\frac{10}{73}\sqrt{73}$$

45 **Si $|\vec{u}| = 3$ y $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -11$, halla $|\vec{v}|$.**

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = -11$$

Como $|\vec{u}| = 3$, se tiene que:

$$3^2 - |\vec{v}|^2 = -11 \to |\vec{v}|^2 = 20 \to |\vec{v}| = \sqrt{20}$$

46 **Sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u} \perp \vec{v}$, halla $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.**

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$\overset{(*)}{=} |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \to |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{34}$$

(*) $\vec{u} \perp \vec{v} \to \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \to |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{34}$$

47 **Sea $B(\vec{x}, \vec{y})$ una base ortonormal. Calcula $|\vec{x} + \vec{y}|$ y $|\vec{x} - \vec{y}|$.**

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| + 0 + |\vec{y}| = 2 \to |\vec{x} + \vec{y}| = \sqrt{2}$$

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| - 0 + |\vec{y}| = 2 \to |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{2}$$

48 **Si $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ y $|\vec{u} + \vec{v}| = 5$, ¿qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$?**

Razonando como en el problema guiado número 2, llegamos a:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\,|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + |\vec{v}|^2$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$5^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 3^2$$

$$25 = 16 + 24\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 9$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{25 - 25}{24} = 0 \to (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 90°$$

49 **Calcula x para que los vectores $\vec{a}(7, 1)$ y $\vec{b}(1, x)$ formen un ángulo de 45°.**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 + x = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 45° \to 7 + x = \sqrt{50} \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \to$$

$$\to 14 + 2x = \sqrt{100(1+x^2)} \to \frac{14+2x}{10} = \sqrt{1+x^2} \to$$

$$\to \frac{7+x}{5} = \sqrt{1+x^2} \to \frac{49+x^2+14x}{25} = 1 + x^2 \to$$

$$\to 49 + x^2 + 14x = 25 + 25x^2 \to 24x^2 - 14x - 24 = 0 \to$$

$$\to 12x^2 - 7x - 12 = 0 \to x = \frac{7 \pm \sqrt{49+576}}{24} \begin{cases} x_1 = 4/3 \\ x_2 = -3/4 \end{cases}$$

50 **Halla un vector unitario que forme un ángulo de 30° con el vector $\vec{a}(1, \sqrt{3})$.**

Llamamos $\vec{u} = (x, y)$ al vector buscado:

$$\begin{cases} (\widehat{\vec{u}, \vec{a}}) = 30° \\ |\vec{u}| = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \cos 30° = \dfrac{x + y\sqrt{3}}{1 \cdot \sqrt{1+3}} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x+y\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \sqrt{3} = x + y\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son: $x = 0, y = 1;\ x = \frac{1}{2}\sqrt{3}, y = \frac{1}{2}$

Por tanto: $\vec{u}_1 = (0, 1);\ \vec{u}_2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$

51 **Determina x para que los vectores $\vec{u}(x, 1)$ y $\vec{v}(x, 0)$ formen un ángulo de 30°.**

$$\cos 30° = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1} \cdot x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to 2x = \sqrt{3}\sqrt{x^2+1} \to 4x^2 = 3(x^2+1) \to x = \pm\sqrt{3}$$

52 **Halla un vector $\vec{a}$ que forme un ángulo de 60° con el vector $\vec{b}(2, 2\sqrt{3})$ y tenga como módulo la mitad del módulo de $\vec{b}$.**

$\vec{a} = (x, y)$

$$\begin{cases} (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60° \\ |\vec{a}| = \frac{1}{2}|\vec{b}| \end{cases} \to \begin{cases} \cos 60° = \dfrac{2x + 2\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{4+12}} \\ |\vec{a}| = \frac{1}{2}\sqrt{4+12} \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{2x+2\sqrt{3}y}{4\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} 1 = \dfrac{x+\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{cases} \to \begin{cases} 2 = x + \sqrt{3}y \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{cases} \to x = -1, y = \sqrt{3};\ x = 2, y = 0$$

Soluciones: $\vec{a}_1 = (-1, \sqrt{3});\ \vec{a}_2 = (2, 0)$

53 **De una base $B = (\vec{u}, \vec{v})$ se sabe que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. En esa base las coordenadas de dos vectores son $\vec{x}(1, 2)$ e $\vec{y}(-1, 1)$. Calcula $\vec{x} \cdot \vec{y}$.**

* ***Mira el problema resuelto número 1.***

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) =$$

$$= -\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + 2\vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= -|\vec{u}|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2|\vec{v}|^2 = 4 - (-1) + 2 = 7$$

54 **Dados $\vec{a}(1, 2)$ y $\vec{b}(5, 5)$, expresa el vector $\vec{b}$ como suma de dos vectores: uno de la misma dirección que $\vec{a}$ y otro ortogonal a $\vec{a}$.**

$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y}$, donde:

- $\vec{x}$ tiene la misma dirección de $\vec{a} \to \vec{x} = k\vec{a} = k(1, 2) = (k, 2k)$
- $\vec{y} \perp \vec{a} \to \vec{y} = h(-2, 1) = (-2h, h)$

Entonces:

$(5, 5) = \vec{x} + \vec{y} = (k, 2k) + (-2h, h) = (k - 2h, 2k + h)$

$$\left.\begin{array}{l} 5 = k - 2h \\ 5 = 2k + h \end{array}\right\} \begin{array}{l} k = 3 \\ h = -1 \end{array}$$

Los vectores pedidos son $\vec{x}(3, 6)$ e $\vec{y}(2, -1)$.

55 **Se sabe que $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ y $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ son perpendiculares y que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios. ¿Cuál es el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$?**

Si $\vec{c} \perp \vec{d} \to \vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \to (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0 \to 5\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 10\vec{b} \cdot \vec{a} - 8\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$

Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios $\to |\vec{a}| = 1 = |\vec{b}|$

$$5|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8|\vec{b}|^2 = 5 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8 = 0 \to$$

$$\to \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \to \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{-1}{2} \to (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 120°$$

56 **Demuestra que el vector $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$ es perpendicular al vector $\vec{c}$.**

Hay que probar que el producto escalar de ambos vectores es igual a 0.

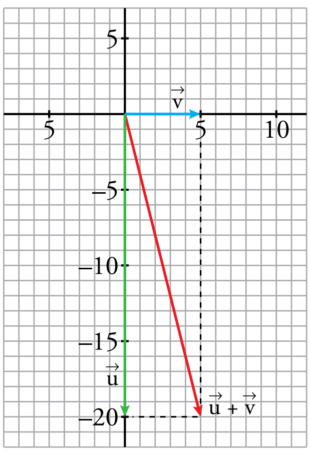
- Veamos primero cuáles son las coordenadas del primer vector:

$$\begin{aligned}(\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} &= (b_1c_1 + b_2c_2)\,(a_1, a_2) - (a_1c_1 + a_2c_2)\,(b_1, b_2) = \\ &= ((b_1c_1 + b_2c_2)\,a_1, (b_1c_1 + b_2c_2)\,a_2) - ((a_1c_1 + a_2c_2)\,b_1, (a_1c_1 + a_2c_2)\,b_2) = \\ &= (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2, a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2) - (a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2, a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2) = \\ &= (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2 - a_1b_1c_1 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2 - a_1b_2c_1 - a_2b_2c_2) = \\ &= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1)\end{aligned}$$

- Calculamos ahora:

$$\begin{aligned}[(\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b}] \cdot \vec{c} &= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1) \cdot (c_1, c_2) = \\ &= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2)\,c_1 + (a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1)\,c_2 = \\ &= a_1b_2c_2c_1 - a_2b_1c_2c_1 + a_2b_1c_1c_2 - a_1b_2c_1c_2 = 0\end{aligned}$$

57 **Una barca se desplaza por un río en dirección sur a una velocidad de 20 km/h. Si empieza a soplar un viento en dirección este a 5 km/h, ¿en qué dirección y a qué velocidad se moverá la barca?**



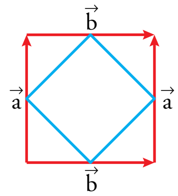
La velocidad es $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2} = \sqrt{400 + 25} = 5\sqrt{17}$

La dirección es $(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}})$. Calculemos este ángulo:

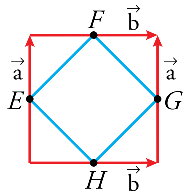
$$\cos(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \frac{20}{5\sqrt{17}} \approx 0{,}97 \to (\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) \approx 14°\ 4'\ 11''$$

Se mueve en dirección sureste con 14° 4' 11'' respecto de la dirección sur.

58 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores que definen un cuadrado. Demuestra que los puntos medios de sus lados definen otro cuadrado.**



* *Mira el problema resuelto número 5.*



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\end{array}\right\} \to \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \\ \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\end{array}\right\} \to \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$$

$$\left.\begin{array}{l}|\overrightarrow{EH}|^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} - 2\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \\ |\overrightarrow{EF}|^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} + 2\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2\end{array}\right\} \to |\overrightarrow{EH}| = |\overrightarrow{EF}|$$

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FG} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\vec{a} =$$

$= -\frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 = 0$ porque el polígono original era cuadrado y, por tanto, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Como los otros dos lados son paralelos a estos, también son perpendiculares entre sí. Luego los lados del polígono $EFGH$ miden lo mismo, los opuestos son paralelos y son perpendiculares dos a dos. Por tanto, el polígono $EFGH$ es un cuadrado.

Página 185

Cuestiones teóricas

59 **Indica si el resultado de las siguientes operaciones es un número o un vector:**

a) $2\vec{a}\cdot\vec{b}$ **b)** $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ **c)** $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot\vec{c}$ **d)** $(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b})$

a) Número. b) Vector. c) Número. d) Número.

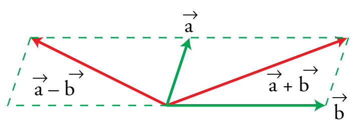
60 **Si $B(\vec{a}, \vec{b})$ es una base de los vectores del plano, señala cuáles de los siguientes pares de vectores pueden ser otra base:**

a) $(3\vec{a}, -2\vec{b})$ **b)** $(-\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$ **c)** $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$ **d)** $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a})$

a) Sí, pues no tienen la misma dirección, ya que $3\vec{a}$ tiene la dirección de $\vec{a}$ y $-2\vec{b}$ tiene la dirección de $\vec{b}$ (que, por ser $B(\vec{a}, \vec{b})$ base, no es la misma).

b) No, pues $-\vec{a} - \vec{b} = -1(\vec{a} + \vec{b})$, luego los dos vectores tienen la misma dirección (y sentidos opuestos).

c) Sí, pues tienen distinta dirección.



d) No, pues tienen la misma dirección al ser $\vec{a} - \vec{b} = -1(\vec{b} - \vec{a})$.

61 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no nulos. Indica qué ángulo forman en los siguientes casos:**

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ **b)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ **c)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$ **d)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0{,}5\,|\vec{a}||\vec{b}|$

a) $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 1 \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0°$

b) $\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90°$

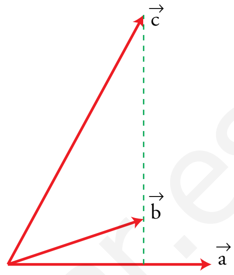
c) $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = -1 \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180°$

d) $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0{,}5 \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$

62 **Busca algunos ejemplos con los que se vea que:**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ **no implica que** $\vec{b} = \vec{c}$

Considera los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ del dibujo de la derecha:



$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot proy_{\vec{a}}(\vec{b})$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot proy_{\vec{a}}(\vec{c})$

Como ambas proyecciones coinciden: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$

Y, sin embargo: $\vec{b} \neq \vec{c}$

63 **Prueba, que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$, entonces:**

$\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c}), \quad m, n \in \mathbb{R}$

Hay que probar que $\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = 0$. Veamos:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b}) + n(\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ \text{Como: } \vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \qquad\quad \vec{a} \perp \vec{c} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m \cdot 0 + n \cdot 0$$

64 **Prueba que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c})$, entonces se verifica que $\vec{a} \perp \vec{c}$.**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \text{Si } \vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c}) \rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$$

65 **Justifica por qué $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.**

$|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})| = \left|\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right| = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} \leq 1$ porque el coseno de un ángulo, en valor absoluto, siempre es menor o igual que 1.

Luego, pasando el denominador (que siempre es positivo) al segundo miembro:

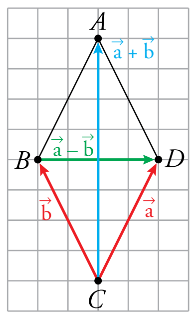
$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$

Para profundizar

66 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores que definen los lados de un rombo, partiendo de uno de sus vértices (cada vector determina un par de lados paralelos).**

a) Expresa las diagonales del rombo en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

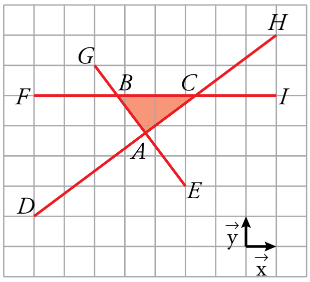
b) Demuestra vectorialmente que las diagonales del rombo son perpendiculares.



a) $\overrightarrow{CA} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b}$

b) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} - \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$ porque los lados de un rombo tienen la misma longitud.

67 **Halla los ángulos interiores del triángulo *ABC*.**



Observa que puedes expresar estos ángulos como ángulos entre vectores. Las coordenadas de estos vectores las obtendrás expresándolos como combinación lineal de la base *B* = (*x*, *y*).

$\overrightarrow{DH} = (8, 6)$; $\overrightarrow{EG} = (-3, 4)$

$\hat{A} = \left(\widehat{\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{EG}}\right)$

$$cos\,\hat{A} = cos\left(\widehat{\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{EG}}\right) = \frac{(8, 6) \cdot (-3, 4)}{|(8, 6)||(-3, 4)|} = 0 \rightarrow \hat{A} = 90°$$

$\overrightarrow{HD} = (-8, -6)$; $\overrightarrow{IF} = (-8, 0)$

$\hat{C} = \left(\widehat{\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{IF}}\right)$

$$cos\,\hat{C} = cos\left(\widehat{\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{IF}}\right) = \frac{(-8, -6) \cdot (-8\ 0)}{|(-8, -6)||(-8, 0)|} = \frac{64}{80} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$\hat{C} = 35°\ 52'\ 11''$

$\hat{B} = 90° - 35°\ 52'\ 11'' = 54°\ 7'\ 49''$

68 **Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, definimos el vector proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ como el vector $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$. Calcula analítica y gráficamente este vector si:**

a) $\vec{u}(3, 4)$ y $\vec{v}(3, -4)$ b) $\vec{u}(8, 6)$ y $\vec{v}(2, -1)$

¿Existe alguna relación entre el sentido de este vector y el ángulo $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$?

a) $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}|\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$

Luego, $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) \cdot \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (0, 0)$

b) $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}|\ cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{5}\ \dfrac{(8, 6) \cdot (2, -1)}{10\sqrt{5}} = 1$

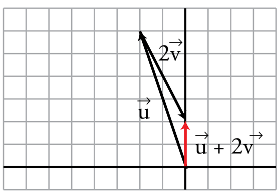
Luego, $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) \cdot \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \dfrac{1}{10}(8, 6) = \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

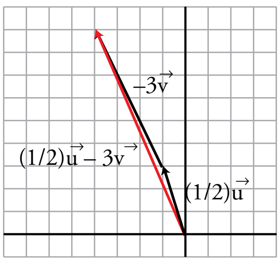
Si el ángulo es agudo, $proy_{\vec{u}}(\vec{v})$ tiene el mismo sentido que $\vec{u}$, si el triángulo es obtuso, tiene sentido contrario a $\vec{u}$.

Autoevaluación

1 **Se consideran los vectores $\vec{u}(-2, 6)$ y $\vec{v}(1, -2)$.**

Calcula gráficamente y utilizando coordenadas, $\vec{u} + 2\vec{v}$ y $\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v}$.





$\vec{u} + 2\vec{v} = (-2, 6) + 2(1, -2) = (-2, 6) + (2, -4) = (0, 2)$

$\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v} = \frac{1}{2}(-2, 6) - 3(1, -2) = (-1, 3) - (3, -6) = (-4, 9)$

2 **Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores unitarios que forman un ángulo de 60°. Calcula:**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b)** $(3\vec{u}) \cdot (-2\vec{v})$ **c)** $proy_{\vec{u}}(\vec{u}+\vec{v})$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos 60° = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) $3\vec{u} \cdot (-2\vec{v}) = -6(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -3$

c) $proy_{\vec{u}}(\vec{u}+\vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot (\vec{u}+\vec{v})}{|\vec{u}|} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v}}{1} = |\vec{u}|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

3 **Expresa el vector $\vec{a}(-1, -9)$ como combinación lineal de los vectores de la base $B = ((-2, 3), (-1, 5))$.**

$(-1, -9) = k(-2, 3) + s(-1, 5) = (-2k - s, 3k + 5s)$

$$\left.\begin{array}{l} -1 = -2k - s \\ -9 = 3k + 5s \end{array}\right\} \begin{array}{l} s = 1 - 2k \\ -9 = 3k + 5(1-2k) \to -9 = -7k + 5 \to k = 2 \end{array}$$

$s = 1 - 4 = -3$

Por tanto: $(-1, -9) = 2(-2, 3) - 3(-1, 5)$

$\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

4 **Consideramos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cuyas coordenadas respecto a una base ortonormal son $\vec{u}(0, 2)$ y $\vec{v}(1, \sqrt{3})$. Calcula:**

a) Su producto escalar.

b) El módulo de ambos vectores.

c) El ángulo que forman.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 2) \cdot (1, \sqrt{3}) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

c) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = arc \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°$

5 **Considera el vector $\vec{u}(3, -4)$. Calcula:**

a) Un vector paralelo a $\vec{u}$ de módulo 1. **b) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ de módulo 2.**

a) $|\vec{u}| = 5$

$\vec{v} = \frac{1}{5}(3, -4) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

b) $\vec{v} = 2 \cdot \frac{1}{5}(4, 3) = \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

6 **Sea $\vec{u}(-3, k)$. Calcula k de forma que:**

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -6)$. **b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a 5.**

a) El producto escalar de dos vectores ortogonales es igual a 0.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, k) \cdot (4, -6) = -12 - 6k = 0 \to k = -2$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{9 + k^2} = 5 \to 9 + k^2 = 25 \to k = \pm 4$

7 **Determina las coordenadas de un vector $\vec{a}(x, y)$ que forme con el vector $\vec{v}(-1, 0)$ un ángulo de 60° y cuyo módulo sea 2.**

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{v}}\right) = \cos 60° = \frac{1}{2} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{-x}{2 \cdot 1} \to x = -1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + y^2} = 2 \to 1 + y^2 = 4 \to y^2 = 3 \to y = \pm\sqrt{3}$$

Hay dos soluciones para el vector $\vec{a}$: $\begin{cases} \vec{a}(-1, \sqrt{3}) \\ \vec{a}(-1, -\sqrt{3}) \end{cases}$

8 **Obtén un vector $\vec{u}(x, y)$ ortogonal a $\vec{v}(8, 6)$ y cuyo módulo sea la mitad del de $\vec{v}$.**

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$; $|\vec{v}| = \sqrt{64 + 36} = 10$

$(x, y) \cdot (8, 6) = 8x + 6y = 0$

$|\vec{u}| = \frac{1}{2}|\vec{v}| \to \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \to x^2 + y^2 = 25$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 8x + 6y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -\frac{3}{4}y \\ \frac{9}{16}y^2 + y^2 = 25 \to \frac{25}{16}y^2 = 25 \to y^2 = 16 \to y = \pm 4 \end{array}$$

$y = 4 \to x = -3$

$y = -4 \to x = 3$

Hay dos soluciones: $\vec{u}(-3, 4)$; $\vec{u}(3, -4)$

9 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores unitarios que forman un ángulo de 120°. Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.**

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) + |\vec{b}|^2 = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 =$$

$$= 1 - 1 + 1 = 1 \to |\vec{a} + \vec{b}| = 1$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) + |\vec{b}|^2 = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 =$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3 \to |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$$

Resuelve

Página 187

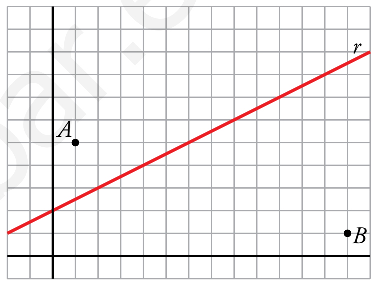
El embarcadero

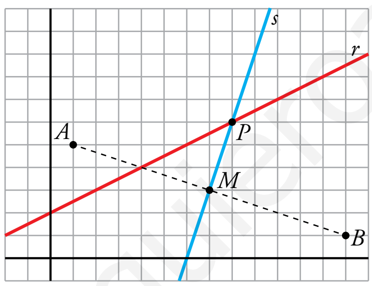
Tenemos dos pueblos, A y B, cada uno a un lado de un canal. Se desea construir un embarcadero situado exactamente a la misma distancia de los dos pueblos. ¿Dónde habrá que hacerlo?

Para decidirlo, colocamos unos ejes coordenados y razonamos del siguiente modo:

Los puntos de la mediatriz del segmento AB están a la misma distancia de los extremos de este. Por tanto, el punto buscado, P, es la intersección de la recta r (el canal) con la recta s (perpendicular a AB en su punto medio).

Halla las coordenadas de P.





Coordenadas de $A = (1, 5)$

Coordenadas de $B = (13, 1)$

Hallamos las coordenadas de M, punto medio entre A y B.

$$M = \left(\frac{1+13}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (7, 3)$$

Hallamos el vector $\overrightarrow{AB} = (13, 1) - (1, 5) = (12, -4)$

La recta s pasa por M y tiene vector de dirección $\vec{d} = (4, 12)$.

La ecuación de s es: $\dfrac{x-7}{4} = \dfrac{y-3}{12}$

La ecuación de r es $y = \dfrac{1}{2}x + 2$.

P es la solución del sistema: $\left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2}x + 2 \\ \dfrac{x-7}{4} = \dfrac{y-3}{12} \end{array}\right. \rightarrow x = 8,\ y = 6$

Solución: $P = (8, 6)$

1 Puntos y vectores en el plano

Página 189

Hazlo tú. Averigua m para que $P(1, 4)$, $Q(5, -2)$ y $R(m, 0)$ estén alineados.

$\overrightarrow{PQ} = (4, -6)$

$\overrightarrow{QR} = (m, 0) - (5, -2) = (m - 5, 2)$

$$\frac{4}{m-5} = \frac{-6}{2} \rightarrow m - 5 = \frac{-3}{4} \rightarrow m = \frac{17}{4} = 4,25$$

1 Halla las coordenadas de $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{NM}$, siendo $M(7, -5)$ y $N(-2, -11)$.

$\overrightarrow{MN} = (-2, -11) - (7, -5) = (-9, -6)$

$\overrightarrow{NM} = (7, -5) - (-2, -11) = (9, 6)$

2 Averigua si están alineados los puntos $P(7, 11)$, $Q(4, -3)$ y $R(10, 25)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ} = (-3, -14) \\ \overrightarrow{QR} = (6, 28)\end{array}\right\} \rightarrow \frac{-3}{6} = \frac{-14}{28} \rightarrow A,\ B \text{ y } C \text{ están alineados.}$$

3 Calcula el valor de k para que los siguientes puntos de coordenadas

$A(1, 7)$ $B(-3, 4)$ $C(k, 5)$

estén alineados.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (-4, -3) \\ \overrightarrow{BC} = (k+3, 1)\end{array}\right\} \rightarrow \frac{-4}{k+3} = \frac{-3}{1} \rightarrow -4 = -3k - 9 \rightarrow 3k = -5 \rightarrow k = \frac{-5}{3}$$

Página 190

4 Dados los puntos $P(3, 9)$ y $Q(8, -1)$:

a) Halla el punto medio de PQ.

b) Halla el simétrico de P respecto de Q.

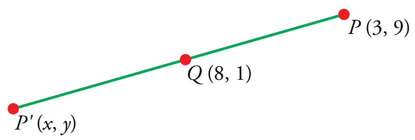
c) Halla el simétrico de Q respecto de P.

d) Obtén un punto A de PQ tal que $\overrightarrow{PA}/\overrightarrow{AQ} = 2/3$.

e) Obtén un punto B de PQ tal que $\overrightarrow{PB}/\overrightarrow{PQ} = 1/5$.

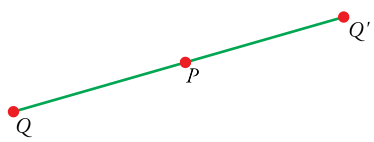
a) $M\left(\frac{3+8}{2}, \frac{9+(-1)}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 4\right)$

b) $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3+x}{2} = 8 \rightarrow x = 13 \\ \dfrac{9+y}{2} = -1 \rightarrow y = -11\end{array}\right\} P'(13, -11)$$



c) Llamamos $Q'(x', y')$ al simétrico de Q respecto de P.

Así: $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x'+8}{2} = 3 \rightarrow x' = -2 \\ \dfrac{y'+(-1)}{2} = 9 \rightarrow y' = 19\end{array}\right\} Q'(-2, 19)$$



d) Llamamos $A(x, y)$ al punto que buscamos. Debe cumplirse que:

$$\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ} \rightarrow (x-3, y-9) = \frac{2}{3}(8-x, -1-y)$$

$$\left.\begin{array}{l} x-3 = \frac{2}{3}(8-x) \rightarrow x = 5 \\ y-9 = \frac{2}{3}(-1-y) \rightarrow y = 5 \end{array}\right\} A(5, 5)$$

e) Llamamos $B(x, y)$ al punto que buscamos.

$$\overrightarrow{PB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{PQ} \rightarrow (x-3, y-9) = \frac{1}{5}(5, -10) = (1, -2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x-3 = 1 \rightarrow x = 4 \\ y-9 = -2 \rightarrow y = 7 \end{array}\right\} B(4, 7)$$

2 Ecuaciones de una recta

Página 192

Hazlo tú. Obtén las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $P(7, -4)$ y $Q(3, 2)$.

Vector de posición de P: $\vec{p} = (7, -4)$

Vector de dirección de la recta: $\vec{d} = (3, 2) - (7, -4) = (-4, 6)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 7 - 4\lambda \\ y = -4 + 6\lambda \end{cases}$$

Ecuación en forma continua:

$$\frac{x-7}{-4} = \frac{y+4}{6}$$

Hazlo tú. Obtén las ecuaciones paramétricas de la recta $\frac{x-5}{0} = \frac{y}{-7}$.

Vector de posición de P: $\vec{p} = (5, 0)$

Vector de dirección de la recta: $\vec{d} = (0, -7)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -7\lambda \end{cases}$$

Página 194

Hazlo tú. Obtén todas las formas posibles de la ecuación de la recta que pasa por $A(-2, 5)$ y $B(3, -5)$.

Vector de posición de A: $\overrightarrow{OA} = (-2, 5)$

Vector de dirección de la recta: $\vec{d} = (3, -5) - (-2, 5) = (5, -10) = 5(1, -2)$

Vamos a tomar como vector de dirección de la recta un vector proporcional al anterior: $\vec{d'} = (1, -2)$.

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \end{cases}$$

Ecuación en forma continua:

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-2}$$

Ecuación implícita:

$$-2(x+2) = y - 5 \rightarrow -2x - 4 = y - 5 \rightarrow -2x - y + 1 = 0$$

Ecuación explícita:

$$y = -2x + 1$$

Ecuación punto-pendiente:

$$m = \frac{-2}{1}$$

$$y = -2(x + 2) + 5$$

Hazlo tú. **Obtén la ecuación implícita de** $r: \begin{cases} x = 5t \\ y = 4 - t \end{cases}$.

$\frac{x}{5} = \frac{y-4}{-1} \rightarrow -x = 5y - 20 \rightarrow -x - 5y + 20 = 0$

Página 195

Hazlo tú. **Da las ecuaciones paramétricas de la recta** $y = -2x + 7$.

Encontramos un punto A de la recta dando a x el valor 0: $x = 0 \rightarrow A = (0, 7)$

$m = -2 \rightarrow \vec{d} = (1, -2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 - 2\lambda \end{cases}$

Hazlo tú. **Halla las ecuaciones paramétricas e implícita de la recta** $\frac{x-5}{0} = \frac{y+1}{2}$.

Punto de la recta: $A = (5, -1)$

$\vec{d} = (0, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$

Ecuación implícita: $x = 5$

1 **Halla las ecuaciones paramétricas, continua, implícita y explícita de la recta que pasa por** A **y** B**, en cada caso:**

a) $A(-1, -1)$, $B(3, 3)$ **b)** $A(0, 4)$, $B(6, 0)$ **c)** $A(3, 5)$, $B(-1, 5)$ **d)** $A(3, 5)$, $B(3, 2)$

a) $A(-1, -1)$, $B(3, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (4, 4)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{cases}$ Continua: $\frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{4}$

Implícita: $x - y = 0$ Explícita: $y = x$

b) $A(0, 4)$, $B(6, 0) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (6, -4)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 4 - 4\lambda \end{cases}$ Continua: $\frac{x}{6} = \frac{y-4}{-4}$

Implícita: $-4x - 6y + 24 = 0$ Explícita: $y = \frac{-4}{6}x + 4$

c) $A(3, 5)$, $B(-1, 5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4, 0)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 - 4\lambda \\ y = 5 \end{cases}$ Continua: $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-5}{0}$

Implícita: $y - 5 = 0$ Explícita: $y = 5$

d) $A(3, 5)$, $B(3, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (0, -3)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 - 3\lambda \end{cases}$ Continua: $\frac{x-3}{0} = \frac{y-5}{-3}$

Implícita: $x - 3 = 0$ Explícita: No existe, pues se trata de una recta vertical de ecuación $x = 3$.

2 Obtén las ecuaciones implícita, paramétricas y continua de la recta $y = 2x + 3$.

$y = 2x + 3$

- Buscamos dos puntos de la recta y su vector dirección:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x=0 \to y=2\cdot 0+3=3 \to A(0,3) \\ \text{Si } x=1 \to y=2\cdot 1+3=5 \to B(1,5) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{AB} = (1, 2)$$

- Implícita: $2x - y + 3 = 0$
- Paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

- Continua:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-3}{2}$$

3 a) Encuentra dos puntos, P y Q, pertenecientes a la recta r: $2x - 3y + 6 = 0$.

b) Comprueba que $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a (2, –3).

c) Escribe las ecuaciones paramétricas de r.

d) Escribe su ecuación explícita y comprueba que el vector $(1, m)$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ (m es la pendiente de r).

a) r: $2x - 3y + 6 = 0$

Si $x = 0 \to 2 \cdot 0 - 3y + 6 = 0 \to y = 2 \to P(0, 2)$

Si $x = -3 \to 2 \cdot (-3) - 3y + 6 = 0 \to y = 0 \to Q(-3, 0)$

b) $\overrightarrow{PQ} = (-3, -2)$

$\overrightarrow{PQ} \perp (2, -3) \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot (2, -3) = 0$

$(-3, -2) \cdot (2, -3) = (-3) \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) = -6 + 6 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{cases}$

d) Despejamos y en la ecuación de r:

$2x - 3y + 6 = 0 \to 2x + 6 = 3y \to \dfrac{2}{3}x + 2 = y$

Explícita: $y = \dfrac{2}{3}x + 2$

$m = \dfrac{2}{3} \to (1, m) = \left(1, \dfrac{2}{3}\right)$

El vector $\left(1, \dfrac{2}{3}\right)$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ si sus coordenadas son proporcionales:

$(-3, -2) = \lambda\left(1, \dfrac{2}{3}\right) \to \lambda = -3$

Los vectores son proporcionales y, por tanto, paralelos.

3 Haz de rectas

Página 196

1 Halla la recta del haz de centro $P(-3, 5)$ que pasa por $(8, 4)$.

Hemos de hallar la recta que pasa por $P(-3, 5)$ y $Q(8, 4)$.

$\overrightarrow{PQ} = (11, -1)$

$r: \dfrac{x+3}{11} = \dfrac{y-5}{-1}$

2 Los haces de rectas cuyos centros son $P(4, 0)$ y $Q(-6, 4)$ tienen una recta en común. ¿Cuál es?

Es la recta que pasa por $P(4, 0)$ y $Q(-6, 4)$.

$\overrightarrow{PQ} = (-10, 4)$

$r: \dfrac{x-4}{-10} = \dfrac{y-0}{4}$

3 Las siguientes rectas:

$$r: 3x - 5y - 7 = 0 \qquad s: x + y + 4 = 0$$

forman parte de un mismo haz. ¿Cuál de las rectas de ese haz tiene pendiente 4?

- El centro del haz es el punto de corte de r y s. Lo hallamos:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 5y - 7 = 0 \\ x + \ \ y + 4 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = -y - 4$$

$$3(-y-4) - 5y - 7 = 0 \rightarrow -8y - 19 = 0 \rightarrow y = -\frac{19}{8}$$

$$x = -y - 4 = \frac{19}{8} - 4 = -\frac{13}{8}$$

El centro del haz es el punto $P\left(-\dfrac{13}{8}, -\dfrac{19}{8}\right)$.

- Ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente igual a 4:

$$y = \frac{19}{8} + 4\left(x + \frac{13}{8}\right) \rightarrow 32x - 8y + 7 = 0$$

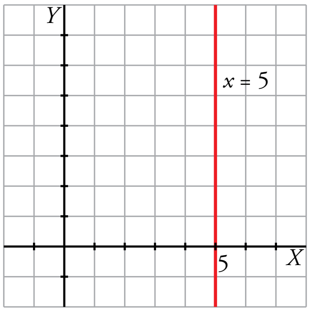
4 Reflexiones sobre ecuaciones con y sin "parámetros"

Página 197

1 Representa.

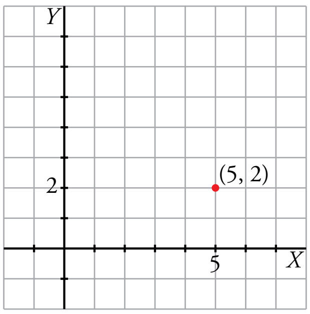
a) $x = 5$ **b)** $\begin{cases} x = 5 \\ y = \lambda \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ **d)** $y = 2$ **e)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \end{cases}$

a)

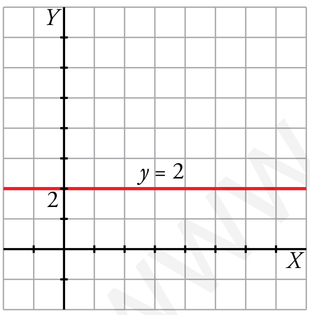


b) Es la misma que la del apartado a).

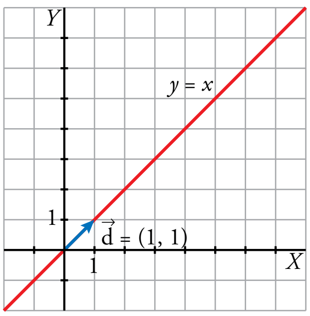
c) Es un punto, el punto (5, 2).



d)



e) Pasa por $O = (0, 0)$. Tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$.



f) Tenemos cualquier punto del plano, pues no hay ninguna restricción.

5 Paralelismo y perpendicularidad

Página 198

1 **¿Verdadero o falso? Cada una de las siguientes rectas es paralela a $\frac{x-2}{5}=\frac{y-1}{2}$:**

a) $2x + 5y - 4 = 0$ **b)** $5x + 2y = 0$ **c)** $2x - 5y + 1 = 0$

d) $y = \frac{5}{2}x + 4$ **e)** $y = \frac{-5}{2}x + 1$ **f)** $y = \frac{2}{5}x - 3$

El vector de dirección de la recta $\frac{x-2}{5}=\frac{y-2}{2}$ es $\vec{d} = (5, 2)$.

a) Vector de dirección: $(-5, 2) \nparallel (5, 2) \Rightarrow$ Falso.

b) Vector de dirección: $(-2, 5) \nparallel (5, 2) \Rightarrow$ Falso.

c) Vector de dirección: $(5, 2) \parallel (5, 2) \Rightarrow$ Verdadero.

d) $m = \frac{5}{2} \to$ Vector de dirección: $(2, 5) \nparallel (5, 2) \Rightarrow$ Falso.

e) $m = -\frac{5}{2} \to$ Vector de dirección: $(2, -5) \nparallel (5, 2) \Rightarrow$ Falso.

f) $m = \frac{2}{5} \to$ Vector de dirección: $(5, 2) \parallel (5, 2) \Rightarrow$ Verdadero.

2 **¿Verdadero o falso? Cada una de las siguientes rectas es perpendicular a $x - 2y + 4 = 0$:**

a) $\begin{cases} x = y + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

d) $y = 2x + 1$ **e)** $y = -2x + 3$ **f)** $y = \frac{x}{2}$

El vector perpendicular a la recta $x - 2y + 4 = 0$ es $(1, -2)$.

a) Vector de dirección: $(1, -2) \parallel (1, -2) \Rightarrow$ Verdadero.

b) Vector de dirección: $(-2, 1) \nparallel (1, -2) \Rightarrow$ Falso.

c) Vector de dirección: $(1, 2) \nparallel (1, -2) \Rightarrow$ Falso.

d) $m = 2 \to$ Vector de dirección: $(1, 2) \nparallel (1, -2) \Rightarrow$ Falso

e) $m = -2 \to$ Vector de dirección: $(1, -2) \parallel (1, -2) \Rightarrow$ Verdadero.

f) $m = \frac{1}{2} \to$ Vector de dirección: $(2, 1) \nparallel (1, -2) \Rightarrow$ Falso.

Página 199

Hazlo tú. **Halla una paralela y una perpendicular a $r: \frac{x+5}{3}=\frac{y-1}{-2}$ que pasen por $(7, -5)$.**

El vector de dirección de la recta $\frac{x+5}{3}=\frac{y-1}{-2}$ es $\vec{d} = (3, -2)$. Vector normal: $\vec{n} = (2, 3)$.

Recta paralela:

$$r_1: \begin{cases} x = 7 + 3\lambda \\ y = -5 - 2\lambda \end{cases}$$

Recta perpendicular:

$$r_2: \begin{cases} x = 7 + 2\lambda \\ y = -5 + 3\lambda \end{cases}$$

Hazlo tú. Halla la recta $r_1 \parallel r$: $5x - y + 4 = 0$ que pase por (3, –5); y la recta $r_2 \perp r$ que pase por (0, 0).

El vector de dirección de la recta r: $5x - y + 4 = 0$ es $\vec{d} = (-1, -5) = -(1, 5)$. Vector normal: $\vec{n} = (5, -1)$.

Recta paralela:

$$r_1: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -5 + 5\lambda \end{cases}$$

Recta perpendicular:

$$r_2: \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -5 - \lambda \end{cases}$$

Hazlo tú. Dada la recta r: $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y}{-5}$, halla:

a) Las ecuaciones paramétricas de $r_1 \perp r$ que pase por (–2, 0).

b) La ecuación implícita de $r_2 \parallel r$ que pase por (0, –3).

c) La ecuación explícita de $r_3 \parallel r$ que pase por (–3, 5).

El vector de dirección de la recta $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y}{-5}$ es $\vec{d} = (2, -5)$. Vector normal: $\vec{n} = (5, 2)$.

a) Recta perpendicular:

$$r_1: \begin{cases} x = -2 + 5\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$$

b) Recta paralela:

$$r_2: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{-5} \rightarrow -5x = 2y + 6 \rightarrow -5x - 2y - 6 = 0$$

c) Recta paralela:

$$r_3: \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{-5} \rightarrow -5x - 15 = 2y - 10 \rightarrow -5x - 2y - 5 = 0 \rightarrow y = -\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$$

3 Escribe las ecuaciones paramétricas de dos rectas que pasen por $P(4, -3)$ y sean paralela y perpendicular, respectivamente, a r: $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$.

$$r: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 4 + 2t \end{cases} \rightarrow \text{Vector dirección de } r\text{: } \vec{v}_r = (-5, 2)$$

- Recta paralela a r que pasa por P:

  $P(4, -3)$; $\vec{v}_s = \vec{v}_r = (-5, 2)$

  $$s: \begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$$

- Recta perpendicular a r que pasa por P:

  $P(4, -3)$; $\vec{v}_l = (2, 5)$

  $$l: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3 + 5t \end{cases}$$

4 **Dada la recta r: $y = -2x + 5$, halla:**

a) Las ecuaciones paramétricas de una recta r_1 paralela a r que pase por (0, –2).

b) La ecuación explícita de una recta r_2 paralela a r y de otra r_3, perpendicular a r y que ambas pasen por (0, 1).

c) La ecuación implícita de una recta r_4, perpendicular a r y que pase por (–2, 5).

$r: y = -2x + 5$

Pendiente $m = -2 \rightarrow$ Vector de dirección de la recta es $\vec{d} = (1, -2)$. Vector normal: $\vec{n} = (2, 1)$.

a) $r_1: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases}$

b) $r_2: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} \rightarrow -2x = y - 1 \rightarrow y = -2x + 1$

$r_3: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} \rightarrow x = 2y - 2 \rightarrow x - 2y + 2 = 0 \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + 1$

c) $r_4: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-5}{1} \rightarrow x + 2 = 2y - 10 \rightarrow x - 2y + 12 = 0$

5 **Dada s: $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases}$, halla:**

a) La ecuación continua de una recta r_1 perpendicular a s que pase por $P_1(5, -3)$.

b) La ecuación implícita de r_2 paralela a s que pase por $P_2(0, 4)$.

c) La ecuación explícita de r_3 perpendicular a s que pase por $P_3(-3, 0)$.

$s: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases} \rightarrow P(5, 0) \in s;\ \vec{v}_s = (-1, 3)$

a) El vector dirección de r_1 es $\vec{v}_{r_1} = (3, 1)$. $P_1(5, -3) \in r_1$.

$r_1: \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+3}{1}$

b) El vector dirección de r_2 es el mismo que el de s: $\vec{v}_{r_2} = (-1, 3)$. $P_2(0, 4) \in r_2$.

$r_2: \dfrac{x-0}{-1} = \dfrac{y-4}{3} \rightarrow 3x = -y + 4 \rightarrow 3x + y - 4 = 0$

c) El vector dirección de r_3 es el mismo que el de r_1: $\vec{v}_{r_3} = (3, 1)$. $P_3(-3, 0) \in r_3$.

$r_3: \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-0}{1} \rightarrow y = \dfrac{1}{3}x + 1$

6 **Determina las ecuaciones implícitas de dos rectas que pasen por $P(-3, 4)$ y sean paralela y perpendicular, respectivamente, a r: $5x - 2y + 3 = 0$.**

$r: 5x - 2y + 3 = 0 \rightarrow 5x + 3 = 2y \rightarrow y = \dfrac{5}{2}x + \dfrac{3}{2}$

La pendiente de r es $m_r = \dfrac{5}{2}$

- Recta s paralela a r que pasa por $P(-3, 4)$:

$m_s = m_r = \dfrac{5}{2}$

$s: y - 4 = \dfrac{5}{2}(x + 3) \rightarrow s: 5x - 2y + 23 = 0$

- Recta l perpendicular a r que pasa por $P(-3, 4)$:

$m_l = -\dfrac{l}{m_r} = -\dfrac{2}{5}$

$l: y - 4 = -\dfrac{2}{5}(x + 3) \rightarrow l: 2x + 5y - 14 = 0$

6 Posiciones relativas de dos rectas

Página 200

Hazlo tú. Determina la posición relativa y el punto de corte, si existe, de las rectas:

$$r_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -5 - 5t \end{cases} \text{ y } r_2: \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 6 - t \end{cases}$$

Vector de dirección de r_1: $\vec{d} = (2, -5)$

Vector de dirección de r_2: $\vec{d}' = (1, -1)$

No son proporcionales, luego las rectas se cortan.

Punto de corte:

$$\begin{cases} 1 + 2t = -4 + s \\ -5 - 5t = 6 - s \end{cases} \to s = 1, \ t = -2$$

Para esos valores de los parámetros: $x = -4 + 1 = -3$; $y = 6 - 1 = 5$

Punto de corte: $(-3, 5)$

Hazlo tú. Halla la posición relativa de las rectas:

$$r_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 5t \end{cases} \text{ y } r_2: \begin{cases} x = 8 + 4t \\ y = 3 + 10t \end{cases}$$

Vector de dirección de r_1: $\vec{d} = (2, 5)$

Vector de dirección de r_2: $\vec{d}' = (4, 10)$

Son proporcionales, $(4, 10) = 2(2, 5)$, luego las rectas son paralelas o coincidentes.

Punto de r_1: $(0, 1)$

Sustituimos en r_2:

$$\begin{cases} 0 = 8 + 4t \\ 1 = 3 + 10t \end{cases} \to \begin{cases} 0 = 8 + 4t \to t = -2 \\ 1 = 3 + 10t \to t = -\frac{1}{5} \end{cases} \to \text{No hay solución, las rectas son paralelas.}$$

Hazlo tú. Determina la posición relativa de $r_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$ **y** $r_2: \begin{cases} x = 8 + 4t \\ y = 21 + 10t \end{cases}$.

Vector de dirección de r_1: $\vec{d} = (2, 5)$

Vector de dirección de r_2: $\vec{d}' = (4, 10)$

Son proporcionales, $(4, 10) = 2(2, 5)$, luego las rectas son paralelas o coincidentes.

Punto de r_1: $(0, 1)$

Sustituimos en r_2:

$$\begin{cases} 0 = 8 + 4t \\ 1 = 21 + 10t \end{cases} \to \begin{cases} 0 = 8 + 4t \to t = -2 \\ 1 = 21 + 10t \to t = -2 \end{cases}$$

Para $t = -2$ obtenemos el punto $(0, 1)$ que está en las dos rectas.

Las rectas r_1 y r_2 tienen la misma dirección y un punto en común, luego son coincidentes.

Página 201

1 Averigua la posición relativa de estos pares de rectas:

a) $r: 3x + 5y - 8 = 0, \ \ s: 6x + 10y + 4 = 0$

b) $r: 2x + y - 6 = 0, \ \ s: x - y = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases}, \ \ s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

d) $r: 3x - 5y = 0, \ \ s: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

a) $r: 3x + 5y - 8 = 0 \ \to \ \vec{n}_r = (3, 5)$

$s: 6x + 10y + 4 = 0 \ \to \ \vec{n}_s = (6, 10)$

$\frac{3}{6} = \frac{5}{10} \neq \frac{-8}{4} \ \to$ Las dos rectas son paralelas.

b) $r: 2x + y - 6 = 0 \ \to \ \vec{n}_r = (2, 1)$

$s: x - y = 0 \ \to \ \vec{n}_s = (1, -1)$

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \ \to$ Las dos rectas se cortan.

c) $r: \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases} \ \to \ \vec{v}_r = (5, -3)$

$s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \ \to \ \vec{v}_s = (1, -2)$

$\frac{5}{1} \neq \frac{-3}{-2} \ \to$ Las dos rectas se cortan.

d) $r: 3x - 5y = 0 \ \to \ \vec{n}_r = (3, -5) \ \to \ \vec{v}_r = (5, 3)$

$s: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \ \to \ \vec{v}_s = (5, 3), \ P_s = (2, 1)$

Como $\vec{v}_r = \vec{v}_s$ y $P_s \notin r$, las rectas son paralelas.

7 Ángulo de dos rectas

Página 202

1 Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

a) $r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$, $r_2: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$

b) $r_1: x + 2y - 17 = 0$, $r_2: 3x - 5y + 4 = 0$

c) $r_1: y = 5x - 1$, $r_2: y = 4x + 3$

d) $r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$, $r_2: 3x - 5y + 4 = 0$

a) $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1)$; $\vec{v}_{r_2} = (-4, 3)$

$$cos\ \alpha = \frac{|(-2,1)\cdot(-4,3)|}{|(-2,1)|\,|(-4,3)|} = \frac{11}{(\sqrt{5})\cdot(5)} \approx 0{,}9838699101 \to \alpha = 10°\ 18'\ 17{,}45''$$

b) Vector normal de r_1: $\vec{n}_1 = (1, 2)$

Vector normal de r_2: $\vec{n}_2 = (3, -5)$

$$cos\ \alpha = \frac{|(1,2)\cdot(3,-5)|}{|(1,2)|\,|(3,-5)|} = \frac{7}{(\sqrt{5})\cdot(\sqrt{34})} \approx 0{,}5368754922 \to \alpha = 57°\ 31'\ 43{,}71''$$

c) $m_{r_1} = 5$; $m_{r_2} = 4$

$$tg\ \alpha = \left|\frac{4-5}{1+5\cdot 4}\right| = \frac{1}{21} \approx 0{,}0476190 \to \alpha = 2°\ 43'\ 34{,}72''$$

d) $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1)$; $\vec{v}_{r_2} = (5, 3)$

$$cos\ \alpha = \frac{|(-2,1)\cdot(5,3)|}{|(-2,1)|\,|(5,3)|} = \frac{7}{(\sqrt{5})\cdot(\sqrt{34})} \approx 0{,}5368754922 \to \alpha = 57°\ 31'\ 43{,}71''$$

8 Cálculo de distancias

Página 203

Hazlo tú. Halla el área de este mismo triángulo tomando como base BC y como altura la distancia de A a la recta BC.

Base: $c = \overline{BC} = \sqrt{(2-6)^2+(5-5)^2} = \sqrt{16} = 4$ u

La recta BC es: $y = 5$

La altura es:

$$h_c = dist\,[A, BC] = \frac{|-5|}{\sqrt{1}} = 5 \text{ u}$$

Por tanto:

$$\text{Área} = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \text{ u}^2$$

1 **$P(-6, -3)$, $Q(9, 5)$**

$r: 3x - 4y + 9 = 0$, $s: 5x + 15 = 0$

Halla la distancia entre los dos puntos.

Halla también las distancias de cada uno de los puntos a cada recta.

$P(-6, -3)$, $Q(9, 5)$

$r: 3x - 4y + 9 = 0$

$s: 5x + 15 = 0$

$$dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(15, 8)| = \sqrt{15^2+8^2} = \sqrt{289} = 17$$

$$dist\,(P, r) = \frac{|3 \cdot (-6) - 4(-3) + 9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{3}{5}$$

$$dist\,(P, s) = \frac{|5 \cdot (-6) + 15|}{\sqrt{5^2+0^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$dist\,(Q, r) = \frac{|3 \cdot 9 - 4 \cdot 5 + 9|}{5} = \frac{16}{5}$$

$$dist\,(Q, s) = \frac{|5 \cdot 9 + 15|}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

2 **a) Halla el área del triángulo de vértices $A(-3, 8)$, $B(-3, 2)$, $C(5, 2)$ con la fórmula de Herón.**

b) Hállala, también, mediante la aplicación de la fórmula habitual $S = \dfrac{b \cdot h_b}{2}$, siendo b la medida del lado AC. ¿Hay otra forma más sencilla?

a) $A(-3, 8)$, $B(-3, 2)$, $C(5, 2)$

Fórmula de Herón: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\left.\begin{array}{l} a = |\overrightarrow{BC}| = |(8, 0)| = 8 \\ b = |\overrightarrow{AC}| = |(8, -6)| = \sqrt{8^2+(-6)^2} = 10 \\ c = |\overrightarrow{AB}| = |(0, -6)| = 6 \end{array}\right\} \; p = \frac{8+10+6}{2} = 12$$

$$S = \sqrt{12(12-8)(12-10)(12-6)} = \sqrt{12 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6} = \sqrt{576} = 24 \text{ u}^2$$

b) $S = \dfrac{b \cdot h_b}{2}$

- $b = |\overrightarrow{AC}| = 10$ (del apartado anterior)
- Hallamos la ecuación de la recta que pasa por $A(-3, 8)$ y $C(5, 2)$:

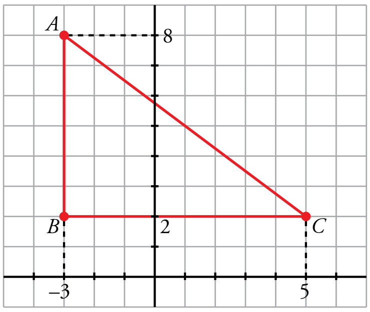
  Pendiente: $m = \dfrac{-6}{8} = \dfrac{-3}{4} \rightarrow y = 2 - \dfrac{3}{4}(x - 5) \rightarrow r: 3x + 4y - 23 = 0$

- $h_b = dist\,[B, r] = \dfrac{|3 \cdot (-3) + 4 \cdot (2) - 23|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{24}{5}$

  $S = \dfrac{10 \cdot (24/5)}{2} = 24 \text{ u}^2$

Habría sido más sencillo si hubiéramos dibujado el triángulo.

Observa:



Es claro que $\overline{AB} = 6$ y $\overline{BC} = 8$.

Como el triángulo es rectángulo, $S = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ u}^2$.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 204

1. Puntos y vectores en el plano

Hazlo tú. Haz los cálculos para llegar a la solución $D'(8, 3)$ de este problema.

$\overrightarrow{BC} = (5, 6) - (3, 6) = (2, 0)$

$\overrightarrow{AD} = (x, y) - (0, 3) = (x, y - 3)$

$\overrightarrow{AB} = (3, 3)$

$\overrightarrow{CD} = (x, y) - (5, 6) = (x - 5, y - 6)$

Primera condición:

$$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD} \rightarrow y - 3 = 0 \rightarrow y = 3$$

Segunda condición:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \rightarrow \sqrt{18} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-6)^2} \rightarrow 18 = (x-5)^2 + (y-6)^2 \rightarrow 18 = x^2 - 10x + y^2 - 12y + 61$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ 18 = x^2 - 10x + y^2 - 12y + 61 \end{cases} \rightarrow 18 = x^2 - 10x + (3)^2 - 12 \cdot 3 + 61 \rightarrow x = 8,\ x = 2$$

Si $x = 2$, obtenemos un paralelogramo, luego $x = 8$, $y = 3$.

$D' = (8, 3)$

2. Simétrico de un punto respecto de una recta

Hazlo tú. Halla el punto simétrico de $A(2, 2)$ respecto de la recta $r: y = 6 - x$.

Pendiente de r: $m = -1$

Pendiente de la recta s perpendicular a r: $m' = -\dfrac{1}{-1} = 1$

Vector de dirección de la recta s: $\vec{d}' = (1, 1)$

Ecuación de s: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} \rightarrow x - 2 = y - 2 \rightarrow x - y = 0$

M es el punto de intersección de las rectas r y s:

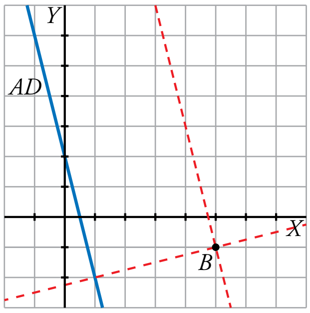
$$\begin{cases} y = 6 - x \\ x - y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3,\ y = 3 \rightarrow M = (3, 3)$$

M es el punto medio entre A y $A' = (x, y)$

$$(3, 3) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+2}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} 3 = \dfrac{x+2}{2} \rightarrow x = 4 \\ 3 = \dfrac{y+2}{2} \rightarrow y = 4 \end{cases} \rightarrow A' = (4, 4)$$

3. Rectas paralelas y perpendiculares a una dada

Hazlo tú. Del cuadrado $ABCD$ conocemos el vértice $B(5, -1)$ y la ecuación del lado AD, $y = -4x + 2$. Halla la ecuación de los lados BC y AB.



El lado BC es paralelo a AD y pasa por $B = (5, -1)$:

Pendiente de AD: $m = -4$

Pendiente de BC: $m = -4$. Vector de dirección de BC: $\vec{d} = (1, -4)$

Ecuación de BC: $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y+1}{-4}$

El lado AB es perpendicular a AD y pasa por $B = (5, -1)$:

Pendiente de AB: $m = \dfrac{1}{4}$. Vector de dirección de BC: $\vec{d}\,' = (4, 1)$

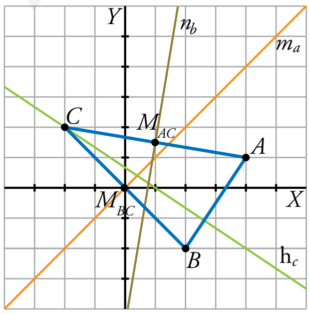
Ecuación de AB: $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y+1}{4}$

Página 205

4. Rectas notables en un triángulo

Hazlo tú. En el triángulo de vértices $A(4, 1)$, $B(2, -2)$ y $C(-2, 2)$ calcula la mediatriz relativa al lado BC, la altura que parte de C y la mediana relativa al lado AC.

Usamos la misma notación que en el ejercicio resuelto.



a) La mediatriz relativa al lado BC, m_a, es la perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ que pasa por M_{BC}.

$\overrightarrow{BC} = (-2, 2) - (2, -2) = (-4, 4)$

$M_{BC} = \left(\dfrac{-2+2}{2}, \dfrac{2-2}{2}\right) = (0, 0)$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{BC}$: $\vec{d}\,' = (4, 4)$

Ecuación de m_a: $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{4} \to x = y$

b) La altura que parte de C, h_C, es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y pasa por C.

$\overrightarrow{AB} = (2, -2) - (4, 1) = (-2, 3)$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$: $\vec{d}' = (3, 2)$

Ecuación de h_C: $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-2}{2}$

c) La mediana relativa al lado AC, n_b, es perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ y pasa por M_{AC}.

$\overrightarrow{AC} = (-2, 2) - (4, 1) = (-6, 1)$

$M_{AC} = \left(\dfrac{-2+4}{2}, \dfrac{2+1}{2}\right) = \left(1, \dfrac{3}{2}\right)$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{AC}$: $\vec{d}' = (1, 6)$

Ecuación de n_b: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-\frac{3}{2}}{6}$

5. Rectas paralelas a una dada a una distancia determinada

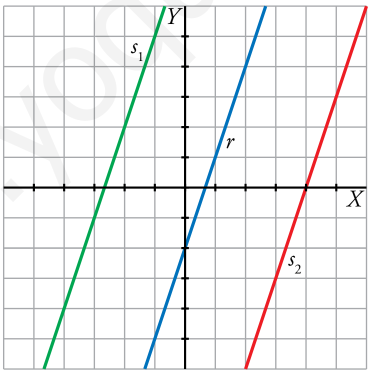
Hazlo tú. Halla las ecuaciones de las rectas que distan $\sqrt{10}$ unidades de r: $y = 3x - 2$.

s_k: $3x - y + k = 0$

Punto de r: $P = (0, -2)$

$$dist(P, s_k) = \sqrt{10} \to \frac{|3 \cdot 0 - (-2) + k|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{10} \to |k+2| = 10 \to \begin{cases} k+2 = 10 \to k = 8 \\ k+2 = -10 \to k = -12 \end{cases}$$

Las rectas buscadas son s_1: $3x - y + 8 = 0$ y s_2: $3x - y - 12 = 0$.



6. Distancias y área en un triángulo

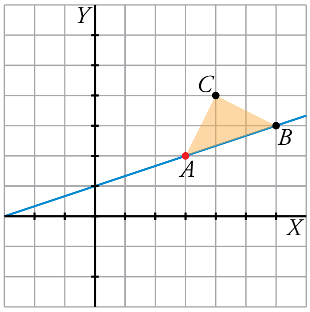
Hazlo tú. Resuelve este mismo ejercicio para r: $x - 3y + 3 = 0$, $B(6, 3)$ y $C(4, 4)$.

a) Sustituimos las coordenadas de los vértices B y C en la ecuación de r. Obtenemos que $B \in r$ y $C \notin r$. Por tanto, el lado desigual es AB: $dist(A, C) = dist(B, C) \neq dist(A, B)$.

Como $A \in r$, sus coordenadas deben cumplir su ecuación, es decir, $A = (3y - 3, y)$.

$$dist(A, C) = dist(B, C) \to \sqrt{(4-(3y-3))^2 + (4-y)^2} = \sqrt{4+1} \to 10y^2 - 50y + 65 = 5 \to y_1 = 3,\ y_2 = 2$$

Obtenemos dos soluciones, $A(3, 2)$ y $A'(6, 3)$, pero $A' = B$ no es válida.



b) Tomando como base AB, Área $= \frac{1}{2}$ base · altura $= \frac{1}{2} \cdot dist\,(A, B) \cdot dist\,(C, r)$

$$dist\,(A, B) = \sqrt{(3-6)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}\ \text{u}$$

$$dist\,(C, r) = \frac{|4-12+3|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}\ \text{u}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\sqrt{10}\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5\ \text{u}^2$$

Página 206

8. Recta que pasa por un punto y forma un ángulo determinado con otra recta dada

Hazlo tú. Halla la ecuación de una recta que pase por el origen de coordenadas y forme un ángulo de 60° con la recta $r: y = x + 3$.

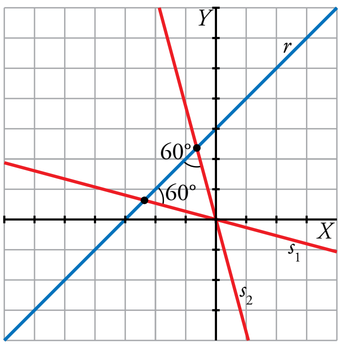
Pendiente de r: $m_r = 1$

Pendiente de s: m_s

$$tg\ 60° = \left|\frac{1-m_s}{1+m_s}\right| \to \sqrt{3} = \left|\frac{1-m_s}{1+m_s}\right| \to \begin{cases} \dfrac{1-m_s}{1+m_s} = \sqrt{3} \to m_s = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \\[2ex] \dfrac{1-m_s}{1+m_s} = -\sqrt{3} \to m_s = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \end{cases}$$

Como pasa por $O = (0, 0)$:

$$s_1 : y = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x; \quad s_2 : y = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}x$$



Página 207

9. Recta simétrica a otra respecto a una tercera recta dada

Hazlo tú. Halla la recta t, simétrica de la recta $r: -2x + 3y + 2 = 0$ respecto de la recta $s: -5x + y + 18 = 0$.

Calculamos A, el punto de intersección de r y t:

$$\begin{cases} -2x + 3y + 2 = 0 \\ -5x + y + 18 = 0 \end{cases} \rightarrow A = (4, 2)$$

Ahora, tomamos un punto P de r: $P = (1, 0)$

Calculamos la recta a perpendicular a s que pasa por $P = (1, 0)$:

$$\vec{d}_s = (-1, -5) \rightarrow \vec{d}_a = (5, -1)$$

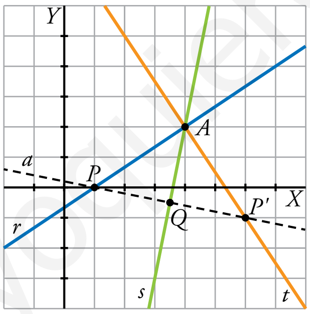
$$a: \frac{x-1}{5} = \frac{y}{-1} \rightarrow -x + 1 = 5y \rightarrow -x - 5y + 1 = 0$$

Determinamos Q, punto de corte de a y s:

$$\begin{cases} -x - 5y + 1 = 0 \\ -5x + y + 18 = 0 \end{cases} \rightarrow Q = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Calculamos $P' = (x, y)$, simétrico de P respecto a Q:

$$\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right) \rightarrow P' = (6, -1)$$



La recta t pasa por $A = (4, 2)$ y por P'.

$$\overrightarrow{AP'} = (6, -1) - (4, 2) = (2, 3)$$

$$t: \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{3}$$

10. Cálculo del circuncentro de un triángulo

Hazlo tú. Halla el circuncentro del triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(4, 2)$ y $C(9, -3)$.

Calculamos la mediatriz m_c del lado AB, que pasa por el punto medio de AB:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1) \rightarrow \overrightarrow{d_{m_c}} = (1, -1)$$

$$M_{AB} = \left(\frac{3+4}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$m_c: \frac{x - \frac{7}{2}}{1} = \frac{y - \frac{3}{2}}{-1} \rightarrow -x + \frac{7}{2} = y - \frac{3}{2} \rightarrow -x - y + 5 = 0$$

Calculamos m_b, mediatriz del lado AC que pasa por el punto medio de AC:

$\overrightarrow{AC} = (6, -4) \rightarrow \overrightarrow{d_{m_b}} = (4, 6)$

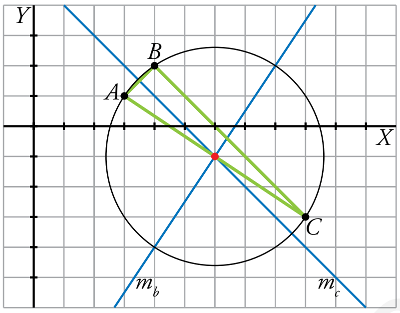
$$M_{AC} = \left(\frac{3+9}{2}, \frac{1-3}{2}\right) = (6, -1)$$

$$m_b: \frac{x-6}{4} = \frac{y+1}{6} \rightarrow 6x - 36 = 4y + 4 \rightarrow 6x - 4y - 40 = 0$$

Hallamos el circuncentro calculando el punto de corte de m_c y m_b:

$$\begin{cases} -x - y + 5 = 0 \\ 6x - 4y - 40 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 6, \; y = -1$$

El circuncentro es el punto $(6, -1)$.

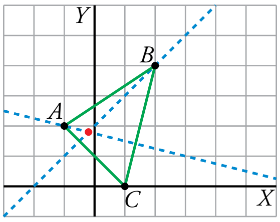


Ejercicios y problemas guiados

Página 208

1. Cálculo del ortocentro de un triángulo

Hallar el ortocentro del triángulo de vértices A(–1, 2), B(2, 4) y C(1, 0).



a) $\overrightarrow{BC} = (-1, -4)$

Altura h_A: Pasa por $A = (-1, 2)$ y tiene vector de dirección $\overrightarrow{d_{h_A}} = (-4, 1)$.

h_A: $\dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y-2}{1} \rightarrow x + 1 = -4y + 8 \rightarrow x + 4y - 7 = 0$

b) $\overrightarrow{AC} = (2, -2)$

Altura h_B: Pasa por $B = (2, 4)$ y tiene vector de dirección $\overrightarrow{d_{h_B}} = (2, 2)$.

h_B: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{2} \rightarrow 2x - 4 = 2y - 8 \rightarrow 2x - 2y + 4 = 0$

El ortocentro es el punto de corte de h_A y h_B:

$$\begin{cases} x + 4y - 7 = 0 \\ 2x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{1}{5},\ y = \frac{9}{5}$$

Ortocentro: $\left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$

2. Determinación de un punto que equidista de dos rectas

Determinar un punto P del eje de ordenadas que equidiste de estas rectas:

r: 6x – 8y + 1 = 0

s: 4x + 3y – 3 = 0

a) $P \in OY \rightarrow P = (0, y)$

b) $P = (0, y)$

$$dist(P, r) = dist(P, s) \rightarrow \frac{|-8y+1|}{\sqrt{36+64}} = \frac{|3y-3|}{\sqrt{16+9}} \rightarrow \frac{|-8y+1|}{10} = \frac{|3y-3|}{5} \rightarrow$$

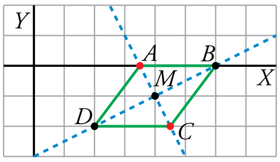
$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{-8y+1}{10} = \dfrac{3y-3}{5} \rightarrow y = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{-8y+1}{10} = -\dfrac{3y-3}{5} \rightarrow y = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Los puntos solución son:

$P = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, $P' = \left(0, -\dfrac{5}{2}\right)$

3. Vértices de un rombo

Un rombo ABCD tiene el vértice A en el eje de abscisas. Otros dos vértices opuestos son B(6, 0) y D(2, –2). Hallar A y C.



$\overrightarrow{BD} = (-4, -2)$

$M_{BD} = \left(\dfrac{6+2}{2}, \dfrac{0-2}{2}\right) = (4, -1)$

d = diagonal AC perpendicular a BD

d pasa por M_{BD} y tiene vector director (–2, 4).

$$d\text{: } \frac{x-4}{-2} = \frac{y+1}{4} \to 4x - 16 = -2y - 2 \to 4x + 2y - 14 = 0$$

A es la intersección de d y el eje OX:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 14 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = \frac{7}{2}, y = 0 \to A = \left(\frac{7}{2}, 0\right)$$

$C = (x, y)$ es el simétrico de A respecto a M_{BD}:

$$(4, -1) = \left(\frac{x + \frac{7}{2}}{2}, \frac{y}{2}\right) \to C = \left(\frac{9}{2}, -2\right)$$

4. Vértices de un triángulo conocidas algunas rectas notables

En un triángulo ABC conocemos el vértice A(3, 5), la ecuación de la mediatriz relativa al lado AB, m_c: x – 2y + 2 = 0 y la altura que pasa por B, h_B: 3x – y – 14 = 0. Además, sabemos que BC está sobre la altura h_B.

Calcular los vértices B y C.

a) El lado AC pasa por $A = (3, 5)$ y es perpendicular a h_B.

Vector de dirección del lado AC: $\vec{d} = (3, -1)$

Ecuación del lado AC: $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-5}{-1} \to -x + 3 = 3y - 15 \to -x - 3y + 18 = 0$

b) $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ -x - 3y + 18 = 0 \end{cases} \to x = 6, y = 4 \to C = (6, 4)$

c) El lado AB pasa por $A = (3, 5)$ y es perpendicular a m_C.

Vector de dirección del lado AB: $\vec{d} = (1, -2)$

Ecuación de lado AB: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{-2} \to -2x + 6 = y - 5 \to -2x - y + 11 = 0$

d) $\begin{cases} 3x - y - 14 = 0 \\ -2x - y + 11 = 0 \end{cases} \to x = 5, y = 1 \to B = (5, 1)$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 209

Para practicar

Coordenadas de puntos

1 **Halla las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$, siendo:**

a) $A(0, 0)$, $B(-1, 2)$

b) $A(2, 3)$, $B(-2, 5)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-1, 2) - (0, 0) = (-1, 2)$

$\overrightarrow{BA} = (0, 0) - (-1, 2) = (1, -2)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, 5) - (2, 3) = (-4, 2)$

$\overrightarrow{BA} = (2, 3) - (-2, 5) = (4, -2)$

2 **Determina si los puntos $A(5, -2)$, $B(3, -2)$ y $C(-5, -2)$ están alineados.**

$\overrightarrow{AB} = (3, -2) - (5, -2) = (-2, 0)$

$\overrightarrow{BC} = (-5, -2) - (3, -2) = (-8, 0)$

Las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son proporcionales, por tanto, A, B y C están alineados.

3 **Determina k para que los puntos $A(-3, 5)$, $B(2, 1)$ y $C(6, k)$ estén alineados.**

Debe ocurrir que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ sean proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (5, -4)\\ \overrightarrow{BC} = (4, k-1)\end{array}\right\} \rightarrow \frac{5}{4} = \frac{-4}{k-1} \rightarrow 5k - 5 = -16 \rightarrow k = \frac{-11}{5}$$

4 **Sean $A(8, -2)$ y $B(-4, 2)$ dos puntos. Calcula:**

a) M, **punto medio de A y B.**

b) S, **simétrico de A respecto a B.**

c) P, **tal que A sea el punto medio del segmento BP.**

a) $M = \left(\frac{8-4}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = (2, 0)$

b) B es el punto medio entre A y $S = (x, y)$

$$(-4, 2) = \left(\frac{x+8}{2}, \frac{y-2}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} -4 = \dfrac{x+8}{2} \rightarrow x = -16 \\ 2 = \dfrac{y-2}{2} \rightarrow y = 6 \end{cases}$$

$S = (-16, 6)$

c) P es el simétrico de B respecto de A $\rightarrow$ A es el punto medio entre B y P.

$P = (x, y)$

$$(8, -2) = \left(\frac{x-4}{2}, \frac{y+2}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} 8 = \dfrac{x-4}{2} \rightarrow x = 20 \\ -2 = \dfrac{y+2}{2} \rightarrow y = -6 \end{cases}$$

$P = (20, -6)$

5 **Da las coordenadas del punto P que divide al segmento de extremos $A(3, 4)$ y $B(0, –2)$ en dos partes tales que $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA}$.**

Sea $P(x, y)$.

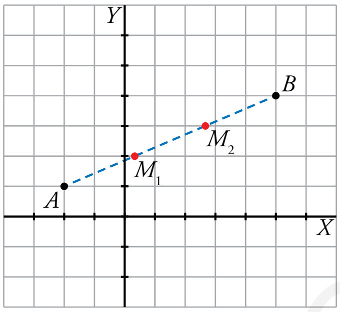
Sustituimos en la condición que nos imponen:

$\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA} \rightarrow (x - 0, y - (-2)) = 2(3 - x, 4 - y) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2(3 - x) \\ y + 2 = 2(4 - y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 - 2x \\ y + 2 = 8 - 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ 3y = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow P(2, 2)$$

6 **Determina los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales, siendo $A(–2, 1)$ y $B(5, 4)$.**

Buscamos las coordenadas de los puntos M_1, M_2 de la figura.



$\overrightarrow{AB} = (7, 3)$

$M_1 = (x, y)$

$$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM_1} \rightarrow (7, 3) = 3(x + 2, y - 1) \rightarrow \begin{cases} 7 = 3x + 6 \rightarrow x = \dfrac{1}{3} \\ 3 = 3y - 3 \rightarrow y = 2 \end{cases} \rightarrow M_1 = \left(\dfrac{1}{3}, 2\right)$$

$M_2 = (x, y)$

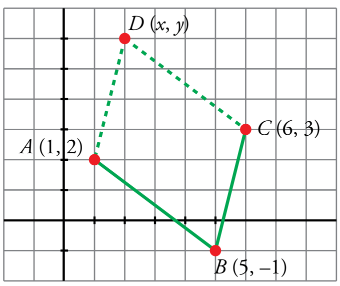
$$\overrightarrow{AM_2} = 2\overrightarrow{AM_1} \rightarrow (x + 2, y - 1) = 2\left(\dfrac{1}{3} + 2, 2 - 1\right) \rightarrow \begin{cases} x + 2 = \dfrac{14}{3} \rightarrow x = \dfrac{8}{3} \\ y - 1 = 2 \rightarrow y = 3 \end{cases} \rightarrow M_2 = \left(\dfrac{8}{3}, 3\right)$$

7 **Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $A(1, 2)$, $B(5, –1)$ y $C(6, 3)$.**

Sea $D(x, y)$.

Debe cumplirse: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

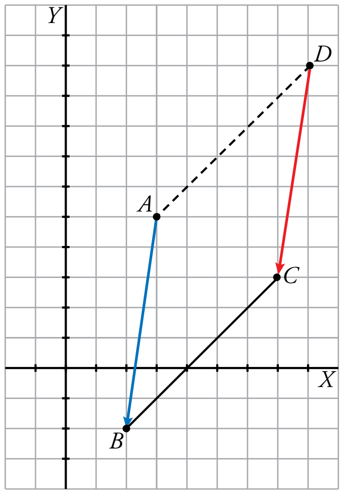
$$(5 - 1, -1 - 2) = (6 - x, 3 - y) \rightarrow \begin{cases} 4 = 6 - x \\ -3 = 3 - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \rightarrow D(2, 6)$$



8 **Conocemos tres vértices de un rombo $ABCD$, $A(3, 5)$, $B(2, -2)$ y $C(7, 3)$. Determina el vértice D.**

* ***Las diagonales de un rombo se cortan en sus puntos medios y son perpendiculares.***

En un rombo, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



$\overrightarrow{AB} = (-1, -7)$

$D = (x, y)$

$(-1, -7) = (7 - x, 3 - y) \rightarrow \begin{cases} -1 = 7 - x \rightarrow x = 8 \\ -7 = 3 - y \rightarrow y = 10 \end{cases} \rightarrow D = (8, 10)$

Ecuaciones de rectas

9 **Escribe las ecuaciones vectoriales y paramétricas de la recta que pasa por A y tiene dirección paralela al vector $\vec{d}$.**

a) $A(-3, 7)$, $\vec{d}(4, -1)$

b) $A(-1, 0)$, $\vec{d}(0, 2)$

Obtén 2 puntos más para cada recta.

a) Ecuación vectorial: $(x, y) = (-3, 7) + k(4, -1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -3 + 4k \\ y = 7 - k \end{cases}$

Dando valores al parámetro k, obtenemos puntos: (1, 6), (5, 5)

b) Ecuación vectorial: $(x, y) = (-1, 0) + k(0, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + 0 \cdot k \\ y = 2k \end{cases}$

Puntos: (–1, 2), (–1, 4)

10 **Escribe la ecuación de la recta que pasa por** P **y** Q **de todas las formas posibles.**

a) $P(6, -2)$ **y** $Q(0, 5)$ **b)** $P(3, 2)$ **y** $Q(3, 6)$

c) $P(0, 0)$ **y** $Q(8, 0)$ **d)** $P(0, 0)$ **y** $Q(0, -2)$

a) $\overrightarrow{PQ} = (-6, 7)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (6, -2) + t(-6, 7)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 6 - 6t \\ y = -2 + 7t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-6}{-6} = \dfrac{y+2}{7}$

Ecuación implícita: $7x + 6y - 30 = 0$

Ecuación explícita: $y = -\dfrac{7}{6}x + 5$

b) $\overrightarrow{PQ} = (0, 4)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (3, 2) + t(0, 4)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + 4t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y-2}{4}$

Ecuación implícita: $x - 3 = 0$

c) $\overrightarrow{PQ} = (8, 0)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t(8, 0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 8t \\ y = 0 \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-0}{8} = \dfrac{y-0}{0}$

Ecuación implícita y explícita: $y = 0$

d) $\overrightarrow{PQ} = (0, -2)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t(0, -2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{-2}$

Ecuación implícita: $x = 0$

Ecuación explícita no tiene.

11 **Escribe las ecuaciones paramétricas e implícitas de los ejes de coordenadas.**

- Eje OX

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \end{cases}$ Ecuación implícita: $y = 0$

- Eje OY

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \end{cases}$ Ecuación implícita: $x = 0$

12 **Determina un vector normal y la ecuación implícita de cada una de las siguientes rectas:**

a) $r: \dfrac{x+1}{-2} = y - 1$ **b)** $s: \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 5t - 2 \end{cases}$

a) $\vec{n} = (1, 2)$

Ecuación implícita: $x + 2y + k = 0$

Como pasa por $P = (-1, 0)$, sustituímos sus coordenadas en la ecuación de la recta para calcular k.

$-1 + 0 + k = 0 \rightarrow k = 1$

$r: x + 2y + 1 = 0$

b) $\vec{n} = (5, 1)$

Ecuación implícita: $5x + y + k = 0$

Como pasa por $P = (-1, 2)$, sustituímos sus coordenadas en la ecuación de la recta para calcular k.

$5(-1) + 2 + k = 0 \rightarrow k = 3$

$s: 5x + y + 3 = 0$

13 **Obtén, para cada una de las siguientes rectas, un vector dirección, un vector normal y su pendiente:**

a) $r_1: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 5t \end{cases}$ **b)** $r_2: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{1-y}{4}$ **c)** $r_3: x + 3 = 0$ **d)** $r_4: y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$

$\vec{d}$: vector de dirección; $\vec{n}$: vector normal; m = pendiente.

a) $\vec{d} = (2, 5)$; $\vec{n} = (-5, 2)$; $m = \dfrac{5}{2}$

b) $\vec{d} = (2, 4)$; $\vec{n} = (-4, 2)$; $m = 2$

c) $\vec{d} = (0, 1)$; $\vec{n} = (1, 0)$; m no se puede calcular porque es una recta vertical.

d) $\vec{d} = (3, 2)$; $\vec{n} = (2, -3)$; $m = \dfrac{2}{3}$

14 **Determina un punto y un vector dirección de cada recta. Utilízalos para dar sus ecuaciones continuas y paramétricas.**

a) $3x - 2y + 1 = 0$ **b)** $y = 2(x - 1) + 7$ **c)** $x - 3 = 0$ **d)** $y = \dfrac{2}{3}x + 1$

$\vec{d}$: vector de dirección

a) $\vec{d} = (2, 3)$; $P = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \dfrac{1}{2} + 3\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y - \frac{1}{2}}{3}$

b) $\vec{d} = (1, 2)$; $P = (0, 5)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 + 2\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-5}{2}$

c) $\vec{d} = (0, 1)$; $P = (3, 0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y}{1}$

d) $\vec{d} = (3, 2)$; $P = (0, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{2}$

15 **Comprueba si el punto $P(5, -7)$ pertenece a alguna de las siguientes rectas:**

a) $r: \begin{cases} x = 5 \\ y = 13 - 2t \end{cases}$ **b)** $s: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{5}$

a) Sustituímos las coordenadas de P en la ecuación de la recta:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 13 - 2t \end{cases} \to \begin{cases} 5 = 5 \\ -7 = 13 - 2t \end{cases} \to t = 10$$

Hay solución, luego $P \in r$.

b) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{5} \to \dfrac{5-1}{2} = \dfrac{-7-3}{5} \to \dfrac{4}{2} \neq \dfrac{-10}{5}$ luego $P \notin s$.

16 **Halla el valor de k para que la recta $x + ky - 7 = 0$ contenga al punto $A(5, -2)$.**

$(5, -2) \to 5 + k(-2) - 7 = 0 \to -2k = 2 \to k = -1$

Haz de rectas

17 **Consideramos el haz de rectas de centro (3, –2).**

a) Escribe la ecuación de este haz de rectas.

b) ¿Qué recta de este haz pasa por el punto (–1, 5)?

c) ¿Cuál de las rectas del haz es paralela a $2x + y = 0$?

d) Halla la recta del haz cuya distancia al origen es igual a 3.

a) $a(x-3) + b(y+2) = 0$; o bien $y = -2 + m(x-3)$

b) Si pasa por $(-1, 5)$, entonces, sustituyendo en $y = -2 + m(x-3)$, obtenemos:

$5 = -2 + m(-1-3) \to 7 = -4m \to m = -\dfrac{7}{4}$; es decir:

$y = -2 - \dfrac{7}{4}(x-3) \to 4y = -8 - 7x + 21 \to 7x + 4y - 13 = 0$

c) Si es paralela a $2x + y = 0$ tendrá pendiente –2.

Por tanto, será:

$y = -2 - 2(x-3) \to y = -2 - 2x + 6 \to 2x + y - 4 = 0$

d) Una recta del haz tiene por ecuación:

$y = -2 + m(x-3) \to y = -2 + mx - 3m \to mx - y - 3m - 2 = 0$

Su distancia al origen ha de ser igual a 3:

$\dfrac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+1}} = 3$; es decir:

$|-3m-2| = 3\sqrt{m^2+1}$. Elevamos al cuadrado y operamos:

$9m^2 + 12m + 4 = 9(m^2 + 1)$

$9m^2 + 12m + 4 = 9m^2 + 9$

$12m = 5 \to m = \dfrac{5}{12}$

Por tanto, será:

$\dfrac{5}{12}x - y - \dfrac{5}{12} - 2 = 0 \to 5x - 12y - 39 = 0$

18 Determina el centro del haz de rectas de ecuación $3kx + 2y - 3k + 4 = 0$.

Llamamos (x_0, y_0) al centro del haz. Vamos a escribir la ecuación que nos dan de la forma:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

$3kx + 2y - 3k + 4 = 0 \rightarrow 3k(x - x_0) + 2(y - y_0) = 0$

$3kx - 3kx_0 + 2y - 2y_0 = 0$

$3kx + 2y - 3kx_0 - 2y_0 = 0$

Han de ser iguales las dos ecuaciones. Por tanto:

$-3kx_0 = -3k \rightarrow x_0 = 1$

$-2y_0 = 4 \rightarrow y_0 = -2$

El centro del haz es el punto $(1, -2)$.

19 Las rectas $r: y = 3$ y $s: y = 2x - 1$ forman parte del mismo haz de rectas. ¿Qué recta de dicho haz tiene pendiente –2?

Si $r: y = 3$ y $s: y = 2x - 1$ están en el mismo haz de rectas, el centro de dicho haz es el punto de corte de estas rectas: $P(2, 3)$.

Buscamos la recta que pasa por $P(2, 3)$ y tiene pendiente $m = -2$:

$y = -2(x - 2) + 3 \rightarrow y = -2x + 7$

Paralelismo y perpendicularidad

20 El vector dirección de r es $\vec{d}(2, -5)$. Halla, en cada caso, el vector dirección y la pendiente de:

a) Una recta paralela a r.

b) Una recta perpendicular a r.

a) Tiene el mismo vector de dirección $\vec{d} = (2, -5) \rightarrow m = \frac{-5}{2}$

b) Tiene vector de dirección $\vec{d} = (5, 2) \rightarrow m = \frac{2}{5}$

21 Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$, obtén en forma explícita las siguientes rectas:

a) Paralela a r que pasa por $A(-1, -3)$.

b) Perpendicular a r que pasa por $B(-2, 5)$.

$r: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (-5, 1)$

a) $\vec{v}_s = (-5, 1)$, $A(-1, -3) \rightarrow s: y = -\frac{1}{5}(x + 1) - 3 \rightarrow s: y = -\frac{1}{5}x - \frac{16}{5}$

b) $\vec{v}_s = (1, 5)$, $B(-2, 5) \rightarrow s: y = 5(x + 2) + 5 \rightarrow s: y = 5x + 15$

22 De una cierta recta r conocemos su pendiente $m = \frac{2}{3}$. Halla la recta s en cada caso:

a) s es paralela a r y pasa por (0, 0).

b) s es perpendicular a r y pasa por (1, 2).

a) Al ser paralela, tiene la misma pendiente. Además, pasa por (0, 0). Por tanto, $s: y = \frac{2}{3}x$.

b) Al ser perpendicular, su pendiente es $-\frac{1}{m} = \frac{-3}{2}$. Por tanto, $y = \frac{-3}{2}(x - 1) + 2 \rightarrow y = \frac{-3}{2}x + \frac{7}{2}$.

Página 210

23 Halla una recta que pase por el punto $P(0, 1)$ y sea perpendicular a la recta $\frac{x-1}{4} = \frac{1-y}{3}$.

r tiene vector de dirección $\vec{d} = (-3, 4)$ y pasa por $P(0, 1)$.

$r: \frac{x}{-3} = \frac{y-1}{4}$

24 Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, -3)$ y es:

a) Paralela a la recta $2x - 3y + 5 = 0$.

b) Perpendicular a la recta $x + y - 3 = 0$.

c) Paralela a la recta $2y - 3 = 0$.

d) Perpendicular a la recta $x + 5 = 0$.

a) r tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 2)$ y pasa por $P(1, -3) \to r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2}$

b) r tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $P(1, -3) \to r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1}$

c) Es paralela al eje OY y pasa por $P(1, -3) \to r: y = -3$

d) Es paralela al eje OX y pasa por $P(1, -3) \to r: x = 1$

25 El vector normal de la recta r es $\vec{n}(2, -3)$. Obtén, en cada caso, la ecuación de la recta s.

a) s es paralela a r y contiene al punto $P(2, -3)$.

b) s es perpendicular a r y pasa por $Q(0, 1)$.

a) s tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 2)$ y pasa por $P(2, -3)$.

$s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2}$

b) s tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, -3)$ y pasa por $Q(0, 1)$.

$s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3}$

26 Escribe las ecuaciones de las siguientes rectas:

a) r_1, paralela al eje de abscisas que pasa por $A(-1, -2)$.

b) r_2, perpendicular al eje OX que contiene a $B(1, 0)$.

c) r_3, paralela al eje de ordenadas que pasa por $C(3, 5)$.

d) r_4, perpendicular al eje OY que contiene a $D(-1, 7)$.

a) $r_1: y = -2$

b) $r_2: x = 1$

c) $r_3: x = 3$

d) $r_4: y = 7$

27 Halla la ecuación de la paralela a $2x - 3y = 0$ cuya ordenada en el origen es -2.

$r: 2x - 3y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} s \parallel r \to \text{la pendiente de } s \text{ ha de ser igual a la de } r \\ P(0, -2) \in s \end{array}\right\} \to \begin{cases} m_s = m_r = \frac{2}{3} \\ P(0, -2) \in s \end{cases}$$

Ecuación explícita: $y = \frac{2}{3}x - 2$

Ecuación implícita: $2x - 3y - 6 = 0$

28 **Dados los puntos $A(0, 1)$ y $B(4, -3)$ halla la ecuación implícita de la recta perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio.**

$\overrightarrow{AB} = (4, -3) - (0, 1) = (-4, 4)$

$$M = \left(\frac{4}{2}, \frac{-2}{2}\right) = (2, -1)$$

s tiene vector de dirección $\vec{d} = (4, 4)$ y pasa por $M = (2, -1)$.

$$s: \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{4} \to x - 2 = y + 1 \to s: x - y - 3 = 0$$

29 **Dada la recta $4x + 3y - 6 = 0$, escribe la ecuación de la recta perpendicular a ella en el punto de corte con el eje de ordenadas.**

Punto de corte con el eje de ordenadas P:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to x = 0, y = 2$$

s tiene vector de dirección $\vec{d} = (4, 3)$ y pasa por $P = (0, 2)$.

$$s: \frac{x}{4} = \frac{y-2}{3}$$

30 **Determina, en cada caso, una recta que pase por el punto $P(-2, -3)$ y sea:**

a) Paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

b) Perpendicular a la bisectriz del segundo cuadrante.

a) Bisectriz del primer cuadrante: $y = x$

s tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $P = (-2, -3)$.

$$s: \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{1} \to x + 2 = y + 3$$

b) Bisectriz del segundo cuadrante: $y = -x$

s tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $P = (-2, 3)$.

$$s: \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{1} \to x + 2 = y + 3$$

Es la misma recta que la anterior.

31 **De un triángulo conocemos el vértice $A(1, 3)$ y la recta $r: 2x - 3y + 6 = 0$ que contiene al lado BC. Halla la altura relativa al vértice A.**

h_A es perpendicular a r y pasa por $A = (1, 3)$.

h_A tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, -3)$ y pasa por $A = (1, 3)$.

$$h_A: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3}$$

32 **Calcula las ecuaciones de las mediatrices del triángulo de vértices $A(-1, -2)$, $B(3, 2)$ y $C(3, 4)$.**

a) m_a es perpendicular a BC y pasa por M_{BC}.

BC tiene vector de dirección $\overrightarrow{BC} = (0, 2)$.

$$M_{BC} = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (3, 3)$$

m_a tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, 0)$ y pasa por $M_{BC} = (3, 3)$.

$m_a: y = 3$

b) m_b es perpendicular a AC y pasa por M_{AC}.

AC tiene vector de dirección $\overrightarrow{AC} = (4, 6)$.

$$M_{AC} = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (1, 1)$$

m_b tiene vector de dirección $\vec{d} = (6, -4)$ y pasa por $M_{BC} = (1, 1)$.

$$m_b: \frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{-4}$$

c) m_c es perpendicular a AB y pasa por M_{AB}.

AB tiene vector de dirección $\overrightarrow{AB} = (4, 4) = 4(1, 1)$.

$$M_{AB} = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = (1, 0)$$

m_c tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -1)$ y pasa por $M_{AB} = (1, 0)$.

$$m_c: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} \to -x + 1 = y$$

33 Halla, en cada caso, el valor de k para que la recta $r: y = kx + 1$ sea:

a) Paralela al eje OX. **b) Perpendicular a la recta $2x + 3y + 7 = 0$.**

Pendiente de r: $m = k$

a) Pendiente del eje OX: $m' = 0$, luego $m = m' = 0 \to k = 0$

b) Pendiente de $2x + 3y + 7 = 0$: $m' = -\frac{2}{3}$, luego $m = -\frac{1}{m'} = \frac{3}{2} \to k = \frac{3}{2}$

34 Halla el punto simétrico de $P(1, 1)$ respecto a la recta $x - 2y - 4 = 0$.

* ***Mira el problema resuelto número 2.***

Llamamos r a la recta: $x - 2y - 4 = 0$.

s: Perpendicular a r que pasa por $P = (1, 1)$

s tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -2)$

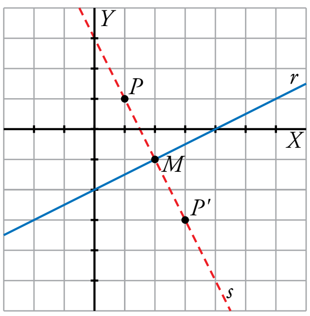
$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} \to -2x + 2 = y - 1 \to -2x - y + 3 = 0$$

M = punto de corte de las rectas

$$\begin{cases} -2x - \ \ y + 3 = 0 \\ \ \ x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \to x = 2, y = -1 \to M = (2, -1)$$

M es el punto medio entre P y $P' = (x, y)$, su simétrico respecto de r.

$$(2, -1) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) \to \begin{cases} 2 = \dfrac{x+1}{2} \to x = 3 \\ -1 = \dfrac{y+1}{2} \to y = -2 \end{cases} \to P' = (3, -3)$$



Posición relativa de dos rectas

35 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Calcula el punto de corte cuando sean secantes.

a) $r: 5x + y + 7 = 0;\ \ s: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -10t - 3 \end{cases}$

b) $r: 3x + 5y + 10 = 0;\ \ s: -3x + 5y + 10 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 3 \end{cases};\ \ s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

d) $r: y = 2x + 1;\ \ s: y = \dfrac{-1}{2}x + 1$

a) Buscamos un vector dirección de cada recta:

$r: 5x + y + 7 = 0 \ \to\ \vec{n}_r = (5, 1) \ \to\ \vec{v}_r = (-1, 5)$

$s: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -10t - 3 \end{cases} \ \to\ \vec{v}_s = (2, -10)$

Como los vectores dirección son proporcionales $(\vec{v}_s = -2\vec{v}_r)$, las rectas o son paralelas o son coincidentes.

Como $P(1, -3) \in s$ y $P \notin r$, las rectas son paralelas.

b) Buscamos un vector dirección de cada recta:

$r: 3x + 5y + 10 = 0 \ \to\ \vec{n}_r = (3, 5) \ \to\ \vec{v}_r = (-5, 3)$

$s: -3x + 5y + 10 = 0 \ \to\ \vec{n}_s = (-3, 5) \ \to\ \vec{v}_s = (5, 3)$

Como los vectores dirección no son proporcionales, las rectas son secantes.

c) Buscamos un vector dirección de cada recta

$r: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 3 \end{cases} \ \to\ \vec{v}_r = (3, 1)$

$s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \ \to\ \vec{v}_s = (1, 2)$

Como los vectores dirección no son proporcionales, las rectas son secantes.

d) $m_r = 2;\ \ m = -\dfrac{1}{2} \ \to$ Las rectas son perpendiculares.

$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 1 \end{cases} \ \to\ x = 0,\ y = 1 \ \to$ Punto de corte $P = (0, 1)$.

36 Calcula el valor de los parámetros k y t para que las siguientes rectas se corten en el punto $A(1, 2)$:

$r: kx - ty - 4 = 0 \qquad\qquad s: 2tx + ky - 2 = 0$

$\left.\begin{array}{l} A \in r \ \to\ k \cdot 1 - t \cdot 2 - 4 = 0 \\ A \in s \ \to\ 2t \cdot 1 + k \cdot 2 - 2 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} k - 2t - 4 = 0 \\ 2k + 2t - 2 = 0 \end{array}\right\}$ Resolviendo el sistema: $k = 2,\ t = -1$

37 Determina k para que las rectas r y s sean paralelas.

$r: \dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y}{-2} \qquad\qquad s: \dfrac{x + 5}{-6} = \dfrac{y - 1}{k}$

Para que sean paralelas, sus vectores dirección han de ser proporcionales, es decir:

$\dfrac{3}{-6} = \dfrac{-2}{k} \ \to\ k = 4$

38 **Halla el valor de *k* para que estas rectas sean coincidentes:**

r: $2x + 3y + 5 = 0$

$s: \begin{cases} x = -6t + k \\ y = 4t + 2 \end{cases}$

Expresamos ambas rectas en forma implícita:

r: $2x + 3y + 5 = 0$

s: $4x + 6y - 12 - 4k = 0$

Para que $r = s$, estas ecuaciones tienen que ser proporcionales, y por tanto:

$$-12 - 4k = 10 \to k = \frac{22}{-4} = \frac{-11}{2}$$

39 **Calcula *k* para que *r* y *s* sean perpendiculares.**

r: $y = 2x + 1$

s: $3x + ky + 3 = 0$

$m_r = 2$; $m = -\dfrac{3}{k}$

Para que sean perpendiculares, $m_r = -\dfrac{1}{m_s}$.

Luego, $2 = \dfrac{k}{3} \to k = 6$

Ángulos

40 **Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:**

a) r: $y = 2x + 5$; s: $y = -3x + 1$

b) r: $3x - 5y + 7 = 0$; s: $10x + 6y - 3 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t \end{cases}$; $s: \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 4 + t \end{cases}$

d) r: $2x - y = 0$; s: $2y + 3 = 0$

a) $\left.\begin{array}{l} r: y = 2x + 5 \\ s: y = -3x + 1 \end{array}\right\} \to$ sus pendientes son: $\begin{cases} m_r = 2 \\ m_s = -3 \end{cases}$

$$tg\ \alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right| = \left|\frac{2 - (-3)}{1 + 2(-3)}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = 1 \to \alpha = 45°$$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{v} = (3, -5) \perp r_1 \\ \vec{w} = (10, 6) \perp r_2 \end{array}\right\} \to \alpha \equiv \widehat{r_1, r_2} = \widehat{\vec{v}, \vec{w}} \to cos\ \alpha = \dfrac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \dfrac{|30 - 30|}{|\vec{v}||\vec{w}|} = 0 \to \alpha = 90°$

c) Los vectores dirección de esas rectas son $\vec{d}_1 = (-1, 2)$ y $\vec{d}_2 = (-3, 1)$.

Entonces:

$$cos\ \alpha = \frac{|\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2|}{|\vec{d}_1||\vec{d}_2|} = \frac{|3 + 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \alpha = 45°$$

d) $\left.\begin{array}{l} \vec{a}_1 = (2, -1) \perp r_1 \\ \vec{a}_2 = (0, 2) \perp r_2 \end{array}\right\} \to \alpha \equiv \widehat{r_1, r_2} = \widehat{\vec{a}_1, \vec{a}_2} \to$

$$\to cos\ \alpha = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|} = \frac{|0 - 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,4472 \to \alpha = 63°\ 26'\ 5,82''$$

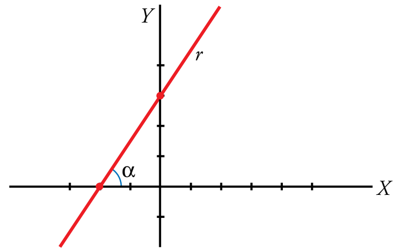
41 **¿Qué ángulo forma $3x - 2y + 6 = 0$ con el eje de abscisas?**

* ***La pendiente de la recta es la tangente del ángulo que forma con el eje de abscisas. Halla el ángulo con la pendiente de la recta.***

La pendiente de r es $m_r = \frac{3}{2}$.

La pendiente de r es, además, $tg\,\alpha$:

$m_r = tg\,\alpha \rightarrow tg\,\alpha = \frac{3}{2} \rightarrow \alpha = 56°\ 18'\ 35{,}8''$

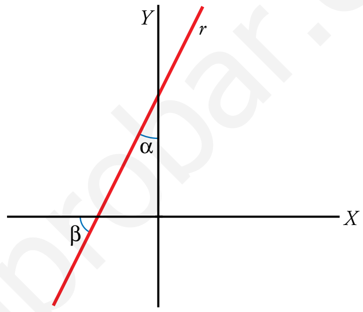


42 **¿Qué ángulo forma la recta $2x - y + 5 = 0$ con el eje de ordenadas?**

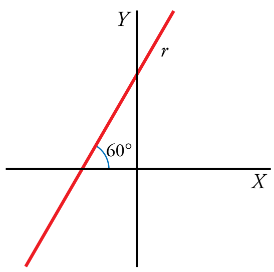
El ángulo pedido, α, es complementario de $\beta \rightarrow tg\,\beta = \frac{1}{tg\,\alpha}$

Por otro lado, $tg\,\beta = m_r = 2$:

$tg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\beta} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26°\ 33'\ 54{,}2''$



43 **Calcula n de modo que la recta $3x + ny - 2 = 0$ forme un ángulo de 60° con el eje OX.**



$\left.\begin{array}{l} tg\,60° = \sqrt{3} \\ m_r = -\frac{3}{n} \end{array}\right\}$ Como $tg\,60° = m_r$, se tiene que:

$\sqrt{3} = -\frac{3}{n} \rightarrow n = \frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$

44 **Calcula m y n en estas rectas sabiendo que r pasa por el punto $P(1, 4)$ y que r y s forman un ángulo de 45°:**

r: $mx - 2y + 5 = 0$ $\quad$ s: $nx + 6y - 8 = 0$

$P \in r \rightarrow m \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 5 = 0 \rightarrow m = 3$

$r: 3x - 2y + 5 = 0 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \rightarrow m_r = \frac{3}{2}$

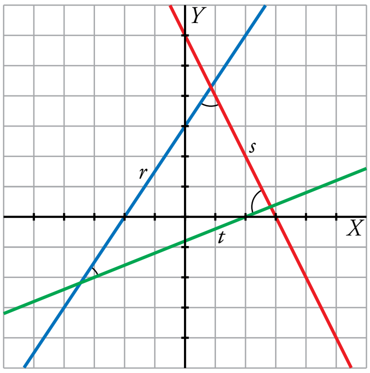
$s: nx + 6y - 8 = 0 \rightarrow y = -\frac{n}{6}x + \frac{8}{6} \rightarrow m_s = -\frac{n}{6}$

$$tg\,45° = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}\right| = \left|\frac{-(n/6) - (3/2)}{1 - (n/6)\,(3/2)}\right| = \left|\frac{-2n - 18}{12 - 3n}\right| = 1$$

Hay dos posibilidades:

- $\frac{-2n - 18}{12 - 3n} = 1 \rightarrow -2n - 18 = 12 - 3n \rightarrow n = 30$
- $\frac{-2n - 18}{12 - 3n} = -1 \rightarrow -2n - 18 = -12 + 3n \rightarrow n = -\frac{6}{5}$

45 **Las rectas $r: 3x - 2y + 6 = 0$, $s: 2x + y - 6 = 0$ y $t: 2x - 5y - 4 = 0$ son los lados de un triángulo. Represéntalo y halla sus ángulos.**



$\vec{d}_r = (2, 3)$, $\vec{d}_s = (-1, 2)$, $\vec{d}_t = (5, 2)$

$$cos\,(\widehat{r, s}) = \left| \frac{(2, 3) \cdot (-1, 2)}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{1+4}} \right| = 0{,}49 \rightarrow (\widehat{r, s}) = 60°\ 16'$$

$$cos\,(\widehat{r, t}) = \left| \frac{(2, 3) \cdot (5, 2)}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{25+4}} \right| = 0{,}82 \rightarrow (\widehat{r, t}) = 34°\ 30'$$

$$cos\,(\widehat{s, t}) = \left| \frac{(-1, 2) \cdot (5, 2)}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{25+4}} \right| = 0{,}08 \rightarrow (\widehat{s, t}) = 85°\ 14'$$

Página 211

Distancias y áreas

46 **Calcula k de modo que la distancia entre los puntos $A(5, k)$ y $B(3, -2)$ sea igual a 2.**

$A(5, k)$, $B(3, -2)$, $\overrightarrow{AB} = (-2, -2 - k)$

$dist\,(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2-k)^2} = 2 \rightarrow 4 + 4 + 4k + k^2 = 4 \rightarrow k^2 + 4k + 4 = 0 \rightarrow k = -2$

47 **Determina, en cada caso, si el triángulo ABC es equilátero, isósceles o escaleno.**

a) $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, \sqrt{3})$ **b) $A(1, 3)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 7)$** **c) $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$, $C(-2, -3)$**

a) $dist\,(A, B) = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-0)^2} = 2$

$dist\,(A, C) = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = 2$

$dist\,(B, C) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = 2$

Triángulo equilátero.

b) $dist\,(A, B) = \sqrt{(1-3)^2 + (3-5)^2} = 2\sqrt{2}$

$dist\,(A, C) = \sqrt{(1+1)^2 + (3-7)^2} = 2\sqrt{5}$

$dist\,(B, C) = \sqrt{(3+1)^2 + (5-7)^2} = 2\sqrt{5}$

Triángulo isósceles.

c) $dist\,(A, B) = \sqrt{(2+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$

$dist\,(A, C) = \sqrt{(2+2)^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{13}$

$dist\,(B, C) = \sqrt{(2+2)^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{13}$

Triángulo isósceles.

48 **Halla la longitud del segmento que determina la recta $x - 2y + 5 = 0$ al cortar a los ejes de coordenadas.**

Hay que calcular la distancia entre los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas.

Calculamos primero dichos puntos:

- $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to -2y + 5 = 0 \to y = \dfrac{5}{2} \to A\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.
- $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x + 5 = 0 \to x = 5 \to B(5, 0)$ es el punto de corte con el eje X.
- Luego $\overline{AB} = dist(A, B) = \sqrt{(5-0)^2 + \left(0 - \dfrac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{25 + \dfrac{25}{4}} = \sqrt{\dfrac{125}{4}} = \dfrac{5}{2}\sqrt{5}$

49 **Halla las distancias de $O(0, 0)$ y $P(-1, 2)$ a estas rectas:**

a) $3x - 4y + 5 = 0$ **b)** $2x + 5 = 0$ **c)** $\begin{cases} x = 6t \\ y = 8t \end{cases}$ **d)** $(x, y) = \left(\dfrac{-1}{2}, 1\right) + (2, 1)k$

a) $dist(O, r) = \dfrac{|5|}{\sqrt{9+16}} = 1$ u

$dist(P, r) = \dfrac{|3 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{6}{5}$ u

b) $dist(O, r) = \dfrac{|5|}{\sqrt{0+4}} = \dfrac{5}{2}$ u

$dist(P, r) = \dfrac{|2 \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{0+4}} = \dfrac{3}{2}$ u

c) $r: \dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{8} \to 8x - 6y = 0$

$dist(O, r) = \dfrac{|0|}{\sqrt{64+36}} = 0$ u $\to O \in r$

$dist(P, r) = \dfrac{|8 \cdot (-1) - 6 \cdot 2|}{\sqrt{64+36}} = 2$ u

d) $r: \dfrac{x + \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{y-1}{1} \to x + \dfrac{1}{2} = 2y - 2 \to x - 2y + \dfrac{3}{2} = 0 \to 2x - 4y + 3 = 0$

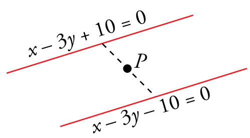
$dist(O, r) = \dfrac{|3|}{\sqrt{4+16}} = \dfrac{3}{10}\sqrt{5}$ u

$dist(P, r) = \dfrac{|2 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{4+16}} = \dfrac{7}{10}\sqrt{5}$ u

50 **Determina c para que la distancia de $r: x - 3y + c = 0$ al punto $(6, 2)$ sea de $\sqrt{10}$ unidades (hay dos soluciones).**

$dist(P, r) = \dfrac{|1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{1+9}} = \dfrac{|6 - 6 + c|}{\sqrt{10}} = \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

Hay dos soluciones: $\begin{cases} \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \to c_1 = 10 \\ \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10} \to c_2 = -10 \end{cases}$



Las dos rectas solución serán dos rectas paralelas.

51 Halla la distancia entre los siguientes pares de rectas:

a) $r: 3x + 5 = 0; \; r': \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 + 4k \end{cases}$

b) $r: y = \dfrac{-2}{3}x + 1; \; r': \dfrac{1-x}{3} = \dfrac{y+1}{2}$

a) $P' = (0, 0) \in r'$

$$dist(r, r') = dist(P', r) = \frac{|5|}{\sqrt{9+0}} = \frac{5}{3} \text{ u}$$

b) Las rectas son paralelas.

$P' = (1, -1) \in r'$

$r: 2x + 3y - 1 = 0$

$$dist(r, r') = dist(P', r) = \frac{|2-3-1|}{\sqrt{4+9}} = \frac{2}{13}\sqrt{13} \text{ u}$$

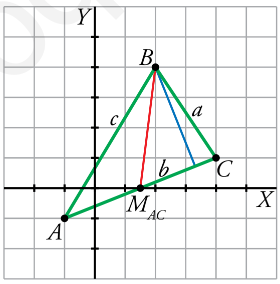
52 Comprueba que el triángulo de vértices $A(-3, 1)$, $B(0, 5)$ y $C(4, 2)$ es rectángulo y halla su área.

Veamos si se cumple el teorema de Pitágoras:

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(0+3)^2 + (5-1)^2} = 5 \\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(4+3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{50} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + (2-5)^2} = 5 \end{array}\right\} 5^2 + 5^2 = (\sqrt{50})^2 \;\to\; \text{Por tanto, el triángulo es rectángulo.}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12,5 \text{ u}^2$$

53 En el triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(2, 4)$ y $C(4, 1)$, halla las longitudes de la mediana y de la altura que parten de B.



a) Longitud de la mediana = $dist(B, M_{AC})$

$$M_{AC} = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$dist\;(B, M_{AC}) = \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + (4-0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{65}$$

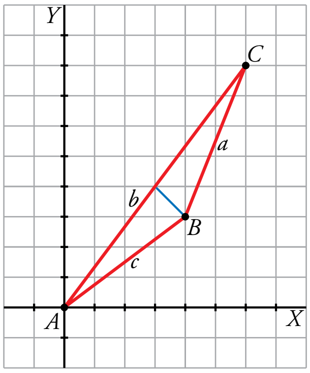
b) Longitud de la altura = $dist(B, \text{lado } AC)$

$\overrightarrow{AC} = (5, 2)$

$$r: \frac{x+1}{5} = \frac{y+1}{2} \;\to\; 2x + 2 = 5y + 5 \;\to\; \text{lado } AC\text{: } 2x - 5y - 3 = 0$$

$$dist(B, r) = \frac{|2 \cdot 2 - 5 \cdot 4 - 3|}{\sqrt{4+25}} = \frac{19}{29}\sqrt{29} \text{ u}$$

54 **Dado el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(4, 3)$ y $C(6, 8)$, calcula su área.**



$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$

$\text{Base} = dist(A, C) = \sqrt{(0-6)^2 + (0-8)^2} = 10 \text{ u}$

$\text{Altura} = dist(B, \text{lado } AC)$

Lado AC:

$\overrightarrow{AC} = (6, 8)$

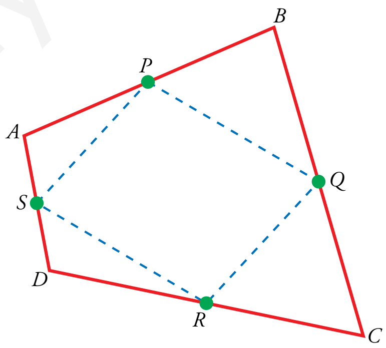
$r: \frac{x}{6} = \frac{y}{8} \rightarrow 8x - 6y = 0 \rightarrow 4x - 3y = 0$

$dist(B, \text{lado } AC) = \frac{|4 \cdot 4 - 3 \cdot 3|}{\sqrt{16+9}} = \frac{7}{5} \text{ u}$

$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{7}{5} = 7 \text{ u}^2$

Para resolver

55 **Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo. Compruébalo con el cuadrilátero de vértices $A(3, 8)$, $B(5, 2)$, $C(1, 0)$ y $D(-1, 6)$.**



$P\left(\frac{5+3}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (4, 5)$

$Q(3, 1)$; $R(0, 3)$; $S(1, 7)$

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (3-4, 1-5) = (-1, -4) \\ \overrightarrow{SR} = (0-1, 3-7) = (-1, -4) \end{array}\right\} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{SP} = (4-1, 5-7) = (3, -2) \\ \overrightarrow{RQ} = (3-0, 1-3) = (3, -2) \end{array}\right\} \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$

56 **En un triángulo equilátero conocemos dos vértices, $A(\sqrt{3}/2, 0)$ y $B(-\sqrt{3}/2, 0)$. Halla el tercer vértice.**

El vértice $C = (x, y)$ está en la mediatriz del segmento AB y $dist(A, C) = dist(A, B)$.

r: Mediatriz de AB

$\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}, 0)$

Punto medio de AB:

$M_{AB} = (0, 0)$

$r: x = 0$

$$dist(A, C) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + y^2 + \frac{3}{4}}$$

$$dist(A, B) = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{3}$$

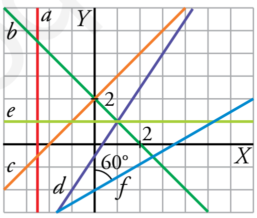
Las coordenadas de C son la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - \sqrt{3}x + y^2 + \frac{3}{4} = \sqrt{3} \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + \frac{3}{4} = \sqrt{3} \end{cases} \to y = \frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3} \to y = -\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3}$$

Hay dos triángulos equiláteros con vértices A y B.

$$C = \left(0, \frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3}\right), \; C' = \left(0, -\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3}\right)$$

57 **Halla las ecuaciones de las rectas *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f*.**



$a \to x = -\frac{5}{2}$

$b \to \frac{x - 2}{1} = \frac{y}{-1}$

$c \to \frac{x}{1} = \frac{y - 2}{1}$

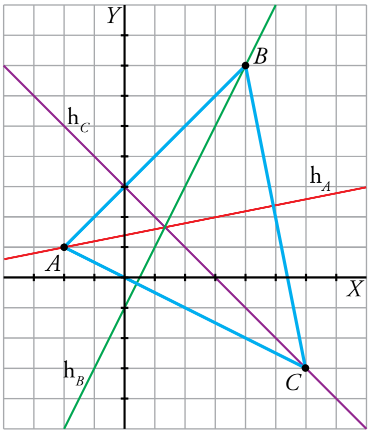
$d \to \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{3}$

$e \to y = 1$

$f \to$ Si f forma un ángulo de 60° con el eje vertical, entonces forma un ángulo de 30° con el eje horizontal positivo.

Un vector cuya pendiente sea de 30° tiene coordenadas proporcionales a $(3, \sqrt{3})$, luego la ecuación de la recta es: $\frac{x}{3} = \frac{y + 2}{\sqrt{3}}$

58 **Calcula las ecuaciones de las alturas del triángulo de vértices $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$ y $C(6, -3)$. Halla el ortocentro.**



- h_A es perpendicular a BC y pasa por $A = (1, 3)$.

  $\overrightarrow{BC} = (2, -10) = 2(1, -5)$

  h_A tiene vector de dirección $\vec{d} = (5, 1)$ y pasa por $A = (-2, 1)$.

  h_A: $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-1}{1} \rightarrow x + 2 = 5y - 5 \rightarrow x - 5y + 7 = 0$

- h_B es perpendicular a AC y pasa por $B = (4, 7)$.

  $\overrightarrow{AC} = (8, -4) = 4(2, -1)$

  h_B tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 2)$ y pasa por $B = (4, 7)$.

  h_B: $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-7}{2} \rightarrow 2x - 8 = y - 7 \rightarrow 2x - y - 1 = 0$

- h_C es perpendicular a AB y pasa por $C = (6, -3)$.

  $\overrightarrow{AB} = (6, 6) = 6(1, 1)$

  h_C tiene vector de dirección $\vec{d} = (-1, 1)$ y pasa por $C = (6, -3)$.

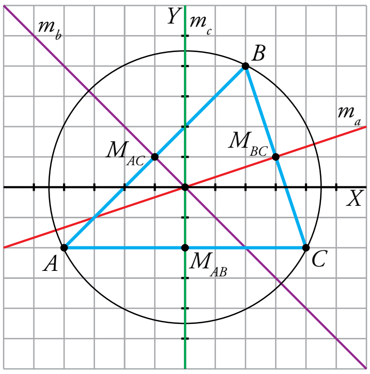
  h_C: $\dfrac{x-6}{-1} = \dfrac{y+3}{1} \rightarrow x - 6 = -y - 3 \rightarrow x + y - 3 = 0$

El ortocentro es el punto de intersección de las alturas. Como las tres alturas se cortan en el mismo punto, para calcular el ortocentro es suficiente con resolver el sistema formado por dos de las alturas.

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{4}{3},\ y = \frac{5}{3}$$

Las coordenadas del ortocentro son $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

59 **Da las ecuaciones de las mediatrices del triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(4, -2)$ y $C(2, 4)$. Halla el circuncentro.**



- m_a es perpendicular a BC y pasa por M_{BC}.

  BC tiene vector de dirección $\overrightarrow{BC} = (-2, 6) = 2(-1, 3)$.

  $M_{BC} = (3, 1)$

  m_a tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 1)$ y pasa por $M_{BC} = (3, 1)$.

  m_a: $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{1} \;\rightarrow\; x - 3y = 0$

- m_b es perpendicular a AC y pasa por M_{AC}.

  AC tiene vector de dirección $\overrightarrow{AC} = (6, 6) = 6(1, 1)$.

  $M_{AC} = (-1, 1)$

  m_b tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -1)$ y pasa por $M_{BC} = (-1, 1)$.

  m_b: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} \;\rightarrow\; x + y = 0$

- m_c es perpendicular a AB y pasa por M_{AB}.

  AB tiene vector de dirección $\overrightarrow{AB} = (8, 0) = 8(1, 0)$.

  $M_{AB} = (0, -2)$

  m_c tiene vector de dirección $\vec{d} = (0, 1)$ y pasa por $M_{AB} = (0, -2)$.

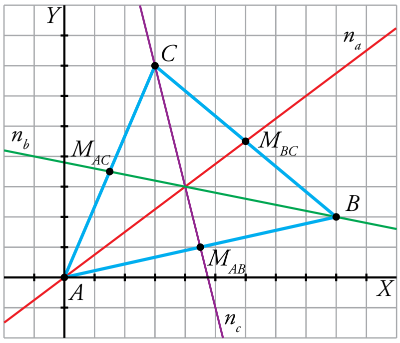
  m_c: $x = 0$

El circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices. Como las tres mediatrices se cortan en el mismo punto, para calcular el circuncentro es suficiente con resolver el sistema formado por dos de las mediatrices.

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \;\rightarrow\; x = 0,\; y = 0$$

Las coordenadas del circuncentro son: $(0, 0)$.

60 **En el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(9, 2)$ y $C(3, 7)$, determina las ecuaciones de las medianas y calcula el baricentro.**



- n_a pasa por A y por M_{BC}.

  $M_{BC} = \left(\frac{12}{2}, \frac{9}{2}\right) = \left(6, \frac{9}{2}\right)$

  $\overrightarrow{AM_{BC}} = \left(6, \frac{9}{2}\right) = \frac{3}{2}(4, 3)$

  n_a tiene vector de dirección $\vec{d} = (4, 3)$ y pasa por $A = (0, 0)$.

  n_a: $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} \to 3x - 4y = 0$

- n_b pasa por B y por M_{AC}.

  $M_{AC} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

  $\overrightarrow{BM_{AC}} = \left(\frac{-15}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}(-5, 1)$

  n_b tiene vector de dirección $\vec{d} = (-5, 1)$ y pasa por $B = (9, 2)$.

  n_b: $\frac{x-9}{-5} = \frac{y-2}{1} \to x - 9 = -5y + 10 \to x + 5y - 19 = 0$

- n_c pasa por C y por M_{AB}.

  $M_{AB} = \left(\frac{9}{2}, 1\right)$

  $\overrightarrow{CM_{AB}} = \left(\frac{3}{2}, -6\right) = \frac{3}{2}(1, -4)$

  n_c tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -4)$ y pasa por $C = (3, 7)$.

  n_c: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{-4} \to -4x + 12 = y - 7 \to -4x - y + 19 = 0$

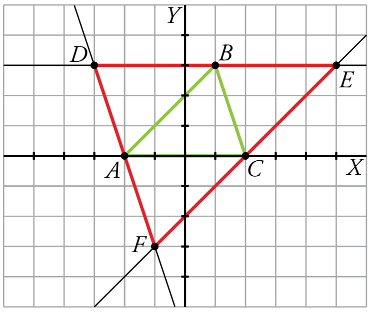
El baricentro es el punto de intersección de las medianas. Como las tres medianas se cortan en el mismo punto, para calcular el baricentro es suficiente con resolver el sistema formado por dos de las medianas.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ -4x - y + 19 = 0 \end{cases} \to x = 4,\ y = 3$$

Las coordenadas del baricentro son: (4, 3).

61 **En un triángulo de vértices $A(-2, 0)$, $B(1, 3)$ y $C(2, 0)$ trazamos desde cada vértice una recta paralela al lado opuesto. Halla los vértices del triángulo que determinan los puntos de corte de estas rectas y comprueba que es semejante a ABC.**

* ***Para comprobar que dos triángulos son semejantes, basta ver que sus ángulos son iguales.***



$\overrightarrow{AB} = (3, 3) = 3(1, 1)$; $\overrightarrow{AC} = (4, 0) = 4(1, 0)$; $\overrightarrow{BC} = (1, -3)$

El lado EF:

- Es paralelo a AB y pasa por A.
- Tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $A = (-2, 0)$.
- $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{1} \rightarrow x + 2 = y \rightarrow x - y + 2 = 0$

El lado DE:

- Es paralelo a AC y pasa por B.
- Tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 0)$ y pasa por $B = (1, 3)$.
- $y = 3$

El lado DF:

- Es paralelo a BC y pasa por C.
- Tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -3)$ y pasa por $C = (2, 0)$.
- $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{-3} \rightarrow -3x + 6 = y \rightarrow -3x - y + 6 = 0$

$cos\,\widehat{D} = cos\,(\widehat{(1,-3),(1,0)}) = cos\,(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}}) = cos\,\widehat{C}$

$cos\,\widehat{E} = cos\,(\widehat{(1,1),(1,0)}) = cos\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = cos\,\widehat{A}$

Si tienen dos ángulos iguales, los triángulos son semejantes.

62 **La recta $2x + 3y - 6 = 0$ determina, al cortar a los ejes de coordenadas, el segmento AB. Halla la ecuación de la mediatriz de AB.**

Ecuación del eje OX: $y = 0$. Ecuación del eje OY: $x = 0$.

Puntos de corte de r con los ejes:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3, y = 0 \rightarrow A = (3, 0)$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0, y = 2 \rightarrow B = (0, 2)$$

$\overrightarrow{AB} = (-3, 2)$; $M_{AB} = \left(\dfrac{3}{2}, 1\right)$

La mediatriz de AB tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, 3)$ y pasa por $M_{AB} = \left(\dfrac{3}{2}, 1\right)$.

Mediatriz de AB: $\dfrac{x - \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{y-1}{3}$

63 **Halla el pie de la perpendicular trazada desde $P(1, -2)$ a la recta $r: x - 2y + 4 = 0$.**

* ***Escribe la perpendicular a r desde P y halla el punto de corte con r.***

Vector normal a r: $\vec{n} = (1, -2)$

La recta s perpendicular a r que pasa por P, tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -2)$ y pasa por $P(1, -2)$.

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} \to -2x + 2 = y + 2 \to -2x - y = 0$$

El pie de la perpendicular Q es la intersección de las dos rectas r y s.

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases} \to x = -\frac{4}{5}, y = \frac{8}{5} \to Q = \left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

64 **De un rombo $ABCD$ sabemos que los vértices B y D están en la recta $r: y = 2x + 2$ y que $A(4, 0)$. Halla las coordenadas de C.**

La diagonal BD están en la recta r.

Las diagonales de un rombo son perpendiculares y se cortan en el punto medio, luego la perpendicular trazada desde A a la recta r, que llamaremos s, cortará a r en el punto medio M entre A y $C = (x, y)$.

La recta s perpendicular a r tiene pendiente $m = -\frac{1}{2}$ y pasa por $A = (4, 0)$.

$$s: y = -\frac{1}{2}x + k$$

Sustituimos las coordenadas de A en la ecuación para calcular k.

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + k \to k = 2 \to s: y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$M = r \cap s$

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \to x = 0, y = 2 \to M = (0, 2)$$

$$(0, 2) = \left(\frac{x+4}{2}, \frac{y}{2}\right) \to \begin{cases} 0 = \frac{x+4}{2} \to x = -4 \\ 2 = \frac{y}{2} \to y = 4 \end{cases} \to C = (-4, 4)$$

65 **Calcula el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas $r: x = 3$; $s: 2x + 3y - 6 = 0$ y $t: x - y - 7 = 0$.**

Los vértices están en la intersección de las rectas.

$A = r \cap s$

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \to x = 3, y = 0 \to A = (3, 0)$$

$B = r \cap t$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases} \to x = 3, y = -4 \to B = (3, -4)$$

$C = s \cap t$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases} \to x = \frac{27}{5}, y = -\frac{8}{5} \to C = \left(\frac{27}{5}, -\frac{8}{5}\right)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$$

$$\text{Base} = dist(A, B) = \sqrt{(3-3)^2 + (0-4)^2} = 4 \text{ u}$$

$$\text{Altura} = dist(C, \textit{lado } AB)$$

$$\textit{Lado } AB = l;\ \ \overrightarrow{AB} = (0, 4) = 4(0, 1)$$

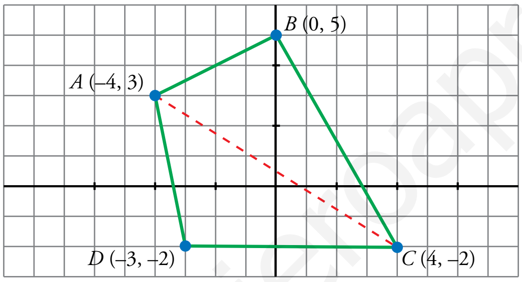
l tiene vector de dirección $\vec{d} = (0, 1)$ y pasa por $A = (3, 0)$.

$$l: x = 3 \ \to\ x - 3 = 0$$

$$dist(C, \textit{lado } AB) = \frac{\left|\frac{27}{5} - 3\right|}{1} = \frac{12}{5} \text{ u}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{12}{5} = \frac{24}{5} \text{ u}^2$$

66 **Halla el área del cuadrilátero de vértices $A(-4, 3)$, $B(0, 5)$, $C(4, -2)$ y $D(-3, -2)$.**



- La diagonal AC divide el cuadrilátero en dos triángulos con la misma base, cuya medida es:

  $|\overrightarrow{AC}| = |(8, -5)| = \sqrt{89}$

- Sean h_B y h_D las alturas desde B y D, respectivamente, a la base:

$$h_B = dist(B, r) \ \text{ y } \ h_D = dist(D, r)$$

  donde r es la recta que contiene el segmento $\overrightarrow{AC}$.

  Tomando como vector dirección de r el vector $\overrightarrow{AC}$, la ecuación de dicha recta es:

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 8y + k = 0 \\ \text{Como } (-4, 3) \in r \end{array}\right\} -20 + 24 + k = 0 \ \to\ k = -4 \ \to\ r: 5x + 8y - 4 = 0$$

  Luego:

$$h_B = dist(B, r) = \frac{|5 \cdot 0 + 8 \cdot 5 - 4|}{\sqrt{89}} = \frac{36}{\sqrt{89}}$$

$$h_D = dist(D, r) = \frac{|5(-3) + 8(-2) - 4|}{\sqrt{89}} = \frac{35}{\sqrt{89}}$$

- Así:

$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ADC} = \frac{b \cdot h_B}{2} + \frac{b \cdot h_D}{2} = \frac{b}{2}(h_B + h_D) = \frac{\sqrt{89}}{2}\left(\frac{36}{\sqrt{89}} + \frac{35}{\sqrt{89}}\right) = \frac{71}{2}$$

67 **El lado desigual del triángulo isósceles ABC, tiene por extremos $A(1, -2)$ y $B(4, 3)$. El vértice C está en la recta $3x - y + 8 = 0$. Halla las coordenadas de C y el área del triángulo.**

- La recta del lado desigual (base) tiene como vector dirección $\overrightarrow{AB} = (3, 5)$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases} \to \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} \to r: 5x - 3y - 11 = 0$$

- La recta que contiene la altura tiene por vector dirección $\vec{a} = (-5, 3) \perp \overrightarrow{AB}$ y pasa por el punto medio del lado desigual AB, es decir, por $M\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$h_c: \begin{cases} x = \frac{5}{2} - 5t \\ y = \frac{1}{2} + 3t \end{cases} \to \frac{2x-5}{-10} = \frac{2y-1}{6} \to h_c: 12x + 20y - 40 = 0 \to h_c: 6x + 10y - 20 = 0$$

- $C = s \cap h_c$ donde $s: 3x - y + 8 = 0$.

$$\begin{cases} 3x - \ \ y + \ \ 8 = 0 \\ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} -6x + \ \ 2y - 16 = 0 \\ \ \ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$12y - 36 = 0 \to y = \frac{36}{12} = 3 \to 3x - 3 + 8 = 0 \to 3x + 5 = 0 \to x = \frac{-5}{3}$$

Luego: $C\left(\frac{-5}{3}, 3\right)$

- $$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CM}|}{2} \overset{(*)}{=} \frac{\sqrt{34} \cdot \sqrt{\left(\frac{850}{6}\right)}}{2} \approx 14,17$$

$$(*) \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3, 5) \to |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{34} \\ \overrightarrow{CM}\left(\frac{-25}{6}, \frac{-5}{2}\right) \to |\overrightarrow{CM}| = \frac{\sqrt{850}}{6} \end{cases}$$

68 **Calcula c para que la distancia entre las rectas de ecuaciones $4x + 3y - 6 = 0$ y $4x + 3y + c = 0$ sea igual a 3.**

Sea $P \in r_1$ donde $x_0 = 0 \to y_0 = 2 \to P(0, 2) \in r_1$

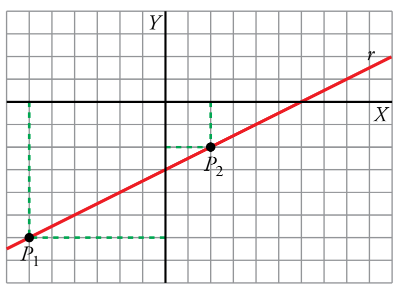
Así, $$dist(r_1, r_2) = dist(P, r_2) = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{16+9}} = 3 \to \frac{|6 + c|}{5} = 3 \to \begin{cases} 6 + c = 15 \to c_1 = 9 \\ 6 + c = -15 \to c_2 = -21 \end{cases}$$

69 **Encuentra un punto en la recta $x - 2y - 6 = 0$ que equidiste de los ejes de coordenadas.**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Eje } X: y = 0 \\ \text{Eje } Y: x = 0 \\ P(x, y) \in r \end{array}\right\} \to \begin{cases} dist\,(P, \text{eje } X) = dist\,(P, \text{eje } Y) \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} \frac{|y|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \to \text{dos casos: } \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} y - 2y - 6 = 0 \to y_1 = -6 \to x_1 = -6 \\ -y - 2y - 6 = 0 \to y_2 = -2 \to x_2 = 2 \end{cases} \to \begin{cases} P_1(-6, -6) \\ P_2(2, -2) \end{cases}$$



70 **Determina, en cada caso, un punto P de la recta $r: y = -x + 1$ tal que:**

a) La distancia de P a $s: 3x - 4y + 2 = 0$ sea 1.

b) P diste 3 unidades del eje OX.

c) La distancia de P al eje OY sea 4 unidades.

d) P equidiste de las rectas $x - y + 5 = 0$ y $x + y + 1 = 0$.

a) $P = (x, y)$

$P \in r \to y = -x + 1$

$dist(P, r) = \dfrac{|3x - 4y + 2|}{\sqrt{9+16}} = 1$

Las coordenadas de P son la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = -x+1 \\ \dfrac{|3x-4y+2|}{\sqrt{9+16}} = 1 \end{cases} \to \frac{|3x-4(-x+1)+2|}{\sqrt{9+16}} = 1 \to$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{3x-4(-x+1)+2}{\sqrt{9+16}} = 1 \to x = 1 \\ \dfrac{3x-4(-x+1)+2}{\sqrt{9+16}} = -1 \to x = -\dfrac{3}{7} \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \to y = 0 \\ x = -\dfrac{3}{7} \to y = \dfrac{10}{7} \end{cases}$$

Soluciones: $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = \left(-\dfrac{3}{7}, \dfrac{10}{7}\right)$

b) Eje OX: $y = 0$

$dist(P, OX) = \dfrac{|y|}{1} = 3$

Las coordenadas de P son la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = -x+1 \\ \dfrac{|y|}{1} = 3 \end{cases} \to \frac{|-x+1|}{1} = 3 \to \begin{cases} \dfrac{-x+1}{1} = 3 \to x = -2 \\ \dfrac{-x+1}{1} = -3 \to x = 4 \end{cases} \to \begin{cases} x = -2 \to y = 3 \\ x = 4 \to y = -3 \end{cases}$$

Soluciones: $P_1 = (-2, 3)$, $P_2 = (4, -3)$

c) Eje OY: $x = 0$

$dist(P, OX) = \dfrac{|x|}{1} = 4$

Las coordenadas de P son la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = -x+1 \\ \dfrac{|x|}{1} = 4 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{x}{1} = 4 \to x = 4 \\ \dfrac{x}{1} = -4 \to x = -4 \end{cases} \to \begin{cases} x = 4 \to y = -3 \\ x = -4 \to y = 5 \end{cases}$$

Soluciones: $P_1 = (4, -3)$, $P_2 = (-4, 5)$

d) $dist(P, r) = \dfrac{|x - y + 5|}{\sqrt{1+1}}$, $dist(P, r') = \dfrac{|x + y + 1|}{\sqrt{1+1}}$

Las coordenadas de P son la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = -x+1 \\ \dfrac{|x-y+5|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{|x+y+1|}{\sqrt{1+1}} \end{cases} \to |x-(-x+1)+5| = |x+(-x+1)+1| \to$$

$$\to \begin{cases} x-(-x+1)+5 = x+(-x+1)+1 \to x = -1 \\ x-(-x+1)+5 = -(x+(-x+1)+1) \to x = -3 \end{cases} \to \begin{cases} x = -1 \to y = 2 \\ x = -3 \to y = 4 \end{cases}$$

Soluciones: $P_1 = (-1, 2)$, $P_2 = (-3, 4)$

Página 212

71 **Halla un punto del eje de abscisas que equidiste de las rectas $4x + 3y + 6 = 0$ y $3x + 4y - 9 = 0$.**

$P(x, 0)$ debe verificar $dist(P, r) = dist(P, s)$:

$$\frac{|4x+3\cdot 0+6|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x+4\cdot 0-9|}{\sqrt{25}} \to \begin{cases} 4x+6=3x-9 \to x_1=-15 \\ 4x+6=-(3x-9) \to x_2=3/7 \end{cases}$$

Soluciones: $P_1(-15, 0)$, $P_2\left(\frac{3}{7}, 0\right)$

72 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas r y s y forma un ángulo de 45° con la recta $x + 5y - 6 = 0$.**

$r: 3x - y - 9 = 0$ $\qquad$ $s: x - 3 = 0$

Llamamos t a la recta que buscamos. t pasa por $P = r \cap s$ y tiene pendiente m.

$$tg\ 45° = \left|\frac{m-5}{1+5m}\right| \to 1 = \left|\frac{m-5}{1+5m}\right| \to \begin{cases} \frac{m-5}{1+5m} = 1 \to m = -\frac{3}{2} \\ \frac{m-5}{1+5m} = -1 \to m = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-y-9=0 \\ x-3=0 \end{cases} \to x = 3, y = 0 \to P = (3, 0)$$

t_1 tiene pendiente $m = -\frac{3}{2}$ y pasa por $P = (3, 0)$.

t_1: $y = -\frac{3}{2}(x-3)$

t_2 tiene pendiente $m = \frac{2}{3}$ y pasa por $P = (3, 0)$.

t_2: $y = \frac{2}{3}(x-3)$

73 **Dadas $r: 2x - y - 17 = 0$ y $s: 3x - ky - 8 = 0$, calcula k para que r y s se corten formando un ángulo de 60°.**

$$cos\ (\widehat{r, s}) = \left|\frac{(1,2)\cdot(k,3)}{\sqrt{1+4}\sqrt{k^2+9}}\right| \to cos\ 60° = \left|\frac{k+6}{\sqrt{5}\sqrt{k^2+9}}\right| \to \frac{1}{2} = \left|\frac{k+6}{\sqrt{5}\sqrt{k^2+9}}\right| \to$$

$$\to \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{k+6}{\sqrt{5}\sqrt{k^2+9}} \to k = 24-15\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} = \frac{k+6}{\sqrt{5}\sqrt{k^2+9}} \to k = 24+15\sqrt{3} \end{cases}$$

Soluciones: $k_1 = 24 - 15\sqrt{3}$; $k_2 = 24 + 15\sqrt{3}$

74 **Halla los ángulos del triángulo cuyos vértices son $A(-3, 2)$, $B(8, -1)$ y $C(3, -4)$.**

$\overrightarrow{AB} = (11, -3)$; $\overrightarrow{AC} = (6, -6) = 6(1, -1)$; $\overrightarrow{BC} = (-5, -3)$

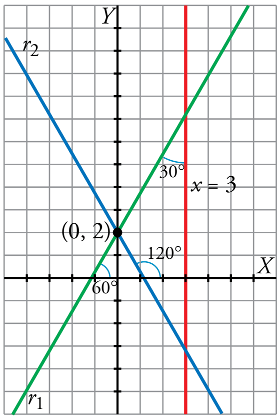
r contiene al lado AB; s contiene al lado AC; t contiene al lado BC

$$cos\ (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{(11,-3)\cdot(1,-1)}{\sqrt{121+9}\sqrt{1+1}} = 0,87 \to (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = 29°\ 45'$$

$$cos\ (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{(-11,3)\cdot(-5,-3)}{\sqrt{121+9}\sqrt{25+9}} = 0,69 \to (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = 46°\ 14'$$

$$(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = 180° - (29°\ 45' + 46°\ 14') = 104°\ 1'$$

75 **Halla la ecuación de la recta que pasa por (0, 2) y forma un ángulo de 30° con $x = 3$.**



La recta r forma un ángulo de 60° o de 120° con el eje OX.

Su pendiente es:

$$\begin{cases} m_1 = tg\ 60° = \sqrt{3}, \text{ o bien} \\ m_2 = tg\ 120° = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que debe pasar por $P(0, 2)$, las posibles soluciones son:

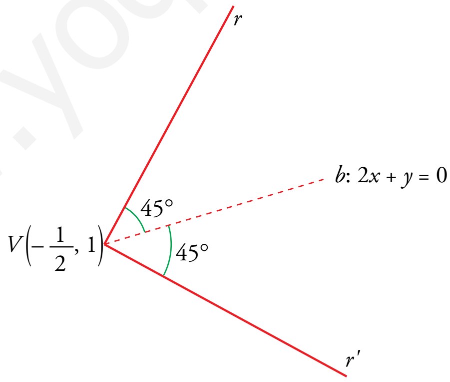
r_1: $y = \sqrt{3}x + 2$

r_2: $y = -\sqrt{3}x + 2$

76 **La recta $2x + y = 0$ es la bisectriz de un ángulo recto cuyo vértice es $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.**

Halla las ecuaciones de los lados del ángulo.

Las pendientes de las tres rectas son: $m_b = -2$, m_r, $m_{r'}$



$$tg\ 45° = \left|\frac{m_b - m_r}{1 + m_b m_r}\right| \to 1 = \left|\frac{-2 - m_r}{1 - 2m_r}\right| \to$$

$$\to \begin{cases} 1 - 2m_r = -2 - m_r \ \to \ m_r = 3 \\ -1 + 2m_{r'} = -2 - m_{r'} \ \to \ m_{r'} = -1/3 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} r\text{: } y - 1 = 3\left(x + \frac{1}{2}\right) \ \to \ y = 3x + \frac{5}{2} \\ r'\text{: } y - 1 = \frac{-1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) \ \to \ y = \frac{-1}{3}x + \frac{5}{6} \end{cases}$$

77 **Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por $A(-2, 2)$ y forman un ángulo de 60° con $x = y$.**

$b: x = y \to$ su pendiente es $m_b = 1$

$$tg\ 60° = \left|\frac{1-m}{1+1\cdot m}\right| \to \sqrt{3} = \left|\frac{1-m}{1+m}\right| \to$$

$$\to \begin{cases} \sqrt{3}+\sqrt{3}m = 1-m \to m_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \\ -\sqrt{3}-\sqrt{3}m = 1-m \to m_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que pasan por $A(-2, 2)$:

$$r_1: y-2 = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}(x+2)$$

$$r_2: y-2 = \frac{1+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}(x+2)$$

ECUACIONES PUNTO-PENDIENTE

78 **Dada la recta $r: 2x - 3y + 5 = 0$, halla la ecuación de la recta simétrica de r respecto al eje de abscisas.**

Calculamos $P = r \cap OX$:

$$\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ y=0 \end{cases} \to x = -\frac{5}{2}, y = 0 \to P = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$$

Buscamos un punto Q de r y encontramos su simétrico, Q', respecto de OX:

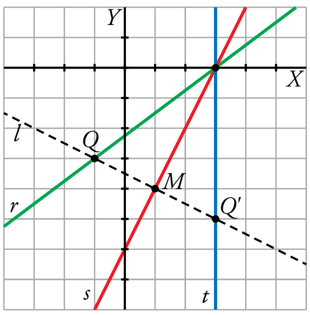
$$Q = \left(0, \frac{5}{3}\right) \to Q' = \left(0, -\frac{5}{3}\right)$$

La recta r' pasa por P y por Q':

$$\overrightarrow{PQ'} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{6}(3, -2)$$

$$r': \frac{x+\frac{5}{2}}{3} = \frac{y}{-2}$$

79 **Halla la recta, t, simétrica a $r: -3x + 4y + 9 = 0$ respecto de la recta $s: 2x - y - 6 = 0$.**



Calculamos $P = r \cap s$:

$$\begin{cases} -3x+4y+9=0 \\ 2x-y-6=0 \end{cases} \to x = 3, y = 0 \to P = (3, 0)$$

Buscamos un punto $Q \neq P$ de r y encontramos su simétrico, Q', respecto de s.

$Q \in r \to x = -1 \to y = -3$

$Q = (-1, -3)$

Simétrico de Q respecto de s:

Calculamos la recta l perpendicular a s que pasa por Q:

l tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, -1)$ y pasa por $Q = (-1, -3)$.

$l: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} \to -x-1 = 2y+6 \to -x-2y-7 = 0$

$M = s \cap l$

$$\begin{cases} -x-2y-7=0 \\ 2x-y-6=0 \end{cases} \to x = 1, y = -4 \to M = (1, -4)$$

M es el punto medio entre Q y $Q' = (x, y)$.

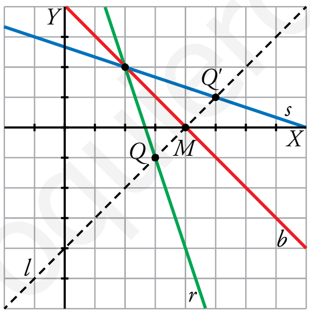
$$(1, -4) = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{y-3}{2}\right) \to \begin{cases} 1 = \dfrac{x-1}{2} \to x = 3 \\ -4 = \dfrac{y-3}{2} \to y = -5 \end{cases} \to Q' = (3, -5)$$

La recta t pasa por P y por $Q' = (3, -5)$:

$\overrightarrow{PQ'} = (0, -5) = 5(0, 1)$

$t: x = 3$

80 **La recta $b: y = -x + 4$ es la bisectriz del ángulo formado por las rectas $r: 3x + y - 8 = 0$ y s. Halla la ecuación de s.**



s es la simétrica de r respecto de b.

b tiene pendiente $m = -1$. Calculamos $P = r \cap b$:

$$\begin{cases} 3x+y-8=0 \\ y=-x+4 \end{cases} \to x = 2, y = 2 \to P = (2, 2)$$

Buscamos un punto $Q \neq P$ de r y encontramos su simétrico, Q', respecto de b.

$Q \in r \to x = 3 \to y = -1$

$Q = (3, -1)$

Para hallar el simétrico de Q respecto de b, calculamos la recta l perpendicular a b que pasa por Q:

l tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $Q = (3, -1)$.

$l: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{1} \to x-3 = y+1 \to x-y-4 = 0$

$M = b \cap l$

$$\begin{cases} y=-x+4 \\ x-y-4=0 \end{cases} \to x = 4, y = 0 \to M = (4, 0)$$

M es el punto medio entre Q y $Q' = (x, y)$:

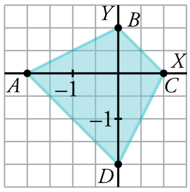
$$(4, 0) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y-1}{2}\right) \to \begin{cases} 4 = \dfrac{x+3}{2} \to x = 5 \\ 0 = \dfrac{y-1}{2} \to y = 1 \end{cases} \to Q' = (5, 1)$$

La recta s pasa por P y por $Q' = (5, 1)$

$\overrightarrow{PQ'} = (3, -1)$

$$s: \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-1}$$

81 **Sean A, B, C y D los puntos de corte de las rectas $x - 2y + 2 = 0$ y $2x - y - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas. Prueba que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio isósceles y halla su área.**



Sean: $A = r \cap \text{eje } OX$: $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = -2 \to A(-2, 0)$

$B = r \cap \text{eje } OY$: $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to y = 1 \to B(0, 1)$

$C = s \cap \text{eje } OX$: $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = 1 \to C(1, 0)$

$D = s \cap \text{eje } OY$: $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to y = -2 \to D(0, -2)$

Calculamos los vectores dirección de los lados:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 1) \\ \overrightarrow{BC} = (1, -1) \\ \overrightarrow{CD} = (-1, -2) \\ \overrightarrow{DA} = (-2, 2) \end{array}\right\} \to \begin{cases} \overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{BC} \to \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA} \\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5} = |\overrightarrow{CD}| \end{cases}$$

Luego, efectivamente, $ABCD$ es un trapecio isósceles de bases BC y DA.

Para calcular el área necesitamos la altura:

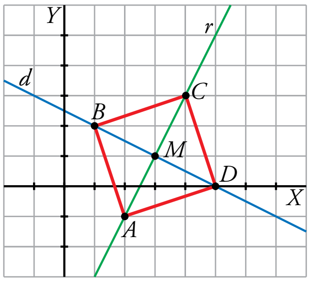
$$\text{Como } \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD}(2, -2) \\ D(0, -2) \end{array}\right\} \to y = -x - 2 \to AD: x + y + 2 = 0$$

$$h = dist(B, AD) = \frac{|0 + 1 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Así:

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{DA}|}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9 \cdot 2}{4} = \frac{9}{2}$$

82 **De un cuadrado conocemos la ecuación de una de sus diagonales, $d: x + 2y - 5 = 0$, y un vértice, $A(2, -1)$. Calcula el resto de vértices y su área.**



$A \notin d$, luego el vértice C es el simétrico de A respecto de d.

r: perpendicular a d que pasa por A.

r tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 2)$ y pasa por $A = (2, -1)$.

$r: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} \to 2x - y = 5$

$M = r \cap d$

$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \to x = 3, y = 1 \to M = (3, 1)$

M es el punto medio entre A y $C = (x, y)$.

$(3, 1) = \left(\dfrac{x+2}{2}, \dfrac{y-1}{2}\right) \to \begin{cases} 3 = \dfrac{x+2}{2} \to x = 4 \\ 1 = \dfrac{y-1}{2} \to y = 3 \end{cases} \to C = (4, 3)$

El vértice $B = (x, y)$ verifica: $B \in d$ y $dist(M, A) = dist(M, B)$, luego B es solución del sistema:

$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (-1-1)^2} \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{5} \end{cases} \to x = 1, y = 2; x = 5, y = 0$

Que son las coordenadas de los vértices que faltan: $B = (1, 2)$, $D = (5, 0)$.

83 **La recta $x + y - 2 = 0$ y una recta paralela a ella que pasa por el punto $(0, 5)$ determinan, junto con los ejes de coordenadas, un trapecio isósceles. Halla su área.**

$\left.\begin{array}{l} s \,//\, r: x + y - 2 = 0 \to x + y + k = 0 \\ P(0, 5) \in s \end{array}\right\} \to 0 + 5 + k = 0 \to k = -5$

Luego $s: x + y - 5 = 0$

Sean: $A = r \cap \text{eje } X$: $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = 2 \to A(2, 0)$

$B = r \cap \text{eje } Y$: $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to y = 2 \to B(0, 2)$

$C = s \cap \text{eje } X$: $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = 5 \to C(5, 0)$

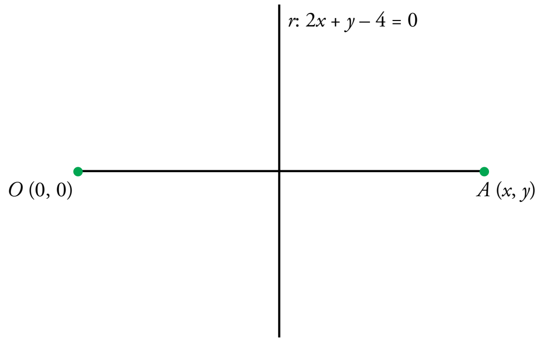
$D = s \cap \text{eje } Y$: $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to y = 5 \to D(0, 5)$

$\overrightarrow{AB} = (-2, 2)$; $\overrightarrow{CD} = (-5, 5)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot \text{h} = \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot dist\,(A, s) =$$

$$= \frac{\sqrt{8} + \sqrt{50}}{2} \cdot \frac{|2 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{21}{2} \text{ u}^2$$

84 **La recta $2x + y - 4 = 0$ es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto (0, 0). Halla las coordenadas del otro extremo.**



Un vector dirección de la recta es $\vec{v} = (1, -2)$.

- Debe verificarse que: $\vec{v} \perp \overrightarrow{OA} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$

$$(1, -2) \cdot (x, y) = 0 \to x - 2y = 0 \to x = 2y$$

- Además, el punto medio de OA, M, pertenece a la recta:

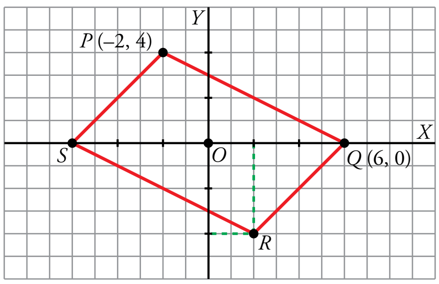
$$M\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \in r \to 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \to$$

$$\to 2 \cdot \frac{2y}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \to 4y + y - 8 = 0 \to$$

$$\to y = \frac{8}{5} \to x = 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$$

Luego: $A\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$

85 **Los puntos $P(-2, 4)$ y $Q(6, 0)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo $PQRS$ con centro en el punto (0, 0). Halla los vértices R y S y los ángulos del paralelogramo.**



a) Como las dos diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio, que es el centro, se tienen fácilmente los otros dos vértices:

$R(2, -4)$, $S(-6, 0)$

b) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} = (8, -4) \to \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RS} = (-8, 4)$

$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR} = (-4, -4) \to \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ} = (4, 4)$

$$\cos \hat{P} = \frac{\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PS}||\overrightarrow{PQ}|} = \frac{-32 + 16}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{80}} = -0{,}31623 \to \hat{P} = 108° \ 26' \ 5{,}8'' = \hat{R}$$

$$\hat{S} = \frac{360° - (\hat{P} + \hat{R})}{2} = 71°\ 33'\ 54'' = \hat{Q}$$

NOTA: Podríamos haber calculado $\hat{S}$ con los vectores:

$$\cos \hat{S} = \frac{\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SR}}{|\overrightarrow{SP}||\overrightarrow{SR}|} = \frac{32-16}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{80}} = 0{,}31623 \rightarrow \hat{S} = 71°\ 33'\ 54''$$

86 **Dos de los lados de un paralelogramo están sobre las rectas $x + y - 2 = 0$ y $x - 2y + 4 = 0$ y uno de sus vértices es el punto $(6, 0)$. Halla los otros vértices.**

- Como las rectas no son paralelas, el punto donde se corten será un vértice:

$$\begin{matrix} r_1: \\ r_2: \end{matrix} \begin{cases} x + \ \ y - 2 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + \ \ y - 2 = 0 \\ -x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$3y - 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow x + 2 - 2 = 0 \rightarrow x = 0$$

Luego un vértice es $A(0, 2)$.

- El vértice que nos dan, $C(6, 0)$, no pertenece a ninguna de las rectas anteriores (pues no verifica sus ecuaciones, como podemos comprobar fácilmente sustituyendo los valores de x e y por las coordenadas de C). Así pues, el vértice C no es consecutivo de A.

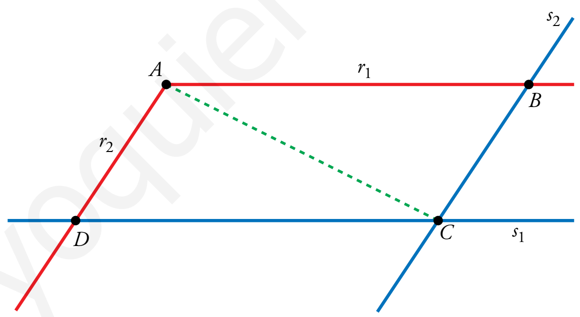
Sean $s_1 // r_1$ una recta que pasa por C y $s_2 // r_2$ una recta que pasa por C.

Se trata de las rectas sobre las que están los otros lados.

Así, los otros vértices, B y D, serán los puntos de corte de:

$r_1 \cap s_2 = B$

$r_2 \cap s_1 = D$



$$s_1: \begin{cases} x + y + a = 0 \\ C \in s_1 \rightarrow 6 + 0 + a = 0 \rightarrow a = -6 \end{cases} \rightarrow s_1: x + y - 6 = 0$$

$$s_2: \begin{cases} x - 2y + b = 0 \\ C \in s_2 \rightarrow 6 - 0 + b = 0 \rightarrow b = -6 \end{cases} \rightarrow s_2: x - 2y - 6 = 0$$

- $B = r_1 \cap s_2$: $\begin{cases} x + \ \ y - 2 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$

Resolviendo el sistema:

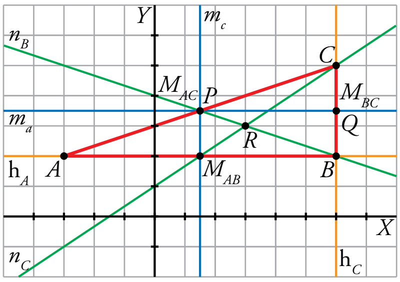
De la primera ecuación $\rightarrow x = 2 - y \rightarrow$ en la segunda $\rightarrow 2 - y - 2y - 6 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow y = \frac{-4}{3} \rightarrow x = \frac{10}{3} \rightarrow B\left(\frac{10}{3}, \frac{-4}{3}\right)$$

- $D = r_2 \cap s_1$: $\left.\begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ x + \ \ y - 6 = 0 \rightarrow x = 6 - y \end{cases}\right\} \rightarrow 6 - y - 2y + 4 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow y = \frac{10}{3} \rightarrow x = \frac{8}{3} \rightarrow D\left(\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

87 **En un triángulo, baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados. La recta que los contiene se llama recta de Euler. Compruébalo en el triángulo de vértices $A(-3, 2)$, $B(6, 2)$ y $C(6, 5)$.**



- Circuncentro: P.

  Calculamos dos mediatrices y su intersección.

  m_a es perpendicular a BC y pasa por M_{BC}.

  BC tiene vector de dirección $\overrightarrow{BC} = (6, 5) - (6, 2) = (0, 2) = 2(0, 1)$

  $M_{BC} = \left(6, \frac{7}{2}\right)$

  m_a tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 0)$ y pasa por $M_{BC} = \left(6, \frac{7}{2}\right)$.

  $m_a\colon y = \frac{7}{2}$

  m_c es perpendicular a AB y pasa por M_{AB}.

  AB tiene vector de dirección $\overrightarrow{AB} = (6, 2) - (-3, 2) = (9, 0) = 9(1, 0)$.

  $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

  m_c tiene vector de dirección $\vec{d} = (0, 1)$ y pasa por $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

  $m_c\colon x = \frac{3}{2}$

  El circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices.

  $$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

  Las coordenadas del circuncentro son $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

- Baricentro: R.

  Calculamos dos medianas y su intersección.

  n_b pasa por B y por M_{AC}.

  $M_{AC} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

  $\overrightarrow{BM_{AC}} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) - (6, 2) = \left(-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}(-3, 1)$

  n_b tiene vector de dirección $\vec{d} = (-3, 1)$ y pasa por $B = (6, 2)$.

  $n_b\colon \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{1} \rightarrow x - 6 = -3y + 6 \rightarrow x + 3y - 12 = 0$

  n_c pasa por C y por M_{AB}.

  $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

  $\overrightarrow{CM_{AB}} = \left(\frac{3}{2}, 2\right) - (6, 5) = \left(-\frac{9}{2}, -3\right) = -\frac{3}{2}(3, 2)$

n_c tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 2)$ y pasa por $C = (6, 5)$.

n_c: $\dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y-5}{2} \rightarrow 2x - 12 = 3y - 15 \rightarrow 2x - 3y + 3 = 0$

El baricentro es el punto de intersección de las medianas. Como las tres medianas se cortan en el mismo punto, para calcular el baricentro es suficiente con resolver el sistema formado por dos de las medianas.

$$\begin{cases} x + 3y - 12 = 0 \\ 2x - 3y + \ \ 3 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3,\ y = 3$$

Las coordenadas del baricentro son: $R = (3, 3)$.

- Ortocentro: Q.

  Calculamos dos alturas y su intersección.

  h_A es perpendicular a BC y pasa por $A = (-3, 2)$.

  $\overrightarrow{BC} = (0, 2) = 2(0, 1)$

  h_A tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 0)$ y pasa por $A = (-3, 2)$.

  h_A: $y = 2$

  h_C es perpendicular a AB y pasa por $C = (6, 5)$.

  $\overrightarrow{AB} = 9(1, 0)$

  h_C tiene vector de dirección $\vec{d} = (0, 1)$ y pasa por $C = (6, 5)$.

  h_C: $x = 6$

  El ortocentro es el punto de intersección de las alturas.

  $$\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

  Las coordenadas del ortocentro son: $Q = (6, 2)$.

$P = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$; $Q = (6, 2)$; $R = (3, 3)$

Para ver si están alineados, calculamos los vectores:

$$\overrightarrow{PQ} = (6, 2) - \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}(3, -1)$$

$$\overrightarrow{QR} = (3, 3) - (6, 2) = (-3, 1) = (-1)\,(3, -1)$$

Luego los vectores son proporcionales y, por tanto, los puntos están alineados.

88 **De un triángulo conocemos dos vértices, $A(0, 0)$ y $B(5, 0)$ y la longitud del lado AC, 3. Además, la tangente del ángulo formado por los lados AB y AC es $\dfrac{4}{3}$.**

a) Calcula la ecuación del lado AC.

b) Determina el vértice C.

c) Halla la longitud de la altura relativa a C.

d) Obtén el área del triángulo.

* ***Puedes calcular la altura utilizando razones trigonométricas.***

a) La recta que contiene al lado AC tiene pendiente $\dfrac{4}{3}$ porque el lado AB está en el eje OX, y la tangente del ángulo que forma una recta con el eje horizontal positivo es su pendiente, luego $r: y = \dfrac{4}{3}x$.

b) C está en la recta $r: y = \frac{4}{3}x$ y $dist(A, C) = 3$, luego C es solución del sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 3 \end{cases} \to x = -\frac{9}{5}, y = -\frac{12}{5};\ x = \frac{9}{5}, y = \frac{12}{5}$$

Como la tangente del ángulo es positiva, $C = \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

c) $AB: y = 0$

$altura = dist\,(C, AB) = \frac{12}{5}$ u

d) $dist\,(A, B) = 3$ u

$Área = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{12}{5} = \frac{18}{5}$ u^2

89 **Los puntos $A(-\sqrt{3}, -3)$, $B(\sqrt{3}, -3)$, $C(2\sqrt{3}, 0)$, $D(\sqrt{3}, 3)$, $E(-\sqrt{3}, 3)$ y $F(-2\sqrt{3}, 0)$ son los vértices de un hexágono regular $ABCDEF$. Calcula:**

a) El centro del hexágono como la intersección de las mediatrices de dos lados consecutivos.

b) La longitud de la apotema.

c) El área del polígono.

a) $\overrightarrow{AB} = (2\sqrt{3}, 0)$

$M_{AB} = (0, -3)$

$m_{AB}: x = 0$

$\overrightarrow{BC} = (\sqrt{3}, 3)$

$M_{BC} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{-3}{2}\right)$

m_{BC} tiene vector director: $(-3, \sqrt{3})$

$$m_{BC}: \frac{x - \frac{3}{2}\sqrt{3}}{-3} = \frac{y + \frac{3}{2}}{\sqrt{3}}$$

Centro = $m_{AB} \cap m_{BC}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{x - \frac{3}{2}\sqrt{3}}{-3} = \dfrac{y + \frac{3}{2}}{\sqrt{3}} \end{cases} \to \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{3}}{-3} = \frac{y + \frac{3}{2}}{\sqrt{3}} \to y = 0$$

Centro = $(0, 0)$

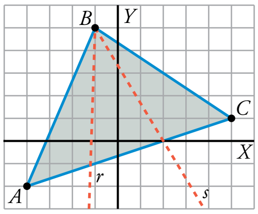
b) Apotema $= dist(M_{BC}, \text{Centro}) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{-3}{2} - 0\right)^2} = 3$ u

c) Área $= \frac{1}{2} \cdot$ Perímetro $\cdot$ Apotema

Lado $= dist(A, B) = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (0)^2} = 2\sqrt{3}$ u

Área $= \frac{1}{2} \cdot$ Perímetro $\cdot$ Apotema $= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ u^2

90 **Dado el triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(-1, 5)$ y $C(5, 1)$, halla las ecuaciones de las rectas r y s que parten de B y cortan a AC, dividiendo al triángulo en tres triángulos de igual área.**



- La altura de los tres triángulos es igual a la distancia de B al lado AC. Por tanto, tendrán la misma área si tienen la misma base. Así, se trata de hallar los puntos, P y Q, que dividen al lado AC en tres partes iguales.

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{3} = \left(-\frac{2}{3}, -1\right); \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OC}}{3} = \left(\frac{8}{3}, 0\right)$$

- La recta r es la que pasa por B y por P:

$$m = \frac{-1-5}{(-2/3)-(-1)} = \frac{-6}{(1/3)} = -18$$

$$y = 5 - 18(x + 1) \;\to\; r\text{: } 18x + y + 13 = 0$$

- La recta s es la que pasa por B y por Q:

$$m = \frac{5-0}{(-1)-(8/3)} = \frac{-5}{(-11/3)} = -\frac{15}{11}$$

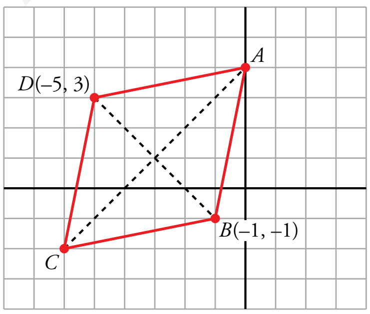
$$y = 5 - \frac{15}{11}(x + 1) \;\to\; 11y = 55 - 15x - 15 \;\to\; s\text{: } 15x + 11y - 40 = 0$$

91 **Un rombo $ABCD$ tiene un vértice en el eje de ordenadas; otros dos vértices opuestos son $B(-1, -1)$ y $D(-5, 3)$. Halla las coordenadas de los vértices A y C y el área del rombo.**

Sea $A \in$ eje $Y \to A = (0, y_1)$ y sea el punto $C = (x_2, y_2)$.

Como estamos trabajando con un rombo, sus diagonales AC y BD se cortan en su punto medio, M.

Además, $AC \perp BD$.



- $M\left(\frac{-1-5}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (-3, 1)$ es el punto medio de BD (y de AC).

- Sea d la recta perpendicular a BD por M (será, por tanto, la que contiene a AC):

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BD} = (-4, 4) \to \vec{d} = (4, 4) \text{ es vector dirección de } d \\ M(-3, 1) \in d\end{array}\right\} \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l}\text{La pendiente de } d \text{ es } m_d = \dfrac{4}{4} = 1 \\ M(-3, 1) \in d\end{array}\right. \to d\text{: } y - 1 = (x + 3) \;\to\; d\text{: } y = x + 4$$

- Así:

$A = d \cap \text{eje } Y\text{: } \left.\begin{cases} y = x + 4 \\ x = 0 \end{cases}\right\} \to y = 4 \to A(0, 4)$

- M es el punto medio de $AC \to (-3,\ 1) = \left(\dfrac{0 + x_2}{2}, \dfrac{4 + y_2}{2}\right) \to \left.\begin{cases} -3 = \dfrac{x_2}{2} \to x_2 = -6 \\ 1 = \dfrac{4 + y_2}{2} \to y_2 = -2 \end{cases}\right\} \to C(-6, -2)$

- Área $= \dfrac{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}{2}$

$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AC}| = |(-6, -6)| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \\ |\overrightarrow{BD}| = |(-4, 4)| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{array}\right\} \to \text{Área} = \dfrac{6\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 24 \text{ u}^2$

92 **Un punto P, que es equidistante de los puntos $A(3, 4)$ y $B(-5, 6)$, dista el doble del eje de abscisas que del eje de ordenadas. ¿Cuáles son las coordenadas de P?**

- $d(P, OX) = 2d(P, OY) \to |y| = 2|x| \to \begin{cases} y = 2x \\ y = -2x \end{cases}$

- $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{PB}| \to \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(-5-x)^2 + (6-y)^2} \to$

$\to x^2 + 9 - 6x + y^2 + 16 - 8y = x^2 + 25 + 10x + y^2 + 36 - 12y \to$

$\to -6x - 8y + 25 = 10x - 12y + 61 \to 16x - 4y + 36 = 0 \to 4x - y + 9 = 0$

- Como deben cumplirse las dos condiciones, habrá dos soluciones:

$P_1\text{: } \begin{cases} y = 2x \\ 4x - y + 9 = 0 \end{cases} \to 4x - 2x + 9 = 0 \to x = \dfrac{-9}{2} \to y = -9$

Luego: $P_1\left(\dfrac{-9}{2}, -9\right)$

$P_2\text{: } \begin{cases} y = -2x \\ 4x - y + 9 = 0 \end{cases} \to 4x + 2x + 9 = 0 \to x = \dfrac{-9}{6} = \dfrac{-3}{2} \to y = 3$

Luego: $P_2\left(\dfrac{-3}{2}, 3\right)$

93 **De todas las rectas que pasan por el punto $A(1, 2)$, halla la pendiente de aquella cuya distancia al origen es 1.**

- Esas rectas tienen por ecuación:

$y = 2 + m(x - 1) \to mx - y + (2 - m) = 0$

- $d(0, r) = 1 \to \dfrac{|2 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \to \begin{cases} 2 - m = \sqrt{m^2 + 1} \\ 2 - m = -\sqrt{m^2 + 1} \end{cases} \to$

$\to (2 - m)^2 = m^2 + 1 \to 4 + m^2 - 4m = m^2 + 1 \to 4 - 4m = 1 \to m = \dfrac{3}{4}$

94 **Halla el punto de la recta $2x - 4y - 1 = 0$ que con el origen de coordenadas y el punto $P(-4, 0)$ determina un triángulo de área 6.**

$OP = (-4, 0)$. Lado OP: $y = 0$

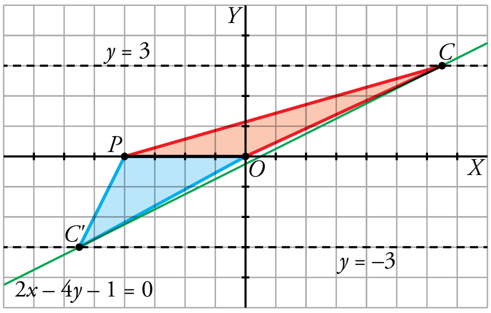
Base $= 4$ u

Área $= \dfrac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = 6 \to \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot \text{altura} = 6 \to \text{altura} = 3$

El punto $C = (x, y)$ verifica: $C \in r$ y $dist(C, \text{lado } OP) = 3$.

$$\begin{cases} 2x - 4y - 1 = 0 \\ |y| = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3 \rightarrow x = \dfrac{13}{2} \\ y = -3 \rightarrow x = -\dfrac{11}{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $C = \left(\dfrac{13}{2}, 3\right)$ y $C' = \left(-\dfrac{11}{2}, -3\right)$



Página 213

Cuestiones teóricas

95 **Prueba que si las rectas $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ son perpendiculares, se verifica que $aa' + bb' = 0$.**

- El vector (a, b) es perpendicular a la recta $ax + by + c = 0$.
- El vector (a', b') es perpendicular a la recta $a'x + b'y + c' = 0$.
- Si las dos rectas son perpendiculares, entonces:

  $(a, b) \cdot (a', b') = 0$; es decir, $aa' + bb' = 0$.

96 **Dada la recta de ecuación $ax + by + c = 0$, prueba que el vector $\vec{v} = (a, b)$ es ortogonal a cualquier vector determinado por dos puntos de la recta.**

* *Llama $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ a dos puntos genéricos de la recta y haz $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB}$.*

- Si $A(x_1, y_1)$ pertenece a la recta, entonces $ax_1 + by_1 + c = 0$
- Si $B(x_2, y_2)$ pertenece a la recta, entonces $ax_2 + by_2 + c = 0$
- Restando las dos igualdades: $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$

Esta última igualdad significa que:

$(a, b) \cdot (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = 0$; es decir, que el vector (a, b) es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$, siendo A y B dos puntos cualesquiera de la recta.

97 **a) ¿Qué se puede decir de una recta si en su ecuación general falta el término independiente?**

b) ¿Y si falta el término en x?

c) ¿Y si falta el término en y?

a) La recta pasa por (0, 0).

b) Es una recta horizontal (paralela al eje OX).

c) Es una recta vertical (paralela al eje OY).

98 **Demuestra que las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ son:**

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

* *Utiliza que $2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{BG}$ donde M es el punto medio de AC.*

$G = (x, y)$

$$M_{AC} = \left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$$

$$2\overrightarrow{GM_{AC}} = \overrightarrow{BG}$$

$$2\left(\frac{x_1+x_3}{2} - x, \frac{y_1+y_3}{2} - y\right) = (x - x_2, y - y_2)$$

$$\begin{cases} 2\left(\dfrac{x_1+x_3}{2} - x\right) = x - x_2 \\ 2\left(\dfrac{y_1+y_3}{2} - y\right) = y - y_2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + x_3 - 2x = x - x_2 \\ y_1 + y_3 - 2y = y - y_2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + x_3 + x_2 = 3x \\ y_1 + y_3 + y_2 = 3y \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{x_1+x_3+x_2}{3} \\ y = \dfrac{y_1+y_3+y_2}{3} \end{cases}$$

99 **Demuestra que si una recta corta a los ejes de coordenadas en los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$, con a, $b \neq 0$, entonces su ecuación se puede expresar en la forma canónica o segmentaria:**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$r: ax + by + c = 0$

r no pasa por el origen de coordenadas porque $a, b \neq 0$, luego $c \neq 0$.

Dividimos la ecuación entre $-c$:

$$r: \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1 = 0$$

Si corta en $(0, b)$:

$$x = 0 \to \frac{y}{b'} = 1 \to b' = b$$

Si corta en $(a, 0)$:

$$y = 0 \to \frac{x}{a'} = 1 \to x = a' = a$$

Luego la ecuación de r es: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0 \to \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

Para profundizar

100 **Las rectas $x + y - 2 = 0$ y $9x - 3y - 4 = 0$ son dos alturas del triángulo ABC de vértice $A(2, 2)$. Halla las ecuaciones de los lados del triángulo.**

A no pertenece a ninguna de las dos alturas, luego los lados del triángulo estarán en las rectas que pasan por $A = (2, 2)$ y son perpendiculares a las rectas dadas.

$r: x + y - 2 = 0$ tiene vector de dirección $(-1, 1)$.

El *lado* AB tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $A = (2, 2)$.

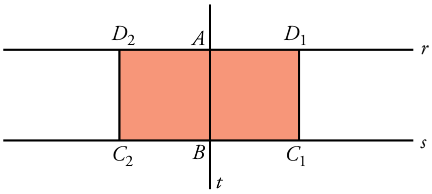
Lado AB: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} \to x - 2 = y - 2 \to x - y = 0$

$s: 9x - 3y - 4 = 0$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (-3, 9) = 3(-1, 3)$.

El *lado* AC tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 1)$ y pasa por $A = (2, 2)$.

Lado AC: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-2}{1} \to x - 2 = 3y - 6 \to x - 3y - 4 = 0$

101 **Dos vértices contiguos de un cuadrado son $A(3, 1)$ y $B(4, 5)$. Calcula los otros vértices. ¿Cuántas soluciones hay?**



C y D son puntos de las rectas s y r perpendiculares a AB, y cuyas distancias a B y A, respectivamente, son $|\overrightarrow{AB}|$:

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \to s: x + 4y + k = 0 \\ \text{Como } B \in s\end{array}\right\} \to 4 + 20 + k = 0 \to k = -24 \to s: x + 4y - 24 = 0$

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \to r: x + 4y + k' = 0 \\ \text{Como } A \in r\end{array}\right\} \to 3 + 4 + k' = 0 \to k' = -7 \to r: x + 4y - 7 = 0$

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \to t: 4x - y + k'' = 0 \\ \text{Como } A \in t\end{array}\right\} \to 12 - 1 + k'' = 0 \to k'' = -11 \to t: 4x - y - 11 = 0$

- C y D son puntos que están en las rectas cuya distancia a AB es $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{17}$.

  Sean $P(x, y)$ tales que:

  $$dist(P, t) = \frac{|4x - y - 11|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

  $$\begin{cases} 4x - y - 11 = 17 \to \\ 4x - y - 11 = -17 \to \end{cases} \begin{cases} t_1: 4x - y - 28 = 0 \\ t_2: 4x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

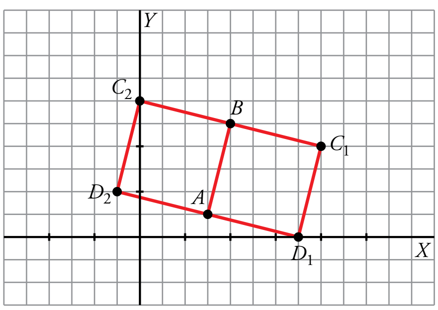
  Son dos rectas paralelas. Hay dos soluciones. Así:

  $$C_1 = t_1 \cap s \begin{cases} 4x - y - 28 = 0 \\ x + 4y - 24 = 0 \to x = 24 - 4y \end{cases} \to 96 - 16y - y - 28 = 0 \to y = 4 \to x = 8 \to C_1(8, 4)$$

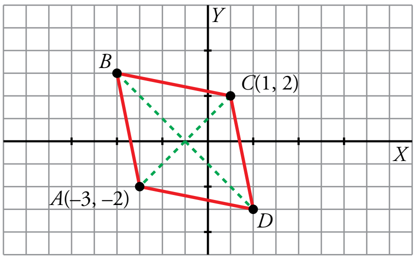
  $$C_2 = t_2 \cap s \begin{cases} 4x - y + 6 = 0 \\ x + 4y - 24 = 0 \to x = 24 - 4y \end{cases} \to 96 - 16y - y + 6 = 0 \to y = 6 \to x = 0 \to C_2(0, 6)$$

  $$D_1 = t_1 \cap r \begin{cases} 4x - y - 28 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \to x = 7 - 4y \end{cases} \to 28 - 16y - y - 28 = 0 \to y = 0 \to x = 7 \to D_1(7, 0)$$

  $$D_2 = t_2 \cap r \begin{cases} 4x - y + 6 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \to x = 7 - 4y \end{cases} \to 28 - 16y - y + 6 = 0 \to y = 2 \to x = -1 \to D_2(-1, 2)$$



102 **La diagonal menor de un rombo mide lo mismo que su lado y sus extremos son los puntos $A(-3, -2)$ y $C(1, 2)$. Halla los vértices B y D y el perímetro del rombo.**



- $\overrightarrow{AC} = (4, 4) \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

  Como esta diagonal mide lo mismo que el lado, entonces el perímetro será:

  Perímetro = $4\,|\overrightarrow{AC}| = 16\sqrt{2}$

- Los otros dos vértices están en la perpendicular de $\overrightarrow{AC}$ por su punto medio $M(-1, 0)$.

  $$\left.\begin{array}{l}\text{La recta } AC \text{ tiene por vector director } (1,1) \rightarrow x - y + k = 0\\ \text{Como, además, } A(-3,-2) \in \text{ recta } AC\end{array}\right\} \rightarrow$$

  $$\rightarrow -3 + 2 + k = 0 \rightarrow k = 1 \rightarrow AC: x - y + 1 = 0$$

  La recta s perpendicular a AC será:

  $$\left.\begin{array}{l}s: x + y + k' = 0\\ \text{Como } M(-1, 0) \in s\end{array}\right\} \rightarrow -1 + k' = 0 \rightarrow k' = 1 \rightarrow s: x + y + 1 = 0$$

  Los puntos B y C serán los (x, y) que estén en s y cuya distancia al vértice A sea igual a la diagonal, es decir, igual a $4\sqrt{2}$.

  $(x, y) \in s \rightarrow x + y + 1 = 0 \rightarrow x = -1 - y$

  $$\sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2} = 4\sqrt{2} \rightarrow (x+3)^2 + (y+2)^2 = 32 \rightarrow$$

  $$\rightarrow (2 - y)^2 + (y + 2)^2 = 32 \rightarrow 4 + y^2 - 4y + y^2 + 4 + 4y = 32 \rightarrow 2y^2 = 24 \rightarrow$$

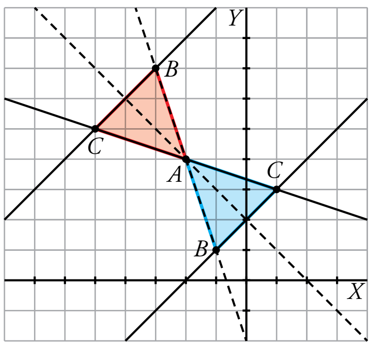
  $$\rightarrow y^2 = 12 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 2\sqrt{3} \rightarrow x_1 = -1 - 2\sqrt{3}\\ y_2 = -2\sqrt{3} \rightarrow x_2 = -1 + 2\sqrt{3}\end{cases}$$

  Luego, los vértices B y C son:

  $$(-1 - 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}) \text{ y } (-1 + 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$$

103 **En un triángulo isósceles ABC con lado desigual BC, la ecuación del lado AB es $3x + y + 2 = 0$ y la mediatriz del lado BC es $x + y - 2 = 0$.**

a) Calcula la ecuación del lado AC. **b) Halla sus vértices si su área es 4 u².**



a) Por ser el lado BC el lado desigual, la mediatriz de BC pasa por A.

$A \in$ *lado AB*, luego A es solución del sistema.

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow x = -2,\ y = 4 \rightarrow A = (-2, 4)$$

La mediatriz en este caso es la bisectriz del ángulo $\hat{A}$, luego el lado AC es la recta simétrica de AB respecto de la mediatriz s.

Buscamos un punto $Q \neq A$ de $r = lado\ AB$ y encontramos su simétrico Q' respecto de s.

$Q \in r \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -2$

$Q = (0, -2)$

Para hallar el simétrico de Q respecto de s, calculamos la recta l perpendicular a s que pasa por Q:

l tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $Q = (0, -2)$.

$$l: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} \rightarrow x = y + 2 \rightarrow x - y - 2 = 0$$

$M = s \cap l$

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2,\ y = 0 \rightarrow M = (2, 0)$$

M es el punto medio entre Q y $Q' = (x, y)$:

$$(2, 0) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y-2}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{x}{2} \rightarrow x = 4 \\ 0 = \dfrac{y-2}{2} \rightarrow y = 2 \end{cases} \rightarrow Q' = (4, 2)$$

La recta t pasa por A y por $Q' = (4, 2)$.

$\overrightarrow{AQ'} = (6, -2) = 2(3, -1)$

$$t: \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{-1} \rightarrow -x - 2 = 3y - 12 \rightarrow -x - 3y + 10 = 0$$

Lado $AC = t: -x - 3y + 10 = 0$

b) *Lado* $BC = s'$ es perpendicular a la mediatriz $\rightarrow s: x + y - 2 = 0$

$s': x - y + k = 0$

$$\text{Altura} = dist(A, lado\ BC) = \frac{|-2-4+k|}{\sqrt{2}} = \frac{|-6+k|}{\sqrt{2}} = \frac{|k-6|}{\sqrt{2}}$$

$B \in lado\ AB \cap s'$

$$B \rightarrow \begin{cases} 3x + y + 2 = 0 \\ x - y + k = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{1}{4}k - \frac{1}{2},\ y = \frac{3}{4}k - \frac{1}{2} \rightarrow B = \left(-\frac{1}{4}k - \frac{1}{2}, \frac{3}{4}k - \frac{1}{2}\right)$$

$C \in lado\ AC \cap s'$

$$C \rightarrow \begin{cases} -x - 3y + 10 = 0 \\ x - y + k = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}k,\ y = \frac{1}{4}k + \frac{5}{2} \rightarrow C = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}k, \frac{1}{4}k + \frac{5}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{CB} = \left(-\frac{1}{4}k - \frac{1}{2}, \frac{3}{4}k - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}k, \frac{1}{4}k + \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}k - 3, \frac{1}{2}k - 3\right)$$

$$|\overrightarrow{CB}| = \frac{k-6}{\sqrt{2}} = \text{base}$$

$$\text{Área} = 4 = \frac{1}{2} \frac{|k-6|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{k-6}{\sqrt{2}}$$

Hay dos posibilidades debido al valor absoluto:

$$\begin{cases} 4 = \dfrac{1}{2}\dfrac{k-6}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{k-6}{\sqrt{2}} \to 16 = (k-6)^2 \to k = 2,\ k = 0 \\ -4 = \dfrac{1}{2}\dfrac{k-6}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{k-6}{\sqrt{2}} \to \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

Si $k = 2 \to$ *lado* $BC: x - y + 2 = 0 \to B = (-1, 1);\ C = (1, 3)$

Si $k = 10 \to$ *lado* $BC: x - y + 10 = 0 \to B = (-3, 7);\ C = (-5, 5)$

104 **$A(1, 1)$ y $B(5, 1)$ son dos vértices de un trapecio rectángulo y uno de sus lados está sobre la recta $y = x + 1$. Calcula los otros dos vértices (hay dos soluciones).**

Podemos comprobar que $A, B \notin r$.

Como un lado está sobre r, los otros dos vértices están en r y, por tanto, A y B son vértices consecutivos.

Además, un vector dirección de r es $\vec{r} = (1, 1)$, que no es proporcional a $\overrightarrow{AB} = (4, 0)$.

Por tanto, $\vec{r} \nparallel \overrightarrow{AB} \to$ los lados AB y CD no son paralelos, luego no son las bases del trapecio.

Podemos construir dos trapecios:

a) ABC_1D_1, donde AB es la altura del trapecio:

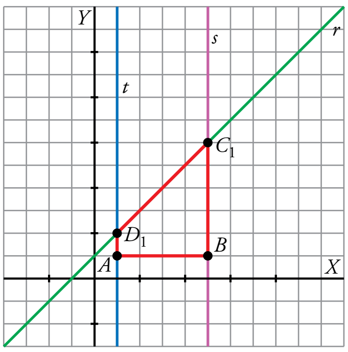
C_1 y D_1 serán los puntos de corte de r con las rectas perpendiculares a AB que pasan por B y A, respectivamente.

- $\left.\begin{array}{l} t \perp \overrightarrow{AB} \to 4x + k = 0 \\ \text{Como } A(1,1) \in t \end{array}\right\} \to 4 + k = 0 \to k = -4 \to t: 4x - 4 = 0 \to t: x = 1$

  Así: $D_1 = t \cap r: \begin{cases} x = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \to y = 2 \to D_1(1, 2)$

- $\left.\begin{array}{l} s \perp \overrightarrow{AB} \to 4x + k = 0 \\ \text{Como } B(5,1) \in s \end{array}\right\} \to 4 \cdot 5 + k = 0 \to k = -20 \to s: 4x - 20 = 0 \to s: x = 5$

  Así: $C_1 = s \cap r: \begin{cases} x = 5 \\ y = x + 1 \end{cases} \to y = 6 \to C_1(5, 6)$



b) ABC_2D_2, donde C_2D_2 es la altura del trapecio:

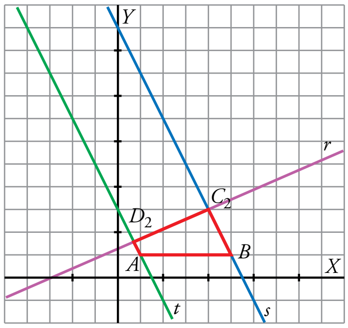
C_2 y D_2 serán los puntos de corte de r con las rectas perpendiculares a r que pasan por B y C, respectivamente (es decir, C_2 y D_2 son los pies de dichas perpendiculares).

- $\left.\begin{array}{l} t \perp r \to y = -x + k \\ \text{Como } A \in t \end{array}\right\} \to 1 = -1 + k \to k = 2 \to t: y = -x + 2$

Así: $D_2 = t \cap r: \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + 1 \end{cases} \to -x + 2 = x + 1 \to 1 = 2x \to x = \dfrac{1}{2} \to y = \dfrac{3}{2} \to D_2\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

- $\left.\begin{array}{l} s \perp r \to y = -x + k \\ \text{Como } B \in s \end{array}\right\} \to 1 = -5 + k \to k = 6 \to s: y = -x + 6$

Así: $C_2 = s \cap r: \begin{cases} y = -x + 6 \\ y = x + 1 \end{cases} \to -x + 6 = x + 1 \to 5 = 2x \to x = \dfrac{5}{2} \to y = \dfrac{7}{2} \to C_2\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$



105 **Toda recta se puede expresar como** ***x cos*** **θ + *y sen* θ = *d*, donde θ es el ángulo que forma la recta con el eje de ordenadas y *d* es su distancia al origen de coordenadas (se conoce como ecuación de Hesse). Escribe en esa forma la recta 4*x* + 3*y* – 12 = 0.**

$dist(O, r) = \dfrac{|-12|}{5}$

$d = \dfrac{|-12|}{5} = \dfrac{12}{5}$

Dividimos entre 5 en la ecuación de la recta y obtenemos:

$\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y = \dfrac{12}{5} \to 0,8x + 0,6y = \dfrac{12}{5}$

$0,8 = cos\ 36°\ 52'$

$0,6 = sen\ 36°\ 52'$

Luego la ecuación que buscamos es: $x\ cos\ 36°\ 52' + y\ sen\ 36°\ 52' = \dfrac{12}{5}$

Página 213

Autoevaluación

1 Se consideran los puntos $A(0, 1)$, $B(4, 9)$ y $C(-4, k)$.

a) Calcula las coordenadas de un punto P que divide al segmento AB en dos partes tales que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$.

b) Determina k para que el punto C sea el simétrico de B respecto de A.

a) $A(0, 1)$, $B(4, 9)$, $C(-4, k)$

Sea $P(x, y)$:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} \rightarrow (x, y-1) = \frac{1}{3}(4-x, 9-y) \rightarrow \begin{cases} 3x = 4 - x \rightarrow x = 1 \\ 3y - 3 = 9 - y \rightarrow y = 3 \end{cases} \rightarrow P(1, 3)$$

b) A debe ser el punto medio de CB.

$$(0, 1) = \left(\frac{4-4}{2}, \frac{9+k}{2}\right) \rightarrow 9 + k = 2 \rightarrow k = -7$$

2 Calcula la ecuación de estas rectas:

a) Pasa por $A(3, 2)$ y por $B(-2, 1)$, en forma paramétrica e implícita.

b) Pasa por (0, 0) y tiene pendiente $m = -\frac{1}{3}$, en forma continua y explícita.

a) Vector dirección $\vec{d} = \overrightarrow{BA} = (5, 1)$. Vector de posición: $\vec{p}(3, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$

$t = y - 2$; $x = 3 + 5(y - 2) = 3 + 5y - 10 \rightarrow x - 5y + 7 = 0$

Ecuación implícita: $x - 5y + 7 = 0$

b) $m = -\frac{1}{3} \rightarrow$ vector dirección: $\vec{d}(3, -1)$

Ecuación continua: $\frac{x}{3} = \frac{y}{-1}$

$3y = -x \rightarrow y = -\frac{x}{3}$

Ecuación explícita: $y = -\frac{x}{3}$

3 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

a) Pasa por $P(2, -3)$ y es perpendicular a $y = \frac{-2}{5}x + 1$.

b) Es paralela a $2x + 3y + 1 = 0$ y su ordenada en el origen es 2.

a) Una recta perpendicular a la dada tiene pendiente $m = \frac{5}{2}$. Como ha de pasar por $P(2, -3)$, su ecuación es:

$$y + 3 = \frac{5}{2}(x - 2) \rightarrow 2y + 6 = 5x - 10 \rightarrow 5x - 2y - 16 = 0$$

b) Una recta paralela a $2x + 3y + 1 = 0$ es $2x + 3y + k = 0$.

Como ha de pasar por (0, 2), debe ser $k = -6$.

La recta buscada es $2x + 3y - 6 = 0$.

4 **Escribe la ecuación del haz de rectas que pasa por (5, 1) y halla la recta de dicho haz que pasa por (0, 1).**

El haz de rectas que pasa por el punto (5, 1) es $a(x-5) + b(y-1) = 0$.

La recta del haz que pasa por (0, 1) es la recta que pasa por (5, 1) y por (0, 1). Por tanto, su ecuación es:

$$\frac{x}{5} = \frac{y-1}{0} \to y = 1$$

5 **Estudia la posición relativa de las rectas r y s y de las rectas r y t, donde:**

$$\boldsymbol{r: 3x + 5y - 34 = 0 \qquad s: y = \frac{5}{3}x \qquad t: \begin{cases} x = k \\ y = 2 \end{cases}}$$

- Posición relativa de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vector dirección de } r,\ \vec{d}_r(-5,3) \\ \text{Vector dirección de } s,\ \vec{d}_s(3,5) \end{array}\right\} r \text{ y } s \text{ son perpendiculares.}$$

- Posición relativa de r y t:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vector dirección de } t,\ \vec{d}_t(1,0) \\ \text{Vector dirección de } r,\ \vec{d}_r(-5,3) \end{array}\right\} r \text{ y } t \text{ son secantes.}$$

6 **Calcula k para que las rectas $r: y = 3$ y $s: y = kx + 1$ formen un ángulo de 60°.**

La recta $r: y = 3$ es paralela al eje de abscisas. Así, la tangente del ángulo que forman r y s coincide con la pendiente de s, que es igual a k. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = k \\ tg\ 60° = \sqrt{3} \end{array}\right\} k = \sqrt{3}$$

7 **Considera los puntos $A(0, k)$ y $B(8, 5)$ y la recta $r: 3x + 4y + 1 = 0$. Determina el valor de k para que:**

a) La distancia entre A y B sea igual a 10.

b) La distancia entre A y r sea 1.

a) $dist(A, B) = \sqrt{8^2 + (5-k)^2} = \sqrt{64 + 25 + k^2 - 10k} = 10 \to k^2 - 10k - 11 = 0 \begin{cases} k = 11 \\ k = -1 \end{cases}$

b) $dist(A, r) = \dfrac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot k + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|4k+1|}{5} = 1 \begin{cases} 4k + 1 = 5 \to k = 1 \\ 4k + 1 = -5 \to k = -3/2 \end{cases}$

8 **En el triángulo de vértices $A(-3, 2)$, $B(1, 3)$ y $C(4, 1)$, halla el ortocentro y el circuncentro.**

ORTOCENTRO: $R = h_A \cap h_B \cap h_C$ donde h_A, h_B y h_C son las tres alturas (desde A, B y C, respectivamente).

- $h_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC} = (3,-2) \to \vec{a} = (2,3) \\ A \in h_A \end{cases} \to h_A: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \to \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-2}{3} \to h_A: 3x - 2y + 13 = 0$

- $h_B \begin{cases} \vec{b} \perp \overrightarrow{AC} = (7,-1) \to \vec{b} = (1,7) \\ B \in h_B \end{cases} \to h_B: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 7t \end{cases} \to x - 1 = \dfrac{y-3}{7} \to h_B: 7x - y - 4 = 0$

- $h_C \begin{cases} \vec{c} \perp \overrightarrow{AB} = (4,1) \to \vec{c} = (1,-4) \\ C \in h_C \end{cases} \to h_C: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 - 4t \end{cases} \to x - 4 = \dfrac{y-1}{-4} \to h_C: 4x + y - 17 = 0$

Bastaría con haber calculado dos de las tres alturas y ver el punto de intersección:

$$h_B \cap h_C: \begin{cases} 7x - y - 4 = 0 \\ 4x + y - 17 = 0 \end{cases} \quad \text{Sumando:}$$

$$11x \quad - 21 = 0 \rightarrow x = \frac{21}{11};\ y = 7x - 4 = 7 \cdot \frac{21}{11} - 4 = \frac{147 - 44}{11} = \frac{103}{11} \rightarrow R\left(\frac{21}{11}, \frac{103}{11}\right)$$

NOTA: Puede comprobarse que el ortocentro, R, está también en h_A. Basta con sustituir en su ecuación.

CIRCUNCENTRO: $S = m_A \cap m_B \cap m_C$, donde m_A, m_B y m_C son las tres mediatrices (desde A, B y C, respectivamente)

- $m_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC} \rightarrow \vec{a} = (2, 3) \\ \text{Punto medio de } BC\text{: } M\left(\frac{5}{2}, 2\right) \in m_A \end{cases} \rightarrow y - 2 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right) \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$

- $m_C \begin{cases} \vec{c} \perp \overrightarrow{AB} = (4, 1) \rightarrow \vec{c} = (1, -4) \\ \text{Punto medio de } AB\text{: } M'\left(-1, \frac{5}{2}\right) \in m_C \end{cases} \rightarrow y - \frac{5}{2} = -4(x + 1) \rightarrow y = -4x - \frac{3}{2}$

Así:

$$S = m_A \cap m_C: \begin{cases} y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} \\ y = -4x - \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} = -4x - \frac{3}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 6x - 7 = -16x - 6 \rightarrow 22x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{22} \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -4 \cdot \frac{1}{22} - \frac{3}{2} = \frac{-4 - 33}{22} = \frac{-37}{22}$$

Así, $S\left(\frac{1}{22}, \frac{-37}{22}\right)$.

NOTA: Se podría calcular m_B y comprobar que $S \in m_B$.

Resuelve

Página 215

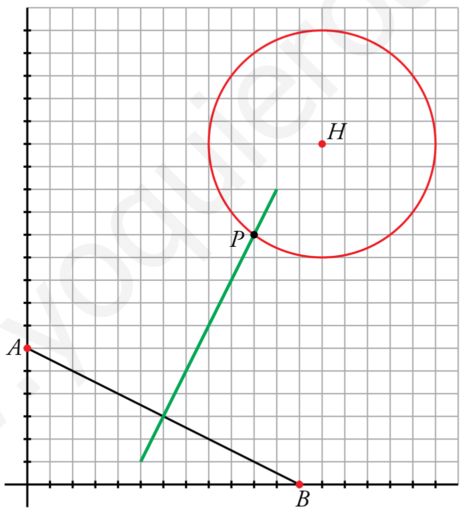
¿Dónde se situará el depósito?

Se quiere instalar un gran depósito de propano para abastecer a una factoría industrial y a dos urbanizaciones.

Han de cumplirse las siguientes condiciones: conviene que el depósito esté lo más cerca de la factoría, pero por razones de seguridad, no puede estar a menos de 500 m de un horno que hay en ella. Por tanto habrá de situarse, exactamente, a 500 m del horno, H. Además, se desea que esté a la misma distancia de A que de B.

Para resolverlo, llevamos los datos a unos ejes cartesianos (1 cuad = 100 m) y suponemos que los puntos H, A y B se sitúan donde se indica en la gráfica de la derecha.

- **La circunferencia roja es el conjunto de puntos que están a 500 m del horno. Analíticamente, son puntos (x, y) cuya distancia a $H(13, 15)$ es 5. Exprésalo mediante una ecuación.**
- **La recta verde es el conjunto de puntos que equidistan de A y de B. Analíticamente, es una recta que pasa por (6, 3) y tiene pendiente 2. Escribe su ecuación.**
- **El punto P donde hemos de situar el depósito de propano se obtiene hallando la intersección de las dos líneas que acabamos de describir. Resuelve el sistema que forman sus ecuaciones para hallar las coordenadas de P.**



- $\sqrt{(x-13)^2+(y-15)^2}=5$
- $\dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y-3}{2} \to 2x-y-9=0$
- $\begin{cases} \sqrt{(x-13)^2+(y-15)^2}=5 \\ 2x-y-9=0 \end{cases} \to x=\dfrac{72}{5},\ y=\dfrac{99}{5};\ x=10,\ y=11$

La solución es $P = (10, 11)$ porque el depósito debe estar cerca de las urbanizaciones.

1 Lugares geométricos

Página 216

Hazlo tú 1. Halla la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son $A(0, 0)$ y $B(6, 4)$.

$X = (x, y)$ punto de la mediatriz.

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-6)^2+(y-4)^2} \ \rightarrow\ x^2+y^2 = x^2+36-12x+y^2+16-8y$$

Mediatriz: $-12x - 8y + 52 = 0 \ \rightarrow\ -3x - 2y + 13 = 0$

Página 217

Hazlo tú 2. Halla la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por r_1: $5x - 12y = 0$ y r_2: $12x + 5y = 0$.

$X = (x, y)$ punto de la bisectriz.

$$\frac{|5x-12y|}{13} = \frac{|12x+5y|}{13} \ \rightarrow\ |5x-12y| = |12x+5y| \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5x-12y = 12x+5y \\ 5x-12y = -(12x+5y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B_1: -7x-17y=0 \\ B_2: 17x-7y=0 \end{cases}$$

Hazlo tú 3. Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de cuadrados de distancias a $P(2, 5)$ y a $Q(4, -1)$ es 40, es decir, $\overline{XP}^2 - \overline{XQ}^2 = 40$.

$X = (x, y)$ punto del lugar geométrico.

$$\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}\right)^2 = 40 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ (x-2)^2 + (y-5)^2 - ((x-4)^2 + (y+1)^2) = 40 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 4x - 12y + 12 = 40 \ \rightarrow\ 4x - 12y - 28 = 0 \text{ es una recta.}$$

1 Halla las ecuaciones de los siguientes lugares geométricos:

a) Mediatriz del segmento de extremos $A(-5, -3)$, $B(7, 1)$. Comprueba que es una recta perpendicular al segmento en su punto medio.

b) Circunferencia de centro $O(-3, 4)$ y radio 5. Comprueba que pasa por el origen de coordenadas.

c) Bisectrices de los ángulos formados por las rectas:

$$r_1: 5x + y + 3 = 0$$
$$r_2: x - 2y + 16 = 0$$

Comprueba que las bisectrices son dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto en que se cortan las rectas r_1 y r_2.

a) Los puntos $X(x, y)$ deben cumplir $dist\,(X, A) = dist\,(X,B)$:

$$\sqrt{(x+5)^2+(y+3)^2} = \sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}$$

Elevamos al cuadrado y desarrollamos:

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$$

$$10x + 14x + 6y + 2y + 34 - 50 = 0 \ \rightarrow\ 24x + 8y - 16 = 0$$

$$3x + y - 2 = 0 \ \rightarrow\ y = -3x + 2$$

- El punto medio de AB es $M(1, -1)$ que, efectivamente, está en la recta (pues verifica la ecuación).

- La pendiente de la recta es $m_r = -3$, y la del segmento es:

  $$m_{AB} = \frac{1-(-3)}{7-(-5)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

  Cumplen que $m_r \cdot m_{AB} = (-3)\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \rightarrow AB \perp r$

b) Los puntos $X(x, y)$ son tales que:

$$dist\,(X, O) = 5 \rightarrow \sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2} = 5 \rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 8y + 25 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 8y = 0$$

c) Son los puntos $X(x, y)$:

$$dist\,(X, r_1) = dist\,(X, r_2) \rightarrow \frac{|5x+y+3|}{\sqrt{26}} = \frac{|x-2y+16|}{\sqrt{5}}$$

Se dan dos casos: $\sqrt{5}\,(5x+y+3) = \sqrt{26}\,(x-2y+16)$

$\sqrt{5}\,(5x+y+3) = -\sqrt{26}\,(x-2y+16)$

Son dos rectas: b_1: $(5\sqrt{5}-\sqrt{26})x + (\sqrt{5}+2\sqrt{26})y + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} = 0$

b_2: $(5\sqrt{5}+\sqrt{26})x + (\sqrt{5}-2\sqrt{26})y + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} = 0$

- Sus pendientes son:

  $$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{-(5\sqrt{5}-\sqrt{26})}{\sqrt{5}+2\sqrt{26}} \\ m_2 &= \frac{-(5\sqrt{5}+\sqrt{26})}{\sqrt{5}-2\sqrt{26}} \end{aligned}\right\} \rightarrow m_1 \cdot m_2 = \frac{25 \cdot 5 - 26}{5 - 4 \cdot 26} = \frac{99}{-99} = -1 \rightarrow b_1 \perp b_2$$

- Calculamos el punto de corte de las rectas iniciales y comprobamos que está también en ambas bisectrices:

  $$\left.\begin{aligned} &r_1: 5x + y + 3 = 0 \rightarrow y = -5x - 3 \\ &r_2: x - 2y + 16 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow x - 2(-5x-3) + 16 = 0 \rightarrow$$

  $$\rightarrow x + 10x + 6 + 16 = 0 \rightarrow 11x = -22 \rightarrow x = -2$$

  Luego: $y = -5(-2) - 3 = 7$

  El punto de corte es $(-2, 7)$, que se puede comprobar fácilmente que está en b_1 y b_2 sustituyendo en sus ecuaciones respectivas:

  $$b_1: (5\sqrt{5}-\sqrt{26}) \cdot (-2) + (\sqrt{5}+2\sqrt{26}) \cdot 7 + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} =$$

  $$= -10\sqrt{5} + 2\sqrt{26} + 7\sqrt{5} + 14\sqrt{26} + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} = 0$$

  $$b_2: (5\sqrt{5}+\sqrt{26}) \cdot (-2) + (\sqrt{5}-2\sqrt{26}) \cdot 7 + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} =$$

  $$= -10\sqrt{5} - 2\sqrt{26} + 7\sqrt{5} - 14\sqrt{26} + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} = 0$$

- Por tanto, b_1 y b_2 son dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto que r_1 y r_2.

2 Estudio de la circunferencia

Página 218

Hazlo tú 1. Escribe la ecuación de la circunferencia de centro (–5, 2) y radio 3.

$(x+5)^2+(y-2)^2=9 \rightarrow x^2+10x+y^2-4y+29=9 \rightarrow x^2+10x+y^2-4y+20=0$

Página 219

Hazlo tú 2. ¿Qué ecuaciones corresponden a circunferencias? Da su centro y su radio.

a) $2x^2+2y^2-8x=0$

b) $x^2-y^2+7x-2=0$

c) $x^2+y^2-3x+4xy-16=0$

d) $x^2+y^2+10x-2y+40=0$

a) $2x^2+2y^2-8x=0 \rightarrow x^2+y^2-4x=0$

Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$$r^2=\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C=\left(\frac{-4}{2}\right)^2=2>0 \rightarrow \text{Sí es circunferencia.}$$

b) $x^2+y^2-7x-2=0$

Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$$r^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2+2=\frac{57}{4}>0 \rightarrow \text{Sí es circunferencia.}$$

c) $x^2+y^2-3x+4xy-16=0$

Hay término en $xy \rightarrow$ No es circunferencia.

d) $x^2+y^2+10x-2y+40=0$

Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$$r^2=\left(\frac{10}{2}\right)^2+\left(\frac{-2}{2}\right)^2-40=-14<0 \rightarrow \text{No es circunferencia.}$$

Hazlo tú 3. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos P del plano cuyo cociente de distancias a los puntos $M(6, 0)$ y $N(-2, 0)$ es 3 (es decir, $\overline{PM}/\overline{PN}=3$)?

$X=(x, y)$ punto del lugar geométrico.

$$\frac{\sqrt{(x-6)^2+y^2}}{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}=3 \rightarrow \sqrt{(x-6)^2+y^2}=3\sqrt{(x+2)^2+y^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow (x-6)^2+y^2=9[(x+2)^2+y^2] \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2-12x+y^2+36=9x^2+36x+9y^2+36 \rightarrow$$

$$\rightarrow 8x^2+8y^2+48x=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2+y^2+6x=0 \rightarrow \text{Es una circunferencia de centro } (-3, 0) \text{ y radio } r=\sqrt{9}=3.$$

1 Halla la ecuación de la circunferencia de centro (–5, 12) y radio 13.

Comprueba que pasa por el punto (0, 0).

$(x+5)^2+(y-12)^2=169 \rightarrow x^2+y^2+10x-24y=0$

Si sustituimos $x=0$, $y=0$ en la ecuación, esta se verifica. Por tanto, la circunferencia pasa por (0, 0).

2 **Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los extremos del segmento AB, $A(-3, 0)$ y $B(5, 0)$, es 50.**

$X = (x, y)$ punto del lugar geométrico.

$$\left(\sqrt{(x+3)^2+y^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-5)^2+y^2}\right)^2=50 \to (x+3)^2+y^2+(x-5)^2+y^2=50 \to$$

$$\to 2x^2+2y^2-4x-16=0 \to x^2+y^2-2x-8=0$$

Es una circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio $r=\sqrt{4+8}=2\sqrt{3}$.

Página 220

Hazlo tú. Halla la posición relativa de las rectas

r_1: $y = x - 1$ $\quad$ r_2: $y = x + 1$ $\quad$ r_3: $y = 3$

respecto de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$.

- Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x+2y+1=0 \\ y=x-1 \end{cases} \to x=4,\ y=3;\ x=0,\ y=-1$$

Hay dos soluciones, se cortan en dos puntos, luego son secantes.

- Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x+2y+1=0 \\ y=x+1 \end{cases} \to \text{No hay solución, luego son exteriores.}$$

- Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x+2y+1=0 \\ y=3 \end{cases} \to x=4,\ y=3$$

Hay una solución, se cortan en un punto, luego son tangentes.

3 **Estudia la posición relativa de la circunferencia**

C: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

respecto de las rectas:

s_1: $3x - 4y - 26 = 0$ $\quad$ **s_2: $5x - 8y + 60 = 0$**

s_3: $3x - 4y - 1 = 0$ $\quad$ **s_4: $x = 5$**

Halla los puntos de corte y de tangencia, si los hubiera.

- $$\left.\begin{aligned} C&: x^2+y^2-6x-4y-12=0 \\ s_1&: 3x-4y-26=0 \end{aligned}\right\} \to 3x=4y+26 \to x=\frac{4}{3}y+\frac{26}{3}$$

$$\left(\frac{4}{3}y+\frac{26}{3}\right)^2+y^2-6\left(\frac{4}{3}y+\frac{26}{3}\right)-4y-12=0 \to$$

$$\frac{16}{9}y^2+\frac{676}{9}+\frac{208}{9}y+y^2-8y-52-4y-12=0 \to$$

$$\to 16y^2+676+208y+9y^2-72y-468-36y-108=0 \to$$

$$\to 25y^2+100y+100=0 \to y^2+4y+4=0 \to (y+2)^2=0 \to$$

$$\to y=-2 \ \ (\text{solución única})$$

$$x=\frac{4}{3}(-2)+\frac{26}{3} \to x=6$$

C y s_1 son tangentes en el punto $(6, -2)$.

- $\left.\begin{array}{l} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_2: 5x - 8y + 60 = 0 \end{array}\right\} \to 5x = 8y - 60 \to x = \frac{8}{5}y - 12$

  $\left(\frac{8}{5}y - 12\right)^2 + y^2 - 6\left(\frac{8}{5}y - 12\right) - 4y - 12 = 0 \to \frac{64}{25}y^2 + 144 - \frac{192}{5}y + y^2 - \frac{48}{5} + 72 - 4y - 12 = 0 \to$

  $\to 64y^2 + 3\,600 - 960y + 25y^2 - 240 + 1\,800 - 100y - 300 = 0 \to$

  $\to 89y^2 - 1\,060y + 4\,860 = 0 \to$ No tiene solución.

  s_2 es exterior a la circunferencia C.

- $\left.\begin{array}{l} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_3: 3x - 4y - 1 = 0 \end{array}\right\} \to 3x = 4y + 1 \to x = \frac{4}{3}y + \frac{1}{3}$

  $\left(\frac{4}{3}y + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 - 6\left(\frac{4}{3}y + \frac{1}{3}\right) - 4y - 12 = 0 \to \frac{16}{9}y^2 + \frac{1}{9} + \frac{8}{9}y + y^2 - 8y - 2 - 4y - 12 = 0 \to$

  $\to 16y^2 + 1 + 8y + 9y^2 - 72y - 18 - 36y - 108 = 0 \to$

  $\to 25y^2 - 100y - 125 = 0 \to y^2 - 4y - 5 = 0 \Big< \begin{array}{l} y_1 = 5 \to x_1 = 7 \\ y_2 = -1 \to x_2 = -1 \end{array}$

  C y s_3 son secantes en los puntos (7, 5) y (–1, –1).

- $\left.\begin{array}{l} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_4: x = 5 \end{array}\right\} \to 25 + y^2 - 30 - 4y - 12 = 0 \to y^2 - 4y - 17 = 0$

  $y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-17)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{84}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{21}}{2} = 2 \pm \sqrt{21} \Big< \begin{array}{l} y_1 = 2 + \sqrt{21} \\ y_2 = 2 - \sqrt{21} \end{array}$

  C y s_4 se cortan en los puntos $(5, 2 + \sqrt{21})$ y $(5, 2 - \sqrt{21})$.

4 **¿Para qué valores de b la recta $y = x + b$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$?**

La recta será tangente a la circunferencia si la distancia del centro de la circunferencia a la recta es igual al radio de la circunferencia.

$C:\ x^2 + y^2 = 9 \to O = (0, 0),\ R = 3$

$r: y = x + b \to x - y + b = 0$

$dist\,(O, r) = \frac{|0 - 0 + b|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}} = 3 \to b = \pm 3\sqrt{2}$

5 **Halla la posición relativa de $C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ respecto de las rectas:**

$r_1: x + y = 10$ **$r_2: 4x + 3y + 20 = 0$**

$r_3: 3x - 4y = 0$ **$r_4: y = -2$**

$C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0 \to O = (3, -4),\ r = 5$

- $dist\,(O, r_1) = \frac{|3 - 4 - 10|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{11}{\sqrt{2}} \approx 7{,}78 > 5 \to r_1$ es exterior a C.

- $dist\,(O, r_2) = \frac{|4 \cdot 3 + 3(-4) + 20|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{20}{5} = 4 < 5 \to r_2$ y C se cortan en dos puntos.

- $dist\,(O, r_3) = \frac{|3 \cdot 3 - 4(-4)|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{25}{5} = 5 \to r_3$ y C son tangentes.

- $dist\,(O, r_4) = \frac{|-4 + 2|}{\sqrt{0 + 1}} = \frac{2}{1} = 2 < 5 \to r_4$ y C se cortan en dos puntos.

Página 221

6 Halla la potencia de $P(-3, 8)$ a las siguientes circunferencias:

$$\mathbf{C_1: x^2 + y^2 - 14x + 20 = 0}$$

$$\mathbf{C_2: O(4, -3),\ r = 20}$$

Di si P es interior o exterior a C_1 y a C_2.

$C_1: x^2 + y^2 - 14x + 20 = 0 \ \rightarrow\ O_1 = (7, 0),\ r_1 = \sqrt{49 - 20} = \sqrt{29}$

$C_2: O(4, -3),\ r = 20$

$P(-3, 8)$

$\mathcal{P}(P \text{ a } C_1) = (7 + 3)^2 + (0 - 8)^2 - (\sqrt{29})^2 = 100 + 64 - 29 = 135 > 0 \ \rightarrow\ P$ es exterior a C_1.

$\mathcal{P}(P \text{ a } C_2) = (4 + 3)^2 + (-3 - 8)^2 - (20)^2 = 49 + 121 - 400 = -230 < 0 \ \rightarrow\ P$ es interior a C_2.

7 Halla el eje radical de estas circunferencias:

$$\mathbf{C_1: x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = 0}$$

$$\mathbf{C_2: x^2 + y^2 - 6y = 0}$$

Comprueba que es una recta perpendicular a la línea de sus centros.

Calculamos las potencias de un punto genérico $P(x, y)$ a C_1 y a C_2:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{P}(P \text{ a } C_1) = x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = 0 \\ \mathcal{P}(P \text{ a } C_2) = x^2 + y^2 - 6y = 0 \end{array}\right\} \text{ Igualamos ambas expresiones:}$$

$x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = x^2 + y^2 - 6y \ \rightarrow\ -4x + 18y - 11 = 0$

Ecuación del eje radical: $4x - 18y + 11 = 0 \ \rightarrow\ m = \dfrac{4}{18} = \dfrac{2}{9}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Centro de } C_1 \ \rightarrow\ O_1 = (2, -6) \\ \text{Centro de } C_2 \ \rightarrow\ O_2 = (0, 3) \end{array}\right\} \ \overrightarrow{O_1 O_2} = (-2, 9) \ \rightarrow$$

$\rightarrow$ La pendiente de la recta que une O_1 y O_2 es $m' = -\dfrac{9}{2}$.

Como $m \cdot m' = \left(\dfrac{2}{9}\right) \cdot \left(-\dfrac{9}{2}\right) = -1$, el eje radical y la recta que une O_1 y O_2 son perpendiculares.

3 Las cónicas como lugares geométricos

Página 223

Hazlo tú. Dados los puntos $F_1(-3, 0)$ y $F_2(1, -2)$ y la recta $r: x + 2y - 5 = 0$, obtén las ecuaciones de:

a) La elipse de focos F_1 y F_2 y constante 20.

b) La hipérbola de focos F_1 y F_2 y constante 2.

c) La parábola cuyo foco es F_1 y cuya directriz es r.

a) $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 20$

b) $\left|\sqrt{(x+3)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}\right| = 2$

c) $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = \dfrac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{1+4}}$

1 Halla la ecuación de la elipse de focos $F_1(4, 0)$ y $F_2(-4, 0)$ y cuya constante es 10.

Una vez puesta la ecuación inicial, pasa una raíz al segundo miembro, eleva al cuadrado (¡atención con el doble producto!), simplifica, aísla la raíz, vuelve a elevar al cuadrado y simplifica hasta llegar a la ecuación $9x^2 + 25y^2 = 225$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la elipse, entonces:

$dist\ (P, F_1) + dist\ (P, F_2) = 10$

$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10$

$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

Elevamos al cuadrado: $(x-4)^2 + y^2 = 100 + (x+4)^2 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

Operamos: $x^2 - 8x + 16 + y^2 = 100 + x^2 + 8x + 16 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

$20\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 16x + 100$

$5\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 4x + 25$

Elevamos al cuadrado: $25(x^2 + 8x + 16 + y^2) = 16x^2 + 200x + 625$

Simplificamos:

$25x^2 + 200x + 400 + 25y^2 = 16x^2 + 200x + 625 \rightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225$

2 Halla la ecuación de la hipérbola de focos $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$ y cuya constante es 6. Simplifica como en el ejercicio anterior hasta llegar a la expresión $16x^2 - 9y^2 = 144$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la hipérbola, entonces:

$|dist\ (P, F_1) - dist\ (P, F_2)| = 6$

$dist\ (P, F_1) - dist\ (P, F_2) = \pm 6$

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \pm 6$

$\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \pm 6 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

Elevamos al cuadrado:

$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 36 + x^2 + 10x + 25 + y^2 \pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

$\pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 20x + 36$

$\pm 3\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 5x + 9$

Elevamos al cuadrado: $9(x^2 + 10x + 25 + y^2) = 25x^2 + 90x + 81$

$9x^2 + 90x + 225 + 9y^2 = 25x^2 + 90x + 81$

$16x^2 - 9y^2 = 144$

3 Halla la ecuación de la parábola de foco $F(-1, 0)$ y directriz $r: x = 1$. Simplifica hasta llegar a la expresión $y^2 = -4x$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, entonces:

$dist\,(P, F) = dist\,(P, r)$

$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = |x - 1|$

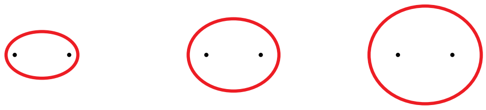
Elevamos al cuadrado: $x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 2x + 1$

Simplificamos: $y^2 = -4x$

4 Estudio de la elipse

Página 224

1 ¿Verdadero o falso? Si varias elipses tienen la misma distancia focal, cuanto más grande sea la constante $k = 2a$, mayor es la excentricidad.



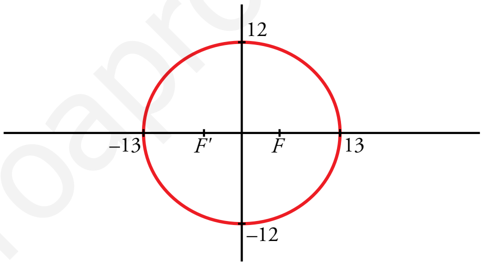
Falso. Al contrario; como $e = \frac{c}{a}$, si el numerador c es constante, cuanto mayor sea el denominador a, menor será el cociente, que es la excentricidad.

Página 225

2 Una elipse tiene sus focos en los puntos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y su constante es $k = 26$.

Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida. Represéntala.

- Semieje mayor: $k = 26 \rightarrow 2a = 26 \rightarrow a = 13$
- Semidistancia focal: $\overline{FF'} = 10 \rightarrow 2c = 10 \rightarrow c = 5$
- Semieje menor: $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$
- Excentricidad: $\frac{c}{a} = \frac{5}{13} \approx 0,38 \rightarrow exc \approx 0,38$
- Ecuación reducida: $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$



Página 226

3 Representa y di su excentricidad.

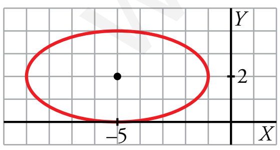
a) $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

b) $9x^2 + 16y^2 = 144$

c) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{64} = 1$

d) $x^2 + 4(y-3)^2 = 4$

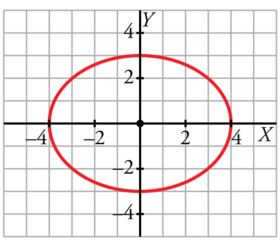
a)



$c = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$

$exc = \frac{\sqrt{12}}{4} \approx 0,87$

b)

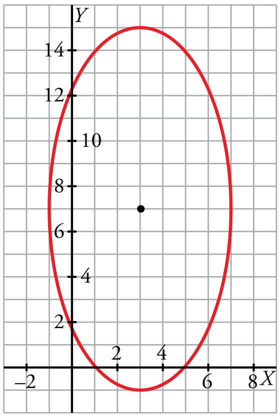


$9x^2 + 16y^2 = 144 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{144}{9}} + \frac{y^2}{\frac{144}{16}} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 16 = a^2,\ 9 = b^2 \rightarrow c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$

$exc = \frac{\sqrt{7}}{4}$

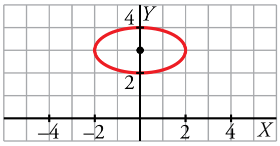
c)



$$c = \sqrt{64-16} = \sqrt{48}$$

$$exc = \frac{\sqrt{48}}{8} \approx 0,87$$

d)



$$x^2 + 4(y-3)^2 = 4 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{4} + (y-3)^2 = 1 \;\rightarrow\; 4 = a^2,\; 1 = b^2$$

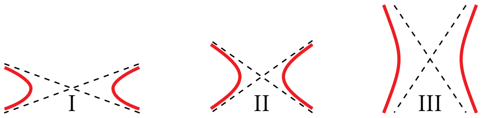
$$a = 2,\; b = 1;\; c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

$$exc = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5 Estudio de la hipérbola

Página 228

1 ¿Verdadero o falso?



a) La hipérbola III es la más excéntrica.

b) La hipérbola I es la menos excéntrica.

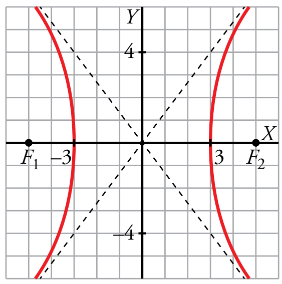
a) Verdadero, porque el valor absoluto de la pendiente de las asíntotas, $m = \left|\frac{b}{a}\right|$, es muy grande, luego la excentricidad, $e = \frac{c}{a}$, será más grande, puesto que $c > b$.

b) Verdadero, porque las asíntotas $y = \frac{b}{a}x$ tienen poca pendiente en valor absoluto, luego la excentricidad, $e = \frac{c}{a} < \left|\frac{b}{a}\right|$, será más pequeña.

2 Una hipérbola tiene sus focos en los puntos $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$ y su constante es $k = 6$.

Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida. Represéntala.

- Semieje: $k = 2a = 6 \rightarrow a = 3$
- Semidistancia focal: $\overline{F_1F_2} = 10 \rightarrow c = 5$
- Cálculo de b: $b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow b = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4 \rightarrow b = 4$
- Excentricidad: $exc = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$
- Asíntotas: $y = \frac{4}{3}x$; $y = -\frac{4}{3}x$
- Ecuación reducida: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$



Página 229

3 Representa.

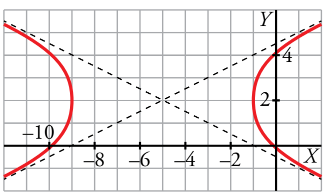
a) $\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

b) $9x^2 - 16y^2 = 144$

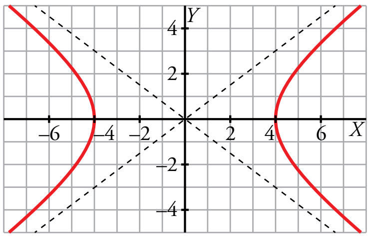
c) $\frac{(y-7)^2}{64} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$

d) $x^2 - 4(y-3)^2 = 4$

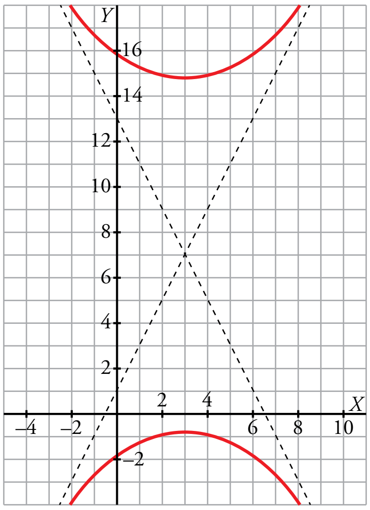
a)



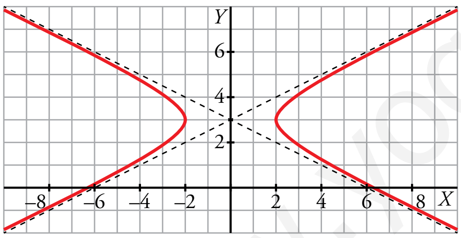
b) $9x^2 - 16y^2 = 144 \rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$



c)



d) $x^2 - 4(y-3)^2 = 4 \rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{(y-3)^2}{1} = 1$



6 Estudio de la parábola

Página 230

1 Halla la ecuación reducida de la parábola de foco $F(1{,}5;\ 0)$ y directriz $x = -1{,}5$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola: $dist\,(P, F) = dist\,(P, d)$, donde d es la directriz y F el foco.

$\sqrt{(x-1{,}5)^2 + y^2} = |x + 1{,}5|$

$x^2 - 3x + 2{,}25 + y^2 = x^2 + 3x + 2{,}25 \ \rightarrow\ y^2 = 6x$

- De otra forma:

  Distancia del foco a la directriz: $p = 3$

  Ecuación reducida: $y^2 = 6x$

2 Halla la ecuación reducida de la parábola de foco $F(0, 2)$ y directriz $y = -2$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola: $dist\,(P, F) = dist\,(P, d)$, donde d es la directriz y F el foco.

$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y + 2|$

$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4 \ \rightarrow\ x^2 = 8y$

- De otra forma:

  Distancia del foco a la directriz: $p = 4$

  Ecuación reducida: $x^2 = 8y$

Ejercicios y problemas resueltos

Página 232

1. Determinación de una circunferencia conocidos tres puntos por los que pasa

Hazlo tú. Obtén el centro, el radio y la ecuación de la circunferencia que pasa por $P(-1, -3)$, $Q(2, -2)$ y $R(3, 0)$.

r: mediatriz de PQ

$\overrightarrow{PQ} = (2, -2) - (-1, -3) = (3, 1)$

r: tiene vector de dirección $\vec{d} = (-1, 3)$ y pasa por $M_{PQ} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

$$r: \frac{x - \frac{1}{2}}{-1} = \frac{y + \frac{5}{2}}{3} \to 3x + y + 1 = 0$$

s: mediatriz de PR

$\overrightarrow{PR} = (2, -2) - (3, 0) = (1, 2)$

r: tiene vector de dirección $\vec{d} = (-2, 1)$ y pasa por $M_{PR} = \left(\frac{5}{2}, -1\right)$

$$r: \frac{x - \frac{5}{2}}{-2} = \frac{y + 1}{1} \to 2x + 4y - 1 = 0$$

$$\text{Centro} \to \begin{cases} 3x + \ \ y + 1 = 0 \\ 2x + 4y - 1 = 0 \end{cases} \to x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2} \to C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Radio} = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

La ecuación de la circunferencia es: $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

2. Identificación de un lugar geométrico

Hazlo tú. Resuelve este mismo ejercicio siendo $A(0, 2)$ y $r: y = -2$.

$X(x, y)$ es un punto genérico del lugar geométrico buscado.

$P = (x_0, -2) \in r$

$\overrightarrow{PX} = (x_0 - x, -2 - y)$ ha de ser perpendicular a la recta r; es decir, paralelo al eje Y o, lo que es lo mismo, su primera coordenada ha de valer 0. Por tanto, $x = x_0$.

Al ser X el centro de la circunferencia, debe equidistar de A y de P:

$$dist\,(X, A) = dist\,(X, P) \to \sqrt{(-x)^2 + (2 - y)^2} = \sqrt{(-2 - y)^2} \to$$

$$\to x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4 \to x^2 = 8y$$

Se trata de una parábola cuyo foco es $A(0, 2)$ y cuya directriz es $r: y = -2$.

Página 233

3. Descripción de una cónica a partir de su ecuación

Hazlo tú. **Describe las siguientes cónicas, obtén sus elementos y dibújalas:**

a) $\boldsymbol{x^2 - 2y + 2 = 0}$

b) $\boldsymbol{x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0}$

c) $\boldsymbol{x^2 + 9y^2 - 2x - 8 = 0}$

d) $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0}$

a) $x^2 - 2y + 2 = 0 \;\rightarrow\;$ Parábola con eje vertical.

$(x - x_0)^2 = 2p\,(y - y_0)$

$x^2 = 2y - 2 = 2(y - 1) \;\rightarrow\; p = 1$

Foco: $F = \left(0, 1 + \dfrac{1}{2}\right) = \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = 1 - \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; y = \dfrac{1}{2}$

b) $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

Es una hipérbola porque los coeficientes de x^2 e y^2 tienen distinto signo.

Completamos cuadrados:

$(x^2 - 2x + 1) - 4y^2 - 3 - 1 = 0 \;\rightarrow\; (x - 1)^2 - 4y^2 = 4 \;\rightarrow\; \dfrac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 1$

Centro: $O = (1, 0)$. Focos en el eje X.

Semiejes: $a = 2$, $b = 1$

Semidistancia focal: $c = \sqrt{5}$

Excentricidad: $exc = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Asíntotas: $y = \pm\dfrac{1}{2}(x - 1)$

c) $x^2 + 9y^2 = 2x - 8 = 0$

Los coeficientes de x^2 e y^2 son distintos, pero del mismo signo; es una elipse.

Completamos cuadrados:

$(x^2 - 2x + 1) + 9y^2 - 8 - 1 = 0 \;\rightarrow\; (x - 1)^2 + 9y^2 = 9 \;\rightarrow\; \dfrac{(x-1)^2}{9} + y^2 = 1$

Es una elipse de centro $O(1, 0)$ y eje mayor paralelo al eje X.

Semiejes: $a = 3$, $b = 1$

Semidistancia focal: $c = \sqrt{8}$

Excentricidad: $exc = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$

d) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$

Se trata de una circunferencia porque los coeficientes de x^2 e y^2 son 1 y no hay término en xy.

Completamos cuadrados:

$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + 9 - 4 - 9 = 0 \;\rightarrow\; (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$

Circunferencia de centro $O(-2, -3)$ y radio $r = 2$.

Página 234

4. Determinación de la ecuación de una elipse no centrada en el origen

Hazlo tú. **Obtén la ecuación de la elipse de focos $F'(3, -2)$ y $F(3, 6)$ y cuya excentricidad es $e = \frac{4}{5}$.**

$O = M_{FF'} = (3, 2)$

$dist\,(F', F) = 8 = 2c \to c = 4$

$e = \frac{4}{5} = \frac{4}{a} \to a = 5$

$b = \sqrt{25 - 16} = 3$

La ecuación requerida es: $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

5. Determinación de la ecuación de una hipérbola no centrada en el origen

Hazlo tú. **Resuelve este mismo ejercicio si las asíntotas son $y = \pm 2(x - 1)$ y $|a - b| = 1/2$.**

El centro es el punto de intersección de ambas asíntotas.

$$\begin{cases} y = 2(x-1) \\ y = -2(x-1) \end{cases} \to x = 1,\ y = 0 \to O = (1, 0)$$

Para calcular a y b resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = 2 \\ |a - b| = \frac{1}{2} \end{cases}$$

que nos da los dos sistemas siguientes:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = 2 \\ a - b = -\frac{1}{2} \end{cases} \to a = \frac{1}{2},\ b = 1$$

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = 2 \\ a - b = \frac{1}{2} \end{cases} \to a = -\frac{1}{2},\ b = -1 \text{ No es válido el resultado.}$$

La ecuación buscada es:

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{1} = 1 \text{ o } \frac{y^2}{1} - \frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} = 1 \text{ dependiendo del eje en el que estén los focos.}$$

6. Determinación de la ecuación de una parábola no centrada en el origen

Hazlo tú. **Halla la ecuación de una parábola de vértice $V(1, 1)$ y foco $F(1, 4)$.**

$V = (1, 1)$ y F pertence a la recta $x = 1$, por lo que la directriz tiene la forma $d: y = k$.

$dist\,(V, F) = dist\,(V, d) = 3 \to d: y = -2$

Ecuación de la parábola:

$$dist\,(P, F) = dist\,(P, d) \to \sqrt{(1-x)^2 + (4-y)^2} = |y + 2| \to$$

$$\to x^2 - 2x + y^2 - 8y + 17 = y^2 + 4y + 4 \to x^2 - 2x - 12y + 13 = 0$$

$(x - 1)^2 = 12(y - 1)$

Página 235

7. Cálculo de la recta tangente a una elipse desde un punto exterior a la misma

Hazlo tú. Halla las rectas que pasan por $P(0, 5)$ y son tangentes a la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Haz de rectas que pasan por $P = (0, 5)$:

$y = mx + 5$, $m \in \mathbb{R}$, más la recta vertical $x = 0$

$$\begin{cases} y = mx + 5 \\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \end{cases} \to \frac{x^2}{25}+\frac{(mx+5)^2}{16}=1 \to 16x^2 + 25(mx+5)^2 = 400 \to$$

$$\to 25m^2x^2 + 250mx + 16x^2 + 625 = 400 \to (25m^2+16)x^2 + 250mx + 225 = 0$$

Si las rectas son tangentes a la elipse, el discriminante de esta ecuación tiene que ser 0.

$$\Delta = (250m)^2 - 4 \cdot (25m^2+16) \cdot 225 = 0 \to m = -\frac{3}{5},\ m = \frac{3}{5}$$

Las rectas tangentes son:

$$r: y = -\frac{3}{5}x + 5;\quad r': y = \frac{3}{5}x + 5$$

8. Cálculo de la recta tangente a una parábola en un punto

Hazlo tú. Resuelve este ejercicio para la parábola $y^2 = -4x$ y el punto $A(-4, 4)$.

Haz de rectas que pasan por $A = (-4, 4)$:

$y = m(x+4) + 4$, $m \in \mathbb{R}$, más la recta vertical $x = -4$

$$y^2 = -4x \quad \begin{cases} y = m(x+4)+4 \\ y^2 = -4x \end{cases} \to y = m\left(\frac{y^2}{-4}+4\right)+4 \to 4y = -my^2 + 16m + 16$$

$$my^2 + 4y - 16m - 16 = 0$$

Si las rectas son tangentes a la parábola, el discriminante de esta ecuación tiene que ser 0.

$$\Delta = 16 - 4 \cdot m \cdot (-16m - 16) = 0 \to m = -\frac{1}{2}$$

La recta tangente es:

$$y = -\frac{1}{2}(x+4) + 4$$

Ejercicios y problemas guiados

Página 236

1. Comprobación de que $y = 1/x$ es una hipérbola

Comprobar que la curva $y = \frac{1}{x}$, conocida de cursos anteriores, es una hipérbola de constante $k = 2\sqrt{2}$ y focos $F\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ y $F'\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

a) $|dist\ (P, F') - dist\ (P, F)| = 2\sqrt{2}$

$$\left|\sqrt{(\sqrt{2}-x)^2+(\sqrt{2}-y)^2}-\sqrt{(-\sqrt{2}-x)^2+(-\sqrt{2}-y)^2}\right|=2\sqrt{2}$$

b) $\sqrt{(\sqrt{2}-x)^2+(\sqrt{2}-y)^2}=2\sqrt{2}+\sqrt{(-\sqrt{2}-x)^2+(-\sqrt{2}-y)^2}$

$$\left(\sqrt{(\sqrt{2}-x)^2+(\sqrt{2}-y)^2}\right)^2=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{(-\sqrt{2}-x)^2+(-\sqrt{2}-y)^2}\right)^2$$

$$(\sqrt{2}-x)^2+(\sqrt{2}-y)^2=4\sqrt{2}\,\sqrt{x^2+2\sqrt{2}x+y^2+2\sqrt{2}y+4}+2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y+x^2+y^2+12$$

$$x^2-2\sqrt{2}x+y^2-2\sqrt{2}y+4=4\sqrt{2}\,\sqrt{x^2+2\sqrt{2}x+y^2+2\sqrt{2}y+4}+2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y+x^2+y^2+12$$

$$-4\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y-8=4\sqrt{2}\,\sqrt{x^2+2\sqrt{2}x+y^2+2\sqrt{2}y+4}$$

$$-4\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y-4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{2}\sqrt{x^2+2\sqrt{2}x+y^2+2\sqrt{2}y+4}$$

$$-x-y-\sqrt{2}=\sqrt{x^2+2\sqrt{2}x+y^2+2\sqrt{2}y+4}$$

$$(-x-y-\sqrt{2})^2=\left(\sqrt{x^2+2\sqrt{2}x+y^2+2\sqrt{2}y+4}\right)^2$$

$$x^2+2xy+2\sqrt{2}x+y^2+2\sqrt{2}y+2=x^2+2\sqrt{2}x+y^2+2\sqrt{2}y+4$$

$$2xy=2 \;\rightarrow\; xy=1 \;\rightarrow\; y=\frac{1}{x}$$

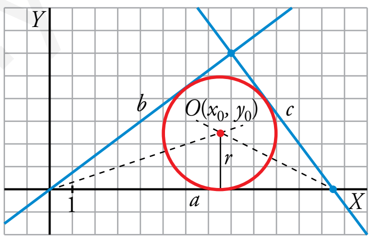
2. Circunferencia inscrita en un triángulo

Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo de lados a, b y c, siendo:

a: $y = 0$

b: $3x - 4y = 0$

c: $4x + 3y - 50 = 0$



- $dist\ (P, a) = dist\ (P, b) \;\rightarrow\; \left|\frac{y}{1}\right|=\left|\frac{3x-4y}{5}\right|$

  $5y = 3x - 4y$

  $-5y = 3x - 4y \;\rightarrow$ No vale porque la bisectriz del ángulo tiene pendiente positiva.

- $dist\ (P, a) = dist\ (P, b) \;\rightarrow\; \left|\frac{y}{1}\right|=\left|\frac{4x+3y-50}{5}\right|$

  $5y = 4x + 3y - 50 \;\rightarrow$ No vale porque la bisectriz del ángulo tiene pendiente negativa.

  $-5y = 4x + 3y - 50$

- Incentro:

$$\begin{cases}5y=3x-4y\\ -5y=4x+3y-50\end{cases} \;\rightarrow\; x=\frac{15}{2},\ y=\frac{5}{2} \;\rightarrow\; O=\left(\frac{15}{2},\frac{5}{2}\right)$$

- $r = dist\,(O, a) = \left|\dfrac{\frac{5}{2}}{1}\right| = \dfrac{5}{2}$
- Ecuación de la circunferencia inscrita:

$$\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 15x + y^2 - 5y + \frac{125}{2} = \frac{25}{4} \;\to\; 4x^2 + 4y^2 - 60x - 20y + 225 = 0$$

3. Rectas tangente y normal a una circunferencia en un punto

Sean r y s, respectivamente, las rectas tangente y normal a una circunferencia en un punto P.

$$r: x + y - 7 = 0 \qquad s: x - y - 9 = 0$$

Calcular la ecuación de la circunferencia sabiendo que su radio es $r = 2\sqrt{2}$.

Punto de tangencia:

$$\begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ x - y - 9 = 0 \end{cases} \to\; x = 8,\; y = -1 \;\to\; P = (8, -1)$$

Centro de la circunferencia:

$$\begin{cases} x - y - 9 = 0 \\ \sqrt{(8-x)^2 + (1-y)^2} = 2\sqrt{2} \end{cases} \to \begin{cases} x - y - 9 = 0 \\ (8-x)^2 + (-1-y)^2 = 8 \end{cases} \to$$

$$\to \left.\begin{cases} x - y - 9 = 0 \\ x^2 - 16x + y^2 + 2y + 65 = 8 \end{cases}\right\} \begin{array}{l} \to\; x = 9 + y \\ \to\; (9+y)^2 - 16(9+y) + y^2 + 2y + 65 = 8 \;\to\; y = 1,\; y = -3 \end{array}$$

$$\begin{cases} y = 1 \;\to\; x = 10 \\ y = -3 \;\to\; x = 6 \end{cases} \to \begin{cases} O = (10, 1) \\ O = (6, -3) \end{cases}$$

Hay dos circunferencias:

$$(x - 10)^2 + (y - 1)^2 = 8$$

$$(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 8$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 237

Para practicar

Lugares geométricos

1 **Halla, en cada caso, la mediatriz del segmento AB.**

a) $A(5, -1)$ $B(-3, 1)$

b) $A(3, 6)$ $B(-1, 6)$

Comprueba que es una recta perpendicular a AB.

$X = (x, y)$ punto genérico de la mediatriz.

a) $dist\ (X, A) = dist\ (X, B)$

$$\sqrt{(5-x)^2+(-1-y)^2} = \sqrt{(-3-x)^2+(1-y)^2} \to x^2 - 10x + y^2 + 2y + 26 = x^2 + 6x + y^2 - 2y + 10$$

Mediatriz: $-16x + 4y + 16 = 0 \to \vec{d} = (-4, -16)$

$\overrightarrow{AB} = (-8, 2)$

$(-8, 2) \cdot (-4, -16) = 0$, luego las rectas son perpendiculares.

b) $dist\ (X, A) = dist\ (X, B)$

$$\sqrt{(3-x)^2+(6-y)^2} = \sqrt{(-1-x)^2+(6-y)^2} \to x^2 - 6x + y^2 - 12y + 45 = x^2 + 2x + y^2 - 12y + 37$$

Mediatriz: $-8x + 8 = 0 \to \vec{d} = (0, 8)$

$\overrightarrow{AB} = (-4, 0)$

$(0, 8) \cdot (-4, 0) = 0$, luego las rectas son perpendiculares.

2 **Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya diferencia de cuadrados de distancias a los puntos $A(0, 0)$ y $B(6, 3)$ es 15. ¿Qué figura obtienes?**

$X = (x, y)$ punto genérico del lugar geométrico.

$|x^2 + y^2 - ((6 - x)^2 + (3 - y)^2)| = 15$

$|12x + 6y - 45| = 15$

$$\begin{cases} 12x + 6y - 45 = 15 \\ 12x + 6y - 45 = -15 \end{cases} \to \begin{cases} 12x + 6y - 60 = 0 \\ 12x + 6y - 30 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas paralelas.

3 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $4x - 3y + 11 = 0$ es 6.**

$$P(x, y) \text{ cumple que } dist\ (P, r) = 6 \to \frac{|4x - 3y + 11|}{\sqrt{16+9}} = 6 \to$$

$$\to |4x - 3y + 11| = 30 \to \begin{cases} 4x - 3y + 11 = 30 \\ 4x - 3y + 11 = -30 \end{cases} \to \begin{cases} r_1: 4x - 3y - 19 = 0 \\ r_2: 4x - 3y + 41 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas paralelas entre sí y paralelas, a su vez, a la recta dada.

4 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas r y s. Interpreta el resultado.**

$$r: 3x - 5y + 11 = 0 \qquad s: 3x - 5y + 3 = 0$$

$P(x, y)$ tales que $d(P, r) = d(P, s) \rightarrow \dfrac{|3x-5y+11|}{\sqrt{34}} = \dfrac{|3x-5y+3|}{\sqrt{34}} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x-5y+11 = 3x-5y+3 \rightarrow 11 = 3 \text{ ¡¡Imposible!!} \\ 3x-5y+11 = -3x+5y-3 \rightarrow 6x-10y+14=0 \rightarrow r: 3x-5y+7 = 0 \end{cases}$$

Es una recta paralela a las dos rectas dadas que, a su vez, son paralelas entre sí, como puede verse por sus coeficientes, pues:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = 1 \neq \frac{C}{C'} = \frac{11}{3}$$

5 **Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas r y s:**

$$r: 4x - 3y + 8 = 0 \qquad s: 12x + 5y - 7 = 0$$

Son todos los puntos $P(x, y)$ tales que $d(P, r) = d(P, s)$:

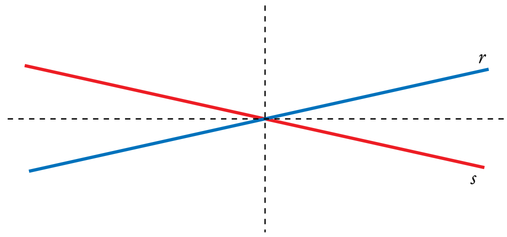
$$\frac{|4x-3y+8|}{\sqrt{25}} = \frac{|12x+5y-7|}{\sqrt{169}} = \frac{|4x-3y+8|}{5} = \frac{|12x+5y-7|}{13} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 13(4x-3y+8) = 5(12x+5y-7) \\ 13(4x-3y+8) = -5(12x+5y-7) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 52x-39y+104 = 60x+25y-35 \\ 52x-39y+104 = -60x-25y+35 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x+64y-139=0 \\ 112x-14y+69=0 \end{cases}$$

Luego hay dos soluciones, bisectrices de los ángulos cóncavo y convexo que forman las rectas r y s.

Ambas bisectrices se cortan en el punto de corte de las rectas r y s, y son perpendiculares.



Circunferencias

6 **Halla, en cada caso, el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto A es d.**

a) $A(0, 5)$ y $d = 2$

b) $A(0, 0)$ y $d = 1$

c) $A(-2, 0)$ y $d = \frac{1}{2}$

d) $A(-1, -5)$ y $d = \frac{3}{5}$

$X = (x, y)$ punto genérico del lugar geométrico.

a) $dist(X, A) = d$

$\sqrt{x^2 + (y-5)^2} = 2 \rightarrow x^2 + (y-5)^2 = 4 \rightarrow$ Circunferencia de centro $A = (0, 5)$ y radio $d = 2$.

b) $dist(X, A) = d$

$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow$ Circunferencia de centro $A = (0, 0)$ y radio $d = 1$.

c) *dist* $(X, A) = d$

$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\frac{1}{2} \rightarrow (x+2)^2+y^2=\frac{1}{4} \rightarrow$ Circunferencia de centro $A = (-2, 0)$ y radio $d=\frac{1}{2}$.

d) *dist* $(X, A) = d$

$\sqrt{(x+1)+(y+5)^2}=\frac{3}{5} \rightarrow (x+1)^2+(y+5)^2=\frac{9}{25} \rightarrow$ Circunferencia de centro $A = (-1, -5)$ y radio $d=\frac{3}{5}$.

7 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuyo cociente de distancias a los puntos $A(0, 6)$ y $B(0, 3)$ es 2, es decir:**

$$\frac{dist(P, A)}{dist(P, B)}=2$$

$X = (x, y)$ punto genérico del lugar geométrico.

$$\frac{dist\,(P, A)}{dist\,(P, B)}=\frac{\sqrt{x^2+(y-6)^2}}{\sqrt{x^2+(y-3)^2}}=2$$

$x^2 + (y-6)^2 = 2(x^2 + (y-3)^2) \rightarrow x^2 + y^2 - 12y + 36 = 2x^2 + 2y^2 - 12y + 18 \rightarrow x^2 + y^2 = 18$

Circunferencia de centro $A = (0, 0)$ y radio $d = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

8 **Da, en cada caso, la ecuación de la circunferencia que tiene centro C y radio r.**

a) $C(0, 0)$ y $r = 1$ **b) $C(2, -3)$ y $r = 2$** **c) $C(-1, 0)$ y $r=\frac{2}{3}$** **d) $C(0, 3)$ y $r=\frac{5}{4}$**

$X = (x, y)$ punto genérico.

a) *dist* $(X, A) = r$

$\sqrt{x^2+y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$

b) *dist* $(X, A) = r$

$\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2} = 2 \rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$

c) *dist* $(X, A) = r$

$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\frac{2}{3} \rightarrow (x+1)^2+y^2=\frac{4}{9}$

d) *dist* $(X, A) = r$

$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=\frac{5}{4} \rightarrow x^2+(y-3)^2=\frac{25}{16}$

9 **Averigua cuáles de las siguientes expresiones corresponden a circunferencias y, en ellas, halla su centro y su radio:**

a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 10 = 0$

b) $x^2 - y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 + xy - x + 4y - 8 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 - 16x + 24 = 0$

a) Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C=16+1-10=7>0$

Es una circunferencia de centro $(4, -1)$ y radio $\sqrt{7}$.

b) Los coeficientes de x^2 e y^2 no son iguales. No es una circunferencia.

c) Hay un término xy. No es una circunferencia.

d) Los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales y no tiene término en xy. Dividimos entre 2 la igualdad: $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 0 - 12 = 4 > 0$$

Es una circunferencia de centro (4, 0) y radio $\sqrt{4} = 2$.

10 Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ y tiene centro en $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$.

$X = (x, y)$ punto genérico.

$dist\ (X, A) = r$

$r = dist\ (P, Q)$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 - x + y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{13}{36} = \frac{1}{4} \rightarrow 36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y + 4 = 0 \rightarrow 9x^2 - 9x + 9y^2 - 6y + 1 = 0$$

11 Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(0, -5)$ y cuyo diámetro es igual a 10.

$X = (x, y)$ punto genérico.

$dist\ (X, C) = r$

$r = 5$

$$\sqrt{(x)^2 + (y + 5)^2} = 5 \rightarrow x^2 + (y + 5)^2 = 25$$

12 Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(1, -2)$ y por $B(2, -1)$ y tiene radio 1.

El centro de la circunferencia está en la mediatriz de AB y $dist\ (O, A) = 1$.

Mediatriz:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1);\ M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$m: \frac{x - \frac{3}{2}}{-1} = \frac{y + \frac{3}{2}}{1} \rightarrow 2x - 3 = -2y - 3 \rightarrow x = -y$$

$$dist\ (O, A) = 1 \rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2} = 1$$

O es solución de:

$$\begin{cases} x = -y \\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1 \end{cases} \rightarrow x = 1,\ y = -1;\ x = 2,\ y = -2$$

Hay dos circunferencia que verifican las condiciones:

$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ y $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$

13 Uno de los diámetros de una circunferencia tiene por extremos $A(3, -2)$ y $B(7, 0)$. Halla la ecuación de la circunferencia.

El centro es: $M_{AB} = (5, -1)$

$$r = dist\ (O, A) = \sqrt{(5 - 3)^2 + (-1 + 2)^2} = \sqrt{5}$$

Ecuación: $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 5$

14 **Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(2, -4)$, $B(8, -10)$ y $C(4, -8)$.**

* ***Mira el ejercicio resuelto 1.***

r: mediatriz de AB

$\overrightarrow{AB} = (2, -4) - (8, -10) = (6, -6) = 6(1, -1)$

r: tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $M_{AB} = (5, -7)$

$r: \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y+7}{1} \rightarrow x - y - 12 = 0$

s: Mediatriz de PR

$\overrightarrow{AC} = (2, -4) - (4, -8) = (-2, 4) = 2(-1, 2)$

s: tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, 1)$ y pasa por $M_{AC} = (3, -6)$

$s: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+6}{1} \rightarrow x - 2y - 15 = 0$

Centro $\rightarrow \begin{cases} x - y - 12 = 0 \\ x - 2y - 15 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 9,\ y = -3 \rightarrow C = (9, -3)$

Radio $= |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2-9)^2 + (-4+3)^2} = 5\sqrt{2}$

La ecuación de la circunferencia es $(x-9)^2 + (y+3)^2 = 50$

15 **Da la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto $(2, -5)$ y es tangente al eje de abscisas.**

$r = dist\,(O, \text{eje } OX) = 5$

La ecuación de la circunferencia es $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 25$

16 **Obtén la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en el punto $(3, -4)$ y que es tangente al eje de ordenadas.**

$r = dist\,(O, \text{eje } OY) = 3$

La ecuación de la circunferencia es $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$

17 **Determina la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen de coordenadas y es tangente a la recta $x + y - 3 = 0$.**

$r = dist\,(O, s) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = \dfrac{9}{2}$.

18 **Determina las rectas tangente y normal a la circunferencia $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 13$ en el punto $A(-2, 1)$.**

$A \in$ circunferencia.

La normal es la recta que une A con el centro de la circunferencia C.

$C = (-4, -2)$

$\overrightarrow{AC} = (-2, 1) - (-4, -2) = (2, 3)$

$n: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{3} \rightarrow 3x - 2y + 8 = 0$

La tangente es perpendicular a la normal y pasa por A.

$t: \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-1}{2} \rightarrow 2x + 3y + 1 = 0$

Posiciones relativas de rectas y circunferencias

19 Calcula la distancia del centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ a la recta $r: 2x - y + 3 = 0$. ¿Cuál es la posición de r respecto a la circunferencia?

El centro de la circunferencia es $C(0, 1)$ y su radio es $R = \sqrt{2}$ La distancia de C a r es:

$$dist\,(C, r) = \frac{|-1+3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,89 < \sqrt{2} \approx 1,41$$

Luego la circunferencia y la recta son secantes.

20 Estudia la posición relativa de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ respecto de cada una de las siguientes rectas:

$$r_1: x + y - 1 = 0 \qquad r_2: 3x - 4y + 9 = 0$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y cada una de las rectas.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

No hay solución $\rightarrow$ Son exteriores.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ 3x - 4y + 9 = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{9}{5},\ y = \frac{18}{5}$$

Hay una solución única, luego son tangentes.

21 Estudia la posición relativa de la circunferencia de ecuación $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ respecto a cada una de las siguientes rectas:

$$r_1: x - 2 = 0 \qquad r_2: y = 0 \qquad r_3: y = 2x + 1$$

Utiliza, en cada caso, los dos métodos siguientes:

a) Resolviendo los sistemas de ecuaciones formados por la circunferencia y cada recta.

b) Comparando la medida del radio con la distancia de cada recta al centro de la circunferencia.

- $r_1: x - 2 = 0$

  a) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y la recta.

  $$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$$ No hay solución, luego son exteriores.

  b) $C = (-1, 2)$

  $$\left.\begin{array}{l} dist(C, r_1) = \left|\frac{-1-2}{1}\right| = 3 \\ r = 2 \end{array}\right\} dist\,(C, r_1) > r$$

  Como la distancia del centro de la circunferencia a la recta es mayor que el radio, son exteriores.

- $r_2: y = 0$

  a) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y la recta.

  $$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = -1,\ y = 0$$

  Hay una única solución, luego son tangentes.

b) $C = (-1, 2)$

$$\left.\begin{array}{l} dist(C, r_2) = \left|\dfrac{-2}{1}\right| = 2 \\ r = 2 \end{array}\right\} \; dist\,(C, r_2) = r$$

Como la distancia del centro de la circunferencia a la recta es igual que el radio, son tangentes.

- r_3: $y = 2x + 1$

a) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y la recta.

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ y = 2x+1 \end{cases} \to x_1 = \frac{1}{5}\sqrt{11} + \frac{1}{5},\; y_1 = \frac{2}{5}\sqrt{11} + \frac{7}{5};\; x_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{11},\; y_2 = \frac{7}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{11}$$

Hay dos soluciones, luego son secantes.

b) $C = (0, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} dist(C, r_3) = \left|\dfrac{-2-2+1}{\sqrt{5}}\right| = \dfrac{3}{5}\sqrt{5} = 1{,}3416 \\ r = 2 \end{array}\right\} \; dist\,(C, r_3) < r$$

Como la distancia del centro de la circunferencia a la recta es menor que el radio, son secantes.

22 Estudia la posición relativa de la recta $y = x + b$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en función del parámetro b.

El centro de la circunferencia es $C(0, 0)$ y su radio es $r = 1$.

Hallamos la distancia de C a la recta $s: x - y + b = 0$: $d = dist\,(C, s) = \dfrac{|b|}{\sqrt{2}}$

Para que la recta sea tangente a la circunferencia, ha de ser $d = r$, es decir:

$$\frac{|b|}{\sqrt{2}} = 1 \to |b| = \sqrt{2} \begin{cases} b = \sqrt{2} \\ b = -\sqrt{2} \end{cases}$$

23 Determina la posición relativa de la recta $y = 2x - 3$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = a$ en función del valor del parámetro a.

$C = (0, 0)$ es el centro de la circunferencia y $R = \sqrt{a}$, su radio.

Llamamos r: $y = 2x - 3$

$$\left.\begin{array}{l} dist(C, r) = \left|\dfrac{-3}{\sqrt{5}}\right| = \dfrac{3}{5}\sqrt{5} \\ R = \sqrt{a} \end{array}\right\} \; \frac{3}{5}\sqrt{5} = \sqrt{a} \to a = \frac{9}{5}$$

- Si $a < \dfrac{9}{5}$, la recta y la circunferencia son exteriores.
- Si $a = \dfrac{9}{5}$, la recta y la circunferencia son tangentes.
- Si $a > \dfrac{9}{5}$, la recta y la circunferencia son secantes.

Página 238

Potencia de un punto a una circunferencia

24 **Calcula la potencia de los puntos $P(5, 2)$, $Q(2, 1)$ y $R(-1, 0)$ a la circunferencia:**

$$C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

Utilízalo para estudiar la posición relativa de P, Q y R respecto de C.

$C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \;\to\; O(3, 2),\; r = 2$

$P(5, 2) \;\to\; \mathcal{P} = (5-3)^2 + (2-2)^2 - 4 = 0 = 0$; por tanto, P pertenece a C.

$Q(2, 1) \;\to\; \mathcal{P} = (2-3)^2 + (1-2)^2 - 4 = -2 < 0$; por tanto, P es un punto interior a C.

$R(-1, 0) \;\to\; \mathcal{P} = (-1-3)^2 + (0-2)^2 - 4 = 16 > 0$; por tanto, P es un punto exterior a C.

25 **Halla y representa el eje radical de los siguientes pares de circunferencias:**

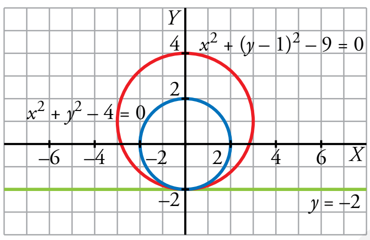
a) $x^2 + y^2 = 4$ **y** $x^2 + (y-1)^2 = 9$

b) $(x-3)^2 + y^2 = 5$ **y** $(x-7)^2 + y^2 = 9$

c) $x^2 + (y-3)^2 = 2$ **y** $(x-5)^2 + y^2 = 1$

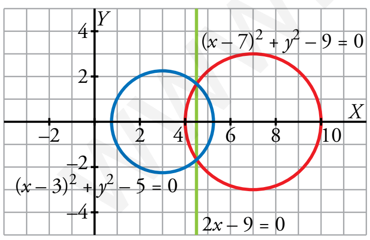
a) $x^2 + y^2 - 4 = x^2 + (y-1)^2 - 9$

$x^2 + y^2 - 4 = x^2 + y^2 - 2y - 8 \;\to\; 2y + 4 = 0 \;\to\; y = -2$



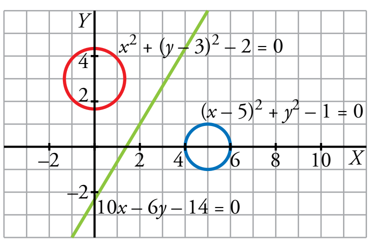
b) $(x-3)^2 + y^2 - 5 = (x-7)^2 + y^2 - 9$

$x^2 - 6x + y^2 + 4 = x^2 - 14x + y^2 + 40 \;\to\; 8y - 36 = 0 \;\to\; 2x - 9 = 0$



c) $x^2 + (y-3)^2 - 2 = (x-5)^2 + y^2 - 1$

$x^2 + y^2 - 6y + 7 = x^2 - 10x + y^2 + 24 \;\to\; 10x - 6y - 14 = 0$



26 **Considera las circunferencias C_1: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ y C_2: $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 10$.**

a) Comprueba que ambas circunferencias son secantes y calcula sus puntos de corte, A y B.

b) Halla las potencias de los puntos A y B a las circunferencias C_1 y C_2.

c) A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿qué podrías decir del eje radical de ambas circunferencias?

d) ¿Puedes generalizar este resultado para un par cualquiera de circunferencias secantes?

a) Calculamos los puntos de corte resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2=2 \\ (x-3)^2+(y+3)^2=10 \end{cases} \to \begin{cases} x^2-2x+y^2+2y+2=2 \\ x^2-6x+y^2+18=10 \end{cases} \to x_1=0,\ y_1=-2;\ x_2=2,\ y_2=0$$

Puntos de corte: $A = (0, -2)$, $B = (2, 0)$, luego son secantes.

b) $A \in C_1 \cap C_2 \to A$ verifica las ecuaciones de C_1 y $C_2 \to \mathcal{P}(A, C_1) = \mathcal{P}(A, C_2) = 0$

$B \in C_1 \cap C_2 \to B$ verifica las ecuaciones de C_1 y $C_2 \to \mathcal{P}(B, C_1) = \mathcal{P}(B, C_2) = 0$

c) El eje radical es la recta que pasa por A y por B.

d) Sí, pues el razonamiento del apartado b) muestra que los puntos de corte siempre tienen potencia igual a cero respecto a las dos circunferencias. Luego el eje radical siempre pasa por ellos.

Elipses

27 **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$ es 10.**

Es una elipse de focos $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$, y constante $k = 10$, es decir, $2a = 10$ y $c = 4$.

Así: $a = 5$; $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$

La ecuación será: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

28 **De una elipse conocemos sus focos $F(0, 1)$ y $F'(0, -1)$ y su constante $k = 4$. Determina su ecuación.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la elipse, entonces:

$dist(P, F) + dist(P, F') = 2a$, es decir:

$\sqrt{x^2+(y-1)^2} + \sqrt{x^2+(y+1)^2} = 4 \to$

$\to x^2 + (y-1)^2 = 16 + x^2 + (y+1)^2 - 8\sqrt{x^2+(y+1)^2} \to$

$\to x^2 + y^2 - 2y + 1 = 16 + x^2 + y^2 + 2y + 1 - 8\sqrt{x^2+(y+1)^2} \to$

$\to -4y - 16 = -8\sqrt{x^2+(y+1)^2} \to (4y+16)^2 = 64[x^2 + (y+1)^2] \to$

$\to 16y^2 + 256 + 128y = 64x^2 + 64y^2 + 64 + 128y \to$

$\to 192 = 64x^2 + 48y^2 \to \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

- De otra forma:

  El centro de la elipse es el punto medio del segmento que une F con F', es decir: $(0, 0)$.

  Por otra parte:

  $2c = dist(F, F') = |\overrightarrow{F'F}| = |(0, 2)| = 2 \to c = 1$

  $2a = 4 \to a = 2 \to a^2 = 4$

  $b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$

Por tanto, la ecuación es: $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

29 **Halla la ecuación de la elipse de focos (–2, 0) y (2, 0) sabiendo que la longitud de su eje mayor es 10.**

$c = 2;\ 2a = 10 \to a = 5;\ b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

Ecuación: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$

30 **Escribe la ecuación de la elipse cuyos focos son $F(-3, 0)$ y $F'(3, 0)$ y cuya excentricidad es igual a 0,5.**

$c = 3;\ exc = \frac{c}{a} = 0{,}5 \to a = \frac{c}{0{,}5} = \frac{3}{0{,}5} = 6$

$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 9 = 27$

Ecuación: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

31 **Da la ecuación de la elipse que pasa por (3, 1) y tiene por focos (4, 0) y (–4, 0).**

La ecuación es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- Como pasa por (3, 1) $\to \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$
- Como $a^2 = b^2 + c^2$ y sabemos que $c = 4 \to a^2 = b^2 + 16$

Teniendo en cuenta las dos condiciones anteriores:

$$\frac{9}{b^2+16} + \frac{1}{b^2} = 1 \to 9b^2 + b^2 + 16 = b^4 + 16b^2 \to b^4 + 6b^2 - 16 = 0$$

$$b^2 = \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} \begin{cases} b^2 = 2 \\ b^2 = -8 \text{ (No vale)} \end{cases}$$

Así: $a^2 = 2 + 16 = 18$

Por tanto, la ecuación de la elipse será: $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$

32 **De una elipse, centrada en (0, 0), se sabe que su eje mayor, que es igual a 10, está sobre el eje X. Además, pasa por el punto (3, 3). Obtén su ecuación.**

$A = (3, 3)$

Eje mayor = 10 $\to a = 5$

Eje mayor = OX $\to$ El centro es $O = (0, 0)$

La ecuación de la elipse será: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$(3, 3) \in$ elipse $\to \frac{3^2}{25} + \frac{3^2}{b^2} = 1 \to \frac{9}{25} + \frac{9}{b^2} = 1 \to b = -\frac{15}{4},\ b = \frac{15}{4}$

Como b es positivo $\to b = \frac{15}{4}$

La ecuación queda:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{225}{16}} = 1 \to \frac{x^2}{25} + \frac{16y^2}{225} = 1$$

33 **Determina, en cada caso, la ecuación de la elipse, centrada en (0, 0), que tiene estas características:**

a) Su excentricidad es 1/2 y su eje mayor está sobre el eje *Y* y es igual a 2.

b) Sus vértices son: (–2, 0), (2, 0), (0, –4) y (0, 4).

a) Eje mayor = 2 $\to$ $b = 1$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{1} = 1;\ e = \frac{c}{b} = \frac{1}{2} \to \frac{c}{1} = \frac{1}{2} \to c = \frac{1}{2}$$

$$a^2 = b^2 - c^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

La ecuación queda:

$$\frac{x^2}{\frac{3}{4}} + \frac{y^2}{1} = 1 \to \frac{4x^2}{3} + y^2 = 1$$

b) Eje mayor = OY

Eje mayor = 8 $\to$ $b = 4$

$a = 2$

La ecuación queda: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

34 **Halla los vértices, los focos y la excentricidad de las siguientes elipses dadas por sus ecuaciones. Represéntalas:**

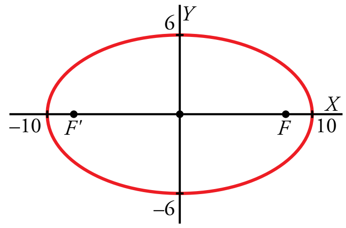
a) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ **b)** $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{100} = 1$ **c)** $9x^2 + 25y^2 = 25$ **d)** $9x^2 + 4y^2 = 3$

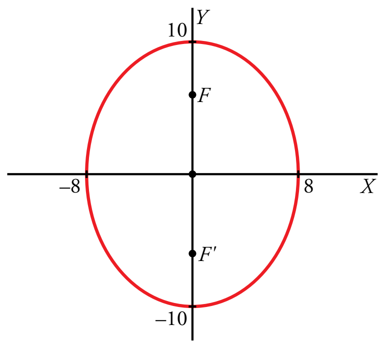
a) Vértices: (10, 0); (–10, 0); (0, 6) y (0, –6)

Focos: $c = \sqrt{100 - 36} = 8$

$F(8, 0)$ y $F'(-8, 0)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{8}{10} = 0,8$





b) Vértices: (8, 0); (–8, 0); (0, 10) y (0, –10)

Focos: $c = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$

$F(0, 6)$ y $F'(0, -6)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{6}{10} = 0,6$

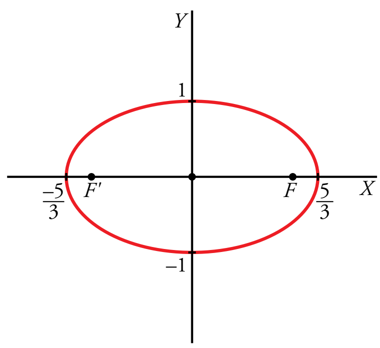
c) $9x^2 + 25y^2 = 25 \to \dfrac{x^2}{25/9} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

Vértices: $\left(\dfrac{5}{3}, 0\right); \left(-\dfrac{5}{3}, 0\right); (0, 1)$ y $(0, -1)$

Focos: $c = \sqrt{\dfrac{25}{9} - 1} = \sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{4}{3}$

$F = \left(\dfrac{4}{3}, 0\right)$ y $F'\left(-\dfrac{4}{3}, 0\right)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{4/3}{5/3} = \dfrac{4}{5} = 0,8$



d) $9x^2 + 4y^2 = 3 \to \dfrac{x^2}{3/9} + \dfrac{y^2}{3/4} = 1$

La elipse tiene eje mayor = OY y centro $O = (0, 0)$.

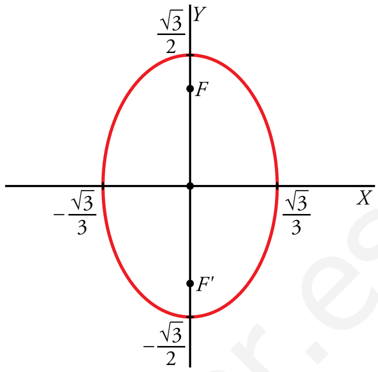
$a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$c^2 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{9} = \dfrac{5}{12} \to c = \sqrt{\dfrac{5}{12}}$

Vértices: $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$; $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$; $\left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(0, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Focos: $F = \left(0, \sqrt{\dfrac{5}{12}}\right)$ y $F'\left(0, -\sqrt{\dfrac{5}{12}}\right)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{\sqrt{\dfrac{5}{12}}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{5}$



35 **Halla los vértices, los focos y la excentricidad de las siguientes elipses no centradas en el origen de coordenadas. Represéntalas:**

a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1$ **b)** $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$

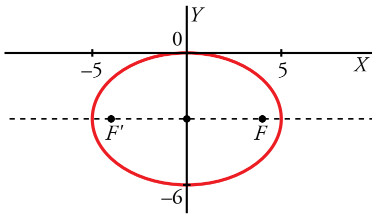
a) Centro: $O = (0, -3)$

$c = \sqrt{25 - 9} = 4$

$e = \dfrac{4}{5}$

Vértices: $(5, -3)$; $(-5, -3)$; $(0, 0)$, $(0, -6)$

Focos: $F = (4, -3)$, $F' = (-4, -3)$



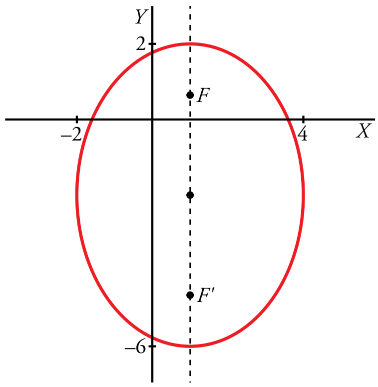
b) Centro: $O = (1, -2)$

$c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

$e = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Vértices: $(-2, -2)$; $(4, -2)$; $(1, 2)$; $(1, -6)$

Focos: $F = (1, -2 + \sqrt{7})$, $F' = (1, -2 - \sqrt{7})$



Hipérbolas

36 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a $F'(-4, 0)$ y $F(4, 0)$ es 6.**

Es una hipérbola de focos F y F' y constante $2a = 6$.

Por tanto, $a = 3$, $c = 4$, $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{7} = 1$

37 **Halla la ecuación de la hipérbola de focos (–4, 0) y (4, 0) y distancia entre vértices, 4.**

$c = 4;\ \ 2a = 4 \ \to\ a = 2;\ \ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$

38 **Obtén la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas son $y = \pm\frac{1}{5}x$ y uno de sus vértices es (2, 0).**

$a = 2;\ \ \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{5} \ \to\ \dfrac{b}{2} = \dfrac{1}{5} \ \to\ b = \dfrac{2}{5}$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4/25} = 1$, o bien, $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{25y^2}{4} = 1$

39 **Determina la hipérbola que pasa por el punto (2, 1) y tiene por asíntotas $y = \pm 3x$.**

$\dfrac{b}{a} = 3 \ \to\ b = 3a \ \to\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{9a^2} = 1$

Como pasa por (2, 1) $\to\ \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{1}{9a^2} = 1 \ \to\ 36 - 1 = 9a^2$

$35 = 9a^2 \ \to\ a^2 = \dfrac{35}{9} \ \to\ b^2 = 9a^2 = 35$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{35/9} - \dfrac{y^2}{35} = 1$, o bien, $\dfrac{9x^2}{35} - \dfrac{y^2}{35} = 1$

40 **Halla la ecuación de la hipérbola de focos (–3, 0) y (3, 0) que tiene excentricidad igual a 3.**

$c = 3,\ \ \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{a} = 3 \ \to\ a = 1$

$b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 1 = 8$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{8} = 1$

41 **De una hipérbola sabemos que pasa por el punto $\left(8, 5\sqrt{3}\right)$ y sus focos son (–3, 0) y (3, 0). Calcula su ecuación.**

- Hallamos la constante de la hiperbola: $|dist\,(P, F) - dist\,(P, F')| = 2a$

  $\left|\,|\overrightarrow{FP}| - |\overrightarrow{F'P}|\,\right| = 2a \ \to\ \left|\,|(11, 5\sqrt{3})| - |(5, 5\sqrt{3})|\,\right| = 2a$

  $\sqrt{121+75} - \sqrt{25+75} = 2a \ \to\ 14 - 10 = 2a \ \to\ 4 = 2a \ \to\ a = 2$

- Como $a = 2$ y $c = 3$, entonces $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$

- La ecuación es: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$

42 **Halla la ecuación de la hipérbola de focos (–3, 0) y (3, 0) y asíntotas $y = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x$.**

$c = 3$

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \ \to\ b = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$

$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a\right)^2 = \dfrac{9}{5}a^2 \ \to\ 9 = \dfrac{9}{5}a^2 \ \to\ a = \sqrt{5} \ \to\ b = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\sqrt{5} = 2$

La ecuación pedida es: $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

43 **Halla los vértices, los focos, las excentricidades y las asíntotas de las hipérbolas dadas por las siguientes ecuaciones. Dibújalas:**

a) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$ **b)** $\frac{9x^2}{16} - y^2 = 1$ **c)** $x^2 - 4y^2 = 1$ **d)** $x^2 - 4y^2 = 4$

e) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{36} = 1$ **f)** $y^2 - 16x^2 = 16$ **g)** $9x^2 - 4y^2 = 36$ **h)** $4x^2 - y^2 + 16 = 0$

a) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$

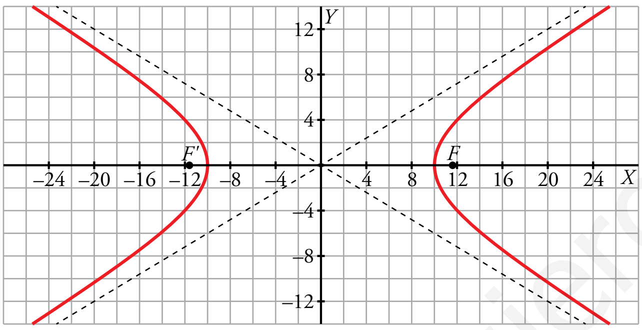
$a = 10, \ b = 6, \ c = \sqrt{100 + 36} = \sqrt{136}$

Vértices: (10, 0); (–10, 0)

Focos: $F = (\sqrt{136}, 0), \ F' = (-\sqrt{136}, 0)$

$e = \frac{\sqrt{136}}{10}$

Asíntotas: $y = \pm \frac{3}{5}x$



b) $\frac{9x^2}{16} - y^2 = 1$

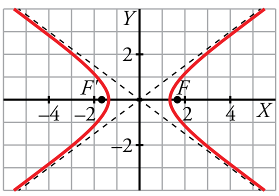
$a = \frac{4}{3}, \ b = 1, \ c = \sqrt{\frac{16}{9} + 1} = \frac{5}{3}$

Vértices: $\left(\frac{4}{3}, 0\right); \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$

Focos: $F = \left(\frac{5}{3}, 0\right), \ F' = \left(-\frac{5}{3}, 0\right)$

$e = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{4}$

Asíntotas: $y = \pm\frac{3}{4}x$



c) $x^2 - 4y^2 = 1$

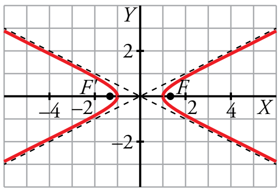
$a = 1,\ b = \dfrac{1}{2},\ c = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

Vértices: (1, 0); (–1, 0)

Focos: $F = \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{5}, 0\right);\ F' = \left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{5}, 0\right)$

$e = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

Asíntotas: $y = \pm\dfrac{1}{2}x$



d) $x^2 - 4y^2 = 4 \ \to\ \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$

$a = 2,\ b = 1,\ c = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

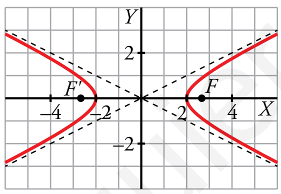
Vértices: (2, 0); (–2, 0)

Focos: $F = (\sqrt{5}, 0)$

$F' = (-\sqrt{5}, 0)$

$e = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

Asíntotas: $y = \pm\dfrac{1}{2}x$



e) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{36} = 1$

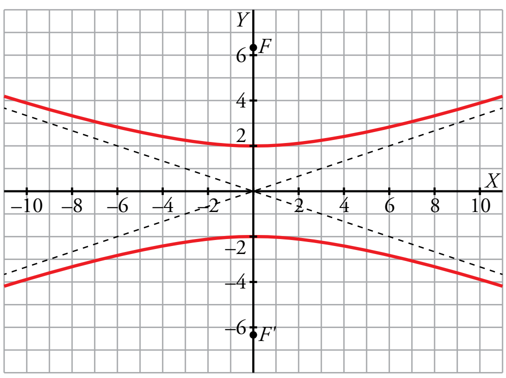
$a = 2,\ b = 6,\ c = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$

Vértices: (0, 2); (0, –2)

Focos: $F = (0, \sqrt{40});\ F' = (0, -\sqrt{40})$

$e = \dfrac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$

Asíntotas: $y = \pm\dfrac{1}{3}x$



f) $y^2 - 16x^2 = 16 \;\rightarrow\; \dfrac{y^2}{16} - x^2 = 1$

$a = 4, \;\; b = 1, \;\; c = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

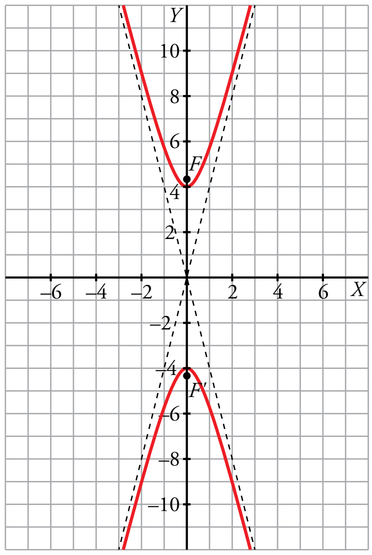
Vértices: $(0, 4); (0, -4)$

Focos: $F = (0, \sqrt{17})$

$F' = (0, -\sqrt{17})$

$e = \dfrac{\sqrt{17}}{4}$

Asíntotas: $y = \pm 4x$



g) $9x^2 - 4y^2 = 36 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

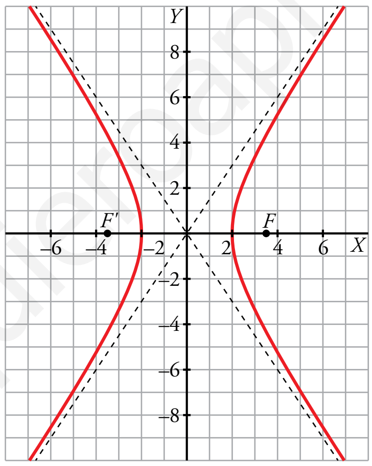
$a = 2, \;\; b = 3, \;\; c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Vértices: $(2, 0); (-2, 0)$

Focos: $F = (\sqrt{13}, 0); \;\; F' = (-\sqrt{13}, 0)$

$e = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

Asíntotas: $y = \pm \dfrac{3}{2}x$



h) $4x^2 - y^2 + 16 = 0 \;\rightarrow\; y^2 - 4x^2 = 16 \;\rightarrow\; \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

$a = 4, \;\; b = 2, \;\; c = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

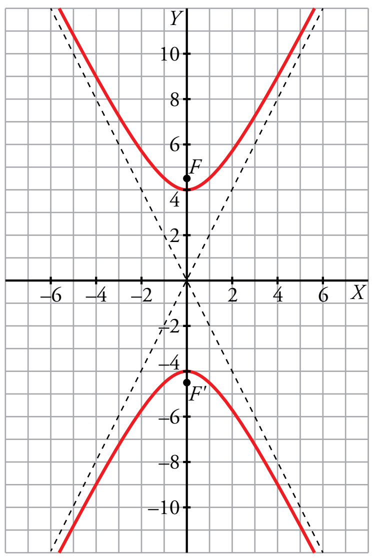
Vértices: $(0, 4); (0, -4)$

Focos: $F = (0, \sqrt{20})$

$F' = (0, -\sqrt{20})$

$e = \dfrac{\sqrt{20}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Asíntotas: $y = \pm 2x$



44 **Halla los vértices, los focos, las excentricidades y las asíntotas de las siguientes hipérbolas no centradas en el origen de coordenadas. Dibújalas:**

a) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{(y-1)^2}{64} = 1$ **b)** $\dfrac{(y-1)^2}{16} - \dfrac{(x-1)^2}{9} = 1$

a) Centro: $O = (0, 1)$

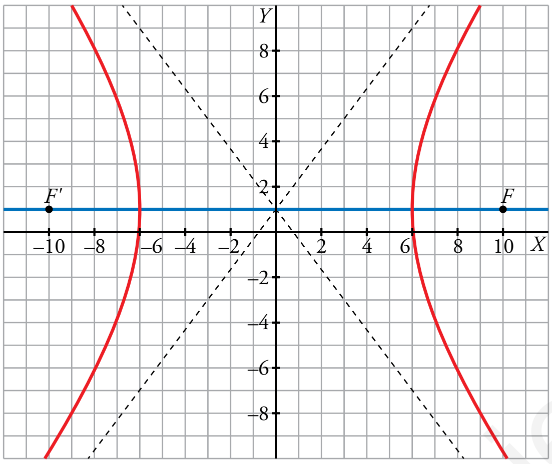
$a = 6,\ b = 8,\ c = \sqrt{36+64} = 10$

Vértices: (6, 1); (–6, 1)

Focos: $F = (10, 1)$; $F' = (-10, 1)$

$e = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$

Asíntotas: $y - 1 = \pm\dfrac{8}{6}x$



b) Centro: $O = (1, 1)$

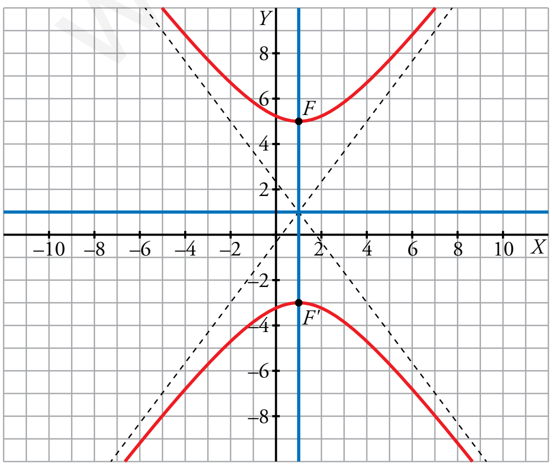
$a = 4,\ b = 3,\ c = \sqrt{16+9} = 5$

Vértices: (1, 3); (1, –1)

Focos: $F = (1, 5)$; $F' = (1, -3)$

$e = \dfrac{5}{4}$

Asíntotas: $y - 1 = \pm\dfrac{4}{3}(x-1)$



Página 239

Parábolas

45 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto (3, 0) y de la recta $y = -3$.**

Es una parábola cuyo foco es $F(3, 0)$ y cuya directriz es $d: y + 3 = 0$. Si $P(x, y)$ es un punto de la prábola, entonces:

$$dist\,(P, F) = dist\,(P, d) \;\rightarrow\; \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = |\,y + 3\,| \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x^2 - 6x + 9 + y^2 = y^2 + 6y + 9 \;\rightarrow\; y = \frac{x^2}{6} - x$$

O bien: $(x-3)^2 = 6\left(y + \dfrac{3}{2}\right)$

46 **Halla, en cada caso, la ecuación de la parábola de foco F y directriz d.**

a) $F(5, 0)$; $d: x = -5$

b) $F(-3, 0)$; $d: x = 3$

c) $F(0; 2{,}5)$; $d: y = -2{,}5$

d) $F(0, -4)$; $d: y = 4$

a) $\dfrac{p}{2} = 5 \;\rightarrow\; p = 10 \;\rightarrow\; 2p = 20$. Ecuación: $y^2 = 20x$

b) $dist\,(F, d) = 6 = p$

$F \in OX$

$y^2 = -12x$

c) $dist\,(F, d) = 5 = p$

$F \in OY$

$y^2 = 10x$

d) $dist\,(F, d) = 8 = p$

$F \in OY$

$y^2 = -16x$

47 **Determina la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen de coordenadas y cuya directriz es $y = 3$.**

El foco será $F(0, -3)$. Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola y $d: y - 3 = 0$ es la directriz, entonces:

$$dist\,(P, F) = dist\,(P, d) \;\rightarrow\; \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = |\,y - 3\,| \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x^2 + y^2 + 6y + 9 = y^2 - 6y + 9 \;\rightarrow\; x^2 = -12y$$

48 **Halla las ecuaciones de las parábolas que pasando por el punto (2, 3) tienen su vértice en el origen de coordenadas.**

Hay dos posibilidades:

- *Eje horizontal*: $y^2 = 2px$. Como pasa por (2, 3), entonces:

  $9 = 4p \;\rightarrow\; p = \dfrac{9}{4} \;\rightarrow\; y^2 = \dfrac{9}{2}x$

- *Eje vertical*: $x^2 = 2py$. Como pasa por (2, 3), entonces:

  $4 = 6p \;\rightarrow\; p = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \;\rightarrow\; x^2 = \dfrac{4}{3}y$

49 **Halla los vértices, los focos y las directrices de las siguientes parábolas. Represéntalas:**

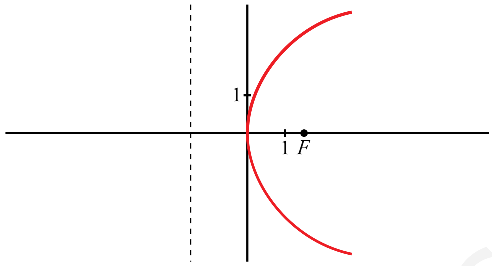
a) $y^2 = 6x$ **b)** $y^2 = -6x$ **c)** $y = x^2$ **d)** $y = \dfrac{x^2}{4}$

a) $\left.\begin{array}{l} y^2 = 2px \\ y^2 = 6x \end{array}\right\} \ 2p = 6 \ \rightarrow \ p = 3 \ \rightarrow \ \dfrac{p}{2} = \dfrac{3}{2}$

Vértice: (0, 0)

Foco: $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$

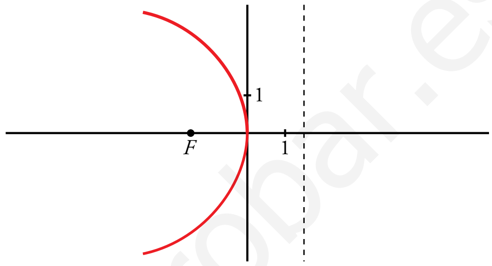
Directriz: $x = -\dfrac{3}{2}$



b) Vértice: (0, 0)

Foco: $\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$

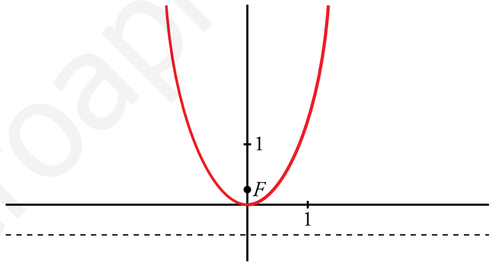
Directriz: $x = \dfrac{3}{2}$



c) Vértice: (0, 0)

Foco: $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$

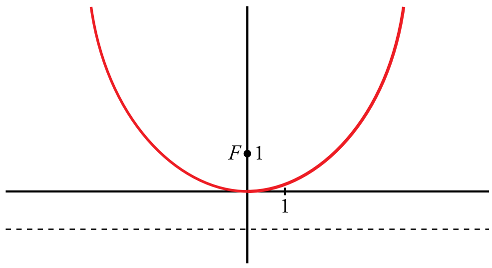
Directriz: $y = -\dfrac{1}{4}$



d) Vértice: (0, 0)

Foco: (0, 1)

Directriz: $y = -1$



Para resolver

50 **Identifica las siguientes cónicas, calcula sus elementos característicos y dibújalas:**

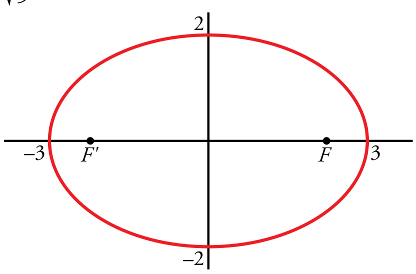
a) $4x^2 + 9y^2 = 36$ **b)** $16x^2 - 9y^2 = 144$ **c)** $9x^2 + 9y^2 = 25$

d) $x^2 - 4y^2 = 16$ **e)** $y^2 = 14x$ **f)** $25x^2 + 144y^2 = 900$

a) $4x^2 + 9y^2 = 36 \ \rightarrow \ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

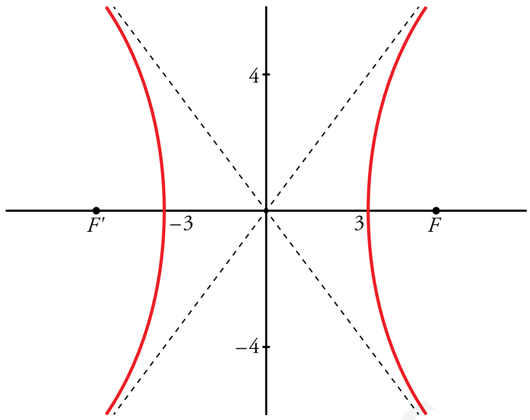
Es una elipse $\rightarrow$ $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{5}$

$exc = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}75$



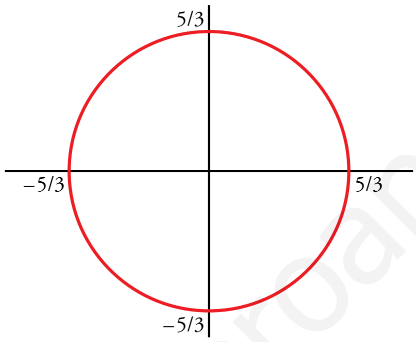
b) $16x^2 - 9y^2 = 144 \rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Es una hipérbola $\rightarrow \begin{cases} a = 3,\ b = 4,\ c = 5;\ exc = \dfrac{5}{3} \approx 1,67 \\ \text{Asíntotas: } y = \dfrac{4}{3}x;\ y = -\dfrac{4}{3}x \end{cases}$



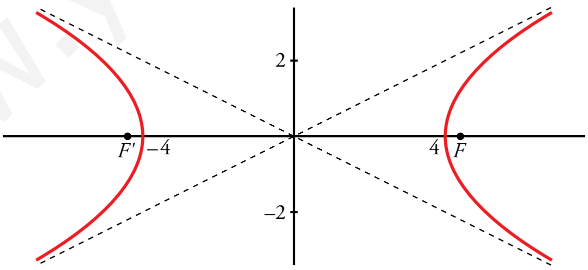
c) $9x^2 + 9y^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 = \dfrac{25}{9}$

Es una circunferencia de centro (0, 0) y radio $\dfrac{5}{3}$.



d) $x^2 - 4y^2 = 16 \rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Es una hipérbola $\rightarrow \begin{cases} a = 4,\ b = 2,\ c = 2\sqrt{5};\ exc = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12 \\ \text{Asíntotas: } y = \dfrac{1}{2}x;\ y = -\dfrac{1}{2}x \end{cases}$

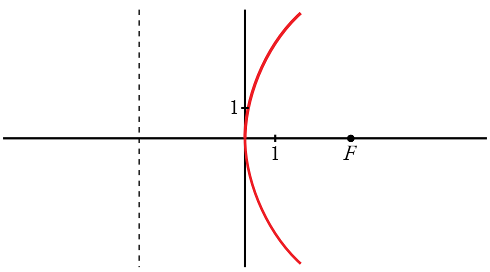


e) Es una parábola.

Vértice: (0, 0)

Foco: $\left(\dfrac{7}{2}, 0\right)$

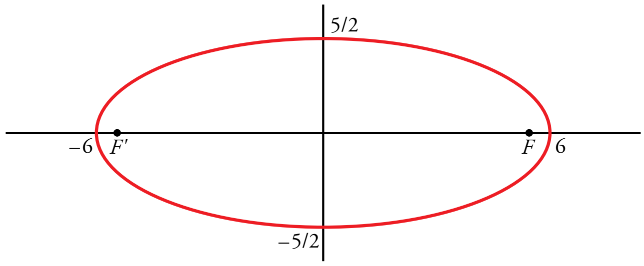
Directriz: $x = -\dfrac{7}{2}$



f) $25x^2 + 144y^2 = 900 \rightarrow \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{25/4} = 1$

Es una elipse $\rightarrow a = 6,\ b = \dfrac{5}{2},\ c = \dfrac{\sqrt{119}}{2}$

$exc = \dfrac{\sqrt{119}}{12} \approx 0,91$



51 **Describe las siguientes cónicas no centradas en el origen. Obtén sus elementos y dibújalas.**

a) $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-4)^2}{25} = 1$

b) $\dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

c) $(x+2)^2 = 4(y+5)$

d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -4$

a) Es una elipse de centro $O = (1, 4)$

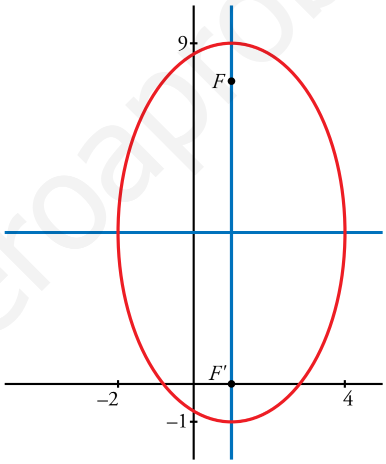
Eje mayor: OY

$a = 3,\ b = 5,\ c = \sqrt{25-9} = 4$

Vértices: (4, 4); (–2, 4); (1, 9); (1, –1)

Focos: $F = (1, 8);\ F' = (1, 0)$

$exc = \dfrac{4}{5}$



b) Es una hipérbola de centro $O = (1, -1)$

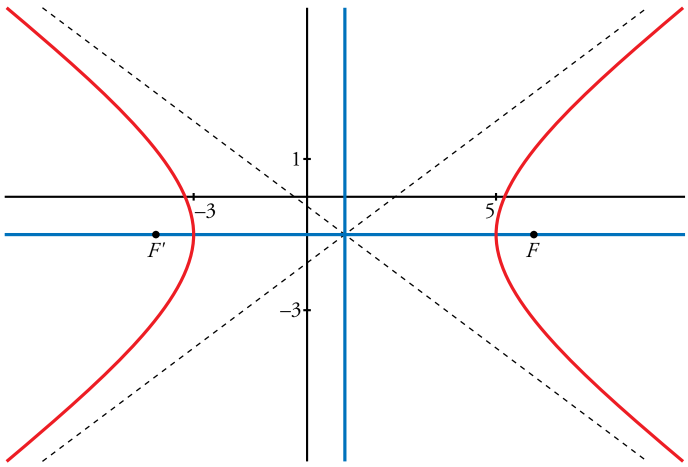
$a = 4,\ b = 3,\ c = \sqrt{16+9} = 5$

Vértices: (5, –1); (–3, –1)

Focos: $F = (6, -1);\ F' = (-4, -1)$

$exc = \dfrac{5}{4}$

Asíntotas: $y + 1 = \pm\dfrac{3}{4}(x-1)$



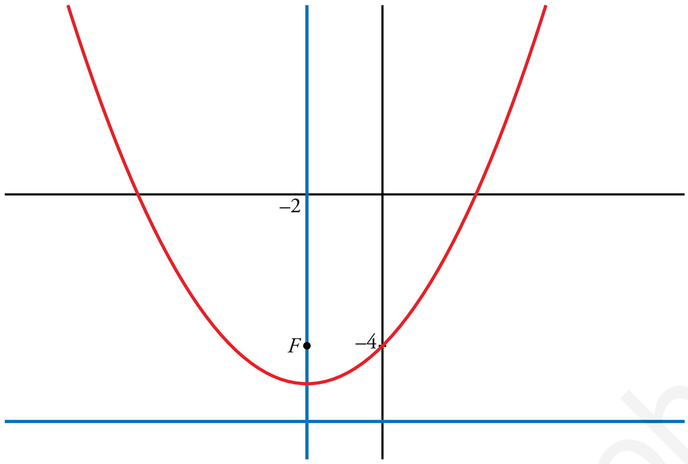
c) Es una parábola.

Vértice: (–2, –5)

$2p = 4 \rightarrow dist\,(F, d) = 2 \rightarrow dist\,(F, V) = 1$ y $dist\,(V, d) = 1$

d: $y = -6$

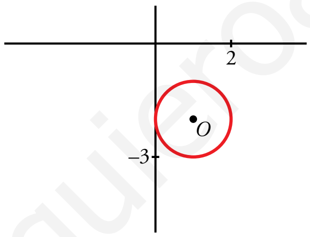
Foco: $F = (-2, -4)$



d) $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = -4 + 1 + 4 \rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$

Es una circunferencia de centro $O = (1, -2)$.

Radio: $r = 1$



52 **a) Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C(-1, 1)$ y es tangente a la recta $3x - 4y - 3 = 0$.**

b) De todas las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante, encuentra las que sean tangentes a la circunferencia hallada en el apartado anterior.

a) El radio, r, de la circunferencia es la distancia del centro $C(-1, 1)$ a la recta s: $3x - 4y - 3 = 0$; es decir:

$$r = dist\,(C, s) = \frac{|-3-4-3|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2$$

La ecuación será: $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$, o bien, $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

b) Las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante son de la forma $y = x + k$, es decir, t: $x - y + k = 0$. La recta t es tangente a la circunferencia cuando la distancia del centro de la circunferencia, $C(-1, 1)$, a la recta es igual al radio, 2. Es decir:

$$dist\,(C, t) = \frac{|-1-1+k|}{\sqrt{2}} = 2 \rightarrow \frac{|k-2|}{\sqrt{2}} = 2 \rightarrow |k-2| = 2\sqrt{2} \begin{cases} k-2 = 2\sqrt{2} \rightarrow k = 2+2\sqrt{2} \\ k-2 = -2\sqrt{2} \rightarrow k = 2-2\sqrt{2} \end{cases}$$

Hay dos rectas: $\begin{cases} y = x + 2 + 2\sqrt{2} \\ y = x + 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$

53 **Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por (–3, 2) y (4, 1) y es tangente al eje** ***X*****.**

El centro está en la mediatriz del segmento AB.

$A = (-3, 2),\ \ B = (4, 1)$

$\overrightarrow{AB} = (7, -1) \ \to\ \vec{d} = (1, 7)$

$M_{AB} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$m\text{:}\ \frac{x-(1/2)}{1} = \frac{y-(3/2)}{7} \ \to\ 7x - \frac{7}{2} = y - \frac{3}{2} \ \to\ y = 7x + 2$

$dist\,(O, A) = dist\,(O, OX) = r$

$\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = y$

Las coordenadas del centro son la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = 7x - 2 \\ \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = 1 \end{cases} \ \to\ x_1 = 21,\ y_1 = 145;\ x_2 = 1,\ y_2 = 5$$

Hay dos circunferencias que cumplen la condición:

$C\text{: } (x-1)^2 + (y-5)^2 = 25$

$C'\text{: } (x-21)^2 + (y-145)^2 = 145^2 = 21\,025$

54 **De la circunferencia** ***C*** **se sabe que tiene su centro en la recta** $\boldsymbol{x - 3y = 0}$ **y pasa por los puntos (–1, 4) y (3, 6). Obtén la ecuación de** ***C*****.**

Si el centro está sobre la recta $x - 3y = 0$, es de la forma $C(3y, y)$.

El centro está a igual distancia de $A(-1, 4)$ que de $B(3, 6)$. Además, esta distancia es el radio, r, de la circunferencia:

$r = dist\,(A, C) = dist\,(B, C) \ \to\ |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \ \to$

$\to\ \sqrt{(3y+1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(3y-3)^2 + (y-6)^2}$

$9y^2 + 1 + 6y + y^2 + 16 - 8y = 9y^2 + 9 - 18y + y^2 + 36 - 12y$

$28y = 28 \ \to\ y = 1 \ \to\ x = 3y = 3$

Por tanto, el centro de la circunferencia está en $O(3, 1)$, y su radio es:

$r = |\overrightarrow{AO}| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

La ecuación es: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$, o bien, $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$.

55 **Determina la ecuación de la circunferencia de radio 10 que, en el punto (7, 2), es tangente a la recta** $\boldsymbol{3x - 4y - 13 = 0}$**.**

Las coordenadas del centro son la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 13 = 0 \\ \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2} = 10 \end{cases} \ \to\ x_1 = 15,\ y_1 = 8;\ x_2 = -1,\ y_2 = -4$$

Hay dos circunferencias que cumplen la condición:

$C\text{: } (x-15)^2 + (y-8)^2 = 100$

$C'\text{: } (x+1)^2 + (y+4)^2 = 100$

56 Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo de vértices $A(3, 2)$, $B\left(1-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ y $C\left(5+\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

$A = (3, 2),\ B = (1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ C = (5 + \sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$\overrightarrow{AB} = (1-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) - (3, 2) = (-\sqrt{2}-2, -\sqrt{2}-2) = (-\sqrt{2}-2)(1, 1)$

Lado AB: $x - 3 = y - 2 \ \to\ x - y - 1 = 0$

$\overrightarrow{AC} = (5+\sqrt{2}, -\sqrt{2}) - (3, 2) = (\sqrt{2}+2, -\sqrt{2}-2) = (\sqrt{2}+2)(1, -1)$

Lado AC: $x - 3 = -y + 2 \ \to\ x + y - 5 = 0$

$\overrightarrow{BC} = (1-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) - (5+\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (-2\sqrt{2}-4, 0) = (-2\sqrt{2}-4)(1, 0)$

Lado BC: $y = -\sqrt{2} \ \to\ y + \sqrt{2} = 0$

Bisectriz de $\hat{A}$:

$$|x - y - 1| = |x + y - 5| \ \to\ y = 2,\ x = 3$$

Tomamos $x = 3$, que es la recta interior al triángulo.

Bisectriz de $\hat{C}$:

$$\left|\frac{x+y-5}{\sqrt{2}}\right| = |y+\sqrt{2}| \to \begin{cases} \dfrac{x+y-5}{\sqrt{2}} = y+\sqrt{2} \\ \dfrac{x+y-5}{\sqrt{2}} = -(y+\sqrt{2}) \end{cases} \to \begin{cases} x+y-5 = \sqrt{2}y+2 \\ x+y-5 = -\sqrt{2}y-2 \end{cases} \to \begin{cases} x+(1-\sqrt{2})y-7=0 \\ x+(1+\sqrt{2})y-3=0 \end{cases}$$

Tomamos $x + (1 + \sqrt{2})y - 3 = 0$, que es la recta interior al triángulo.

El incentro es la intersección de las bisectrices:

$$\begin{cases} x = 3 \\ x+(1+\sqrt{2})y-3=0 \end{cases} \to\ x = 3,\ y = 0 \ \to\ P = (3, 0)$$

radio = $dist\,(P, \text{lado } BC) = \sqrt{2}$

Circunferencia inscrita: C: $(x - 3)^2 + y^2 = 2$

57 Halla la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo determinado por la recta $y = -x + 4$ y los ejes de coordenadas. Calcula la ecuación de la recta tangente a esta circunferencia en (0, 0).

Vértices del triángulo:

$$A \to \begin{cases} y = -x+4 \\ x = 0 \end{cases} \to A = (0, 4) \qquad B \to \begin{cases} y = -x+4 \\ y = 0 \end{cases} \to B = (4, 0) \qquad C = (0, 0)$$

$\overrightarrow{AB} = (4, -4) = 4(1, -1),\ M_{AB} = (2, 2)$

m_c: $x - 2 = -(y - 2)$

$\overrightarrow{AC} = (0, -4) = 4(0, -1),\ M_{AC} = (0, 2)$

m_b: $x - 2 = 0$

El circuncentro es la intersección de las mediatrices:

$$\begin{cases} x-2 = -(y-2) \\ x = 2 \end{cases} \to\ x = 2,\ y = 2 \ \to\ P = (2, 2)$$

radio = $dist\,(P, C) = \sqrt{8}$

Circunferencia circunscrita, C: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

58 **Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el cuadrado de vértices $A(-3, 3)$, $B(-1, 3)$, $C(-1, 1)$ y $D(-3, 1)$.**

$A = (-3, 3)$, $B = (-1, 3)$, $C = (-1, 1)$, $D = (-3, 1)$

Diagonal AC: $y = -x$

Diagonal BD: $y = x + 4$

Centro: $\begin{cases} y = -x \\ y = x + 4 \end{cases} \to x = -2,\ y = 2 \to P = (-2, 2)$

Lado AB: $y = 3$

radio = $dist\,(P, \text{lado } AB) = 1$

Circunferencia inscrita, C: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$

59 **Estudia la posición relativa del punto $P(0, 3)$ respecto a la circunferencia $(x - m)^2 + y^2 = 25$ en función de los valores del parámetro m.**

$(x - m)^2 + y^2 = 25$

Centro: $O = (m, 0)$

Radio: $r = 5$

$dist\,(P, O) = \sqrt{m^2 + 9} = 5 \to m = -4,\ m = 4$

$\sqrt{m^2 + 9} < 5 \to m \in (-4, 4)$

$\sqrt{m^2 + 9} > 5 \to m \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$

Si $m \in (-4, 4) \to P$ es interior a la circunferencia C.

Si $m = -4$ o $m = 4 \to P \in C$

Si $m \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty) \to P$ es exterior a C.

60 **Estudia en función de k la posición relativa de la rectas: $4x + 3y + k = 0$ respecto a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$.**

Depende del número de soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x + 3y + k = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{-3y - k}{4} \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \end{cases} \to \left(\frac{-3y - k}{4}\right)^2 + y^2 - 2\left(\frac{-3y - k}{4}\right) - 6y + 6 = 0$$

$k^2 + 6ky + 8k + 25y^2 - 72y + 96 = 0 \to 25y^2 + (6k - 72)y + 96 + 8k + k^2 = 0$

El número de soluciones depende del signo del discriminante.

$\Delta = (6k - 72)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (96 + 8k + k^2) = -64k^2 - 1\,664k - 4\,416$

- Si $-64k^2 - 1\,664k - 4\,416 = 0 \to k = -3,\ k = -23 \to$ Solución única $\to$ Son tangentes.
- Si $-64k^2 - 1\,664k - 4\,416 < 0 \to k \in (-\infty, -23) \cup (-3, \infty) \to$ No hay solución $\to$ Son exteriores.
- Si $-64k^2 - 1\,664k - 4\,416 > 0 \to k \in (-23, -3) \to$ Dos soluciones $\to$ Son secantes.

61 **Dos circunferencias se cortan en los puntos (0, 0) y (0, 8). ¿Cuál es su eje radical? Justifica tu respuesta.**

El eje radical es la recta que pasa por A y por B, pues los puntos de corte siempre tienen potencia cero respecto a las dos circunferencias. Luego el eje radical siempre pasa por ellos.

Eje radical: $x = 0$

62 **Halla los puntos de intersección de cada pareja de circunferencias y di cuál es su posición relativa:**

a) $\begin{cases} x^2+y^2-6x-16=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2+y^2-6x-4y+9=0 \\ x^2+y^2-6x+2y+9=0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-6x-16=0 \\ x^2+y^2=4 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 4-6x-16=0 \;\to\; -6x=12 \;\to\; x=-2 \\ 4+y^2=4 \;\to\; y^2=0 \;\to\; y=0 \end{array}$

Las circunferencias se cortan en el punto (–2, 0).

La primera circunferencia tiene centro en (3, 0) y radio 5; la segunda tiene centro en (0, 0) y radio 2. La distancia entre sus centros es $d=3$. Como la diferencia entre sus radios es $5-2=3=d$, las circunferencias son tangentes interiores.

b) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-6x-4y+9=0 \\ x^2+y^2-6x+2y+9=0 \end{array}\right\}$ Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª: $6y=0 \;\to\; y=0$

$x^2-6x+9=0 \;\to\; (x-3)^2=0 \;\to\; x=3$

Las circunferencias se cortan en el punto (3, 0).

La primera circunferencia tiene su centro en (3, 2) y radio 2; la segunda tiene su centro en (3, –1) y radio 1. La distancia entre sus centros es $d=3$, igual que la suma de sus radios. Por tanto, las circunferencias son tangentes exteriores.

63 **Escribe la ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas y focos en el eje de abscisas, sabiendo que pasa por el punto $P(8, -3)$ y que su eje mayor es igual al doble del menor.**

El eje mayor es igual al doble del menor, es decir: $a=2b$. Además, pasa por el punto $P(8, -3)$. Luego:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \;\to\; \frac{64}{4b^2}+\frac{9}{b^2}=1 \;\to\; \frac{16}{b^2}+\frac{9}{b^2}=1 \;\to\; \frac{25}{b^2}=1 \;\to\; 25=b^2;\; a^2=4b^2=100$$

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$

64 **La parábola $y^2-4y-6x-5=0$ tiene por foco el punto (0, 2). Encuentra su directriz.**

$y^2-4y-6x-5=0 \;\to\; y^2-4y+4-6x-5-4=0 \;\to$

$\to\; (y-2)^2-6x-9=0 \;\to\; (y-2)^2-6\left(x+\dfrac{3}{2}\right)=0$

Vértice: $V=\left(-\dfrac{3}{2}, 2\right)$

Foco: $F=(0, 2)$

Eje de la parábola: $y=2$

$dist\,(V, d)=dist\,(V, F)=\dfrac{3}{2}$

Directriz: $x=k \;\to\; x-k=0$

$$dist\,(V, d)=\left|-\frac{3}{2}-k\right|=\frac{3}{2} \;\to\; \begin{cases} -\dfrac{3}{2}-k=\dfrac{3}{2} \;\to\; k=-3 \\ -\dfrac{3}{2}-k=-\dfrac{3}{2} \;\to\; k=0 \end{cases}$$

Como el foco está a la derecha del vértice, la directriz es $x=-3$.

65 **Halla la ecuación de la parábola de vértice en el punto (2, 3) y que pasa por el punto (4, 5).**

* *Mira el ejercicio resuelto 6.*

$X = (x, y)$ punto genérico.

$(y-3)^2 - 2p(x-2) = 0$

$(4, 5) \in$ Parábola $\rightarrow (5-3)^2 - 2p(4-2) = 0 \rightarrow 4 - 4p = 0 \rightarrow p = 1$

Parábola: $(y-3)^2 - 2(x-2) = 0$

66 **Halla las ecuaciones de las siguientes parábolas:**

a) Foco (0, 0); directriz $y = -2$.

b) Foco (2, 0); directriz $x = -1$.

c) Foco (2, 1); directriz $y + 3 = 0$.

d) Foco (1, 1); vértice $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

a) $dist\,(F, d) = 2 = p$

Vértice: $V = (0, -1)$

Parábola hacia arriba.

$x^2 = 4(y+1)$

b) $dist\,(F, d) = 3 = p$

Vértice: $V = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Parábola hacia la derecha.

$y^2 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)$

c) $dist\,(F, d) = 4 = p$

Vértice: $V = (2, -1)$

Parábola hacia arriba.

$(x-2)^2 = 8(y+1)$

d) $dist\,(F, d) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = p$

Vértice: $V = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

Directriz paralela al eje OX.

Parábola hacia arriba.

$(x-1)^2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)$

67 **Halla los vértices, los focos y las directrices de las siguientes parábolas de vértices distintos al origen de coordenadas. Represéntalas:**

a) $y^2 = 4(x-1)$ **b)** $(y-2)^2 = 8x$ **c)** $(x-1)^2 = -8(y+1)$ **d)** $(y+2)^2 = -4(x-1)$

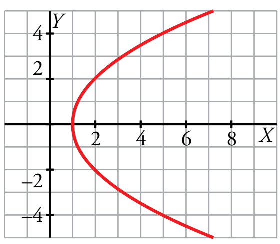
a) $y^2 = 4(x-1)$

Parábola hacia la derecha.

Vértice: $V = (1, 0)$

$p = 2dist\,(F, V) = 1 \rightarrow F = (2, 0)$

Directriz paralela al eje OY: $x = 0$



b) $(y-2)^2 = 8x$

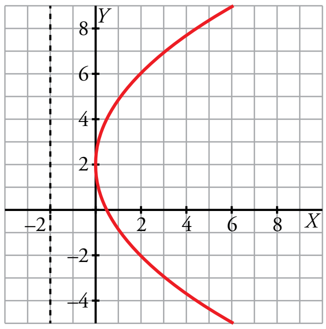
Parábola hacia la derecha.

Vértice: $V = (0, 2)$

$p = 4$

$dist\,(F, V) = 2 \rightarrow F = (2, 2)$

Directriz paralela al eje OY: $x = -2$



c) $(x-1)^2 = -8(y+1)$

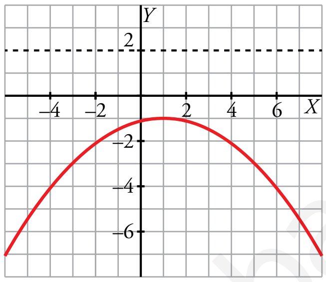
Parábola hacia abajo.

Vértice: $V = (1, -1)$

$p = 4$

$dist\,(F, V) = 2 \rightarrow F = (1, -3)$

Directriz paralela al eje OX: $y = 2$



d) $(y+2)^2 = -4(x-1)$

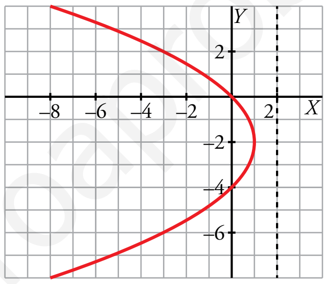
Parábola hacia la izquierda.

Vértice: $V = (1, -2)$

$p = 2$

$dist\,(F, V) = 1 \rightarrow F = (0, -2)$

Direcriz paralela al eje OY: $x = 2$



68 **Halla la ecuación de la hipérbola centrada en (4, 5), cuyos focos son $F(2, 5)$ y $F'(6, 5)$ y cuyo semieje menor es $b = 1$.**

Centro = (4, 5)

Eje paralelo a OX

$c = dist\,(C, F) = 2$

$a^2 = 4 - 1 = 3$

Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{(x-4)^2}{3} - \dfrac{(y-5)^2}{1} = 1$

Página 240

69 **Halla la ecuación de la siguiente hipérbola:**

- **Tiene el centro en el origen de coordenadas.**
- **Tiene los focos en el eje de abscisas.**
- **Pasa por el punto $P\left(\sqrt{5/2}, 1\right)$.**
- **Una de sus asíntotas es la recta $y = 2x$.**

Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$\dfrac{b}{a} = 2 \rightarrow b = 2a$

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{4a^2} = 1$

Pasa por $P = \left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}, 1\right)$

$$\frac{5/2}{a^2} - \frac{1}{4a^2} = 1 \to \frac{10-1}{4a^2} = 1 \to 4a^2 = 9 \to a^2 = \frac{9}{4}$$

La ecuación pedida es: $\dfrac{x^2}{9/4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

70 **Se llama hipérbola equilátera a aquella en la que $a = b$. Halla la ecuación de la hipérbola equilátera cuyos focos son (5, 0) y (–5, 0).**

Centro = (0, 0)

$$c = 5 = \sqrt{2a^2} \to a = \frac{5}{2}\sqrt{2} \to a^2 = \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

La ecuación pedida es:

$$\frac{x^2}{\frac{25}{2}} = \frac{y^2}{\frac{25}{2}} = 1$$

71 **Halla la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que su distancia al punto (4, 0) es el doble de su distancia a la recta $x = 1$.**

Comprueba que es una cónica y halla sus focos.

$X = (x, y)$ punto cualquiera del lugar geométrico.

$P = (4, 0)$

$r: x = 1$

$dist\ (X, P) = 2dist\ (X, r)$

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2\,|\,x-1\,| \to (x-4)^2 + y^2 = 4(x-1)^2$$

$$x^2 - 8x + y^2 + 16 = 4x^2 - 8x + 4 \to -3x^2 + y^2 + 12 = 0$$

Es una hipérbola de eje OX:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \to c^2 = 16 \to c = 4$$

Centro: $C = (0, 0)$

Focos: $F = (-4, 0)$, $F' = (4, 0)$

72 **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto (4, 0) es igual a la mitad de la distancia a la recta $r: x - 16 = 0$. Representa la curva que obtienes.**

Sea $P(x, y)$ uno de los puntos del lugar geométrico. La distancia de P a (4, 0) ha de ser igual a la mitad de la distancia de P a la recta $x - 16 = 0$; es decir:

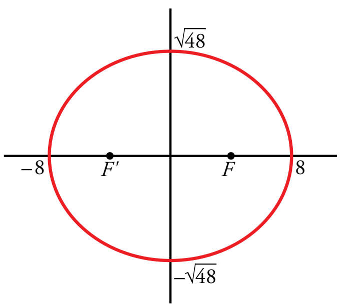
$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \frac{1}{2}\,|\,x-16\,|$$

$$(x-4)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x-16)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = \frac{1}{4}(x^2 - 32x + 256)$$

$$4x^2 - 32x + 64 + 4y^2 = x^2 - 32x + 256$$

$$3x^2 + 4y^2 = 192 \to \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$



Es una elipse en la que $a = 8$ y $b = \sqrt{48} \approx 6{,}93$.

Los focos están en $F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$.

La excentricidad es: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

73 **Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que el producto de las pendientes de las rectas trazadas desde P a los puntos $A(-2, 1)$ y $B(2, -1)$ sea igual a 1.**

¿Qué figura obtienes? Represéntala.

- La pendiente de la recta que une P con A es: $\dfrac{y-1}{x+2}$
- La pendiente de la recta que une P con B es: $\dfrac{y+1}{x-2}$
- El producto de las pendientes ha de ser igual a 1, es decir:

$$\left(\frac{y-1}{x+2}\right)\cdot\left(\frac{y+1}{x-2}\right)=1 \to \frac{y^2-1}{x^2-4}=1 \to y^2-1=x^2-4$$

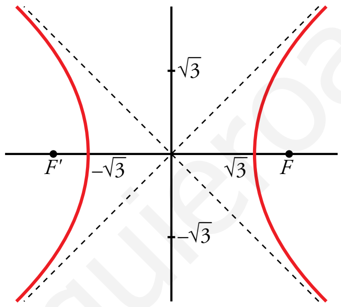
$$x^2-y^2=3 \to \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$$

Es una hipérbola en la que $a = b = \sqrt{3}$ y $c = \sqrt{6}$.

Los focos son $F(\sqrt{6}, 0)$ y $F'(-\sqrt{6}, 0)$.

Las asíntotas son: $y = x$ e $y = -x$

La excentricidad es: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \approx 1,41$



74 **Halla las rectas tangentes a la elipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ que pasan por $A(5, 0)$.**

Haz de rectas que pasan por A más la recta $x = 5$.

La recta que buscamos tiene solo un punto en común con la elipse, por tanto:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ y=m(x-5)\end{array}\right\} \to \frac{x^2}{9}+\frac{(m(x-5))^2}{4}=1 \to 4x^2+9(m(x-5))^2-36=0$$

$$9m^2x^2-90m^2x+225m^2+4x^2-36=0 \to (9m^2+4)x^2-90m^2x-36+225m^2=0$$

Debe tener solución única; es decir, el discriminante debe ser igual a cero.

$$\Delta=(90m^2)^2-4\cdot(9m^2+4)\cdot(-36+225m^2)=576-2\,304m^2=0 \to m=-\frac{1}{2},\ m=\frac{1}{2}$$

Las rectas pedidas son:

$$r: y=-\frac{1}{2}(x-5),\quad r': \frac{1}{2}(x-5)$$

75 Halla la ecuación de la tangente a la elipse $3x^2 + 4y^2 = 48$ en el punto $P(2, 3)$. Usa que la tangente es la bisectriz exterior de los segmentos PF y PF', donde F y F' son los focos.

$3x^2 + 4y^2 = 48 \to \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

$p = (2,3)$

$c = \sqrt{4} = 2$

$F = (2, 0),\ F' = (-2, 0)$

$\overrightarrow{PF} = (0, -3);\ \overrightarrow{PF'} = (-4, -3)$

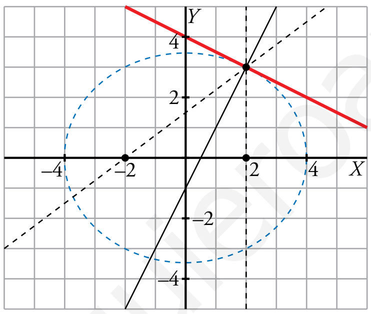
Recta PF: $x = 2$

Recta PF': $\frac{x+2}{-4} = \frac{y}{-3} \to -3x + 4y - 6 = 0$

Bisectrices:

$$|x-2| = \left|\frac{-3x+4y-6}{5}\right| \to \begin{cases} x-2 = \dfrac{-3x+4y-6}{5} \\ x-2 = -\dfrac{-3x+4y-6}{5} \end{cases} \to \begin{cases} 5x-10 = -3x+4y-6 \\ 5x-10 = 3x-4y+6 \end{cases} \to \begin{cases} 8x-4y-4=0 \\ 2x+4y-16=0 \end{cases}$$

La recta pedida es: $8x - 4y - 4 = 0$



76 Halla la ecuación de la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ en el punto P, de abscisa $x = 5$.

Utiliza el hecho de que la tangente es la bisectriz de los segmentos PF y PF', donde F y F' son los focos de la hipérbola (elige la bisectriz adecuada).

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

$\frac{25}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \to y = -\frac{9}{4},\ y = \frac{9}{4}$

Hay dos puntos en la hipérbola con abscisa 5.

Hallamos la tangente en $P = \left(5, \frac{9}{4}\right)$, la tangente en $P = \left(5, -\frac{9}{4}\right)$ es la simétrica respecto del eje OX.

$P = \left(5, \frac{9}{4}\right)$

$c = 5$

$PF = (5, 0);\ F' = (-5, 0)$

$\overrightarrow{PF} = \left(0, -\frac{9}{4}\right);\ \overrightarrow{PF'} = \left(-10, -\frac{9}{4}\right) = (40, 9)$

Recta PF: $x = 5$

Recta PF': $\frac{x+5}{40} = \frac{y}{-9} \to -9x + 40y - 45 = 0$

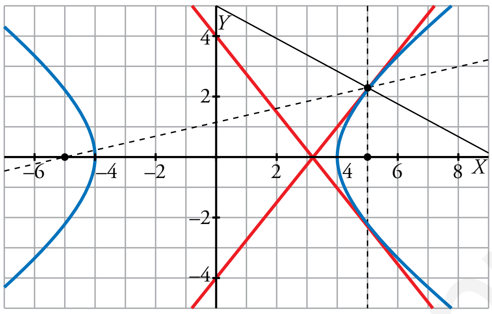
Bisectrices:

$$|x-5| = \left|\frac{-9x+40y-45}{\sqrt{81+1\,600}}\right| \rightarrow \begin{cases} x-5=\dfrac{-9x+40y-45}{41} \\ x-5=-\dfrac{-9x+40y-45}{41} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 41x-205=-9x+40y-45 \\ -41x+205=-9x+40y-45 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x-4y-16=0 \\ 32x-40y-250=0 \end{cases}$$

La recta pedida es: $5x-4y-16=0$

La tangente en $P=\left(5, -\dfrac{9}{4}\right)$ es $y+\dfrac{9}{4}=-\dfrac{5}{4}(x-5)$



77 **Halla la tangente a la parábola $y^2 = 12x$ en el punto $P(3, 6)$. Usa el hecho de que la tangente es la bisectriz del ángulo formado por PF, donde F es el foco, y la recta perpendicular por P a la directriz.**

$y^2 = 12x$

$V = (0, 0)$

$p = 6$

Parábola hacia la derecha.

$F = (3, 0)$

d: $x = -3$

$P = (3, 6)$

$\overrightarrow{PF} = (0, -6) = -6(0, 1)$

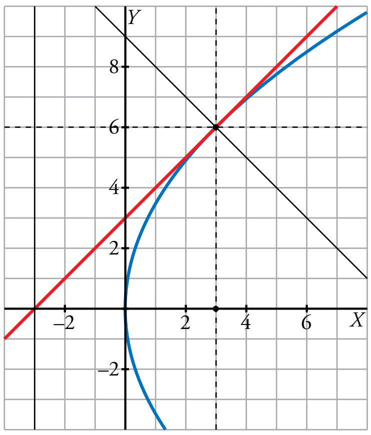
Recta PF: $x = 3$

Recta perpendicular a d que pasa por P: $y = 6$

Bisectrices:

$$|x-3| = |y-6| \rightarrow \begin{cases} x-3=y-6 \\ x-3=-y+6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y-9=0 \end{cases}$$

La recta pedida es $x-y+3=0$



78 **El cometa Halley describe una órbita elíptica, estando el Sol en uno de sus focos, de excentricidad 0,96657. Si su distancia mínima al Sol (perihelio) es de 0,6 UA, calcula cuál es la máxima (afelio). Recuerda que 1 UA (unidad astronómica) es la distancia media entre la Tierra y el Sol.**

Focos: *Sol*, *F*

dist (*Halley*, *Sol*)+ *dist* (*Halley*, *F*) = 2*a*

$e = \frac{c}{a} = 0{,}96657 \;\rightarrow\; c = 0{,}96657a$

Luego la distancia mínima se alcanza cuando el cometa está en el vértice correspondiente al foco del Sol y es:

$a - c = 0{,}6$

$\begin{cases} a - c = 0{,}6 \\ c = 0{,}96657a \end{cases} \;\rightarrow\; a = 17{,}946,\; c = 17{,}348$

La distancia máxima se alcanza cuando la Tierra está en el vértice opuesto al foco del Sol y es:

$2a - 0{,}6 = 2 \cdot 17{,}948 - 0{,}6 = 35{,}296$ UA

79 **La Tierra describe una órbita elíptica, estando el Sol en uno de sus focos. En esta trayectoria, la distancia mínima Tierra-Sol es de 147 095 248 km, y la máxima es de 152 100 492 km. Calcula la excentricidad de la órbita e interpreta el resultado obtenido.**

Focos: *Sol*, *F*

dist mínima + *dist máxima* = 2*a*

dist (*Tierra*, *Sol*) + *dist* (*Tierra*, *F*) = 2*a*

$147\,095\,248 + 152\,100\,492 = 2a \;\rightarrow\; a = 1{,}4960 \cdot 10^8$

La distancia mínima se alcanza cuando la Tierra está en el vértice correspondiente al foco del Sol y es:

$a - c = 147\,095\,248$

$1{,}4960 \cdot 10^8 - c = 147\,095\,248 \;\rightarrow\; c = 2{,}5048 \cdot 10^6$

$e = \frac{c}{a} = \frac{2{,}5048 \cdot 10^6}{1{,}4960 \cdot 10^8} = 1{,}6743 \cdot 10^{-2} = 0{,}0167$

Como la excentricidad es muy pequeña, la órbita es casi una circunferencia.

80 **Asocia cada una de las siguientes ecuaciones a una de las gráficas que están a continuación:**

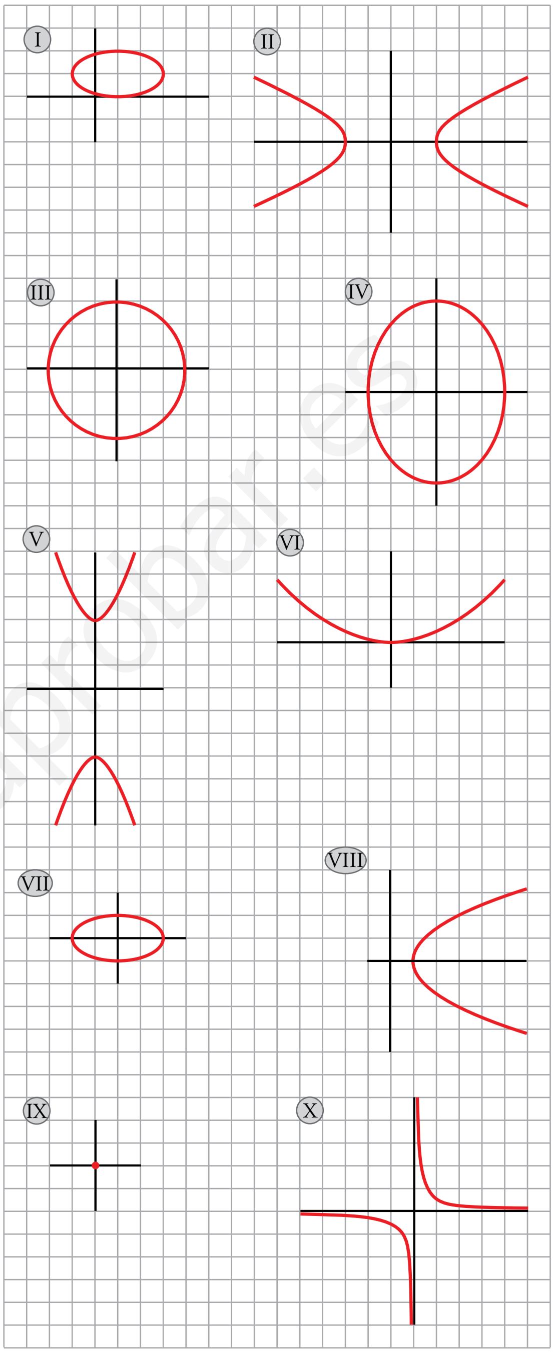
a) $x^2 + 4y^2 = 4$ b) $x^2 + y^2 = 9$

c) $y^2 - 9x^2 = 9$ d) $2xy = 1$

e) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ f) $\frac{x^2}{9} - y = 0$

g) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ h) $y^2 = 2(x - 1)$

i) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 0$ j) $\frac{(x-1)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$



a) VII

b) III

c) V

d) X

e) IV

f) VI

g) II

h) VIII

i) IX

j) I

Página 241

Cuestiones teóricas

81 **¿Qué tienen en común todas estas circunferencias?:**

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$

$(x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$

Todas son tangentes a los ejes de coordenadas porque las coordenadas de O son iguales en valor absoluto y su valor absoluto coincide con el valor del radio:

$$dist\,(O, OX) = dist\,(O, OY) = r$$

82 **Determina si las siguientes ecuaciones corresponden a cónicas. Si es así, indica qué cónica es:**

a) $-\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} + 1$ **b)** $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} - 1$ **c)** $x^2 + y^2 + x + y + 1 = 0$ **d)** $y^2 + 2y = x$

a) No es ninguna curva porque $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = -1$ no es posible. La suma de dos números positivos no puede dar un resultado negativo.

b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$. Hipérbola con focos en el eje OY.

c) Si es alguna cónica, es una circunferencia, pero

$$r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

es imposible porque un radio no puede ser negativo, luego no es ninguna curva.

d) Es una parábola $(y + 1)^2 = x + 1$

83 **Las siguientes parábolas tienen su vértice en el origen de coordenadas. ¿En qué cuadrantes tienen sus ramas?:**

a) $y^2 = -2x$ **b)** $y^2 = 2x$ **c)** $x^2 = -2y$ **d)** $x^2 = 2y$

a) Parábola hacia la izquierda. Está en el 2.º y 3.^er^ cuadrantes.

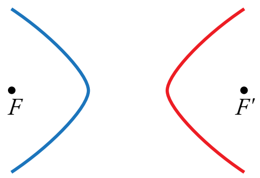
b) Parábola hacia la derecha. Está en el 1.^er^ y 4.º cuadrantes.

c) Parábola hacia abajo. Está en el 3.^er^ y 4.º cuadrantes.

d) Parábola hacia arriba. Está en el 1.^er^ y 2.º cuadrantes.

84 **Sabemos que en esta hipérbola $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 4$.**

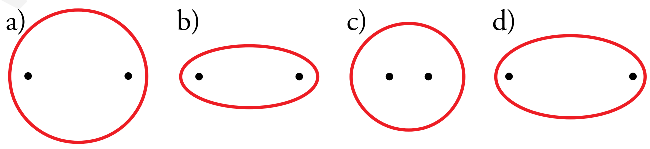
¿Qué rama corresponde a $\overline{PF} - \overline{PF'} = 4$ y cuál corresponde a $\overline{PF'} - \overline{PF} = 4$?



$\overline{PF} - \overline{PF'} = 4 \to$ Los puntos están más lejos de F, luego es la rama roja.

$\overline{PF'} - \overline{PF} = 4 \to$ Los puntos están más lejos de F', luego es la rama azul.

85 **Teniendo en cuenta la definición de elipse y tomando sobre el dibujo algunas medidas, di cuáles de estas elipses con sus focos están mal dibujadas:**



a) Está mal dibujada porque a y b son casi iguales, luego c tiene que ser muy pequeño y, sin embargo, los focos están muy separados, siendo c la distancia al centro del foco.

b) Mal, a es la hipotenusa del triángulo que une el centro, un foco y un vértice del eje OY, y no mide igual que el semieje mayor.

c) Bien. Dibujamos el triángulo rectángulo de vértices el centro de la elipse, el vértice superior de la elipse y un foco. La medida de la hipotenusa de ese triángulo es similar a la medida del semieje horizontal.

d) Bien. Dibujamos el triángulo rectángulo de vértices el centro de la elipse, el vértice superior de la elipse y un foco. La medida de la hipotenusa de ese triángulo es similiar a la medida del semieje horizontal.

Para profundizar

86 **a) Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos $A(-3, 0)$ y $B(3, 0)$ es 68. Puedes comprobar que se trata de una circunferencia de centro $O(0, 0)$. ¿Cuál es su radio?**

b) Generaliza: Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a $A(-a, 0)$ y $B(a, 0)$ es k (constante), y comprueba que se trata de una circunferencia de centro $O(0, 0)$. Di el valor de su radio en función de a y de k. ¿Qué relación deben cumplir a y k para que realmente sea una circunferencia?

a) $P = (x, y)$

$(dist\ (P, A))^2 = (x+3)^2 + y^2$

$(dist\ (P, B))^2 = (x-3)^2 + y^2$

$(x+3)^2 + y^2 + (x-3)^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 + 18 = 68 \to 2x^2 + 2y^2 = 50 \to x^2 + y^2 = 25$

Circunferencia de centro $O = (0, 0)$ y radio $r = 5$

b) $(x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 = k \to 2a^2 + 2x^2 + 2y^2 = k \to x^2 + y^2 = \dfrac{k}{2} - a^2$

Circunferencia de centro $O = (0, 0)$ y radio $r = \sqrt{\dfrac{k}{2} - a^2}$

Para que sea una circunferencia, $\dfrac{k}{2} > a^2 \to k > 2a^2$

87 **a) Considera la circunferencia C: $(x-1)^2 + y^2 = 25$ y el punto $P(9, 6)$. Sea r la recta que une P con el centro de la circunferencia. Halla A y B, puntos de corte de r y C. Comprueba que la potencia de P respecto a C coincide con $d(P, A) \cdot d(P, B)$.**

b) Demuestra que el apartado anterior es cierto si sustituimos r por cualquier recta secante a C que pase por P.

* ***Haz un dibujo y llama A' y B' a los puntos de corte de C y la nueva recta. Aplica semejanza a los triángulos $AB'P$ y $A'PB$.***

a) $(x-1)^2 + y^2 = 25$

$O = (1, 0)$

$\overrightarrow{PO} = (8, 6) = 2(4, 3)$

Recta PO: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{3} \to 3x - 4y - 3 = 0$

Puntos de intersección:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 3 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 25 \end{cases} \to x_1 = -3,\ y_1 = -3;\ x_2 = 5, y_2 = 3 \to A = (-3, -3),\ B = (5, 3)$$

$\mathcal{P}(P, C) = (9-1)^2 + 6^2 - 25 = 75$

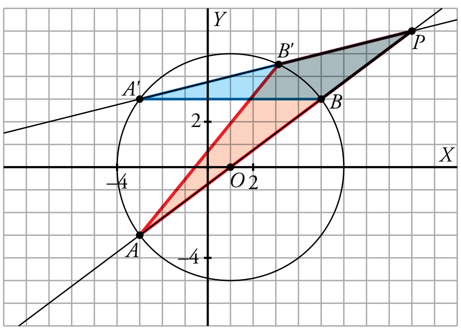
$d(P, A) \cdot d(P, B) = \sqrt{144+81} \cdot \sqrt{16+9} = 15 \cdot 5 = 75$

b) Sean dos rectas que pasan por P y son secantes a C.

Los triángulos PAB' y $PA'B$ son semejantes porque tienen un ángulo común y un ángulo inscrito con arco común, luego los lados son proporcionales:

$\dfrac{PA}{PA'} = \dfrac{PB'}{PB} \to PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$

Luego el resultado no depende de la recta secante elegida.



88 **Demuestra que el lugar geométrico de los puntos P cuyo cociente de distancias a un punto fijo F y a una recta fija d es igual a k, es una cónica de excentricidad k.**

* ***Toma F(c, 0), d: $x = a^2/c$ y $k = c/a$ y estudia los casos $k < 1$, $k > 1$ y $k = 1$. ¿Qué cónica se obtiene en cada caso?***

$P = (x, y)$

$F = (c, 0)$

$d: x = l$

$d(P, F) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$; $d(P, d) = |x - l|$

$\dfrac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x-l|} = k \to (x-c)^2 + y^2 = k^2(x-l)^2$

$c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = k^2l^2 - k^2\, 2lx + k^2x^2 \to (1-k^2)x^2 + (k^2\, 2l - 2c)x + y^2 + c^2 = 0$

Es una cónica por ser una ecuación de segundo grado.

Si $k = \dfrac{c}{a}$ y $l = \dfrac{a^2}{c}$:

$$\left(1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right)x^2 + \left(2\left(\frac{c}{a}\right)^2\frac{a^2}{c} - 2c\right)x + y^2 + c^2 = 0 \to \left(1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right)x^2 + y^2 + c^2 = 0$$

Para que sea una cónica, $\left(1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right) < 0$ pues en otro caso, la suma de tres números positivos daría 0, que es imposible.

Si $\left(1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right) < 0 \to k > 1 \to$ Es una hipérbola.

Si $\left(1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right) \geq 0 \to k \leq 1 \to$ No es la ecuación de ninguna cónica.

Autoevaluación

Página 241

1 Halla la ecuación de la bisectriz de los ángulos formados por las siguientes rectas:

r_1**:** $x = 3$

r_2**:** $3x - 4y + 1 = 0$

Los puntos $X(x, y)$ deben cumplir: $dist\ (X, r_1) = dist\ (X, r_2)$

$$\left.\begin{array}{l} dist\ (X, r_1) = |x-3| \\ dist\ (X, r_2) = \dfrac{|3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}} \end{array}\right\} |x-3| = \frac{|3x-4y+1|}{5}$$

Eliminando los valores absolutos obtenemos dos ecuaciones, las que corresponden a las dos bisectrices, perpendiculares entre sí:

$5(x-3) = 3x - 4y + 1 \rightarrow 2x + 4y - 16 = 0 \rightarrow x + 2y - 8 = 0$

$-5(x-3) = 3x - 4y + 1 \rightarrow 8x - 4y - 14 = 0 \rightarrow 4x - 2y - 7 = 0$

2 Escribe la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(1, -3)$ y pasa por el punto $A(5, 0)$.

La ecuación de la circunferencia es de la forma $(x-1)^2 + (y+3)^2 = r^2$. Para determinar r^2, sustituimos $A(5, 0)$ en la ecuación:

$(5-1)^2 + 3^2 = r^2 \rightarrow r^2 = 25$

La ecuación de la circunferencia es, por tanto, $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$. O, en su forma simplificada:

$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$

3 Consideramos la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x = 0$ y la recta r: $3x - 4y + k = 0$. Calcula los valores que debe tomar k para que r sea interior, tangente o exterior a la circunferencia.

Hallamos primero el centro, O_C, y el radio, R, de la circunferencia:

$x^2 + y^2 - 2x = 0 \rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \rightarrow O_C = (1, 0)$ y $R = 1$

Calculamos la distancia del centro de la circunferencia, O_C, a la recta r: $3x - 4y + k = 0$:

$$d = dist\ (O_C, r) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + k|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3+k|}{5}$$

- Para que r sea interior a la circunferencia, ha de ser $d < R = 1$.

$$\frac{|3+k|}{5} < 1 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{3+k}{5} < 1 \rightarrow k < 2 \\ -\dfrac{3+k}{5} < 1 \rightarrow \dfrac{3+k}{5} > -1 \rightarrow k > -8 \end{array}\right\} \text{ Es decir, } k \in (-8, 2).$$

- Para que r sea tangente a la circunferencia, ha de ser $d = R = 1$.

$$\frac{|3+k|}{5} = 1 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{3+k}{5} = 1 \rightarrow k = 2 \\ -\dfrac{3+k}{5} = 1 \rightarrow k = -8 \end{array}\right.$$

- Para que r sea exterior a la circunferencia, ha de ser $d > R = 1$.

$$\frac{|3+k|}{5} > 1 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{3+k}{5} > 1 \rightarrow k > 2 \\ -\dfrac{3+k}{5} > 1 \rightarrow \dfrac{3+k}{5} < -1 \rightarrow k < -8 \end{array}\right\} \text{ Es decir, } k \in (-\infty, -8) \cup (2, +\infty).$$

4 **Dados los puntos $F(3, 2)$ y $F'(1, -2)$ y la recta $r: x + y - 1 = 0$, obtén las ecuaciones de:**

a) La elipse de focos F y F' cuya constante es 6.

b) La hipérbola de focos F y F' cuya constante es 2.

c) La parábola de foco F y directriz r.

No es necesario que simplifiques la expresión de las ecuaciones.

a) Elipse de focos $F(3, 2)$ y $F'(1, -2)$ y constante $k = 6$.

- Semieje mayor, a: $k = 6 = 2a \rightarrow a = 3$
- Semidistancia focal, $c = \dfrac{|\overline{FF'}|}{2} = \dfrac{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$
- Semieje menor, b: $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 5 = 4 \rightarrow b = 2$

Por tanto, la ecuación de la elipse es $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

b) Hipérbola de focos $F(3, 2)$ y $F'(1, -2)$ y constante $k = 2$.

- Semieje a: $k = 2 = 2a \rightarrow a = 1$
- Semidistancia focal, $c = \dfrac{|\overline{FF'}|}{2} = \sqrt{5}$
- $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 5 - 1 = 4 \rightarrow b = 2$

Por tanto, la ecuación de la hipérbola es $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

c) Parábola de foco $F(3, 2)$ y recta directriz $r: x + y - 1 = 0$.

En una parábola de ecuación $y^2 = 2px$, $p = dist\,(F, r)$:

$$p = \frac{|3 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es $y = 4\sqrt{2}x$.

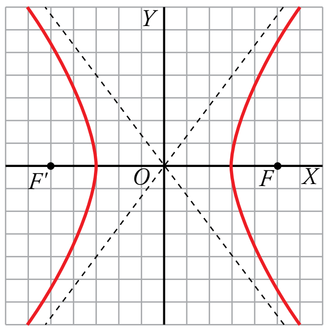
5 **Describe las siguientes cónicas. Obtén sus elementos y dibújalas:**

a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ **b)** $\dfrac{(x-5)^2}{9} - \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1$

a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Es una hipérbola en la que:

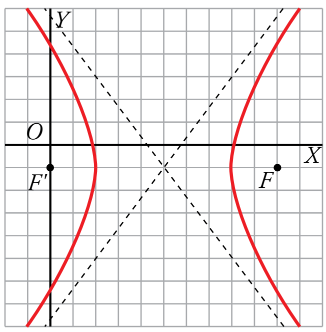
- $a = 3$, $b = 4$
- Asíntotas: $y = \dfrac{4}{3}x$, $y = -\dfrac{4}{3}x$
- Semidistancia focal: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$
- Focos: $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$
- Vértices: $V(3, 0)$ y $V'(-3, 0)$



b) $\dfrac{(x-5)^2}{9} - \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1$

Es una hipérbola igual a la del apartado anterior pero centrada en el punto $(5, -1)$.

- $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$
- Asíntotas: $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{23}{3}$; $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{17}{3}$
- Focos: $F(10, -1)$, $F'(0, -1)$
- Vértices: $V(8, -1)$, $V'(2, -1)$



6 **Obtén la ecuación de la elipse de focos $F(-4, 0)$ y $F'(4, 0)$ y excentricidad 0,8.**

$F(-4, 0)$ $F'(4, 0)$ $exc = 0{,}8$

$c = \dfrac{|\overline{FF'}|}{2} = 4$

$exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{a} = 0{,}8 \rightarrow a = 5$

$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow b = 3$

La ecuación de la elipse es $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

7 **Halla los focos, la excentricidad y las asíntotas de la hipérbola que tiene por ecuación: $9y^2 - 16x^2 = 144$. Dibújala.**

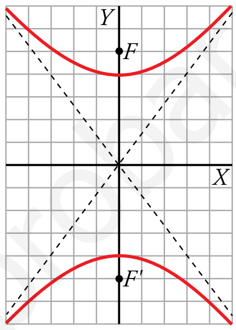
$9y^2 - 16x^2 = 144 \rightarrow \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

$a^2 = 16 \rightarrow a = 4;\ b^2 = 9 \rightarrow b = 3;\ c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5$

Los focos son $F(0, 5)$ y $F'(0, -5)$.

Excentricidad: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$

Asíntotas: $y = \dfrac{4}{3}x$ e $y = -\dfrac{4}{3}x$



8 **Escribe la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $x = 3$, y como vértice, el origen de coordenadas.**

d: $x = 3$

En una parábola $y^2 = 2px$, la recta directriz es $x = -\dfrac{p}{2}$.

Por tanto, $3 = -\dfrac{p}{2} \rightarrow p = -6$

La ecuación de la parábola es $y^2 = -12x$

9 **Halla el eje radical de estas circunferencias:**

$$C_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \qquad C_2: x^2 + y^2 - 4x - 18y + 21 = 0$$

Representa las circunferencias y su eje radical.

Sea $P(x, y)$ un punto del eje radical de ambas circunferencias. Como las potencias de P a C_1 y de P a C_2 deben coincidir:

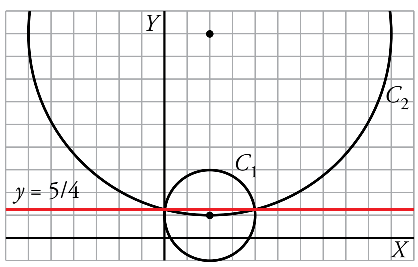
$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = x^2 + y^2 - 4x - 18y + 21 \rightarrow 16y = 20 \rightarrow y = \dfrac{5}{4}$

El eje radical de las circunferencias es $y = \dfrac{5}{4}$.

Para hacer la representación, calculamos el centro y el radio de cada circunferencia:

$$C_1 \begin{cases} A = -4 \\ B = -2 \\ C = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} O_{C_1} = (2, 1) \\ r = \sqrt{4 + 1 - 1} = 2 \end{array}$$

$$C_2 \begin{cases} A = -4 \\ B = -18 \\ C = 21 \end{cases} \quad \begin{array}{l} O_{C_2} = (2, 9) \\ r' = \sqrt{4 + 81 - 21} = 8 \end{array}$$



Resuelve

Página 247

Familias de funciones

Ya conoces muchas familias de funciones: sus nombres, cómo son sus expresiones analíticas y qué forma tienen sus gráficas.

Asocia cada nombre de familia con su representación gráfica y con su expresión analítica general.

1. F. cuadrática

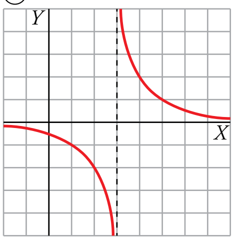
2. F. raíz

3. F. de proporcionalidad inversa

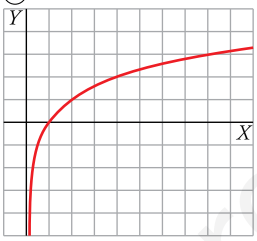
4. F. exponencial

5. F. logarítmica

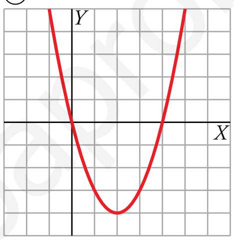
Ⓐ



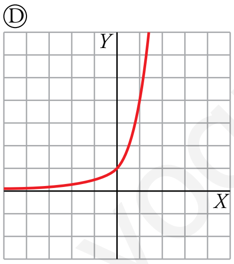
Ⓑ



Ⓒ



Ⓓ



Ⓔ

I. $y = \sqrt{x-4}$ **II.** $y = 4^x$ **III.** $y = x^2 - 4x$ **IV.** $y = log_2 x$ **V.** $y = \dfrac{2}{x-3}$

$1 \rightarrow C \rightarrow III$

$2 \rightarrow E \rightarrow I$

$3 \rightarrow A \rightarrow V$

$4 \rightarrow D \rightarrow II$

$5 \rightarrow B \rightarrow IV$

1 Las funciones y su estudio

Página 249

1 **¿Verdadero o falso?**

a) El dominio de definición de una función nunca puede ser $\mathbb{R}$.

b) El dominio de definición de $y = -\sqrt{x}$ es $[0, +\infty)$.

c) El dominio de definición de $y = \sqrt{-x}$ es $(-\infty, 0]$.

a) Falso. Por ejemplo, el dominio de la función cuadrática $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ es $\mathbb{R}$.

b) Verdadero. Siempre que $x \ge 0$ la función está definida.

c) Verdadero. Cuando $x \le 0$, se tiene que $-x \ge 0$ y la función está definida correctamente.

2 **Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ **b)** $y = \sqrt{x - 1}$ **c)** $y = \sqrt{1 - x}$ **d)** $y = \sqrt{4 - x^2}$

e) $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ **f)** $y = 1/\sqrt{x^2 - 1}$ **g)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$ **h)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$

i) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4 - x^2}}$ **j)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ **k)** $y = x^3 - 2x + 3$ **l)** $y = \dfrac{1}{x}$

m) $y = \dfrac{1}{x^2}$ **n)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ **ñ)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ **o)** $y = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

p) El área de un círculo de radio variable, r, es $A = \pi r^2$.

a) Para que esté definida debe ocurrir que $x^2 - 1 \ge 0$. Ahora resolvemos la inecuación y se tiene que $Dom = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

b) $[1, +\infty)$

c) $(-\infty, 1]$

d) $[-2, 2]$

e) La raíz cúbica está definida independientemente del signo del radicando. Como este es un polinomio de 2.º grado, también está siempre definido. Por tanto, el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

f) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

g) Por un lado, $x \ge 1$ para que se pueda definir la raíz. Pero, además, $x \ne 1$ para que no se produzca una división entre 0. Por tanto, $Dom = (1, +\infty)$.

h) Razonando de forma análoga al apartado anterior, $x \le 1$ y $x \ne 1$. El dominio de definición es $Dom = (-\infty, 1)$.

i) En esta ocasión la raíz cúbica siempre está definida, pero para que lo esté el cociente, el denominador no puede ser 0.

$x^2 - 4 = 0 \;\to\; x_1 = -2,\; x_2 = 2$ y el dominio de definición es $Dom = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

j) Por una parte, $x^2 - 4 \ge 0$, que ocurre siempre que x esté en $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. Pero x no puede ser ni 2 ni –2 para no dividir entre 0. Luego el dominio es $Dom = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

k) Su dominio es $\mathbb{R}$, ya que siempre está definida.

l) $\mathbb{R} - \{0\}$

m) $\mathbb{R} - \{0\}$

n) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

ñ) Como la ecuación $x^2 + 4 = 0$ no tiene solución, el dominio de definición es $Dom = \mathbb{R}$.

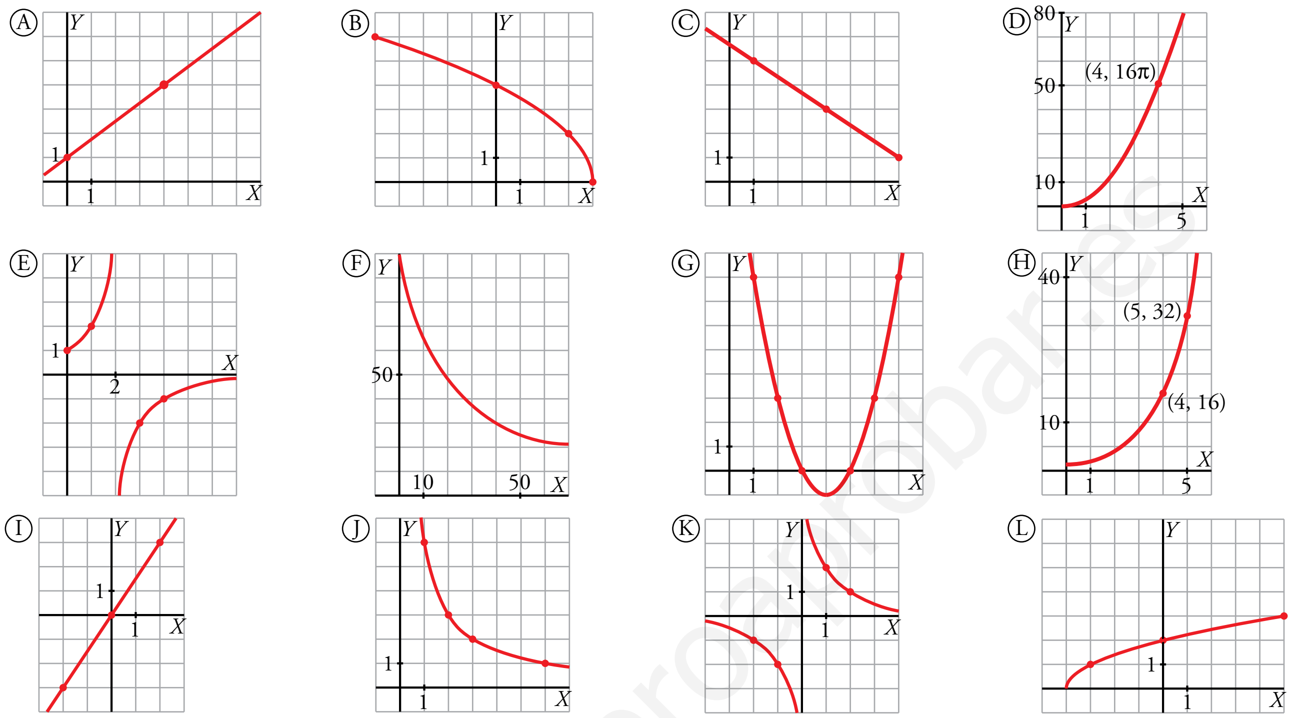
o) La ecuación $x^3 + 1 = 0$ tiene una única solución, $x = -1$. Luego el domino es $Dom = \mathbb{R} - \{-1\}$.

p) Por el contexto de la función, estará definida en $(0, +\infty)$ ya que el radio es siempre un número positivo.

2 Familias de funciones elementales

Página 253

1 Asocia a cada una de las siguientes gráficas una ecuación.



LINEALES	CUADRÁTICAS	PROPORCIONALIDAD INVERSA	RADICALES	EXPONENCIALES
L1 $y = \frac{3}{2}x$	C1 $y = x^2 - 8x + 15$	PI1 $y = \frac{1}{x}$	R1 $y = \sqrt{2x+4}$	E1 $y = 2^x$
L2 $y = -\frac{2}{3}(x-1) + 5$	C2 $y = (x+3)(x+5)$	PI2 $y = \frac{2}{2-x}$	R2 $y = \sqrt{x+4}$	E2 $y = 0{,}5^x$
L3 $3x + 2y = 0$	C3 $y = x^2,\ x > 0$	PI3 $y = \frac{2}{x}$	R3 $y = 2\sqrt{4-x}$	E3 $y = 20 + 80 \cdot 0{,}95^x$
L4 $y = \frac{3}{4}x + 1$	C4 $y = \pi x^2,\ x > 0$	PI4 $y = \frac{6}{x},\ x > 0$	R4 $y = -\sqrt{4+x}$	E4 $y = 3^x$

$A \to L_4$ $\quad B \to R_3$ $\quad C \to L_2$ $\quad D \to C_4$

$E \to PI_2$ $\quad F \to E_3$ $\quad G \to C_1$ $\quad H \to E_1$

$I \to L_1$ $\quad J \to PI_4$ $\quad K \to PI_3$ $\quad L \to R_2$

2 Cada uno de los siguientes enunciados se corresponde con una gráfica de entre las del ejercicio anterior. Identifícala.

1. Superficie, en centímetros cuadrados, de un círculo. Radio, en centímetros.

2. Aumento de una lupa. Distancia al objeto, en centímetros.

3. Temperatura de un cazo de agua que se deja enfriar desde 100 °C. Tiempo, en minutos.

4. Número de amebas que se duplican cada hora. Se empieza con una.

5. Longitud de un muelle, en decímetros. Mide 1 dm y se alarga 75 mm por cada kilo que se le cuelga.

6. Dimensiones (largo y ancho, en centímetros) de rectángulos cuya superficie es de 6 cm².

1. D $\quad$ 2. E $\quad$ 3. F $\quad$ 4. H $\quad$ 5. A $\quad$ 6. J

3 **¿Verdadero o falso?**

a) En una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, cuanto mayor es a, más ancha es la parábola que la representa.

b) Las gráficas de $y = 5x^2 + bx + c$ son idénticas, aunque pueden estar situadas en posiciones distintas.

c) Todas las parábolas de ecuación $y = ax^2 + c$ tienen su vértice en el punto de abscisa $x = 0$.

a) Falso. Por ejemplo, la función cuadrática $y = 4x^2$ es más estrecha que la función $y = x^2$.

b) Verdadero. Como la anchura de la parábola está determinada por el término de x^2, los otros solo influyen en la posición de la parábola respecto de los ejes de coordenadas.

c) Verdadero. Como no tiene término en x, la abscisa del vértice es $\frac{0}{2a} = 0$.

4 **¿Verdadero o falso?**

a) Las funciones $y = -\sqrt{kx}$ se representan mediante medias parábolas con el eje paralelo al eje Y.

b) El dominio de definición de $y = -a\sqrt{x+b}$ es $[-b, +\infty)$.

c) Los ejes X e Y son asíntotas de las funciones $y = \frac{k}{x}$.

d) El dominio de definición de $y = \frac{k}{a+x}$ es $\mathbb{R} - \{k\}$.

a) Falso. El eje de estas medias parábolas es el eje X.

b) Verdadero. La función está definida si $x + b \geq 0$, es decir, si $x \geq -b$. Por tanto, el dominio de definición es el intervalo dado.

c) Verdadero.

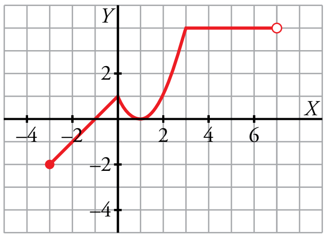
d) Falso. La función no está definida si $a + x = 0 \rightarrow x = -a$. El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-a\}$.

3 Funciones definidas "a trozos"

Página 254

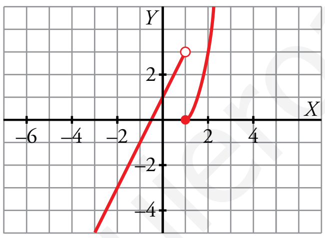
1 Representa esta función:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\in[-3,0) \\ x^2-2x+1 & x\in[0,3] \\ 4 & x\in(3,7)\end{cases}$$

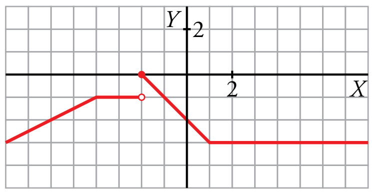


2 Haz la representación gráfica de la siguiente función:

$$g(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<1 \\ x^2-1 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$



3 Escribe la expresión analítica que corresponde a la siguiente gráfica:



Primer tramo:

- Recta que pasa por los puntos $(-6,-2)$ y $(-4,-1)$.
- La pendiente es $\dfrac{-1-(-2)}{-4-(-6)}=\dfrac{1}{2}$ y la ecuación es $y-(-1)=\dfrac{1}{2}(x-(-4))$.

Segundo tramo:

- $y=-1$

Tercer tramo:

- Pertenece a una recta que pasa por $(0,-2)$ y $(1,-3)$.
- La pendiente es $\dfrac{-3-(-2)}{1-0}=-1$ y la ecuación es $y-(-2)=-x$.

Cuarto tramo: $y=-3$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1 & \text{si } x<-4 \\ -1 & \text{si } -4\leq x<-2 \\ -x-2 & \text{si } -2\leq x<1 \\ -3 & \text{si } 1\leq x\end{cases}$$

Página 255

Practica

Ent(7,5) = 7

Ent(–4) = –4

Ent(–5,3) = –6 ¡atención!

Continúa:

Ent(6,48)	***Ent***(7)	***Ent***(–3,9)	***Ent***(–11,3)	***Ent***(–8)
Ent(6,48) = 6	*Ent*(7) = 7	*Ent*(–3, 9) = –4	*Ent*(–11, 3) = –12	*Ent* (–8) = –8

Practica

Mant(7,68) = 0,68

Mant(–8) = 0

Mant(–7,68) = 0,32

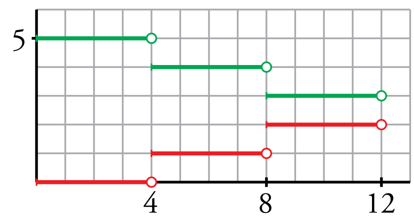
Continúa:

Mant(3,791)	***Mant***(–6,94)	***Mant***(2)	***Mant***(–4,804)
Mant(3,791) = 0,791	*Mant*(–6,94) = 0,06	*Mant*(2) = 0	*Mant*(–4,804) = 0,196

4 **¿Verdadero o falso?**

a) La gráfica roja corresponde a la función $y = Ent\left(\frac{x}{4}\right)$.

b) La gráfica verde corresponde a la función $y = 5 + Ent\left(\frac{x}{4}\right)$.



a) Verdadero.

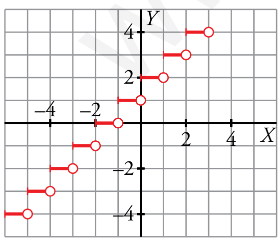
b) Falso. La gráfica verdes es $y = 5 - Ent\left(\frac{x}{4}\right)$

5 **Representa:**

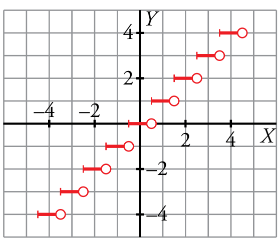
a) $y = Ent(x) + 2$

b) $y = Ent(x + 0{,}5)$

a) $y = Ent\ (x) + 2$



b) $y = Ent\ (x + 0{,}5)$

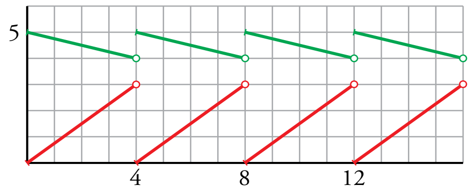


6 **¿Verdadero o falso?**

a) La gráfica roja corresponde a $y = 3Mant\left(\frac{x}{4}\right)$.

b) La gráfica roja corresponde a $y = 3Mant(4x)$.

c) La gráfica verde corresponde a $y = 5 - Mant\left(\frac{x}{4}\right)$.



a) Verdadero

b) Falso

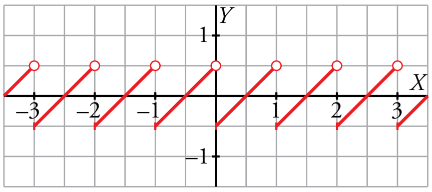
c) Verdadero

7 **Representa:**

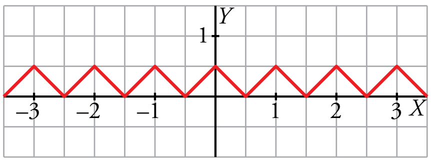
a) $y = Mant(x) - 0{,}5$

b) $y = |Mant(x) - 0{,}5|$

a) $y = Mant\ (x) - 0{,}5$



b) $y = |Mant\ (x) - 0{,}5|$



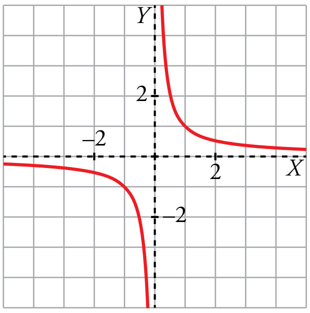
4 Transformaciones elementales de funciones

Página 256

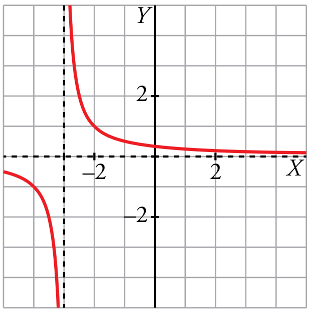
1 **Representa sucesivamente:**

a) $y = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \frac{1}{x+3}$ **c)** $y = -\frac{1}{x+3}$ **d)** $y = -\frac{1}{x+3} + 8$

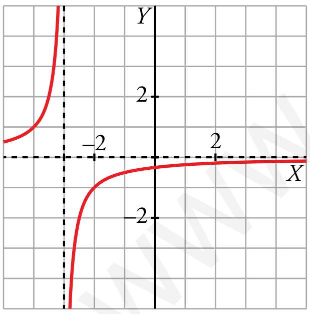
a)



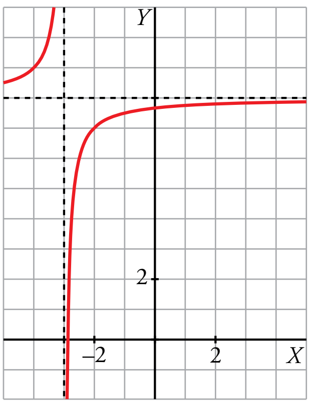
b) Se obtiene desplazando la gráfica anterior tres unidades a la izquierda.



c) Es la simétrica de la anterior respecto del eje *X*.



d) Es igual a la anterior trasladándola 8 unidades hacia arriba.



Página 257

2 **Si $y = f(x)$ pasa por (3, 8), di un punto de:**

$$y = f(x) - 6,\ y = f(x+4),\ y = \frac{1}{2}f(x),\ y = 2f(x),\ y = -f(x),\ y = f(-x),\ y = -2f(-x) + 3$$

$y = f(x) - 6 \rightarrow (3, 2)$ $y = f(x+4) \rightarrow (-1, 8)$ $y = \frac{1}{2}f(x) \rightarrow (3, 4)$

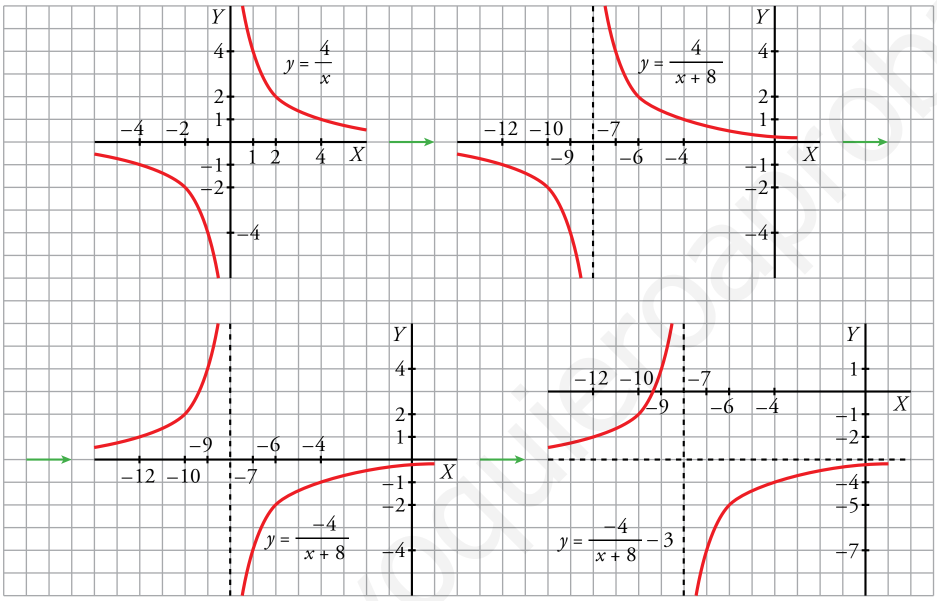
$y = 2f(x) \rightarrow (3, 16)$ $y = -f(x) \rightarrow (3, -8)$ $y = f(-x) \rightarrow (-3, 8)$

$y = -2f(-x) + 3 \rightarrow (-3, -13)$

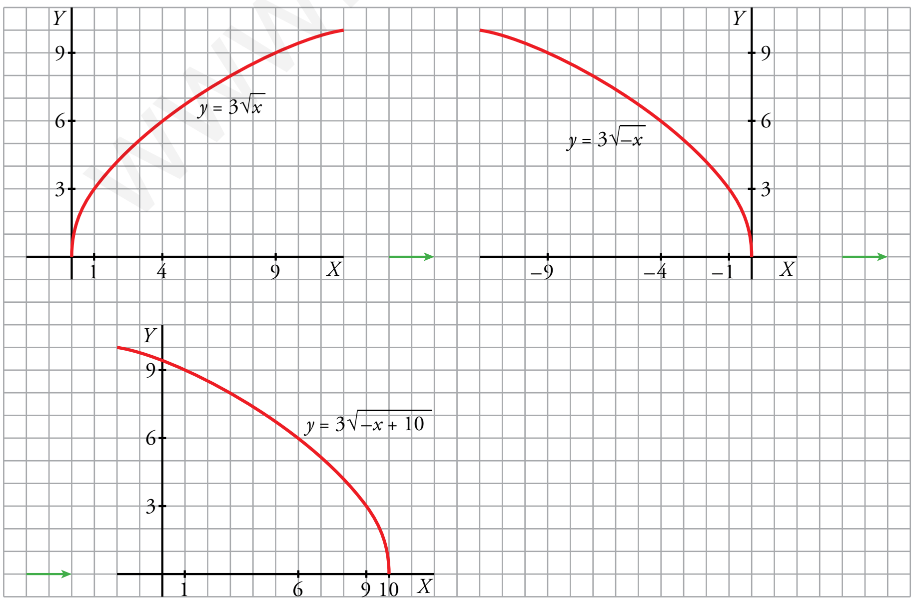
3 **Representa:**

a) $y = -\dfrac{4}{x+8} - 3$ **b)** $y = 3\sqrt{-x+10}$

a) Representamos $y = \dfrac{4}{x} \rightarrow y = \dfrac{4}{x+8} \rightarrow y = -\dfrac{4}{x+8} \rightarrow y = -\dfrac{4}{x+8} - 3$



b) Representamos $y = 3\sqrt{x} \rightarrow y = 3\sqrt{-x} \rightarrow y = 3\sqrt{-(x-10)}$



5 Composición de funciones

Página 258

1 **Si $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = x^2$, obtén las expresiones de $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$.**

Halla $f[g(4)]$ y $g[f(4)]$.

$f[g(x)] = f[x^2] = x^4 - 5x^2 + 3$

$g[f(x)] = g[x^2 - 5x + 3] = (x^2 - 5x + 3)^2$

$f[g(4)] = 179;\ g[f(4)] = 1$

2 **Si $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = x + \frac{\pi}{2}$, obtén las expresiones de $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$.**

Halla el valor de estas funciones en $x = 0$ y $x = \pi/4$.

$f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(sen\ x) = sen\ x + \frac{\pi}{2}$

$f \circ f(x) = f[f(x)] = f(sen\ x) = sen\ (sen\ x)$

$g \circ g(x) = g[g(x)] = g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = x + \pi$

$f \circ g(0) = sen\ \frac{\pi}{2} = 1$

$g \circ f(0) = sen\ 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$f \circ f(0) = sen\ (sen\ 0) = 0$

$g \circ g(0) = 0 + \pi = \pi$

$f \circ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$g \circ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2} + \pi}{2}$

$f \circ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(sen\ \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}65$

$g \circ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

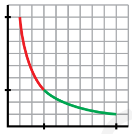
6 Función inversa o recíproca de otra

Página 259

1 ¿Verdadero o falso?

a) La función recíproca de $y = x$ es $y = \frac{1}{x}$.

b) Cada una de las funciones $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ es recíproca de sí misma.



c) La inversa de $y = \frac{9}{x}$, $x \in [3, 9]$ es $y = \frac{9}{x}$, $x \in [1, 3]$.

d) Si una función es creciente, su recíproca es decreciente.

a) Falso. Las gráficas de esas funciones no son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante, puesto que una es recta y la otra es curva.

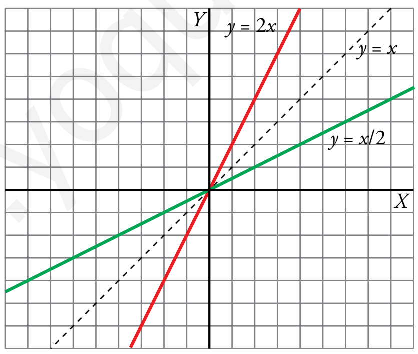
b) Verdadero. Si $f(x) = x$ y calculamos $f \circ f(x) = f[f(x)] = f(x) = x$, vemos que f es recíproca de sí misma.

Análogamente, si $g(x) = \frac{1}{x}$ y calculamos $g \circ g(x) = g[g(x)] = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1/x} = x$, vemos que g es recíproca de sí misma.

c) Verdadero. Podemos comprobarlo en el gráfico. La gráfica verde es simétrica, respecto de la bisectriz del primer cuadrante, de la gráfica roja.

d) Falso. Por ejemplo, la recíproca de la función $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, es la función $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, y ambas son crecientes.

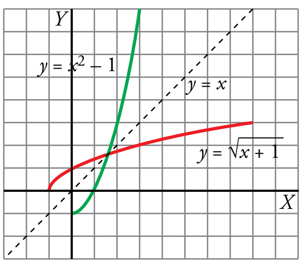
2 Representa $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$ y comprueba que son inversas.



3 Comprueba que hay que descomponer $y = x^2 - 1$ en dos ramas para hallar sus inversas. Averigua cuáles son.

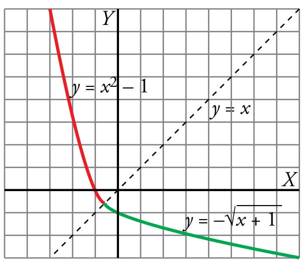
a) $y = x^2 - 1$ si $x \geq 0$

$y^{-1} = \sqrt{x+1}$



b) $y = x^2 - 1$ si $x < 0$

$y^{-1} = -\sqrt{x+1}$



4 **Comprueba que la función recíproca de $y = 2x + 4$ es $y = \frac{1}{2}x - 2$.**

Llamemos $f(x) = 2x + 4$ y $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 2\left(\frac{1}{2}x - 2\right) + 4 = x$$

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2x + 4) = \frac{1}{2}(2x + 4) - 2 = x$$

Luego $g = f^{-1}$.

Página 260

5 **¿Verdadero o falso?**

La función recíproca de $y = 2^x$, $x > 0$ es $y = log_2\, x$, $x > 1$.

Falso. La función recíproca de $y = 2^x$, $x > 0$ es $y = log_2\, x$, $x > 0$.

6 **Halla la función recíproca de:**

$$y = log_2\, x,\ \ x \in [8, 32]$$

La función recíproca es $y = 2^x$, $x \in [3, 5]$.

7 Funciones arco

Página 262

1 **¿Verdadero o falso?**

a) La función $y = arc\ tg\ x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ es la recíproca de la función $y = tg\ x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) En las calculadoras científicas (tienen que estar puestas en modo RAD), las funciones *sin*$^{-1}$, *cos*$^{-1}$, *tan*$^{-1}$ responden exactamente (coinciden) con las funciones *arc sen*, *arc cos* y *arc tg*.

a) Verdadero. Las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

b) Verdadero. Los valores que da la calculadora están en los intervalos correspondientes de cada una de las funciones.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 263

1. Ecuación y representación de una parábola

Hazlo tú. **Escribe la ecuación de la parábola que tiene el vértice en (2, –4) y pasa por el punto (3, –3).**

Si la parábola es $y = ax^2 + bx + c$ tenemos que:

$$\frac{-b}{2a} = 2 \rightarrow b = -4a$$

Por otro lado:

$$-4 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \rightarrow -4 = 4a + 2b + c$$

$$-3 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \rightarrow -3 = 9a + 3b + c$$

Resolvemos el sistema:

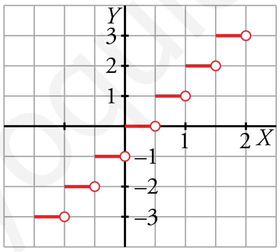
$$\begin{cases} b = -4a \\ -4 = 4a + 2b + c \\ -3 = 9a + 3b + c \end{cases} \rightarrow a = 1,\ b = -4,\ c = 0 \rightarrow y = x^2 - 4x$$

Página 264

3. Función "parte entera"

Hazlo tú. **Representa la función $f(x) = Ent\,(2x)$.**

Esta gráfica es como la de la función parte entera, pero contraída a la mitad en el sentido del eje horizontal.



4. Valor absoluto de una función

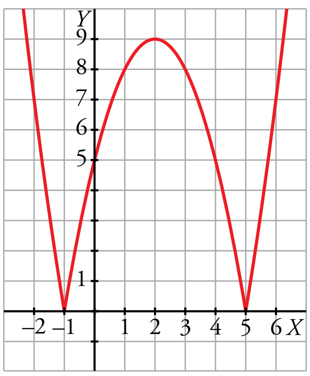
Hazlo tú. **Define por intervalos y representa:**

a) $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$

b) $f(x) = x - |x|$

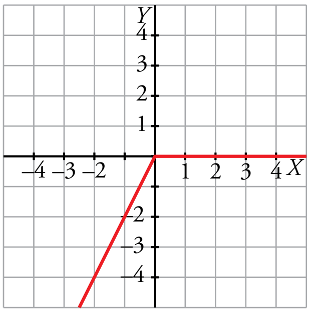
a) La parábola $y = x^2 - 4x - 5$ tiene su vértice en el punto (2, –9). Es negativa entre –1 y 5. Luego en ese intervalo su gráfica es $-f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & \text{si } x \le -1 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si } -1 < x \le 5 \\ x^2 - 4x - 5 & \text{si } 5 < x \end{cases}$$



b) Por la definición de la función valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x-(-x) & \text{si } x<0 \\ x-x & \text{si } 0 \le x \end{cases} = \begin{cases} 2x & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$



Página 265

5. Composición y función inversa

Hazlo tú. Halla $g \circ f$ y $f \circ g$, siendo $f(x) = 3x^2 - 5$ y $g(x) = \sqrt{2^{x-1}}$.

$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(3x^2 - 5) = \sqrt{2^{3x^2-5-1}} = \sqrt{2^{3x^2-6}}$

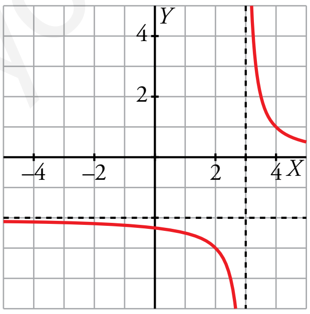
$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{2^{x-1}}) = 3\sqrt{2^{x-1}}^2 - 5 = 3 \cdot 2^{x-1} - 5$

6. Representación de hipérbolas

Hazlo tú. Representa la función $y = \dfrac{-2x+7}{x-3}$.

$y = \dfrac{-2x+7}{x-3} = -2 + \dfrac{1}{x-3}$ (efectuando la división entre el numerador y el denominador).

Por tanto, la gráfica es como la de $y = \dfrac{1}{x}$ desplazándola 2 unidades hacia abajo y 3 unidades a la derecha.



Ejercicios y problemas guiados

Página 266

1. Interpolación lineal

El porcentaje de hogares españoles que tenían teléfono móvil era, en 2006, del 80,5 y en 2009, del 88,2. Estimar el porcentaje que había en 2008.

La pendiente de la recta es $\dfrac{88,2-80,5}{2\,009-2\,006} = 2{,}57$. Por tanto, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2\,006;\ 80{,}5)$ y $B(2\,009;\ 88{,}2)$ es:

$$y - 80{,}5 = 2{,}57(x - 2\,006) \;\rightarrow\; y = 2{,}57(x - 2\,006) + 80{,}5 \;\rightarrow\; y = 2{,}57x - 5\,074{,}9$$

Si $x = 2\,08 \;\rightarrow\; y = 2{,}57 \cdot 2\,008 - 5\,074{,}9 = 85{,}6$

2. Una función cuadrática

Los costes de producción de un cierto producto (en euros) de una empresa, vienen dados por:

$$C = 40\,000 + 20q + q^2$$

siendo q el número de unidades producidas. El precio de venta de cada unidad es de 520 euros.

a) Expresar en función de q el beneficio de la empresa y representarlo gráficamente.

b) ¿Cuántas unidades hay que producir para que el beneficio sea máximo?

a) $B(q) = 520q - (40\,000 + 20q + q^2) = -q^2 + 500q - 40\,000$

b) El beneficio es máximo en el vértice de la parábola anterior, ya que tiene las ramas hacia abajo.

La abscisa del vértice es $\dfrac{-500}{-2} = 250$ y el beneficio será:

$B(250) = -250^2 + 500 \cdot 250 - 40\,000 = 22\,500$ €

3. Una función polinómica

Considerar todos los conos cuya generatriz mide 15 cm.

a) Escribir la función que nos da el volumen del cono según lo que mide su altura, x.

b) ¿Cuál es su dominio de definición?

a) Usando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$R = \sqrt{15^2 - x^2} = \sqrt{225 - x^2}$

Luego $V(x) = \dfrac{1}{3}\pi x\left(\sqrt{225 - x^2}\right)^2 = \dfrac{\pi(225x - x^3)}{3}$

b) La altura es un número positivo que no puede ser mayor que la generatriz. Por tanto, el dominio de definición de $V(x)$ es $Dom = (0,\ 15)$.

4. Función logística

La función $f(x) = \dfrac{12\,000}{1 + 499(1{,}09^{-x})}$ da las ventas totales de un videojuego x días después de su lanzamiento. ¿En qué día se llegó a 6 000 juegos vendidos?

Tenemos que hallar el valor de x tal que:

$$\frac{12\,000}{1 + 499(1{,}09^{-x})} = 6000 \;\rightarrow\; \frac{12\,000}{6\,000} = 1 + 499(1{,}09^{-x}) \;\rightarrow\; 2 - 1 = 499(1{,}09^{-x}) \;\rightarrow\; \frac{1}{499} = 1{,}09^{-x}$$

Tomando logaritmos y despejando:

$$\frac{\log 499}{\log 1{,}09} = x \;\rightarrow\; x = 72 \text{ días}$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 267

Para practicar

Dominio de definición

1 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \dfrac{2}{(x+5)^2}$

b) $y = \dfrac{3x+2}{x^3+x}$

c) $y = \dfrac{x}{x^2-x+2}$

d) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2}$

a) La función no está definida cuando $x = -5$. Su dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{-5\}$.

b) $x^3 + x = 0$, tiene como única solución $x = 0$. El dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$.

c) La función no está definida cuando $x^2 - x + 2 = 0$, que no tiene solución. Por tanto, el dominio es $Dom = \mathbb{R}$.

d) Las fracciones no se pueden evaluar ni en $x = 0$ ni en $x = -2$. El dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$.

2 Estudia el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \sqrt{2x+5}$

b) $y = \sqrt{7-x}$

c) $y = \sqrt{x^2+3x+4}$

d) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$

a) Para que esté definida debe ser $2x + 5 \ge 0$, cuya solución es $\left[-\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$. Su dominio es este intervalo, $Dom = \left[-\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

b) En este caso $x \le 7$. El dominio de definición es $Dom = (-\infty, 7]$.

c) $x^2 + 3x + 4 \ge 0 \ \to \ Dom = \mathbb{R}$

d) Para que ambas raíces existan simultáneamente debe cumplirse a la vez que $x \ge 1$ y $x \ge 2$. El dominio es $Dom = [2, +\infty)$.

3 Di cuál es el dominio de definición de:

a) $y = 3 + 2^{1-x}$ **b)** $y = log_2\,(x+3)$ **c)** $y = ln\,(2-x)$ **d)** $y = \sqrt{2^x}$

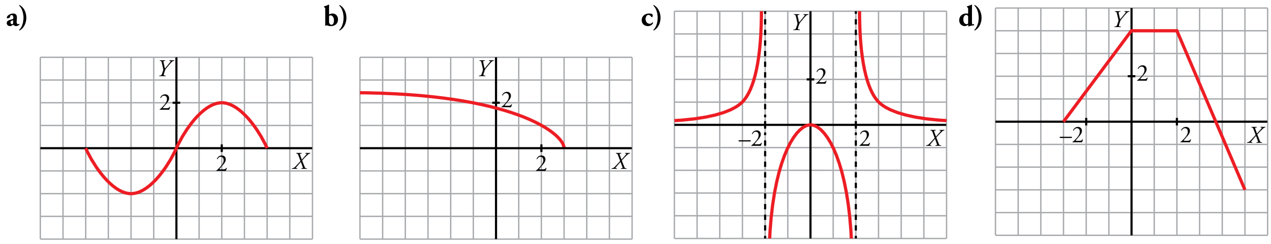
a) Su dominio es $\mathbb{R}$ porque la función exponencial siempre está definida.

b) Para que exista el logaritmo, su argumento debe ser positivo. Por tanto, $x + 3 > 0$ y el dominio es $Dom = (-3, +\infty)$.

c) Análogamente al caso anterior, $x < 2$. Su dominio es $Dom = (-\infty, 2)$.

d) La función exponencial siempre toma valores positivos. Por tanto, la raíz siempre se puede evaluar y el dominio de definición de esta función es $Dom = \mathbb{R}$.

4 **Observa las gráficas de estas funciones e indica cuál es su dominio de definición y su recorrido:**



a) Dominio: $[-4, 4]$ Recorrido: $[-2, 2]$

b) Dominio: $(-\infty, 3]$ Recorrido: $[0, +\infty)$

c) Dominio: $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ Recorrido: $\mathbb{R}$

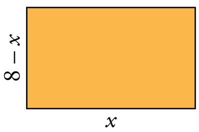
d) Dominio: $[-3, 5]$ Recorrido: $[-3, 4]$

5 **La función $h(t) = 80 + 64t - 16t^2$ nos da la altura a la que está una pelota lanzada hacia arriba en el instante t, hasta que vuelve al suelo. ¿Cuál es su dominio de definición?**

Necesitamos calcular el tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo. Para ello es necesario resolver la ecuación:

$80 + 64t - 16t^2 = 0$, que tiene una solución posible, $t = 5$.

Como el tiempo no puede ser negativo, el dominio es $Dom = [0, 5]$.

6 

Escribe el área de este rectángulo de perímetro 16 cm en función de su base x.

¿Cuál es el dominio de definición de esa función? ¿Y su recorrido?

La función área es $A(x) = x(8 - x) = 8x - x^2$, que es un función cuadrática.

Su dominio es $Dom = (0, 8)$.

El valor máximo lo alcanza en el vértice, cuya abscisa es $\frac{-8}{-2} = 4$. Este valor es $A(4) = 16$. Por tanto, el recorrido de la función es el intervalo $(0, 16]$.

7 **La temperatura de un paciente, desde que comienza su enfermedad hasta que vuelve a tener 37 °C ha evolucionado según la función $T = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 37$, siendo t el número de días transcurridos desde el inicio de la enfermedad. ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?**

Calculamos los días en los que tiene 37 °C.

$-0{,}1t^2 + 1{,}2t + 37 = 37 \rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 12$

Es decir, a los 12 días vuelve a tener 37 °C de temperatura. El dominio es el intervalo $[0, 12]$.

Como se trata de una función cuadrática con las ramas hacia abajo, el valor máximo lo alcanza en el vértice, cuya abscisa es $\frac{-1{,}2}{-0{,}2} = 6$.

La temperatura máxima es $-0{,}1 \cdot 6^2 + 1{,}2 \cdot 6 + 37 = 40{,}6$ °C.

En consecuencia, el recorrido es el intervalo $[37;\ 40{,}6]$.

Funciones elementales

8 **Asocia a cada gráfica su expresión analítica.**

a) $y = 1{,}5^x$

b) $y = \sqrt{x+2}$

c) $y = \dfrac{x^2}{3} - 1$

d) $y = \dfrac{1}{x-4}$

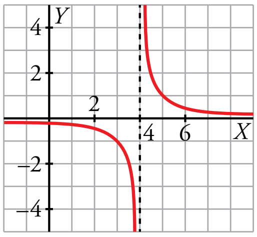
e) $y = 3x^2 + 5x - 1$

f) $y = 0{,}75^x$

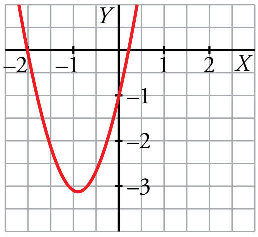
g) $y = \log_2 x$

h) $y = -\sqrt{-x}$

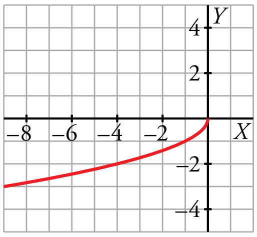
I



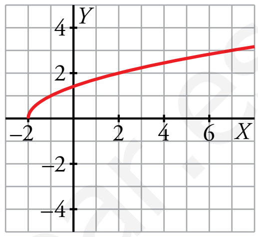
II



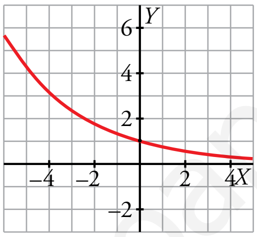
III



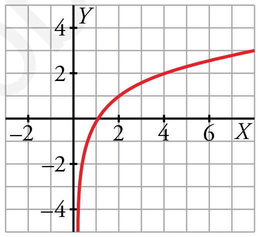
IV



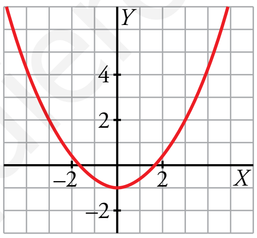
V



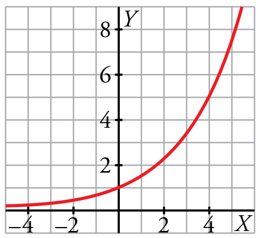
VI



VII



VIII



a) VIII

b) IV

c) VII

d) I

e) II

f) V

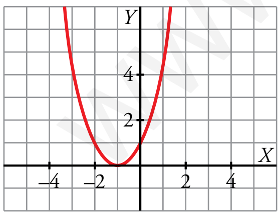
g) VI

h) III

9 **Representa las siguientes parábolas hallando el vértice, los puntos de corte con los ejes de coordenadas y algún punto próximo al vértice:**

a) $y = x^2 + 2x + 1$ **b)** $y = 0{,}5x^2 - 2x + 1$ **c)** $y = -x^2 + 3x - 5$ **d)** $y = -1{,}5x^2 - 3x - 2$

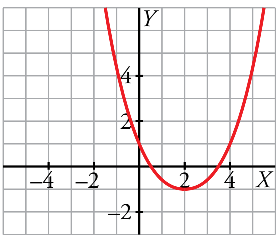
a)



Vértice: $(-1, 0)$

Cortes con los ejes: $(-1, 0)$, $(0, 1)$

b)



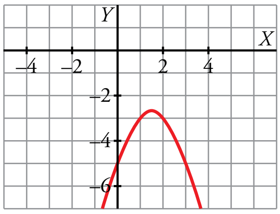
Vértice: abscisa $= \dfrac{2}{1} = 2$; ordenada $= 0{,}5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = -1$

Corte con el eje vertical: $x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$

Corte con el eje horizontal:

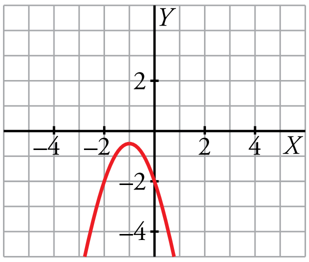
$y = 0 \;\rightarrow\; 0{,}5x^2 - 2x + 1 = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{1} = 2 \pm \sqrt{2} \;\rightarrow\; x_1 = 2 + \sqrt{2};\; x_2 = 2 - \sqrt{2}$$

c) 

Vértice: $\left(\frac{3}{2}, \frac{-11}{4}\right)$

Cortes con los ejes: (–5, 0)

d) 

Vértice: abscisa = $\frac{3}{-3}$ = –1; ordenada = $-1{,}5 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 2 = -0{,}5$

Corte con el eje vertical: $x = 0 \rightarrow y = -2$

Corte con el eje horizontal: $y = 0 \rightarrow 1{,}5x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{-3}$

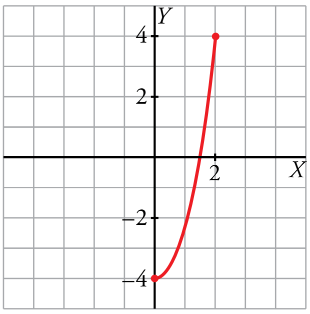
No corta al eje horizontal. Podemos evaluar ahora en algún punto cercano al vértice; por ejemplo, (–2, –2), (0, –2).

10 **Representa estas funciones en el intervalo indicado:**

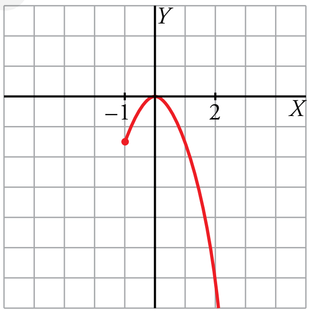
a) $y = 2x^2 - 4$, **[0, 2]** **b)** $y = -\frac{3x^2}{2}$, $x \geq -1$ **c)** $y = \frac{1}{x}$, $x < 0$

d) $y = 0{,}6^x$, **[–3, 3]** **e)** $y = \log_2 x$, **(0, 7]** **f)** $y = \sqrt{x}$, **[0, 1]**

a) $y = 2x^2 - 4$, [0, 2]

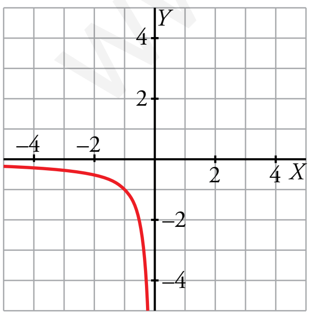


b) $y = -\frac{3x^2}{2}$, $x \geq -1$



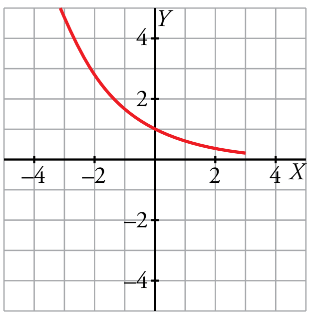
c) $y = \frac{1}{x}$, $x < 0$

Se trata de una rama de la función de proporcionalidad inversa y su gráfica es:



d) $y = 0{,}6^x$, [–3, 3]

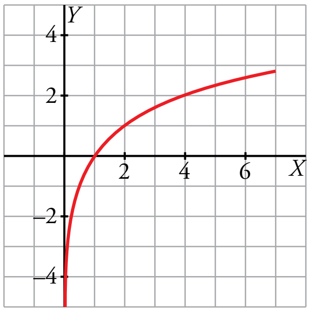
Es una función exponencial con base menor que 1. Mediante una tabla de valores obtenemos:



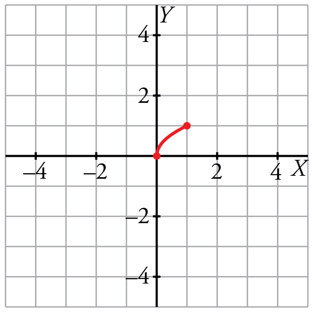
x	y
–3	4,6
–1	1,67
0	1
1	0,6
3	0,21

e) $y = log_2\, x$, $(0, 7]$

Es un fragmento de la función logaritmo en base 2.



f) $y = \sqrt{x}$, $[0, 1]$



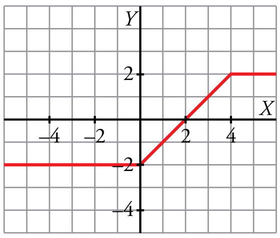
Página 268

Funciones definidas "a trozos"

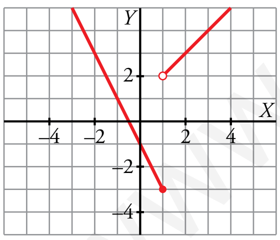
11 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

a) $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 \le x < 4 \\ 2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$ **b)** $y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **c)** $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

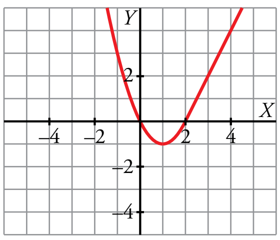
a)



b) Construimos una tabla de valores para cada recta y obtenemos la gráfica.



c) Hallamos el vértice de la parábola, $(1, -1)$, y los puntos de corte, $(0, 0)$ y $(2, 0)$ (primer trozo). Construimos una tabla de valores para el segundo trozo y obtenemos:

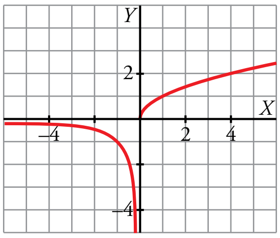


12 **Representa.**

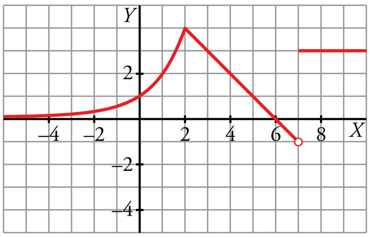
a) $y = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ -x + 6 & \text{si } 2 \le x < 7 \\ 3 & \text{si } x \ge 7 \end{cases}$

a) Está formada por dos trozos de funciones ya representadas en ocasiones anteriores.



b)



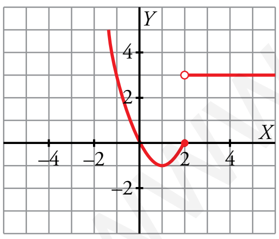
13 **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:**

a) $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \le 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

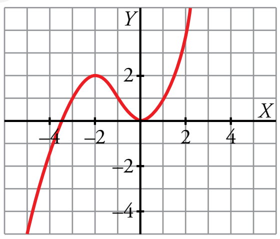
b) $y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

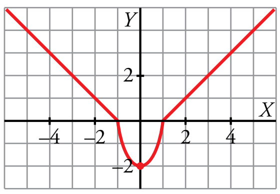
a)



b)

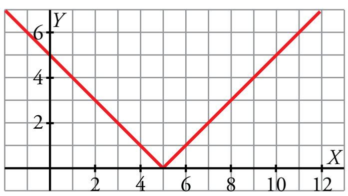


c)



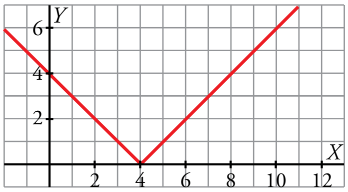
14 **Representa la función** $y = |x - 5|$ **y comprueba que su expresión analítica en intervalos es:**

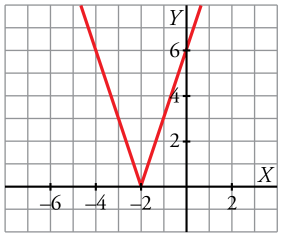
$y = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$

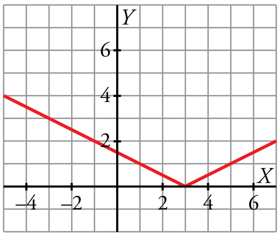


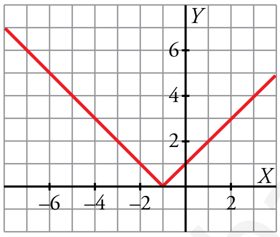
15 **Representa las siguientes funciones y defínelas como funciones "a trozos":**

a) $y = |4 - x|$ **b)** $y = |3x + 6|$ **c)** $y = \left|\dfrac{x-3}{2}\right|$ **d)** $y = |-x - 1|$

a)


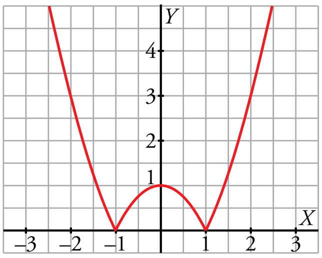
b)


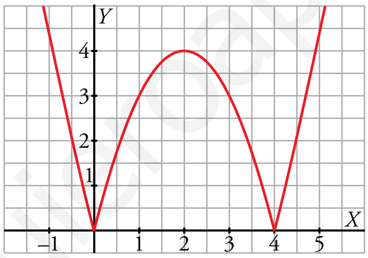
c)


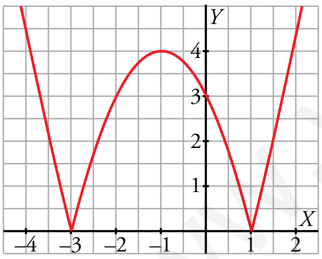
d)


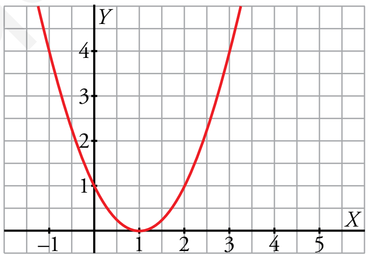
16 **Representa estas funciones:**

a) $y = |x^2 - 1|$ **b)** $y = |x^2 - 4x|$ **c)** $y = |x^2 + 2x - 3|$ **d)** $y = |x^2 - 2x + 1|$

a)


b)


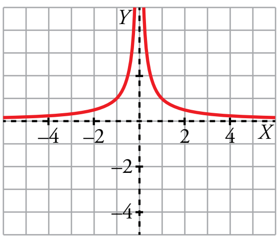
c)


d)


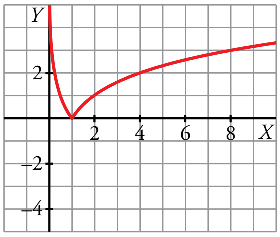
17 **Representa.**

a) $y = \left|\dfrac{1}{x}\right|$ **b)** $y = |log_2\, x|$ **c)** $y = \dfrac{|x|}{x}$ **d)** $y = 2|x| + x$

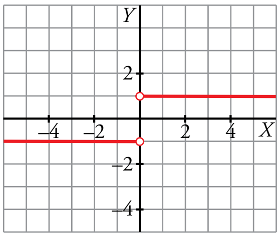
La función valor absoluto de $f(x)$ mantiene la parte positiva de la gráfica y convierte la parte negativa de $f(x)$ en $-f(x)$, es decir, en la simétrica de $f(x)$ respecto del eje horizontal.

a)


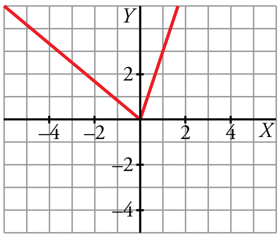
b)



c) $y = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} -\dfrac{x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$



d) $y = 2|x| + x = \begin{cases} 2(-x) + x & \text{si } x < 0 \\ 2x + x & \text{si } x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

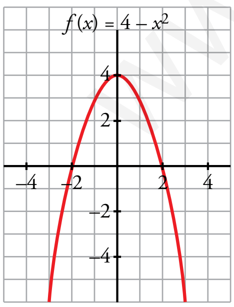


Transformaciones de una función

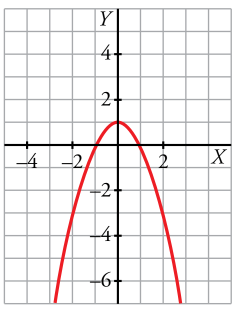
18 **Representa $f(x) = 4 - x^2$ y, a partir de ella, representa:**

a) $g(x) = f(x) - 3$

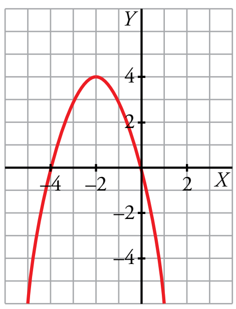
b) $h(x) = f(x + 2)$



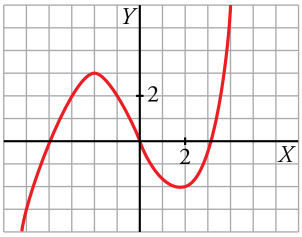
a)



b)



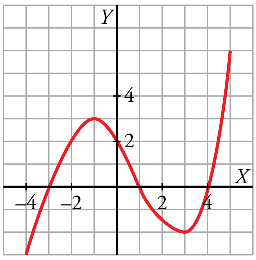
19 **Esta es la gráfica de la función $y = f(x)$:**



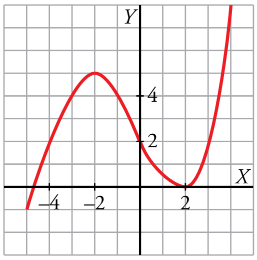
Representa, a partir de ella, las funciones:

a) $y = f(x - 1)$ **b)** $y = f(x) + 2$

a)

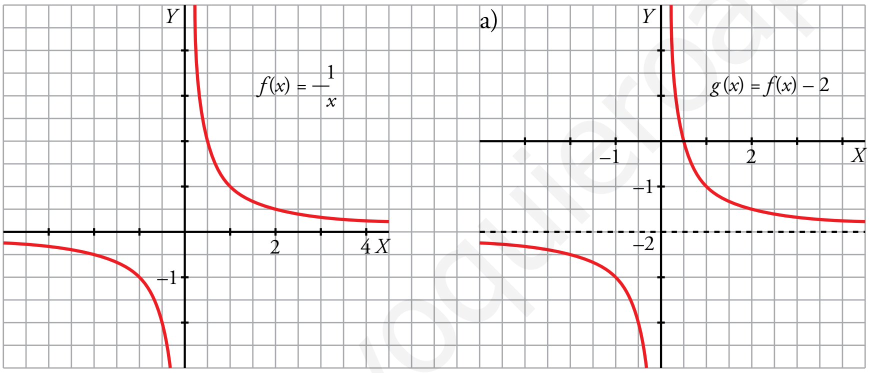


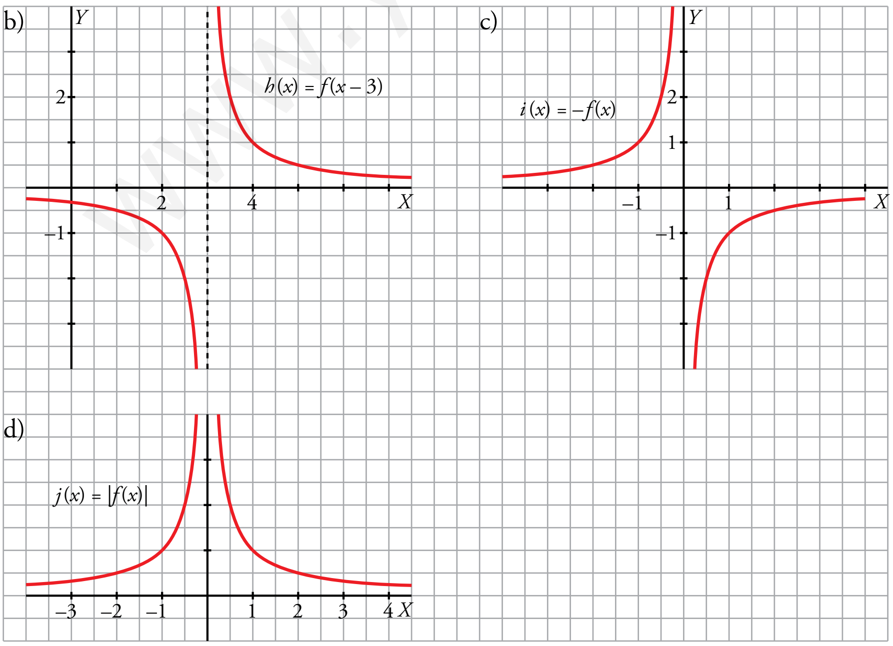
b)



20 **A partir de la gráfica de $f(x) = 1/x$, representa:**

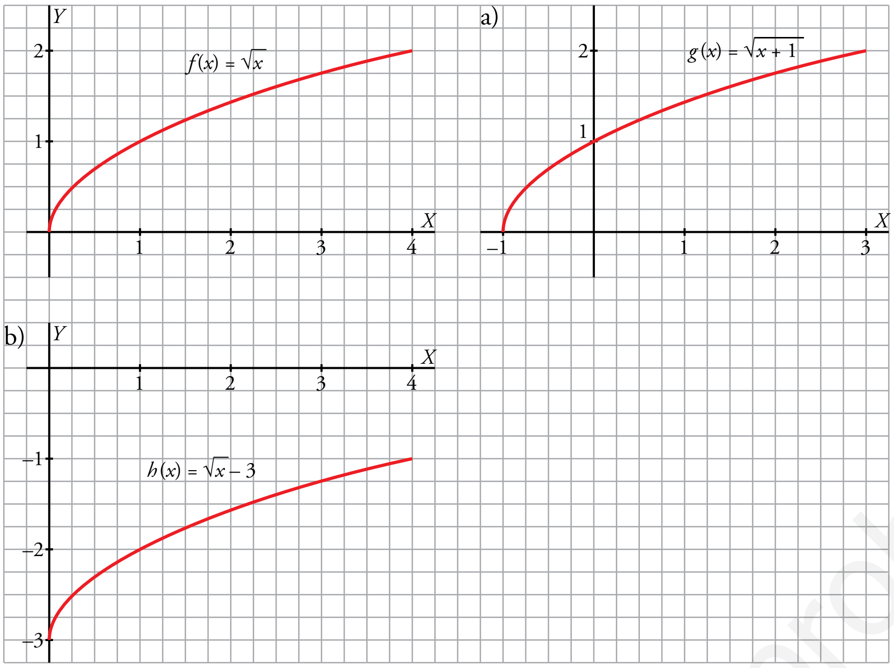
a) $g(x) = f(x) - 2$ **b)** $h(x) = f(x - 3)$ **c)** $i(x) = -f(x)$ **d)** $j(x) = |f(x)|$





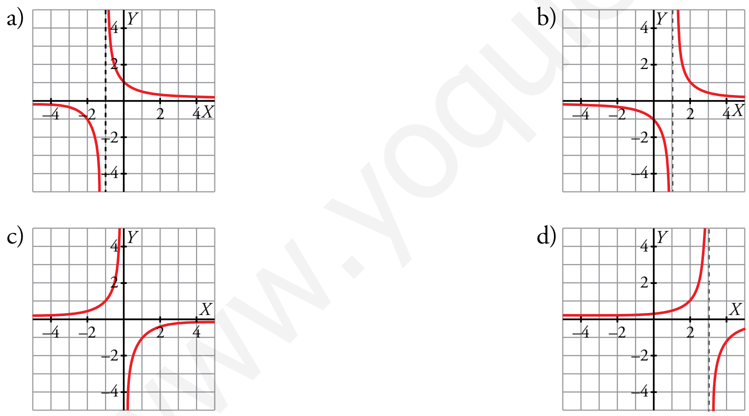
21 **Representa la función $f(x) = \sqrt{x}$ y dibuja a partir de ella:**

a) $g(x) = f(x + 1)$ **b)** $h(x) = f(x) - 3$



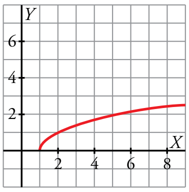
22 **Representa las siguientes funciones:**

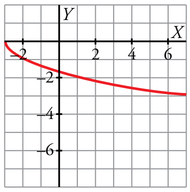
a) $y = \dfrac{1}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x-1}$ **c)** $y = \dfrac{-1}{x}$ **d)** $y = \dfrac{-1}{x-3}$

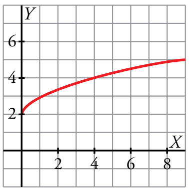


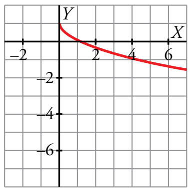
23 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{x-1}$ **b)** $y = -\sqrt{x+3}$ **c)** $y = 2 + \sqrt{x}$ **d)** $y = 1 - \sqrt{x}$

a)


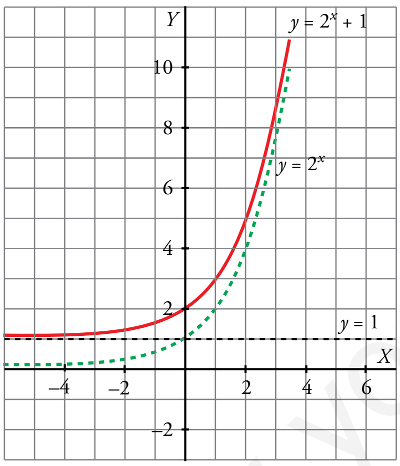
b)


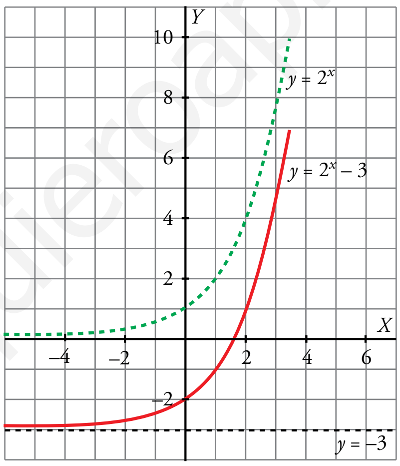
c)


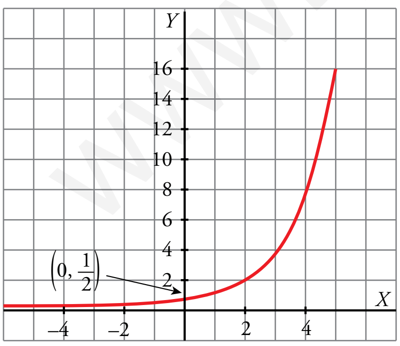
d)


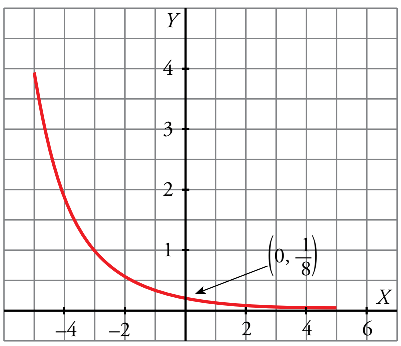
24 **Representa estas funciones:**

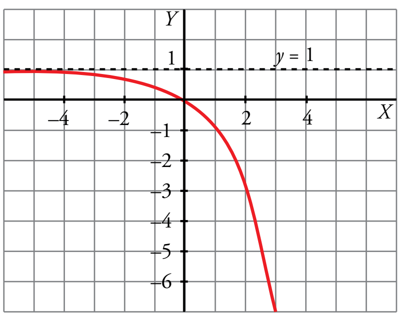
a) $y = 2^x + 1$ **b)** $y = 2^x - 3$ **c)** $y = 2^{x-1}$ **d)** $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3}$ **e)** $y = 1 - 2^x$ **f)** $y = 2^{-x}$

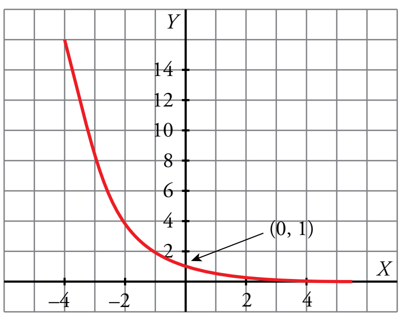
a)


b)


c)


d)


e)


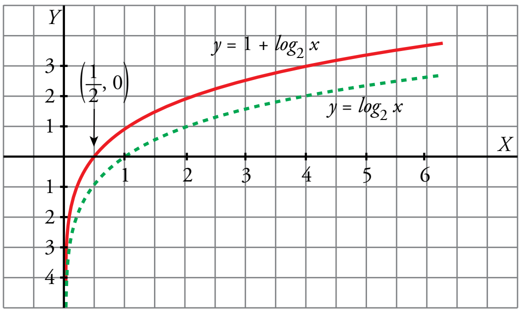
f)


25 **Representa las siguientes funciones a partir de la gráfica de $y = log_2\, x$:**

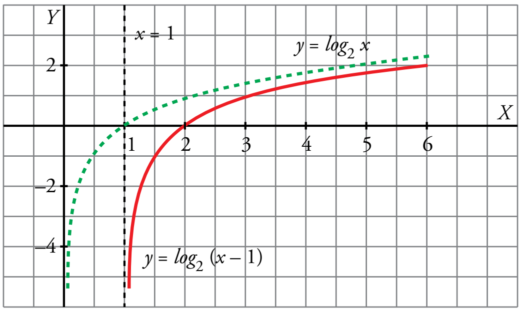
a) $y = 1 + log_2\, x$ **b)** $y = log_2\, (x - 1)$

c) $y = -log_2\, x$ **d)** $y = log_2\, (-x)$

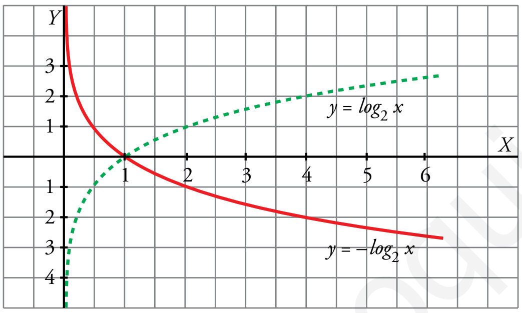
a)



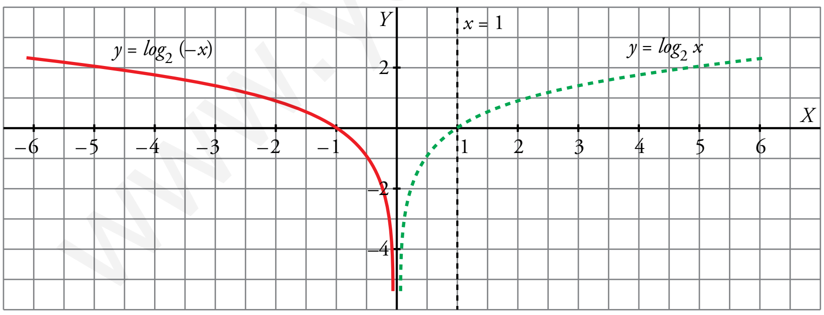
b)



c)

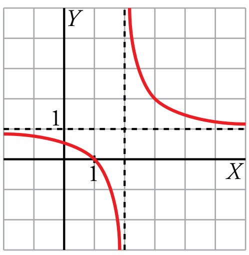


d)



26 **La expresión analítica de esta función es del tipo $y = \dfrac{1}{x - a} + b$.**

Observa la gráfica y di el valor de a y b.



$a = 2$

$b = 1$

Página 269

Composición y función inversa

27 **Dadas las funciones**

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = \frac{3}{x-2} \qquad h(x) = \sqrt{x-3}$$

obtén las expresiones de:

a) $f \circ g$ **b)** $g \circ f$ **c)** $f \circ h$

d) $g \circ h$ **e)** $h \circ f$ **f)** $h \circ g$

Halla, si es posible, el valor de las funciones obtenidas en $x = 5$ **y en** $x = 0$**.**

a) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{3}{x-2}\right) = \left(\dfrac{3}{x-2}\right)^2 + 1 = \dfrac{9}{(x-2)^2} + 1 = \dfrac{x^2 - 4x + 13}{(x-2)^2}$

$f \circ g(5) = \dfrac{5^2 - 4 \cdot 5 + 13}{(5-2)^2} = 2$

$f \circ g(0) = \dfrac{0^2 - 4 \cdot 0 + 13}{(0-2)^2} = \dfrac{13}{4}$

b) $g \circ f(x) = g[f(x)] = g(x^2 + 1) = \dfrac{3}{x^2 + 1 - 2} = \dfrac{3}{x^2 - 1}$

$g \circ f(5) = \dfrac{3}{5^2 - 1} = \dfrac{1}{8}$

$g \circ f(0) = \dfrac{3}{0^2 - 1} = -3$

c) $f \circ h(x) = f[h(x)] = f(\sqrt{x-3}) = \sqrt{x-3}^{\,2} + 1 = x - 2$

$f \circ h(5) = 5 - 2 = 3$

$f \circ h(0) = 0 - 2 = -2$

d) $g \circ h(x) = g[h(x)] = g(\sqrt{x-3}) = \dfrac{3}{\sqrt{x-3} - 2}$

$g \circ h(5) = \dfrac{3}{\sqrt{5-3} - 2} = \dfrac{3}{\sqrt{2} - 2}$

$g \circ h(0)$ no existe.

e) $h \circ f(x) = h[f(x)] = h(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1 - 3} = \sqrt{x^2 - 2}$

$h \circ f(5) = \sqrt{5^2 - 2} = \sqrt{23}$

$h \circ f(0)$ no existe.

f) $h \circ g(x) = h[g(x)] = h\left(\dfrac{3}{x-2}\right) = \sqrt{\dfrac{3}{x-2} - 3} = \sqrt{\dfrac{-3x+9}{x-2}}$

$h \circ g(5)$ no existe.

$h \circ g(0)$ no existe.

28 **Explica cómo a partir de las funciones**

$$f(x) = 2^{x-1} \qquad g(x) = \sqrt{x} + 2 \qquad h(x) = \frac{1}{x-3}$$

se pueden obtener estas otras:

a) $m(x) = 2^{\sqrt{x}+1}$

b) $n(x) = \sqrt{2^{x-1}} + 2$

c) $p(x) = \sqrt{\frac{1}{x-3}} + 2$

d) $q(x) = 2^{\frac{4-x}{x-3}}$

e) $r(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

f) $s(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}-1}$

a) $m(x) = f \circ g(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{x}+2) = 2^{\sqrt{x}+2-1} = 2^{\sqrt{x}+1}$

b) $n(x) = g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2^{x-1}) = \sqrt{2^{x-1}} + 2$

c) $p(x) = g \circ h(x) = g[h(x)] = g\left(\frac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\frac{1}{x-3}} + 2$

d) $q(x) = f \circ h(x) = f[h(x)] = f\left(\frac{1}{x-3}\right) = 2^{\frac{1}{x-3}-1} = 2^{\frac{4-x}{x-3}}$

e) $r(x) = h \circ g(x) = h[g(x)] = h(\sqrt{x}+2) = \frac{1}{\sqrt{x}+2-3} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

f) $s(x) = h \circ g \circ f(x) = h \circ g[f(x)] = h \circ g(2^{x-1}) = h(\sqrt{2^{x-1}}+2) = \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}+2-3} = \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}-1}$

29 **Halla la función inversa de las siguientes funciones:**

a) $y = 3x - 2$

b) $y = \frac{x+3}{2}$

c) $y = \sqrt{2x+1}$

d) $y = 1 + 2^x$

e) $y = 2 + log_3\, x$

f) $y = 4 - x^2,\ x \ge 0$

a) $y = 3x - 2 \ \to\ x = 3y - 2 \ \to\ y = \frac{x+2}{3}$

b) $y = \frac{x+3}{2} \ \to\ x = \frac{y+3}{2} \ \to\ y = 2x - 3$

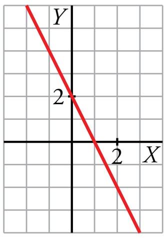
c) $y = \sqrt{2x+1} \ \to\ x = \sqrt{2y+1} \ \to\ y = \frac{x^2-1}{2}$

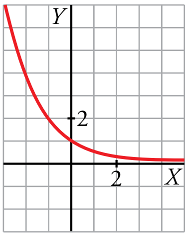
d) $y = 1 + 2^x \ \to\ x = 1 + 2^y \ \to\ y = log_2(x-1)$

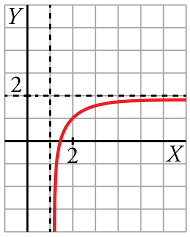
e) $y = 2 + log_3 x \ \to\ x = 2 + log_3 y \ \to\ y = 3^{x-2}$

f) $y = 4 - x^2,\ x > 0 \ \to\ x = 4 - y^2 \ \to\ y = \sqrt{4-x},\ x \le 4$

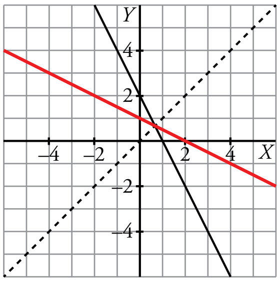
30 **Representa gráficamente la función inversa en cada caso:**

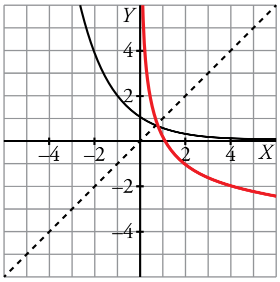
a)


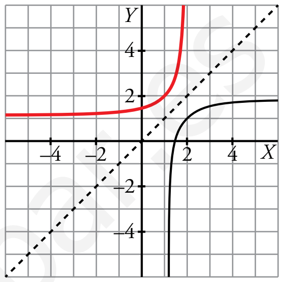
b)


c)


Hacemos una simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante para dibujar la función inversa.

a)


b)


c)


31 **Comprueba si cada par de funciones son una inversa de la otra. Para ello calcula $f \circ f^{-1}$ o bien $f^{-1} \circ f$:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$; $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 2$

b) $f(x) = \sqrt{2x+3}$; $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+2}{3}$

c) $f(x) = 1 + log_2 \dfrac{x}{3}$; $f^{-1}(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$

a) $f \circ f^{-1}(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(\dfrac{1}{x} - 2\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x} - 2 + 2} = x$

b) $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1} f(x)] = f(\sqrt{2x+3}) = \dfrac{\sqrt{2x+3}^2 + 2}{3} = \dfrac{2x+5}{3}$

En este caso no es verdad que las funciones sean recíprocas. f^{-1} es incorrecta.

c) $f \circ f^{-1}(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(1 + log_2 \dfrac{x}{3}\right) = 3 \cdot 2^{1 + log_2[(x/3) - 1]} = 3 \cdot 2^{log_2 (x/3)} = 3 \cdot \dfrac{x}{3} = x$

32 **Considera la función** $y = \sqrt{x+2}$, $x \in [-2, 7]$.

a) ¿Cuál es su recorrido?

b) Obtén su función inversa, y determina el dominio de definición y el recorrido de esta.

a) Como la función es creciente, calculamos los valores en los extremos del intervalo.

$x = -2 \;\to\; y = \sqrt{-2+2} = 0$

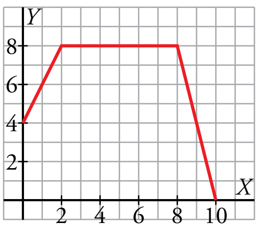
$x = 7 \;\to\; y = \sqrt{7+2} = 3$

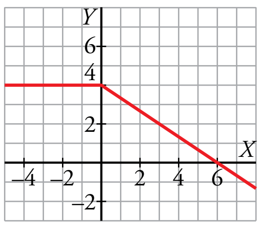
El recorrido es el intervalo [0, 3].

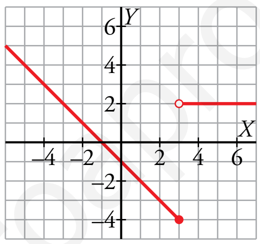
b) $y = \sqrt{x+2} \;\to\; x = \sqrt{y+2} \;\to\; y = x^2 - 2,\ x \in [0, 3]$ es la función inversa. Su dominio es el intervalo [0, 3] y el recorrido es el intervalo [–2, 7].

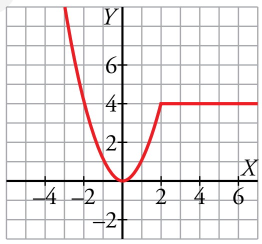
Para resolver

33 **Obtén la expresión analítica de las siguientes funciones:**

a)


b)


c)


d)


a) Primer tramo:

Función lineal con pendiente 2 y ordenada en el origen 4, luego la expresión es $y = 2x + 4$.

Segundo tramo: $y = 8$

Tercer tramo:

Función lineal que pasa por los puntos (8, 8) y (10, 0). Su pendiente es $\frac{0-8}{10-8} = -4$.

La expresión es $y - 8 = -4(x - 8) \;\to\; y = 40 - 4x$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 8 & \text{si } 2 < x \le 8 \\ 40-4x & \text{si } 8 < x \le 10 \end{cases}$$

b) Primer tramo: $y = 4$

Segundo tramo:

Función lineal con pendiente $-\frac{2}{3}$ y ordenada en el origen 4, luego la expresión es $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \le 0 \\ -\frac{2x}{3} + 4 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

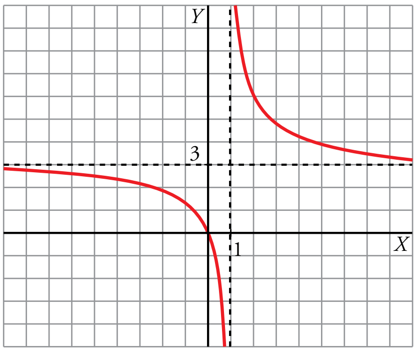
c) $f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x \le 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

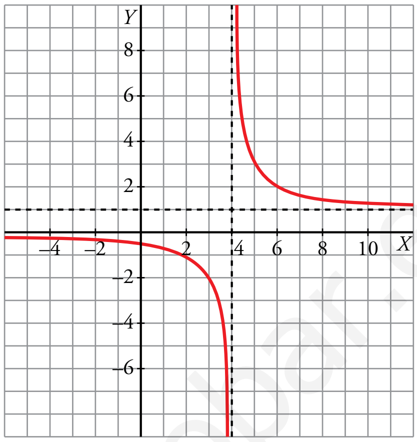
34 **Representa las siguientes funciones partiendo de una más sencilla y realizando transformaciones sobre ella:**

a) $y = \dfrac{3x}{x-1}$ **b)** $y = \dfrac{x-2}{x-4}$ **c)** $y = \dfrac{3x+2}{x+1}$ **d)** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

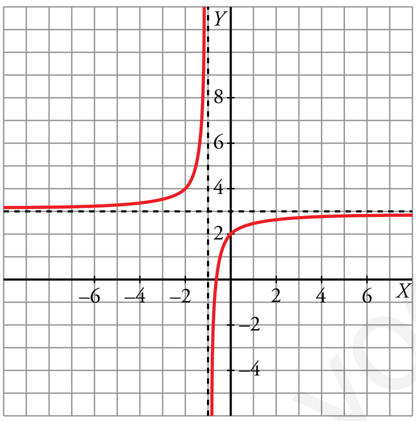
a) $y = \dfrac{3x}{x-1} = 3 + \dfrac{3}{x-1}$



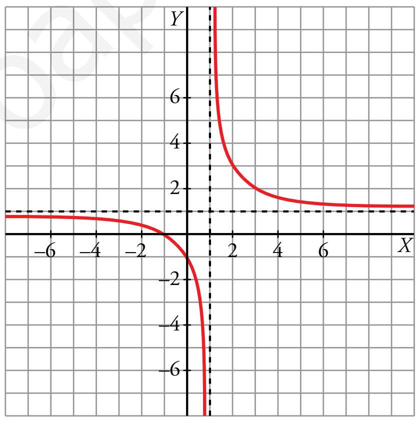
b) $y = \dfrac{x-2}{x-4} = 1 + \dfrac{2}{x-4}$



c) $y = \dfrac{3x+2}{x+1} = 3 + \dfrac{-1}{x+1}$



d) $y = \dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$



35 **La gráfica de una función exponencial del tipo** $y = ka^x$ **pasa por los puntos (0; 0,5) y (1; 1,7).**

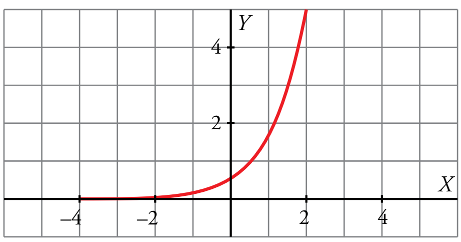
a) Calcula k **y** a**.**

b) Representa la función.

a) $\left.\begin{array}{l} 0,5 = k \cdot a^0 \\ 1,7 = k \cdot a^1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0,5 = k \\ 1,7 = k \cdot a \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} k = 0,5 \\ a = 3,4 \end{array}$

La función es $y = 0,5 \cdot (3,4)^x$

b)



36 **Determina, en cada caso, la ecuación de la parábola de la que conocemos el vértice y otro punto.**

a) $V(1, -4)$, $P(-1, 0)$ **b)** $V(-2, 3)$, $P(0, 6)$

a) Si la parábola es $y = ax^2 + bx + c$ tenemos que:

$$V(1,-4) \to \begin{cases} \dfrac{-b}{2a} = 1 \to b = -2a \\ -4 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \to -4 = a + b + c \end{cases}$$

$P(-1, 0) \to 0 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \to 0 = a - b + c$

$$\begin{cases} b = -2a \\ -4 = a + b + c \\ 0 = a - b + c \end{cases}$$

La solución del sistema es: $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$.

La parábola buscada es $y = x^2 - 2x - 3$.

b) Si la parábola es $y = ax^2 + bx + c$, tenemos que:

$$V(-2, 3) \to \begin{cases} \dfrac{-b}{2a} = -2 \to b = 4a \\ 3 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \to 3 = 4a - 2b + c \end{cases}$$

$P(0, 6) \to 6 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \to 6 = c$

$$\begin{cases} b = 4a \\ 3 = 4a - 2b + c \\ c = 6 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $a = \dfrac{3}{4}$, $b = 3$, $c = 6$.

La parábola buscada es $y = \dfrac{3}{4}x^2 + 3x + 6$.

37 **Utiliza la calculadora en radianes para obtener el valor de y en cada una de estas expresiones:**

a) $y = \textit{arc sen}\ 0{,}8$ **b)** $y = \textit{arc sen}\ (-0{,}9)$ **c)** $y = \textit{arc cos}\ 0{,}36$

d) $y = \textit{arc cos}\ (-0{,}75)$ **e)** $y = \textit{arc tg}\ 3{,}5$ **f)** $y = \textit{arc tg}\ (-7)$

a) 0,93 *rad* → 53° 7' 48''

b) –1,12 *rad* → –64° 9' 29''

c) 1,20 *rad* → 68° 53' 59''

d) 2,42 *rad* → 138° 35' 25''

e) 1,29 *rad* → 74° 3' 17''

f) –1,43 *rad* → –81° 52' 11''

38 **Obtén el valor de y en grados, sin usar la calculadora:**

a) $y = \textit{arc sen}\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $y = \textit{arc cos}\ \dfrac{1}{2}$ **c)** $y = \textit{arc tg}\ 1$

d) $y = \textit{arc sen}\ (-1)$ **e)** $y = \textit{arc cos}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ **f)** $y = \textit{arc tg}\ \sqrt{3}$

a) 60° b) 60° c) 45°

d) –90° e) 120° f) 60°

39 **Calcula en radianes.**

a) $arc\ sen\left(sen\ \frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $arc\ cos\ (cos\ \pi)$ **c)** $arc\ tg\left(tg\ \frac{\pi}{5}\right)$

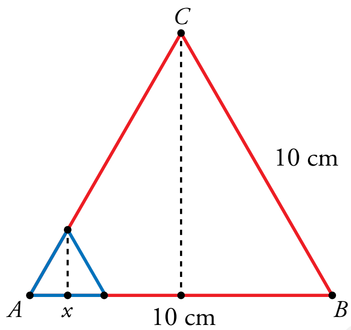
d) $tg\ (arc\ tg\ 1)$ **e)** $sen\ (arc\ cos\ (-1))$ **f)** $arc\ cos\ (tg\ \pi)$

a) $arc\ sen\left(sen\ \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ b) $arc\ cos\ (cos\ \pi) = \pi$ c) $arc\ tg\left(tg\ \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$

d) $tg\ (arc\ tg\ 1) = 1$ e) $sen\ (arc\ cos\ (-1)) = 0$ f) $arc\ cos\ (tg\ \pi) = \frac{\pi}{2}$

Página 270

40 **En un triángulo equilátero de 10 cm de lado, se cortan en las esquinas triángulos equiláteros de lado x. Escribe el área del hexágono que resulta en función de x. ¿Cuál es el dominio de definición de esa función? ¿Y su recorrido?**



La altura del triángulo de lado 10 es $10 sen\ 60° = 5\sqrt{3}$.

La altura del triángulo de lado x es $x\ sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

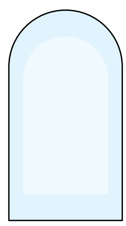
El área del hexágono es igual al área del triángulo de lado 10 menos 3 veces el área del triángulo de lado x, es decir:

$$A(x) = \frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = 25\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 = \sqrt{3}\left(25 - \frac{3}{4}x^2\right)$$

El dominio es el intervalo (0, 5) porque x debe ser positivo y menor que la mitad del lado para que se pueda construir el hexágono.

El recorrido es el intervalo $\left(\frac{25\sqrt{3}}{4}, 25\sqrt{3}\right)$.

41 **Se quiere hacer una ventana con forma de rectángulo añadiéndole un semicírculo sobre el lado menor, en la parte superior. Si el perímetro del rectángulo es 8 m, escribe el área de la ventana en función del lado menor del rectángulo. Di cuál es su dominio y su recorrido.**



Si llamamos x al lado menor, el lado mayor es $4 - x$ para que el perímetro del rectángulo sea 8. El radio del semicírculo es $\frac{x}{2}$. Por tanto, el área de la ventana es:

$$A(x) = x(4 - x) + \frac{\pi \cdot (x/2)^2}{2} = x(4 - x) + \frac{\pi}{8}x^2 = \left(\frac{\pi}{8} - 1\right)^2 x^2 + 4x$$

El dominio de la función es el intervalo (0, 2) por ser x el lado menor y tener el rectángulo un perímetro de 8 m.

$$A(0) = 0$$

$$A(2) = 2 \cdot (4 - 2) + \frac{\pi}{8} \cdot 4^2 = 2\pi + 4$$

El recorrido es el intervalo $(0, 2\pi + 4)$.

42 **En las funciones de oferta y demanda, se llama *cantidad de equilibrio* al número de unidades que hay que producir para que la oferta y la demanda se igualen, $o(x) = d(x)$; y se llama *precio de equilibrio* al precio con el cual se consigue esa igualdad.**

a) Halla el precio y la cantidad de equilibrio de un producto cuyas funciones de oferta y demanda son $o(x) = 2{,}5x - 100$ y $d(x) = 300 - 1{,}5x$ (x en euros, d y o en miles de unidades del producto).

b) Si el precio del producto es de 80 €, ¿habrá escasez o exceso del mismo? ¿Y si el precio fuese de 120 €?

c) ¿Cuál sería el precio y la cantidad de equilibrio si las funciones de oferta y demanda fuesen $o(x) = 0{,}25x^2 - 100$ y $d(x) = 185 - 2x$?

a) $o(x) = d(x) \ \to\ 2{,}5x - 100 = 300 - 1{,}5x \ \to\ x = 100$ € es el precio de equilibrio.

La cantidad de equilibrio es $o(100) = d(100) = 300 - 1{,}5 \cdot 100 = 150$ miles de unidades.

b) Si $x = 80$, hay escasez, porque la demanda supera a la oferta. En efecto:

$o(80) = 2{,}5 \cdot 80 - 100 = 100$

$d(80) = 300 - 1{,}5 \cdot 80 = 180$

Si $x = 120$, hay exceso, porque la oferta supera a la demanda. En efecto:

$o(80) = 2{,}5 \cdot 120 - 100 = 200$

$d(80) = 300 - 1{,}5 \cdot 120 = 120$

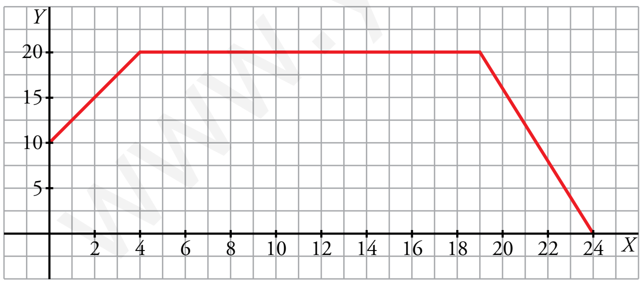
c) $o(x) = d(x) \ \to\ 0{,}25x^2 - 100 = 185 - 2x$ da lugar a una única solución posible: $x = 30$ €.

43 **La dosis de un fármaco comienza con 10 mg y cada día debe aumentar 2 mg hasta llegar a 20 mg. Se debe seguir 15 días con esa cantidad y a partir de entonces ir disminuyendo 4 mg cada día.**

a) Representa la función que describe este enunciado y determina su expresión analítica.

b) Di cuál es su dominio y su recorrido.

a) En el 5.º día la dosis alcanza los 20 mg y este ya es el primero de los 15 días de tratamiento con la dosis máxima. Por tanto, el 19.º día es el último que toma 20 mg.

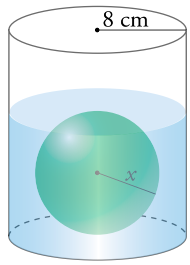


La expresión es $f(x) = \begin{cases} 10 + 2x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ 20 & \text{si } 5 < x \le 19 \\ 96 - 4x & \text{si } 19 < x \end{cases}$

b) El dominio es el intervlao [0, 24].

El recorrido es el intervalo [0, 20].

44 **En un cilindro de radio 8 cm, depositamos una bola esférica de radio x y echamos agua hasta que cubra la bola.**



Escribe la función que da la cantidad de agua que hay que echar según la medida del radio de la bola.

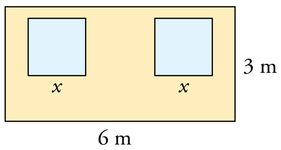
¿Cuál es su dominio de definición?

Como la bola tiene radio x, la altura del agua es $2x$. El volumen del agua es el volumen de un cilindro de radio 8 y altura $2x$ menos el volumen de una esfera de radio x.

$$V(x) = \pi \cdot 8^2 \cdot 2x - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot x^3 = 128\pi x - \frac{4}{3}\pi x^3 = 4\pi x\left(32 - \frac{x^2}{3}\right)$$

El dominio de definición es el intervalo (0, 8), ya que la bola no puede tener un radio de 8 cm.

45 **En una pared de dimensiones 6 m × 3 m se quieren abrir dos ventanas cuadradas de lado x.**



a) Expresa el área que queda de pared, una vez hechas las ventanas, en función de x.

b) ¿Cuál es su dominio de definición?

a) El área es $A(x) = 18 - 2x^2$.

b) El dominio de definición es el intervalo (0, 3).

46 **Una feria ganadera está abierta al público entre las 10 y las 20 horas. El número de visitantes viene dado por la función $N(t) = -20t^2 + Bt + C$, donde t es la hora de visita.**

Sabiendo que a las 17 h se alcanza el máximo de 1 500 visitantes, halla B y C y representa la función.

Como la función $N(t)$ es una parábola con las ramas hacia abajo, el número máximo se alcanza en el vértice de la parábola, luego:

$$\frac{-B}{2 \cdot (-20)} = 17 \;\rightarrow\; B = 680 \;\rightarrow\; N(t) = -20t^2 + 680t + C$$

Como a las 17 h la feria tiene 1 500 visitantes, se tiene que:

$$1\,500 = -20 \cdot 17^2 + 680 \cdot 17 + C \;\rightarrow\; C = -4\,280$$

La función es $N(t) = -20t^2 + 680t - 4\,280$

Para representar la función calculamos $N(10) = 520$ y $N(20) = 1\,320$. El vértice y estos dos puntos son suficientes para construir la gráfica.

47 **El coste de producción de x unidades de un producto es igual a $(1/4)x^2 + 35x + 25$ euros y el precio de venta de una unidad es $50 - (x/4)$ euros.**

a) Escribe la función que nos da el beneficio total si se venden las x unidades producidas, y represéntala.

b) Halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

a) $B(x) = 50x - \dfrac{x^2}{4} - \left(\dfrac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right) = -\dfrac{x^2}{2} + 15x - 25$

b) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola: $x = \dfrac{-15}{-1} = 15$.

Deben venderse 15 unidades.

48 **Un fabricante vende mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y sabe que por cada 10 euros de subida venderá 2 electrodomésticos menos.**

a) ¿Cuáles serán los ingresos si sube los precios 50 euros?

b) Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.

c) ¿Cuál debe ser la subida para que los ingresos sean máximos?

a) En este caso vendería 90 electrodomésticos a 450 euros cada uno; luego los ingresos serían de $450 \cdot 90 = 40\,500$ euros.

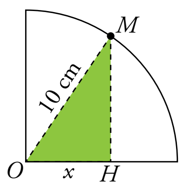
b) $I(x) = (400 + 10x)(100 - 2x) = -20x^2 + 200x + 40\,000$

(x, en decenas de euros)

c) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola:

$x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-200}{-40} = 5 \rightarrow$ 50 euros

49



En un cuarto de circunferencia de 10 cm de radio tomamos un punto M y construimos el triángulo rectángulo OMH.

Expresa el área de ese triángulo según la medida del cateto x. ¿Cuál es su dominio de definición?

Utilizando el teorema de Pitágoras, $\overline{MH} = \sqrt{100 - x^2}$

El área del triángulo es la función $A(x) = \dfrac{x\sqrt{100 - x^2}}{2}$ y su dominio es el intervalo (0, 10) para que la construcción tenga sentido.

50 **Un cultivo de bacterias comienza con 100 células. Media hora después hay 435. Si ese cultivo sigue un crecimiento exponencial del tipo $y = ka^t$ (t en minutos), calcula k y a y representa la función. ¿Cuánto tardará en llegar a 5 000 bacterias?**

$y = ka^t$

$t = 0,\ y = 100 \rightarrow 100 = k \cdot a^0 \rightarrow k = 100$

$t = 30,\ y = 435 \rightarrow 435 = 100 \cdot a^{30} \rightarrow a^{30} = 4{,}35 \rightarrow$

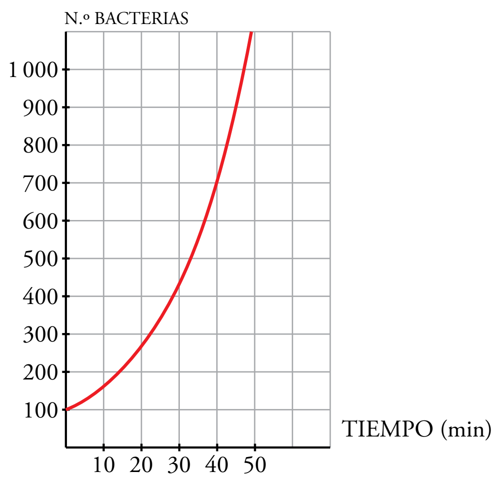
$\rightarrow a = 4{,}35^{1/30} \rightarrow a \approx 1{,}05$

La función es $y = 100 \cdot 1{,}05^x$.

Si $y = 5\,000 \rightarrow 5\,000 = 100 \cdot 1{,}05^x$

$50 = 1{,}05^x \rightarrow x = \dfrac{\log 50}{\log 1{,}05} \approx 80$ min

Tardará 80 minutos, aproximadamente.



51 **Un negocio en el que invertimos 10 000 €, pierde un 4 % mensual. Escribe la función que nos da el capital que tendremos según los meses transcurridos, y represéntala. ¿Cuánto tiempo tardará el capital inicial en reducirse a la mitad?**

$y = 10\,000 \cdot 0{,}96^x$

Si $y = 5\,000 \rightarrow 5\,000 = 10\,000 \cdot 0{,}96^x$

$0{,}96^x = 0{,}5 \rightarrow x = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}96} \approx 16{,}98$ meses

Tardará 17 meses, aproximadamente.

52 **Una taza de café recién hecho está a 75 °C. Después de 3 minutos en una habitación a 21 °C, la temperatura del café ha descendido a 64 °C. Si la temperatura, T, del café en cada instante t viene dada por la expresión $T = A\,e^{kt} + 21$, calcula A y k y representa la función.**

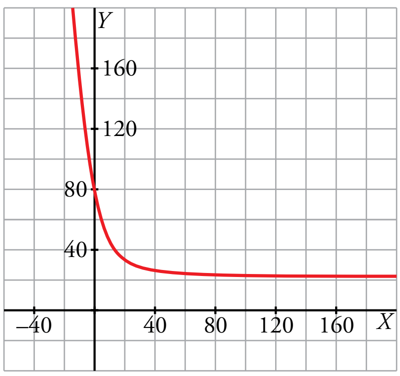
¿Cuánto tendremos que esperar para que la temperatura del café sea de 45 °C?

Por los datos del problema, la función temperatura pasa por los puntos (0, 75) y (3, 64), luego:

$75 = A \cdot e^{k \cdot 0} + 21 \rightarrow A = 54$

$64 = 54 \cdot e^{k \cdot 3} + 21 \rightarrow e^{3k} = \dfrac{43}{54} = 0{,}796 \rightarrow k = \dfrac{\ln 0{,}796}{3} = -0{,}076$

Por tanto, $T = 54 \cdot e^{-0{,}076t} + 21$



Si la temperatura del café es de 45°, entonces:

$45 = 54 \cdot e^{-0{,}076t} + 21 \rightarrow e^{-0{,}076t} = \dfrac{24}{54} = 0{,}444 \rightarrow t = \dfrac{\ln 0{,}444}{-0{,}076} = 10{,}7$ minutos

Debemos esperar 10 minutos 42 segundos para que alcance los 45°.

Página 271

Cuestiones teóricas

53 **Dada la función $y = a^x$, contesta:**

a) ¿Puede ser negativa la y? ¿Y la x?

b) ¿Para qué valores de a es decreciente?

c) ¿Cuál es el punto por el que pasan todas las funciones del tipo $y = log_a x$?

d) ¿Para qué valores de x se verifica $0 < a^x < 1$ siendo $a > 1$?

a) La y no puede ser negativa porque la función exponencial siempre toma valores positivos.

La x sí puede ser negativa porque el dominio de definición de esta función es $Dom = \mathbb{R}$.

b) Es decreciente para valores de a comprendidos entre 0 y 1, es decir, si $0 < a < 1$.

c) Todas pasan por el punto (1, 0) porque $log_a 1 = 0$ para cualquier a.

d) Se verifica siempre que $x < 0$, como podemos ver en su gráfica.

54 **¿Puede ser simétrica una función respecto del eje *OX*? Justifica tu respuesta.**

La única función simétrica respecto del eje *OX* es la función $y = 0$ ya que, si algún punto de ella se "saliera" del eje *OX*, debería tener otro reflejado en la misma vertical y esto es imposible por el concepto de función.

55 **Demuestra que $y = log_b (x - a)$ e $y = log_c (x - a)$ cortan al eje *OX* en el mismo punto.**

Los puntos de corte de una función con el eje *OX* son aquellos que verifican $y = 0$.

Para que el logaritmo de un número sea 0, su argumento debe ser 1. Por tanto, el punto de corte es:

$$x = a + 1 \;\rightarrow\; \begin{cases} y = log_b (a + 1 - a) = log_b 1 = 0 \\ y = log_c (a + 1 - a) = log_c 1 = 0 \end{cases}$$

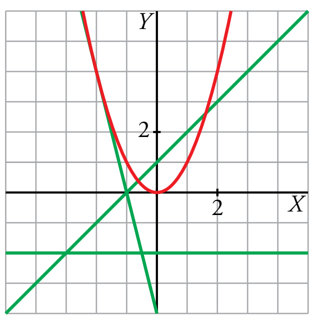
56 **¿Cuántas soluciones puede tener cada uno de estos sistemas?**

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax + b \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = ax + b \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y = 1/x \\ y = ax + b \end{cases}$

Justifícalo gráficamente y pon ejemplos.

a) Puede tener como máximo dos soluciones, dependiendo de la posición relativa de la parábola y la recta. Es decir, el sistema puede tener 0, 1 o 2 soluciones.

Desde otro punto de vista, la ecuación $x^2 = ax + b$ puede tener 0, 1 o 2 soluciones.



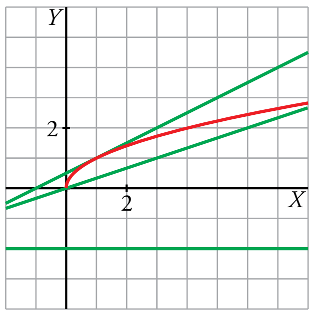
$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -2 \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -4x - 4 \end{array}\right\}$ Tiene una solución, (–2, 4).

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x + 1 \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

b) Este caso es análogo al anterior. En función de la posición relativa de la semiparábola y la recta, el sistema puede tener 0, 1 o 2 soluciones.

La ecuación $\sqrt{x} = ax + b$ puede tener, como máximo, dos soluciones.



$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = -2 \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = \frac{1}{2}(x+1) \end{array}\right\}$ Tiene una solución, (1, 1).

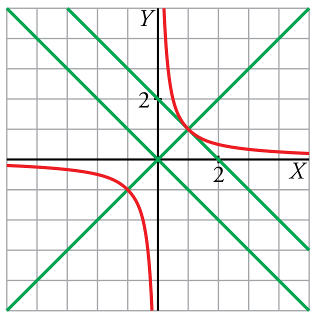
$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = \frac{1}{3}x \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, (0, 0) y (9, 3).

c) El sistema da lugar a una ecuación de segundo grado como podemos ver.

$\frac{1}{x} = ax + b \rightarrow x(ax + b) = 1 \rightarrow ax^2 + bx - 1 = 0$

Por tanto, al igual que en los casos anteriores, puede tener, como máximo, dos soluciones.

También puede interpretarse desde el punto de vista de la posición relativa de una hipérbola y una recta.



$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ y = -x \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ y = -x + 2 \end{array}\right\}$ Tiene una solución, (1, 1).

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ y = x \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, (1, 1) y (–1, –1).

57 **Calcula x en las siguientes expresiones:**

a) ***arc sen x*** **= 45°** **b)** ***arc cos x*** **= 30°** **c)** ***arc tg x*** **= –72°**

d) ***arc sen x*** **= 75°** **e)** ***arc cos x*** **= $\frac{\pi}{3}$ rad** **f)** ***arc tg x*** **= 1,5 rad**

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) –3,078

d) 0,966 e) $\frac{1}{2}$ f) 14,101

58 **¿Alguna de estas funciones verifica $f(a + b) = f(a) + f(b)$?**

a) $f(x) = x + 1$

b) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = x^2$

a) $f(a + b) = a + b + 1 \neq f(a) + f(b) = a + 1 + b + 1 = a + b + 2$

b) $f(a + b) = 2(a + b) = 2a + 2b = f(a) + f(b)$

c) $f(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \neq f(a) + f(b) = a^2 + b^2$

Para profundizar

59 ¿Qué transformación hemos hecho en cada una de estas funciones para obtenerlas a partir de $y = x^2$?

a) $y = x^2 - 6x + 5$ **b)** $y = 3x^2 - 6x + 5$

a) $y = x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$

Hemos hecho una traslación de 3 unidades a la derecha en el eje OX y de 4 unidades hacia abajo en el eje OY.

b) $y = 3x^2 - 6x + 5 = 3(x^2 - 2x) + 5 = 3(x^2 - 2x + 1) - 3 + 5 = 3(x - 1)^2 + 2$

Hemos hecho una traslación de 1 unidad a la derecha en el eje OX y de 2 unidades hacia arriba en el eje OY. También hemos hecho un estiramiento en el sentido vertical al multiplicar por 3.

60 Define por intervalos y representa.

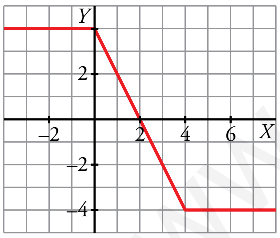
a) $y = |x - 4| - |x|$ **b)** $y = |x + 1| + |x - 3|$ **c)** $y = |2x - 4| - |x - 1|$

a) $|x - 4| = \begin{cases} -x + 4 & \text{si } x < 4 \\ x - 4 & \text{si } 4 \le x \end{cases}$ $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

Disponemos los cálculos en una tabla para hallar la función resultante:

	$(-\infty, 0)$	$[0, 4)$	$[4, +\infty)$
$\lvert x - 4\rvert$	$-x + 4$	$-x + 4$	$x - 4$
$\lvert x\rvert$	$-x$	x	x
$\lvert x - 4\rvert - \lvert x\rvert$	4	$4 - 2x$	-4

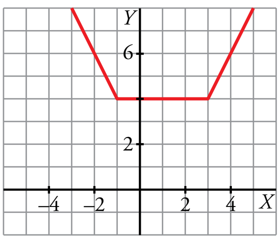
$$y = |x - 4| - |x| = \begin{cases} 4 & \text{si } x < 0 \\ 4 - 2x & \text{si } 0 \le x < 4 \\ -4 & \text{si } 4 \le x \end{cases}$$



b) $|x + 1| = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } -1 \le x \end{cases}$ $|x - 3| = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 \le x \end{cases}$

Por tanto, análogamente al ejemplo anterior, obtenemos:

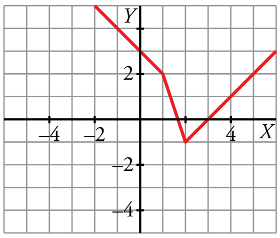
$$y = |x + 1| + |x - 3| = \begin{cases} 2 - 2x & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \le x < 3 \\ 2x - 2 & \text{si } 3 \le x \end{cases}$$



c) $|2x-4| = \begin{cases} -2x+4 & \text{si } x<2 \\ 2x-4 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$ $\qquad |x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x<1 \\ x-1 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$

Por tanto, análogamente al ejemplo anterior, obtenemos:

$$y = |2x-4| - |x-1| = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x<1 \\ -3x+5 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ x-3 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$



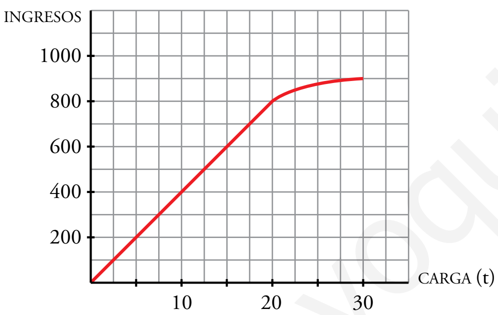
61 **Las tarifas de una empresa de transporte son:**

- **40 euros por tonelada de carga si esta es menor o igual a 20 *t*.**
- **Si la carga es mayor que 20 *t*, se restará, de los 40 euros, tantos euros como toneladas sobrepasen las 20.**

a) Dibuja la función *ingresos de la empresa según la carga que transporte* (carga máxima: 30 *t*).

b) Obtén la expresión analítica.

a)



b) $f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ [40-(x-20)]\,x & \text{si } 20 < x \le 30 \end{cases}$. Es decir: $f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ 60x - x^2 & \text{si } 20 < x \le 30 \end{cases}$

62 **Halla el dominio de definición de estas funciones:**

a) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ $\qquad$ **b)** $y = \sqrt{\dfrac{x-9}{x}}$

a) $\dfrac{x+3}{x-2} \ge 0 \;\; \begin{cases} \left.\begin{cases} x+3 \ge 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}\right\} x > 2 \\ \left.\begin{cases} x+3 \le 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}\right\} x \le -3 \end{cases}$ $\qquad$ Dominio = $(-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$

b) $\dfrac{x-9}{x} \ge 0 \;\; \begin{cases} \left.\begin{cases} x-9 \ge 0 \\ x > 0 \end{cases}\right\} x \ge 9 \\ \left.\begin{cases} x-9 \le 0 \\ x < 0 \end{cases}\right\} x < 0 \end{cases}$ $\qquad$ Dominio = $(-\infty, 0) \cup [9, +\infty)$

63 **¿Cuántas soluciones tienen estas ecuaciones?**

a) $e^x = 4 - x^2$ **b)** $\ln x = \dfrac{1}{x}$

Busca, por tanteo, una solución en cada caso.

a) Si representamos gráficamente las funciones $y = e^x$ e $y = 4 - x^2$, observamos que se cortan en dos puntos. Las abscisas de estos puntos son las soluciones de la ecuación dada. Vemos que uno de ellos está muy cerca de $x = 1$.

$e^1 = e \approx 2,72$

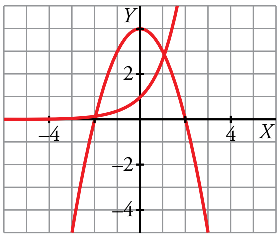
$4 - 1^2 = 3$

Probemos ahora en $x = 1,1$

$e^{1,1} \approx 3$

$4 - 1,1^2 = 2,79$

Una solución aproximada, a la vista de los resultados anteriores, es $x = 1,05$



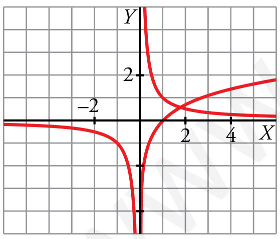
b) Si representamos gráficamente las funciones $y = \ln x$ e $y = \dfrac{1}{x}$, observamos que se cortan en un punto. Su abscisa es la solución de la ecuación dada.

Si tomamos $x = 1,75$, obtenemos:

$\ln 1,75 = 0,56$

$\dfrac{1}{1,75} = 0,57$

Por tanto, una solución aproximada es $x = 1,75$.



Autoevaluación

Página 271

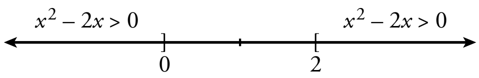
1 Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

b) $y = \dfrac{2}{x^3 - x^2}$

a) La función está definida por los valores de x tales que $x^2 - 2x \geq 0$.

Resolvemos la inecuación:



$Dom = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) Los valores de x que anulan el denominador no pertenecen al dominio de la función.

$x^3 - x^2 = 0 \rightarrow x^2(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

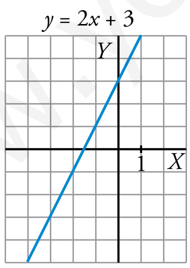
$Dom = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

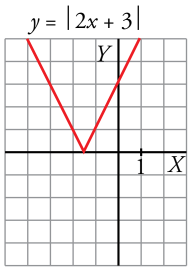
2 Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = |2x + 3|$

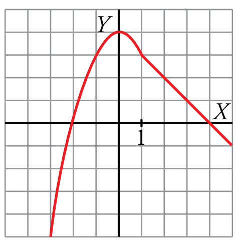
b) $y = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) La recta $y = 2x + 3$ corta al eje X en $x = -\dfrac{3}{2}$. Para valores menores que $-\dfrac{3}{2}$, cambiamos el signo de la ordenada. Por ejemplo: $(-2, -1) \rightarrow (-2, 1)$.



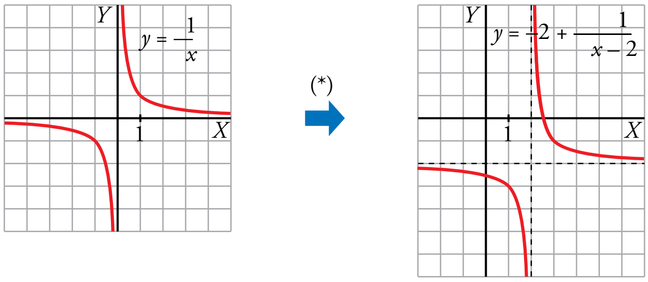


b) Para valores menores que 1, la gráfica es una parábola de vértice (0, 4). Para valores mayores que 1, es una recta.



3 **Representa $y = \frac{1}{x}$. A partir de ella, dibuja la gráfica de $y = \frac{-2x+5}{x-2}$.**

$$\begin{array}{r|l} -2x+5 & x-2 \\ \hline 2x-4 & -2 \\ 1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \frac{-2x+5}{x-2} = -2 + \frac{1}{x-2}$$



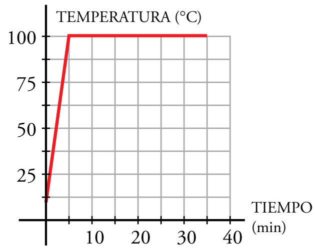
(*) La gráfica de $y = \frac{-2x+5}{x-2}$ es como la de $y = \frac{1}{x}$ trasladada 2 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo.

4 **Ponemos al fuego un cazo con agua a 10 °C. En 5 minutos alcanza 100 °C y se mantiene así durante media hora, hasta que el agua se evapora totalmente.**

a) Representa la función que describe este fenómeno y halla su expresión analítica.

b) Di cuál es su dominio y su recorrido.

a)



- La gráfica pasa por los puntos (0, 10) y (5, 100).
- Hallamos la ecuación de esta recta:

Pendiente: $\frac{100-10}{5-0} = 18 \rightarrow y = 18(x-0) + 10$

- Para valores de x mayores que 5, la temperatura se mantiene constante $\rightarrow y = 100$

Expresión analítica: $f(x) = \begin{cases} 18x+10 & \text{si } 0 \le x < 5 \\ 100 & \text{si } 5 \le x \le 35 \end{cases}$

b) Dominio: $f(x)$ está definida para valores de x entre 0 y 35, ambos incluidos.

Por tanto, $Dom\, f = [0, 35]$.

Recorrido de $f = [10, 100]$.

5 **El precio de venta de un artículo viene dado por la expresión $p = 12 - 0{,}01x$ (x = número de artículos fabricados; p = precio, en cientos de euros).**

a) Si se fabrican y se venden 500 artículos, ¿cuáles serán los ingresos obtenidos?

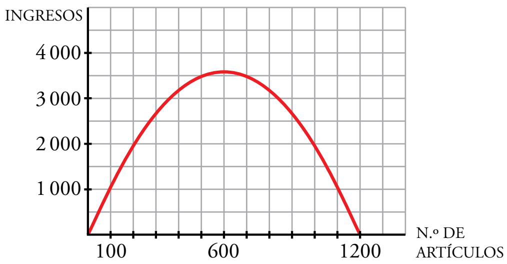
b) Representa la función *número de artículos-ingresos*.

c) ¿Cuántos artículos se deben fabricar para que los ingresos sean máximos?

a) Si se venden 500 artículos, su precio será:

$p(500) = 12 - 0{,}01 \cdot 500 = 7$ cientos de euros $\rightarrow$ Ingresos $= 500 \cdot 700 = 350\,000$ €

b) $I(x) = p \cdot x = 12x - 0{,}01x^2$



c) Hallamos el vértice de la parábola:

$$\begin{cases} x = \dfrac{12}{-0{,}02} = 600 \text{ artículos} \\ y = 12 \cdot 600 - 0{,}01 \cdot 600^2 = 3\,600 \text{ cientos de euros} \end{cases}$$

Deben fabricar 600 artículos para obtener unos ingresos máximos (360 000 euros).

6 **Depositamos en un banco 2 000 € al 6 % anual.**

a) Escribe la función que nos dice cómo evoluciona el capital a lo largo del tiempo. ¿Qué tipo de función es? Represéntala.

b) ¿En cuánto tiempo se duplicará el capital?

a) Al cabo de un año el capital se convertirá en:

$$2\,000 + 2\,000 \cdot \frac{6}{100} = 2\,000\left(1 + \frac{6}{100}\right) = 2\,000 \cdot 1{,}06$$

Al final del segundo año, el capital será $2\,000 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}06 = 2\,000 \cdot 1{,}06^2$

Luego la función que da el capital al cabo de t años es:

$C(t) = 2\,000 \cdot 1{,}06^t$

b) Tenemos que calcular el tiempo, t, necesario para que:

$$4\,000 = 2\,000 \cdot 1{,}06^t \;\to\; 1{,}06^t = 2 \;\to\; t = \frac{\log 2}{\log 1{,}06} = 11{,}9$$

Deberán pasar 12 años para que el capital se haya duplicado.

7 **Dadas $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$, halla:**

a) $f[g(2)]$ **b) $g[f(15)]$** **c) $f \circ g$** **d) $g^{-1}(x)$**

a) $f[g(2)] = f\left(\dfrac{1}{2-3}\right) = f(-1) = \sqrt{-1+1} = 0$

b) $g[f(15)] = g(\sqrt{15+1}) = g(4) = \dfrac{1}{4-3} = 1$

c) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3} + 1} = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$

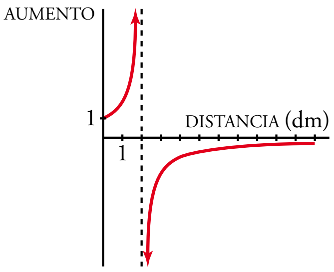
d) $x = \dfrac{1}{y-3} \;\to\; xy - 3x = 1 \;\to\; y = \dfrac{1+3x}{x}$

$g^{-1}(x) = \dfrac{1+3x}{x}$

Resuelve

Página 273

A través de una lupa



El *aumento* A producido por cierta lupa viene dado por la siguiente ecuación:

$$A = \frac{2}{2 - d}$$

donde d es la *distancia* (en decímetros) entre el objeto que queremos observar y la lupa.

Si acercamos el objeto a la lupa hasta tocarla $(d = 0)$, su tamaño se mantiene igual. Esto, en términos de límites, se escribe así:

$$\lim_{d \to 0} A = 1$$

¿Cómo se escribiría lo siguiente en términos de límites?

a) Si acercamos el objeto a 2 dm, aproximadamente, se hace más y más grande. Además, el objeto se verá al derecho si $d < 2$, o invertido, si $d > 2$.

$$\lim_{d \to 2^-} A = \ldots \qquad \lim_{d \to 2^+} A = \ldots$$

b) Si alejamos la lupa del objeto, este se ve cada vez más pequeño.

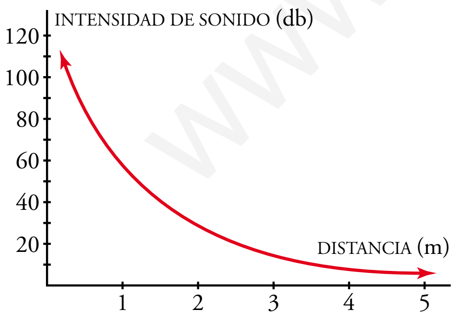
$$\lim_{d \to +\infty} A = \ldots$$

a) $\lim\limits_{d \to 2^-} A = +\infty$

$\lim\limits_{d \to 2^+} A = -\infty$

b) $\lim\limits_{d \to +\infty} A = 0$

Ruido y silencio



Si acercamos la oreja a un foco de sonido, este se hace insoportable. Si la alejamos mucho, deja de oírse. Traduce estos hechos a límites, llamando I a la *intensidad del sonido* (en decibelios) y d a la *distancia* (en metros) a la que nos colocamos del foco emisor:

$$\lim_{d \to 0} I = \ldots \qquad \lim_{d \to +\infty} I = \ldots$$

$\lim\limits_{d \to 0} I = +\infty \qquad \lim\limits_{d \to +\infty} I = 0$

1 Visión intuitiva de la continuidad. Tipos de discontinuidades

Página 275

1 ¿Verdadero o falso?

Cada una de las siguientes funciones es continua en todos los puntos en los que está definida:

a) $y = x^2 - 1$ b) $y = \sqrt{x+2}$ c) $y = sen\ x$ d) $y = tg\ x$

e) $y = Ent\ (x)$ f) $y = Mant\ (x)$ g) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ h) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

i) $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ j) $y = \begin{cases} 5x - 3 & \text{si } x \le 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Verdadero.

b) Verdadero.

c) Verdadero.

d) Verdadero.

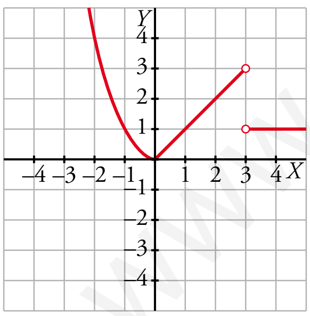
e) Falso. La función parte entera no es continua en ningún número entero, sin embargo, está definida en ellos.

f) Falso. La función mantisa no es continua en ningún número entero.

g) Verdadero.

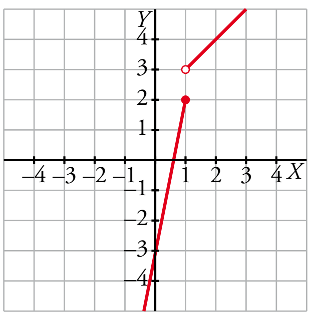
h) Verdadero.

i) Verdadero. Podemos verlo en su gráfica.



En $x = 3$ no es continua, pero como no está definida, la afirmación es verdadera.

j) Falso. No es continua en el punto $x = 1$ donde está definida.



2 **Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y qué tipo de discontinuidad presenta:**

a) $y = \frac{x+2}{x-3}$

b) $y = \frac{x^2-3x}{x}$

c) $y = \frac{x^2-3}{x}$

d) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

a) Rama infinita en $x = 3$ (asíntota vertical).

b) Discontinuidad evitable en $x = 0$ (le falta ese punto).

c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).

d) Salto en $x = 4$.

3 **Explica por qué son continuas las siguientes funciones y determina el intervalo en el que están definidas:**

a) $y = x^2 - 5$

b) $y = \sqrt{5-x}$

c) $y = \begin{cases} 3x-4 & \text{si } x < 3 \\ x+2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 5 \end{cases}$

a) Está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Está definida y es continua en $(-\infty, 5]$.

Las funciones dadas mediante una expresión analítica sencilla (las que conocemos) son continuas donde están definidas.

c) Está definida en todo $\mathbb{R}$. Es continua, también, en todo $\mathbb{R}$. El único punto en que se duda es el 3: las dos ramas toman el mismo valor para $x = 3$.

$3 \cdot 3 - 4 = 9 - 4 = 5 \qquad 3 + 2 = 5$

Por tanto, las dos ramas empalman en el punto (3, 5). La función es también continua en $x = 3$.

d) También las dos ramas empalman en el punto (2, 2). Por tanto, la función es continua en el intervalo en el que está definida: [0, 5).

2 Límite de una función en un punto. Continuidad

Página 276

1 **Para cada una de las funciones siguientes $f_1(x) = \dfrac{-5}{(x-3)^2}$, $f_2(x) = \dfrac{4}{3-x}$, $f_3(x) = 2^x$, completa en tu cuaderno la tabla adjunta, con ayuda de la calculadora, y estima el valor de $\lim_{x \to 3^-} f(x)$.**

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)					

$f_1(x) = \dfrac{-5}{(x-3)^2}$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)	$\dfrac{-5}{(2-3)^2} = -5$	$\dfrac{-5}{(2,5-3)^2} = -20$	$\dfrac{-5}{(2,9-3)^2} = -500$	$\dfrac{-5}{(2,99-3)^2} = -50\,000$	$\dfrac{-5}{(2,999-3)^2} = -5\,000\,000$

$\lim_{x \to 3^-} f_1(x) = -\infty$

$f_2(x) = \dfrac{4}{3-x}$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)	$\dfrac{4}{3-2} = 4$	$\dfrac{4}{3-2,5} = 8$	$\dfrac{4}{3-2,9} = 40$	$\dfrac{4}{3-2,99} = 400$	$\dfrac{4}{3-2,999} = 4\,000$

$\lim_{x \to 3^-} f_2(x) = +\infty$

$f_3(x) = 2^x$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)	$2^2 = 4$	$2^{2,5} = 5,66$	$2^{2,9} = 7,46$	$2^{2,99} = 7,94$	$2^{2,999} = 7,99$

$\lim_{x \to 3^-} f_3(x) = 8$

3 Cálculo de límites en un punto

Página 278

1 Calcula razonadamente el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

d) $\lim\limits_{x \to 0,1} \log_{10} x$

a) $-\dfrac{3}{2}$ b) 0 c) $\sqrt{3}$ d) -1

Página 279

Hazlo tú. $g(x) = \begin{cases} x^3 - 5x + 3, & x \neq -2 \\ 5, & x = -2 \end{cases}$ **¿Es continua en $x = -2$? Halla su límite en 0 y en 4.**

- Continuidad en $x = -2$:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} (x^3 - 5x + 3) = (-2)^3 - 5 \cdot (-2) + 3 = 5$$

$$f(-2) = 5$$

Por tanto, la función es continua en $x = -2$.

- Límite en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^3 - 5x + 3) = 0^3 - 5 \cdot 0 + 3 = 3$$

- Límite en $x = 4$:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} (x^3 - 5x + 3) = 4^3 - 5 \cdot 4 + 3 = 47$$

Hazlo tú. **Calcula k para que** $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$ **sea continua en $\mathbb{R}$.**

Para cualquier valor de k la función es continua en todos los puntos distintos de 3.

Estudiamos la continuidad en $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (x^3 - 2x + k) = 3^3 - 2 \cdot 3 + k = 21 + k$$

$$f(3) = 7$$

Para que la función sea continua en $x = 3$ ambos resultados deben ser iguales, luego:

$$21 + k = 7 \to k = -14$$

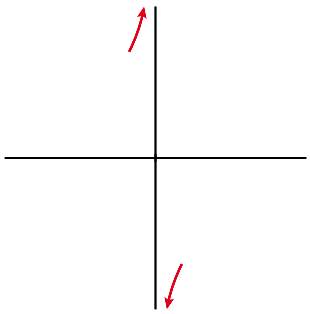
Página 281

Hazlo tú. **Calcula a)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-3}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-3}{x^2}$; **c)** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3}{(x-1)^2}$ **y representa los resultados.**

a) El denominador se anula en $x = 0$, pero no el numerador. Por tanto, el límite es infinito, con signo más o menos.

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \to \frac{-0{,}01-3}{-0{,}01} = 301 \to \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x-3}{x} = +\infty$

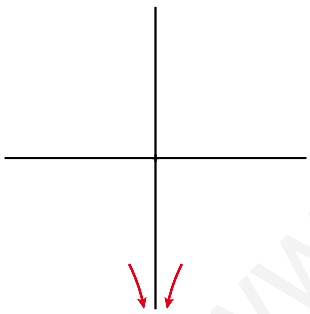
DERECHA: $x = 0{,}01 \to \frac{0{,}01-3}{0{,}01} = -299 \to \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x-3}{x} = -\infty$



b) El denominador se anula en $x = 0$, pero no el numerador. Por tanto, el límite es infinito, con signo más o menos.

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \to \frac{-0{,}01-3}{(-0{,}01)^2} = -30\,100 \to \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x-3}{x^2} = -\infty$

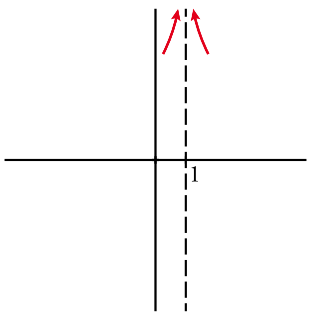
DERECHA: $x = 0{,}01 \to \frac{0{,}01-3}{0{,}01^2} = -29\,900 \to \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x-3}{x^2} = -\infty$



c) El denominador se anula en $x = 1$, pero no el numerador. Por tanto, el límite es infinito, con signo más o menos.

IZQUIERDA: $x = 0{,}99 \to \frac{0{,}99^3}{(0{,}99-1)^2} = 9\,703 \to \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$

DERECHA: $x = 1{,}01 \to \frac{1{,}01^3}{(1{,}01-1)^2} = 10\,303 \to \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$



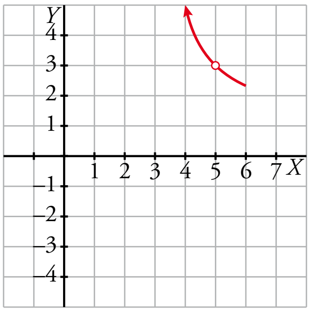
Hazlo tú. **Calcula a)** $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15}$; **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^3 - 5x^2}{x^2}$ **y representa los resultados.**

a) Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 5$.

Simplificamos la fracción:

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-3)(x-5)} = \frac{x+1}{x-3}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15} = \lim_{x \to 5} \frac{x+1}{x-3} = 3$$



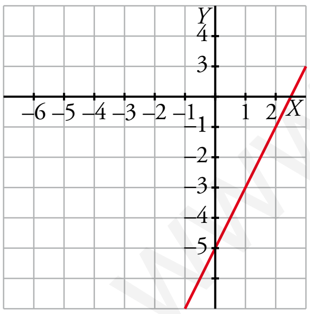
b) Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 0$.

Simplificamos la fracción:

$$\frac{2x^3 - 5x^2}{x^2} = \frac{x^2(2x-5)}{x^2} = 2x - 5$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^3 - 5x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} (2x - 5) = -5$$

$y = 2x - 5$



Hazlo tú. **Halla estos límites y representa los resultados:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2}{x^4}$

a) Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 1$.

Simplificamos la fracción $\to \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{(x+5)(x-1)}{x(x-1)^2} = \frac{x+5}{x(x-1)}$

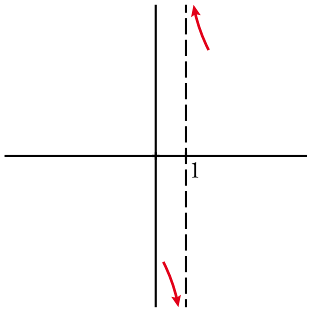
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x+5}{x(x-1)} \to$ Ahora se anula el denominador, pero no el numerador. Por tanto, los límites laterales son $\pm\infty$.

Estudiamos el signo de la función a uno y otro lado de 1.

IZQUIERDA: $x = 0{,}99 \to \dfrac{0{,}99^2 + 4 \cdot 0{,}99 - 5}{0{,}99^3 - 2 \cdot 0{,}99^2 + 0{,}99} = -605 \to \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x} = -\infty$

DERECHA $x = 1{,}01 \to \dfrac{1{,}01^2 + 4 \cdot 1{,}01 - 5}{1{,}01^3 - 2 \cdot 1{,}01^2 + 1{,}01} = 595 \to \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x} = +\infty$

Por tanto, el límite pedido no existe.



b) Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 0$.

Simplificamos la fracción $\to \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^4} = \dfrac{x^2(x+3)}{x^4} = \dfrac{x+3}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+3}{x^2} \to$ Ahora se anula el denominador, pero no el numerador. Por tanto, los límites laterales son $\pm\infty$.

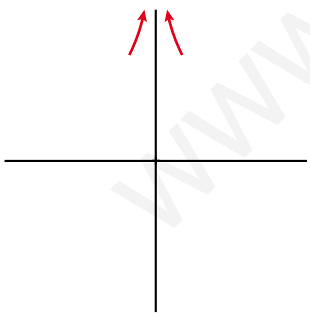
Estudiamos la función a uno y otro lado de 0.

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \to \dfrac{(-0{,}01)^3 + 3 \cdot (-0{,}01)^2}{(-0{,}01)^4} = 29\,900 \to \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^4} = +\infty$

DERECHA $x = 0{,}01 \to \dfrac{0{,}01^3 + 3 \cdot 0{,}01^2}{0{,}01^4} = 30\,100 \to \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^4} = +\infty$

Por tanto, el límite pedido no existe.

$y = \dfrac{x+3}{x^2}$

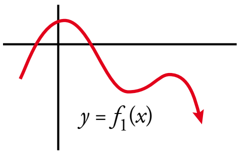


4 Límite de una función cuando $x \to +\infty$

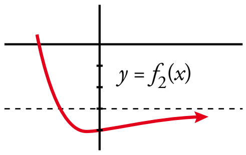
Página 282

1 Di el límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:

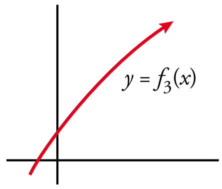
a)



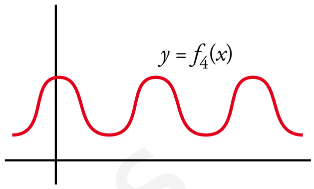
b)



c)



d)



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = -3$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x)$ no existe.

5 Cálculo de límites cuando $x \to +\infty$

Página 283

1 **Di el valor del límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$ **b)** $f(x) = 5x^3 + 7x$ **c)** $f(x) = x - 3x^4$

d) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ **e)** $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{-5}$

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$

d) 0 e) 0 f) $-\infty$

2 **Como $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 200x^2) = +\infty$, halla un valor de x para el cual sea $x^3 - 200x^2 > 1\,000\,000$.**

Por ejemplo, para $x = 1\,000$, $f(x) = 800\,000\,000$.

3 **Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 - 10x} = 0$, halla un valor de x para el cual sea $\dfrac{1}{x^2 - 10x} < 0{,}0001$.**

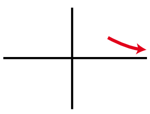
Por ejemplo, para $x = 1\,000$, $f(x) = 0{,}0000\overset{\frown}{01}$.

Página 284

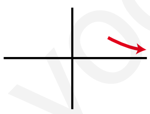
4 **Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{3}{x}$ **c)** $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **d)** $f(x) = 3x - 5$

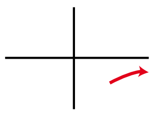
a) 0



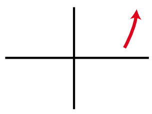
b) 0



c) 0



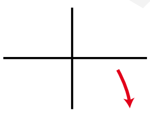
d) $+\infty$



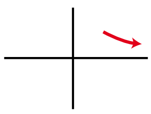
5 **Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:**

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{-5}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}$

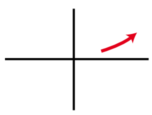
a) $-\infty$



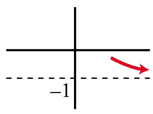
b) 0



c) $+\infty$



d) -1



6 Límite de una función cuando $x \to -\infty$

Página 285

1 Halla los límites cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$ de las funciones siguientes:

a) $f(x) = -2x^3 + 7x^2$ **b)** $f(x) = 3x^4 - 7x$ **c)** $f(x) = 10^x$

d) $f(x) = \sqrt{5x-8}$ **e)** $f(x) = \sqrt{-2x^2+1}$ **f)** $f(x) = -5^x$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + 7x^2) = \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^3 + 7x^2) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^4 - 7x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^4 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^4 - 7x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^4 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 10^x = 0$

Ya que para $x = -10, 10^{-10} = \dfrac{1}{10^{10}} = 0{,}0000000001$ y análogamente ocurriría para valores negativos de x menores que -10.

De forma similar a la anterior, podemos comprobar que $\lim\limits_{x \to +\infty} 10^x = +\infty$.

d) El límite cuando x tiende a $-\infty$ no tiene sentido porque la función está definida para $x \ge \dfrac{8}{5}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{5x-8} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{5x} = +\infty$ porque el radicando tiende a $+\infty$.

e) No tiene sentido calcular ninguno de los dos límites porque el dominio de definición de la función es el intervalo $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} -5^x = 0$

Ya que para $x = -10$, $-5^{-10} = -\dfrac{1}{5^{10}} = -0{,}0000001024$ y análogamente ocurriría para valores negativos de x menores que -10.

De forma similar a la anterior, podemos comprobar que $\lim\limits_{x \to +\infty} -5^x = -\infty$.

2 Halla los límites cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$ de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \sqrt{3-x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2+3}{-x^3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{-x^3}{x^2+3}$ **d)** $f(x) = \dfrac{5x^3-10}{3x^3+10x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{3-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$ porque el radicando tiende a $+\infty$.

El límite cuando x tiende a $+\infty$ no tiene sentido porque la función está definida solo cuando $x \le 3$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+3}{-x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{-x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+3}{-x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{-x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{-x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3}{x^2+3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3}{x^2+3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3-10}{3x^3+10x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3}{3x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3-10}{3x^3+10x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3}{3x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3}$

7 Ramas infinitas. Asíntotas

Página 287

1 Determina las asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas:

a) $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$ **b)** $y = \dfrac{3x^2-7}{x-2}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x}$ **d)** $y = -\dfrac{1}{x^2}$ **e)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

a) Como el denominador se anula cuando $x = 2$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{x-2} = \frac{7}{0} = \pm\infty$$

IZQUIERDA: $x = 1{,}99 \to \dfrac{3 \cdot 1{,}99+1}{1{,}99-2} = -697 \to \displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{3x+1}{x-2} = -\infty$

DERECHA: $x = 2{,}01 \to \dfrac{3 \cdot 2{,}01+1}{2{,}01-2} = 703 \to \displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{3x+1}{x-2} = +\infty$

Por tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3 = 3$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3 = 3$$

Por tanto, la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal.

Para saber la posición de la curva respecto de la asíntota horizontal, debemos tener en cuenta que $y = \dfrac{3x+1}{x-2} = 3 + \dfrac{7}{x-2}$.

Cuando $x \to +\infty$ el cociente $\dfrac{7}{x-2}$ toma valores positivos y la función está por encima de la asíntota.

Cuando $x \to -\infty$, ocurre lo contrario y la función está por debajo de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

b) Como el denominador se anula cuando $x = 2$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2-7}{x-2} = \frac{5}{0} = \pm\infty$$

IZQUIERDA: $x = 1{,}99 \to \dfrac{3 \cdot 1{,}99^2-7}{1{,}99-2} = -488{,}03 \to \displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{3x^2-7}{x-2} = -\infty$

DERECHA: $x = 2{,}01 \to \dfrac{3 \cdot 2{,}01^2-7}{2{,}01-2} = 512{,}03 \to \displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{3x^2-7}{x-2} = +\infty$

Por tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2-7}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2-7}{x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3x = -\infty$$

Por tanto, no tiene asíntotas de este tipo.

Ahora estudiamos las asíntotas oblicuas:

$$y = \frac{3x^2-7}{x-2} = 3x + 6 + \frac{5}{x-2}$$

La recta $y = 3x + 6$ es una asíntota oblicua ya que $\dfrac{5}{x-2}$ tiende a 0 cuando $x \to \pm\infty$.

Cuando $x \to +\infty$ el cociente $\dfrac{5}{x-2}$ toma valores positivos y la función está por encima de la asíntota oblicua.

Cuando $x \to -\infty$, ocurre lo contrario y la función está por debajo de la asíntota.

c) Como el denominador se anula cuando $x = 0$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \to \dfrac{1}{-0{,}01} = -100 \to \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

DERECHA: $x = 0{,}01 \to \dfrac{1}{0{,}01} = 100 \to \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

Por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Cuando $x \to +\infty$, la función es positiva y está por encima de la asíntota horizontal. Cuando $x \to -\infty$, la función es negativa y está por debajo de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

d) Como el denominador se anula cuando $x = 0$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{-x^2} = \dfrac{1}{0} = -\infty$ porque la función siempre toma valores negativos.

Por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{-x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-x^2} = 0$

Por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Como la función siempre toma valores negativos, está por debajo de la asíntota horizontal.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

e) La función está definida cuando $x^2 - 9 > 0$, es decir, cuando $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. En los puntos –3 y 3 se producen divisiones entre 0. Vamos a estudiar en ellos la existencia de asíntotas, pero solo podremos calcular límites por uno de los lados en cada punto.

$\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}} = \dfrac{1}{0} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}} = \dfrac{1}{0} = +\infty$

Porque la función siempre es positiva. Luego las rectas $x = -3$ y $x = 3$ son asíntotas verticales.

La recta $y = 0$ es claramente un asíntota horizontal porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}} = 0$.

Tanto si $x \to +\infty$ como si $x \to -\infty$, la función queda por encima de la asíntota horizontal por tomar valores positivos.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

8 Ramas infinitas en las funciones racionales

Página 289

1 Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones y, a partir de ellas, perfila la forma de la curva:

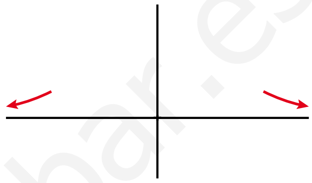
a) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ **b)** $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ **c)** $y = \dfrac{x^4}{x^2+1}$ **d)** $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$

e) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ **f)** $y = \dfrac{x^3}{1+x^2}$ **g)** $y = \dfrac{x^2+3x}{x+1}$ **h)** $y = \dfrac{2x^3-3x^2}{x}$

a) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$. Asíntota: $y = 0$

Como la función siempre es positiva, queda por encima de la asíntota.

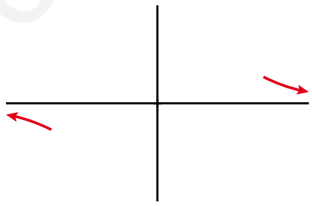


b) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$. Asíntota: $y = 0$

Estudiamos el signo de su diferencia con la asíntota:

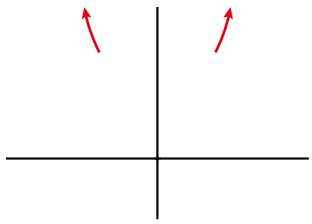
$$f(x) - 0 = \frac{x}{1+x^2} \begin{cases} + \text{ si } x \to +\infty \\ - \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$



c) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito: como *grado de* $P(x)$ – *grado de* $Q(x) = 2$, tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$ y otra cuando $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^4}{x^2+1} = +\infty \;\to\;$ Las ramas parabólicas son hacia arriba.



d) Asíntotas verticales. Obtenemos las raíces del denominador:

$x^2 - 2x = 0 \;\to\; x_1 = 0,\; x_2 = 2$ son asíntotas porque el numerador no se anula en estos valores.

Estudiamos la posición de la curva respecto a ellas:

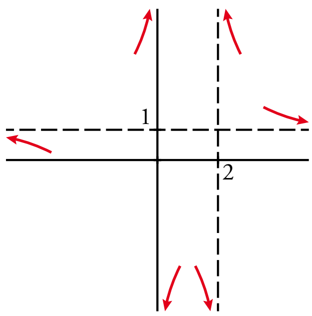
	PRÓXIM. $x = 0$		PRÓXIM. $x = 2$	
x	–0,01	0,01	1,99	2,01
$\dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$	+	–	–	+

Ramas en el infinito:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = 1$. Asíntota: $y = 1$.

Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota:

$$f(x) - 1 = \frac{x^2+2}{x^2-2x} - 1 = \frac{2+2x}{x^2-2x} \begin{cases} + \text{ si } x \to +\infty \\ - \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$

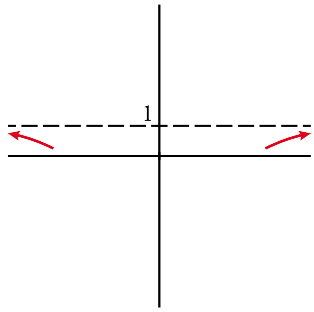


e) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$. Asíntota: $y = 1$

Estudiamos el signo de su diferencia con la asíntota:

$$f(x) - 1 = \frac{-1}{1+x^2} \begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \\ - \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$



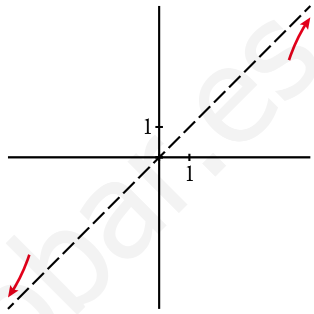
f) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula nunca.

Ramas en el infinito: como *grado de* $P(x)$ – *grado de* $Q(x) = 1$, tiene una asíntota oblicua.

$$y = \frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{x^2-1} \;\to\; \text{La recta } y = x \text{ es la asíntota.}$$

Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota:

$$f(x) - x = \frac{-x}{x^2+1} \begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \\ + \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$



g) Asíntota vertical: $x = -1$ porque se anula el denominador y no el numerador.

Estudiamos su posición:

IZQUIERDA: $f(-1{,}01) = \dfrac{(-1{,}01)^2 + 3\cdot(-1{,}01)}{-1{,}01+1} = 200{,}99$ (positivo)

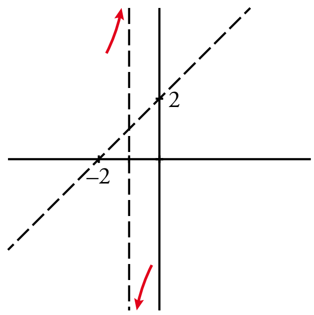
DERECHA: $f(-0{,}99) = \dfrac{(-0{,}99)^2 + 3\cdot(-0{,}99)}{-0{,}99+1} = -198{,}99$ (negativo)

Ramas en el infinito: como *grado de* $P(x)$ – *grado de* $Q(x) = 1$, tiene una asíntota oblicua.

$$y = \frac{x^2+3x}{x+1} = x + 2 - \frac{2}{x+1} \;\to\; \text{La recta } y = x + 2 \text{ es la asíntota.}$$

Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota:

$$f(x) - (x+2) = \frac{-2}{x+1} \begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \\ + \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$

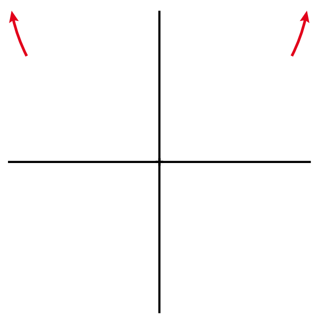


h) Asíntota vertical. El valor $x = 0$ anula el denominador pero también el numerador. Si $x \neq 0$ podemos simplificar la fracción:

$$\frac{2x^3 - 3x^2}{x} = 2x^2 - 3x$$

Por tanto, la función dada coincide con una parábola salvo que en el punto $x = 0$ tiene una discontinuidad del tipo III, ya que no está definida.

No tiene asíntota vertical y las ramas en el infinito son parabólicas (ambas hacia arriba).

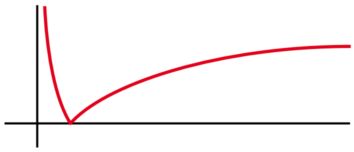


9 Ramas infinitas en las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas

Página 290

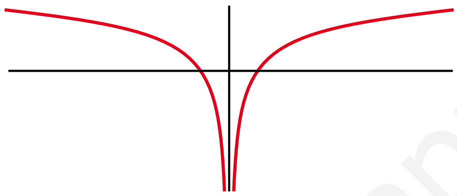
1 ¿Verdadero o falso?

a) La función $y = |log_2 x|$ se representa así:



Tiene dos ramas infinitas: una asíntota vertical en $y = 0$ y una rama parabólica cuando $x \to +\infty$.

b) La función $y = log_2 |x|$ se representa así:



Tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y sendas ramas parabólicas en $-\infty$ y en $+\infty$.

a) Verdadero.

b) Verdadero.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 291

2. Límites y continuidad de una función definida "a trozos"

Hazlo tú. Halla el límite de la función $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{si } x<3 \\ x-2, & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$ **en** $x=0$ **y en** $x=3$**. Estudia su continuidad.**

En $x = 0$, como $0 < 3$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(2x-3) = -3$

$x = 3$ es un "punto de ruptura". Por ello, calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(2x-3) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(x-2) = 1 \end{cases} \to \text{No coinciden; por tanto, no existe el límite.}$$

Esta función es discontinua en $x = 3$, porque el límite en ese punto no existe. Tiene un salto finito en él. Para los demás valores de x, la función es continua porque está formada por trozos de rectas.

3. Cálculo del límite en un punto

Hazlo tú. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-2x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x}{(x+2)^2}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-2x} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminación. Tenemos que simplificar la fracción.

$$\frac{x^2-2x+1}{2x^2-2x} = \frac{(x-1)^2}{2x(x-1)} = \frac{x-1}{2x};\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-2x} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2x} = 0$$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x}{(x+2)^2} = \dfrac{-2}{0} = -\infty$ porque el denominador siempre es positivo y el numerador siempre es negativo en las proximidades del punto $x = -2$. (En este caso no son necesarios los límites laterales).

Página 292

4. Función continua en un punto

Hazlo tú. Halla el valor de k **para que la función** $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{si } x\leq 1 \\ x+k & \text{si } x>1 \end{cases}$ **sea continua en todo** $\mathbb{R}$**.**

La función es continua si $x \neq 1$ porque está formada por dos trozos de rectas.

Estudiamos la continuidad en el "punto de ruptura" $x = 1$:

$$f(1) = 2\cdot 1 - 5 = -3$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-}(2x-5) = -3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}(x+k) = 1+k \end{cases}$$

Para que exista el límite debe ser $-3 = 1 + k \to k = -4$

Si $k = -4$ se cumplen todas las condiciones para que sea continua en $x = 1$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

5. Cálculo de límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$

Hazlo tú. **Calcula** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **y** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **en los siguientes casos:**

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 5}$ **d)** $f(x) = \dfrac{5x + 3}{x^2 - 2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 - 1} = +\infty$ porque el radicando es tan grande como queramos dando a x valores muy grandes.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2 - 1} = +\infty$ por una razón análoga a la anterior.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2}{-2x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{-2} = -2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2}{-2x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{-2} = -2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x - 5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x - 5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x + 3}{x^2 - 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x + 3}{x^2 - 2} = 0$ porque el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Página 293

6. Ramas infinitas y asíntotas

Hazlo tú. **Estudia las asíntotas de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 2}$

a) • Asíntotas verticales:

$x - 2 = 0 \ \to \ x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 1}{x - 2} = \dfrac{5}{0} = \pm\infty \ \to \ x = 2$ es una asíntota vertical.

Si $x \to 2^-$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$

• Asíntotas horizontales:

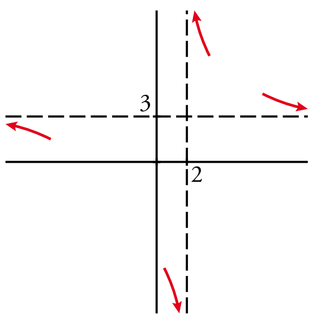
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x - 1}{x - 2} = 3$; $y = 3$ es una asíntota horizontal.

Estudiamos la posición de la curva.

$f(x) - 3 = \dfrac{3x - 1}{x - 2} - 3 = \dfrac{5}{x - 2}$

Si $x \to +\infty$, $f(x) - 3 > 0$. La curva está sobre la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x) - 3 < 0$. La curva está bajo de la asíntota.



b) • Asíntotas verticales. No tiene porque su denominador nunca se anula.

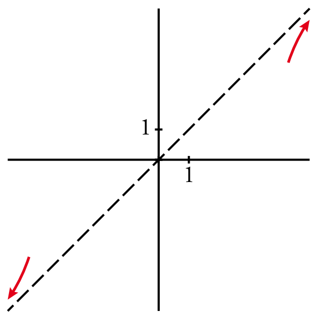
• Asíntotas horizontal u oblicua.

Como el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador, hay asíntota oblicua. Dividiendo obtenemos:

$\frac{x^3}{x^2+2} = x - \frac{2x}{x^2+2} \rightarrow y = x$ es asíntota oblicua.

Estudiamos la posición:

$$d = f(x) - y = -\frac{2x}{x^2+2} \begin{cases} \text{Si } x \rightarrow +\infty \ (d < 0) \ f(x) < y \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty \ (d > 0) \ f(x) > y \end{cases}$$



Ejercicios y problemas guiados

Página 294

1. Límites de una función definida "a trozos"

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & si\ \ x<0\\ 3x-5 & si\ \ 0\le x<4\\ 9x-x^2 & si\ \ x\ge 4\end{cases}$$

hallar $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ***y*** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (9x-x^2) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- Como $x = 0$ es un punto de ruptura, debemos calcular límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (3x-5) = -5$$

El límite en $x = 0$ no existe.

2. Límites en el infinito

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{\sqrt{4x^2+1}}$ ***b)*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3x}}{x+1}$ ***c)*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+3}{x-2}}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{\sqrt{4x^2+1}} = \dfrac{5}{\sqrt{4}} = \dfrac{5}{2}$ porque el numerador tiene grado 1 y el denominador también, ya que $\sqrt{x^2} = x$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3x}}{x+1} = 0$ porque el grado del numerador sería $\dfrac{1}{2}$ y es menor que el grado del denominador, que es 1.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+3}{x-2}} = +\infty$ porque el radicando tiende a $+\infty$ al ser un cociente de polinomios en el que el grado del numerador es mayor que el del denominador.

3. Asíntota oblicua

Hallar a, b y c en $f(x) = \dfrac{ax^2+bx}{x-c}$ ***para que tenga como asíntotas*** $x = 2$ ***e*** $y = 2x - 1$.

Para que $x = 2$ sea una asíntota vertical, el denominador se debe anular en este punto.

$2 - c = 0 \ \to\ c = 2$

Luego $f(x) = \dfrac{ax^2+bx}{x-2}$

Dividimos los polinomios para calcular la asíntota oblicua:

$$\frac{ax^2+bx}{x-2} = ax + 2a + b + \frac{4a+2b}{x-2}$$

Por tanto, $\begin{cases} a = 2\\ 2a+b=-1\end{cases}$, de donde $a = 2,\ b = -5$

4. Ramas infinitas

Estudiar y representar las ramas infinitas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 1{,}5^x$ ***b)*** $f(x) = 0{,}4^x$ ***c)*** $f(x) = ln\ (2x - 4)$

a) • Asíntotas verticales. No tiene por ser continua.

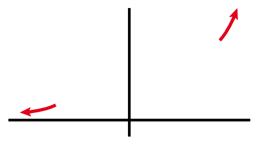
• Asíntotas horizontales.

$\lim_{x \to +\infty} 1{,}5^x = +\infty$ por ser una función exponencial con base mayor que 1.

$\lim_{x \to -\infty} 1{,}5^x = 0$ por el mismo motivo.

Luego $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

Tiene una rama parabólica cuando $x \to +\infty$.



b) • Asíntotas verticales. No tiene por ser continua.

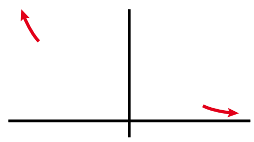
• Asíntotas horizontales.

$\lim_{x \to +\infty} 0{,}4^x = 0$ por ser una función exponencial con base menor que 1.

$\lim_{x \to -\infty} 0{,}4^x = +\infty$ por el mismo motivo.

Luego $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

Tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$.



c) El dominio de definición de la función es el intervalo $(2, +\infty)$ ya que se debe cumplir que $2x - 4 > 0$. En el dominio es una función continua y no tiene asíntotas verticales.

Estudiamos el comportamiento cerca del punto $x = 2$ por la derecha. Podemos verlo evaluando algunos puntos.

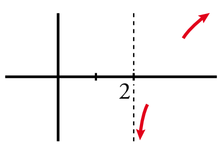
$x = 2{,}001 \to ln\ (2 \cdot 2{,}001 - 4) = -6{,}2$

$x = 2{,}0001 \to ln\ (2 \cdot 2{,}0001 - 4) = -8{,}5$

$\lim_{x \to 2^+} ln\,(2x - 4) = -\infty$

Luego $x = 2$ es una asíntota vertical cuando $x \to 2^+$.

Tiene una rama parabólica en el infinito de crecimiento cada vez más lento hacia arriba por ser una función logarítmica y $\lim_{x \to +\infty} ln\,(2x - 4) = +\infty$.



5. Existencia de asíntotas

¿Tiene alguna asíntota la siguiente función?:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3}$$

¿Qué relación hay entre su gráfica y la de g(x) = $x^2 - 4$?

- Asíntotas verticales:

  Estudiamos el comportamiento de la función en $x = 3$, punto que anula el denominador.

  $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = \frac{0}{0}$. Indeterminación. Tenemos que simplificar la fracción:

  $$\frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = \frac{(x-3)(x^2-4)}{x-3} = x^2 - 4$$

  Luego $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 4) = 5$

  Por tanto, en el punto $x = 3$ no tiene asíntota vertical. En ese punto hay una discontinuidad del tipo III.

- Ramas en el infinito:

  Si $x \neq 2 \to f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = x^2 - 4 = g(x)$

  Luego la función es una parábola salvo en el punto $x = 2$, donde no está definida.

  Tiene dos ramas parabólicas hacia arriba cuando $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$ ya que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

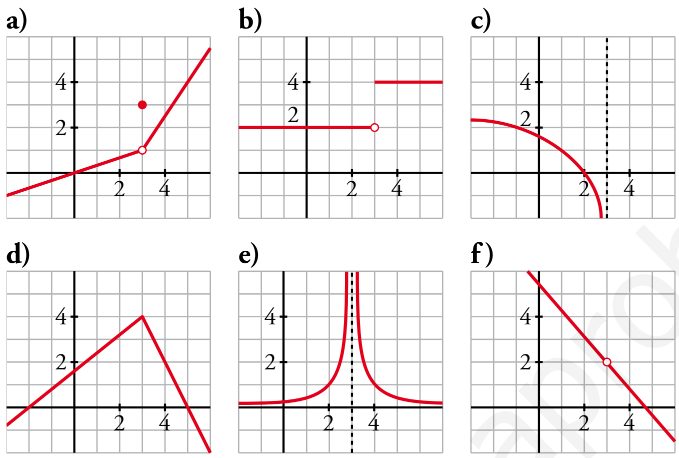
Ejercicios y problemas propuestos

Página 295

Para practicar

Continuidad y límite en un punto

1 **¿Cuál de estas funciones es continua en $x = 3$? Señala, en cada una de las otras, la razón de su discontinuidad:**



a) Discontinuidad de tipo IV en $x = 3$, porque el valor de la función no coincide con el límite en el punto.

b) Discontinuidad de salto finito (tipo II). La función existe en $x = 3$, pero los límites laterales, aunque existen, son distintos.

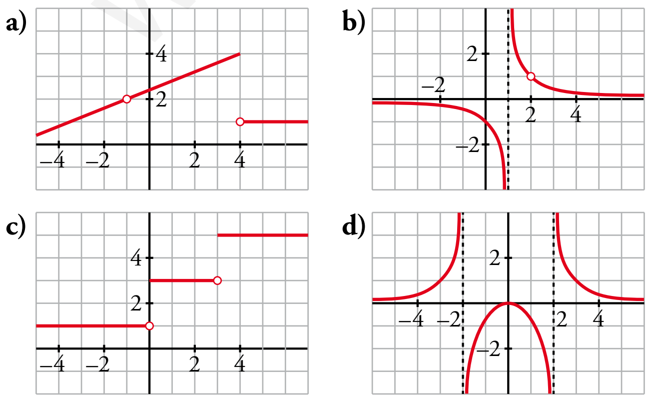
c) Discontinuidad de salto infinito (tipo I). Tiene un asíntota vertical por la izquierda en $x = 3$.

d) Continua.

e) Discontinuidad de salto infinito (tipo I). Tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

f) Discontinuidad de tipo III. La función no está definida en $x = 3$, pero existe el límite en dicho punto.

2 **Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y el tipo de discontinuidad:**



a) Discontinuidad de tipo III en $x = -1$.

Discontinuidad de salto finito en $x = 4$ (tipo II).

b) Discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ (tipo I).

Discontinuidad de tipo III en $x = 2$.

c) Discontinuidades de salto finito en $x = 0$ y $x = 3$ (tipo II).

d) Discontinuidades de salto infinito en $x = -2$ y $x = 2$ (tipo I).

3 **Comprueba que solo una de las siguientes funciones es continua en $x = 1$. Explica la razón de la discontinuidad en las demás:**

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x<1 \\ 3 & \text{si } x>1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x\neq 1 \\ -1 & \text{si } x=1 \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x<1 \\ x-3 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

a) La función no está definida en $x = 1$. Por otro lado:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (x+2) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 3 = 3 \end{cases} \quad \text{Luego existe } \lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

Por tanto, tiene una discontinuidad de tipo III en $x = 1$.

b) $f(1) = -1$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x = 2$$

En este caso, tiene una discontinuidad de tipo IV.

c) $f(1) = 1 - 3 = -2$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} -2 = -2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x-3) = -2 \end{cases}$$

Esta función es continua en $x = 1$.

d) La función no está definida en $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

- Si $x \to 1^-$ $\left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 1^+$ $\left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I) en $x = 1$.

4 **Indica para qué valores de $\mathbb{R}$ son continuas las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{x^2+2}$ **b)** $y = \dfrac{2}{x^4+3x^3}$ **c)** $y = \sqrt{5-2x}$

d) $y = \ln(x+4)$ **e)** $y = 2^{3-x}$ **f)** $y = |x-5|$

a) Continua en $\mathbb{R}$.

Su dominio de definición es $\mathbb{R}$ y su expresión analítica es elemental.

b) Veamos si se anula el denominador de la fracción:

$x^4 + 3x^3 = 0 \ \to\ x^3(x+3) = 0 \ \to\ x_1 = 0,\ x_2 = -3$

La función es continua en su dominio de definición, es decir, en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$.

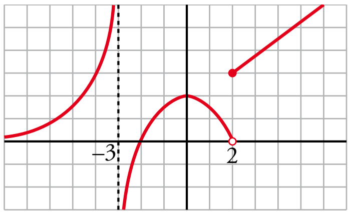
c) Para calcular su dominio resolvemos $5 - 2x \geq 0$. El intervalo solución $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$ es el conjunto de valores donde la función es continua.

d) La expresión analítica de esta función es elemental, luego es continua en su dominio, es decir, en $(-4, +\infty)$.

e) Análogamente al caso anterior, es continua en $\mathbb{R}$ porque siempre está definida.

f) Es continua en $\mathbb{R}$ porque siempre está definida y su expresión analítica es elemental.

5 **Sobre la gráfica de la siguiente función $f(x)$, halla:**



a) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

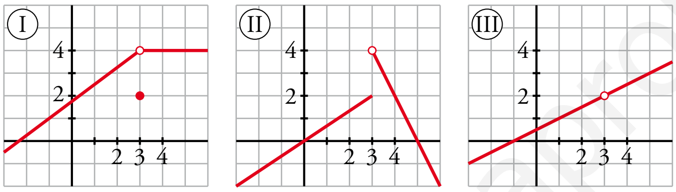
d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 2

d) 0 e) 3 f) 0

6 **Relaciona cada una de estas expresiones con su gráfica correspondiente:**

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$ **b)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$ **c)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **no existe**



¿Alguna de ellas es continua en $x = 3$?

a) III b) I c) II

Ninguna es continua en $x = 3$.

7 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 0}\left(5 - \frac{x}{2}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1-x}{x-2}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0,5} 2^x$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{10 + x - x^2}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 4} \log_2 x$ **g)** $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$ **h)** $\lim\limits_{x \to 2} e^x$

a) 5 b) 0 c) –2 d) $\sqrt{2}$

e) 2 f) 2 g) 1 h) e^2

8 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, **halla:**

a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

a) 5

b) 4

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

9 Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$ en $x = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 2^{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x} & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ en $x = 0$

d) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ en $x = 2$

e) $f(x) = \begin{cases} 5 - x & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{2}{x-2} & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ en $x = 3$

Todos los puntos analizados son "puntos de ruptura", luego los límites en ellos se estudian mediante los límites laterales.

a) $f(-1) = (-1)^2 + 3 = 4$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (3 - x) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + 3) = 4 \end{cases}$$ La función es continua en $x = -1$.

b) $f(1)$ no está definido.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 2^{x-1} = 1 \end{cases}$$ La función tiene una discontinuidad del tipo III en $x = 1$.

c) $f(0) = 0 - 2 = -2$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{4 - x} = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x - 2) = -2 \end{cases}$$ La función tiene una discontinuidad de salto finito (tipo II) en $x = 0$.

d) $f(2) = 2 \cdot 2 - 6 = -2$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (2 - x^2) = -2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (2x - 6) = -2 \end{cases}$$ La función es continua en $x = 2$.

e) $f(3) = \dfrac{2}{3-2} = 2$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} (5 - x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2}{x-2} = 2 \end{cases}$$ La función es continua en $x = 3$.

Página 296

10 Estas funciones, ¿son discontinuas en algún punto?:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \ne -1 \\ -1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x} & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2^{x-3} & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) La función está formada por un trozo de parábola y otro de recta, luego el único punto posible de discontinuidad sería el punto de ruptura. Estudiamos la continuidad en él.

$f(1) = 1 - 1 = 0$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (1 - x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1) = 0 \end{cases}$$

La función también es continua en $x = 1$, por tanto, no es discontinua en ningún punto.

b) Esta función coincide con la parábola $y = x^2$ salvo en el punto $x = -1$. Luego tiene una discontinuidad de tipo IV en dicho punto.

c) La función está formada por un trozo de hipérbola y otro de recta, luego el único punto posible de discontinuidad sería el punto de ruptura. Estudiamos la continuidad en él.

$f(2) = 2$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} x = 2 \end{cases}$$

La función también es continua en $x = 2$, por tanto, no tiene discontinuidades.

d) La función está formada por dos trozos de funciones cuyas expresiones analíticas son elementales (correctamente definidas), luego el único punto posible de discontinuidad sería el punto de ruptura. Estudiamos la continuidad en él.

$f(3)$ no está definido.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} 2^{x-3} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = 0 \end{cases}$$ En el punto $x = 3$ hay una discontinuidad de salto finito (tipo II).

11 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ **calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

a) Como $0 < 3$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$.

b) $x = 3$ es el punto de ruptura. Usaremos límites laterales.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} 2x = 6 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} = \dfrac{0}{0} \to \text{Indeterminación.} \end{cases}$$

Para calcular el límite por la derecha necesitamos simplificar la fracción:

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x}$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x+3}{x} = 2$$

Luego los límites laterales son distintos y $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe.

c) Como $5 > 3$, $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} = \dfrac{8}{5}$.

12 **En la función** $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si } x < -1 \\ 3x-1 & \text{si } -1 \le x < 4 \\ 4\sqrt{x}+3 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$ **halla:**

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 9} f(x)$

a) $x = -1$ es un punto de ruptura. Usaremos límites larerales para calcular el límite.

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2-2) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} (3x-1) = -4 \end{cases}$$ Por tanto, no existe el límite.

b) $x = 4$ es un punto de ruptura. Usaremos límites laterales para calcular el límite.

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 4^-} (3x - 1) = 11 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} (4\sqrt{x} + 3) = 11 \end{cases} \quad \text{Por tanto,} \quad \lim_{x \to 4} f(x) = 11$$

c) Como $9 > 4$, $\lim\limits_{x \to 9} f(x) = \lim\limits_{x \to 9} (4\sqrt{x} + 3) = 15$

13 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{x^2 - 2x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 + 3x}{x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ **d)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ **g)** $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$ **h)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{x(x - 2)} = -2$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 + 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(2x + 3)}{x} = 3$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = 2$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x(x + 1)} = \dfrac{3}{-1} = -3$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} = -\dfrac{1}{4}$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 2)} = 3$

g) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x + 3)}{(x + 3)(x + 1)} = -\dfrac{1}{2}$

h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = 2$

14 **Resuelve los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x^2}$

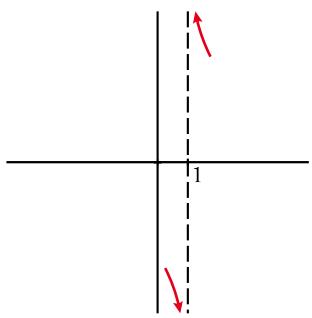
c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2}{x^2 + 2x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^4 - 10x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x - 1} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$

- Si $x \to 1^- \to \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$

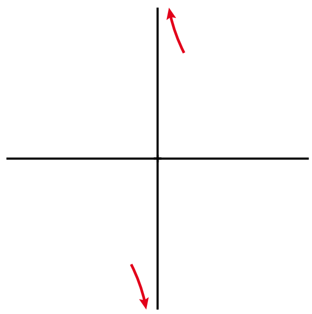
- Si $x \to 1^+ \to \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+x}{x^2} = \dfrac{0}{0} \;\to$ Indeterminación.

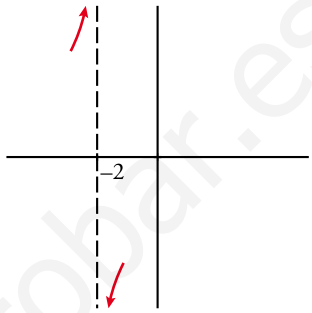
$\dfrac{x^2+x}{x^2} = \dfrac{x(x+1)}{x^2} = \dfrac{x+1}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{1}{0} = \infty$

- Si $x \to 0^- \;\to\; \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)\; f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 0^+ \;\to\; \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)\; f(x) \to +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2}{x^2+2x} = \dfrac{4}{0} = \pm\,\infty$

- Si $x \to -2^- \;\to\; \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)\; f(x) \to +\infty$
- Si $x \to -2^+ \;\to\; \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)\; f(x) \to -\infty$



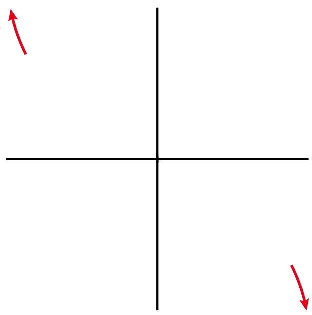
d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^4-10x^2} = \dfrac{0}{0} \;\to$ Indeterminación.

$\dfrac{x^3}{x^4-10x^2} = \dfrac{x^3}{x^2(x^2-10)} = \dfrac{x}{x^2-10}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^4-10x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2-10} = 0$

$f(0)$ no está definido.

Si $x < 0$, $f(x) > 0$ y si $x > 0$, $f(x) < 0$



15 **Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:**

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-2x}{x^3+x^2}$

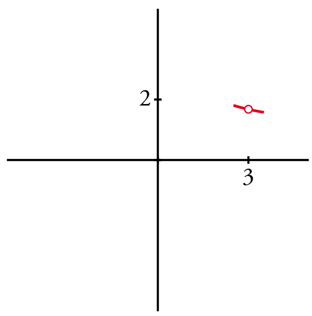
d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+x^2}{x^2+2x+1}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2-8}{x^2-4x+4}$

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x} = \dfrac{0}{0} \;\to$ Indeterminación.

$\dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x} = \dfrac{(x+2)(x-3)}{x(x-3)} = \dfrac{x+2}{x}$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+2}{x} = \dfrac{5}{3}$

Dando a x valores próximos a 3 podemos averiguar cómo se acerca por ambos lados.

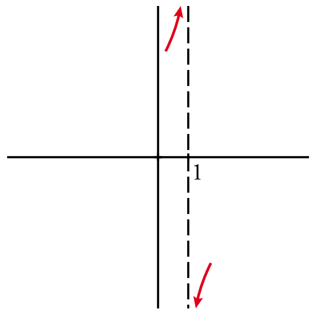


b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

Simplificamos: $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x-2}{x-1}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2}{x-1} = \infty$

- Si $x \to 1^- \to \left(f(x) = \dfrac{-}{-} = +\right)\ f(x) \to +\infty$
- Si $x \to 1^+ \to \left(f(x) = \dfrac{-}{+} = -\right)\ f(x) \to -\infty$

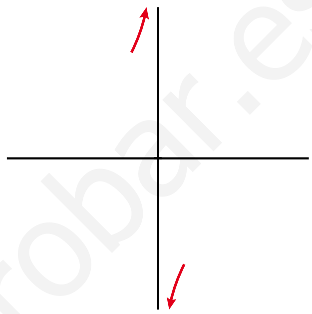


c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$\dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \dfrac{x(x-2)}{x^2(x+1)} = \dfrac{x-2}{x(x+1)}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-2}{x(x+1)} = \dfrac{-2}{0} = \pm\infty$

- Si $x \to 0^- \to \left(f(x) = \dfrac{-}{-} = +\right)\ f(x) \to +\infty$
- Si $x \to 0^+ \to \left(f(x) = \dfrac{-}{+} = -\right)\ f(x) \to -\infty$

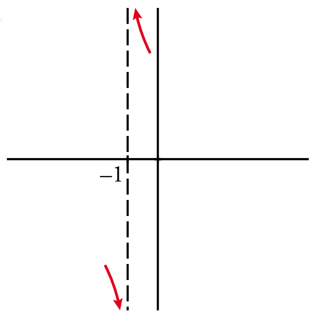


d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$\dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{x^2(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$

- Si $x \to -1^- \to \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)\ f(x) \to -\infty$
- Si $x \to -1^+ \to \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)\ f(x) \to +\infty$

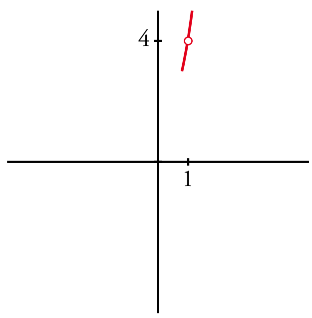


e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$\dfrac{x^4 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x-1)} = \dfrac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1} = (x^2 + 1)(x + 1)$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} [(x^2 + 1)(x + 1)] = 4$

Dando a x valores próximos a 1 podemos averiguar cómo se acerca por ambos lados.

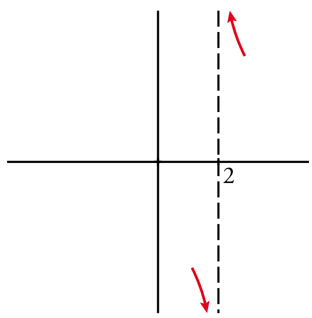


f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$\dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \dfrac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \dfrac{2(x+2)}{x-2}$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2(x+2)}{x-2} = \dfrac{8}{0} = \pm\infty$

- Si $x \to 2^- \to \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)\ f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 2^+ \to \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)\ f(x) \to +\infty$



16 **Calcula.**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{7-5x}{x^2+1}\right)^{2-5x}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \log_2 \left(\dfrac{3x+4}{x^2+1}\right)^5$ c) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{e^{sen\, x}}{1+\cos x}$ d) $\lim\limits_{x \to 10} \log\,(2\sqrt{3x-5})^3$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{7-5x}{x^2+1}\right)^{2-5x} = \left(\dfrac{7-5\cdot 1}{1^2+1}\right)^{-3} = 1$

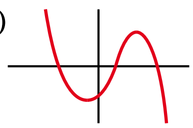
b) $\lim\limits_{x \to 2} \log_2 \left(\dfrac{3x+4}{x^2+1}\right)^5 = \log_2 \left(\dfrac{3\cdot 2+4}{2^2+1}\right)^5 = 5$

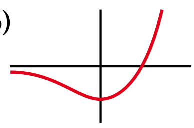
c) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{e^{sen\, x}}{1+\cos x} = \dfrac{e^{sen\, \pi/2}}{1+\cos \pi/2} = e$

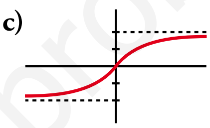
d) $\lim\limits_{x \to 10} \log\,(2\sqrt{3x-5})^3 = \log\,(2\sqrt{3\cdot 10-5})^3 = 3$

Límite cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$

17 **Determina cuál es el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ en las siguientes gráficas:**

a) 

b) 

c) 

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

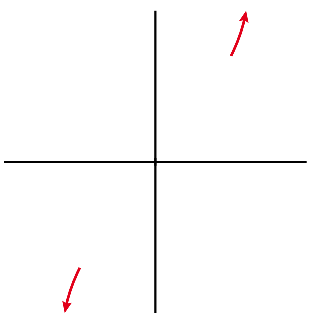
18 **Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de cada una de las siguientes funciones. Representa los resultados que obtengas.**

a) $f(x) = x^3 - 10x$ b) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ c) $f(x) = 7-3x$ d) $f(x) = -x^2+8x+9$

e) $f(x) = 1-(x-2)^2$ f) $f(x) = 7x^2-x^3$ g) $f(x) = (5-x)^2$ h) $f(x) = (x+1)^3-2x^2$

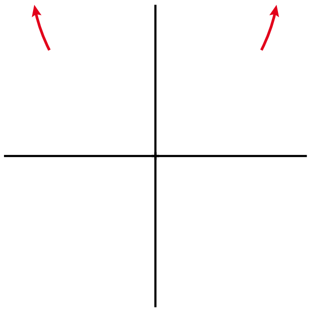
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 10x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 10x) = +\infty$



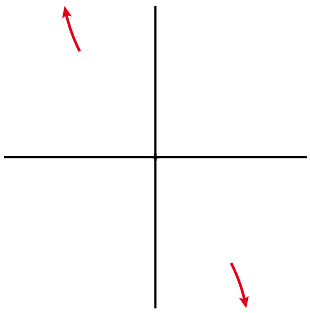
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$



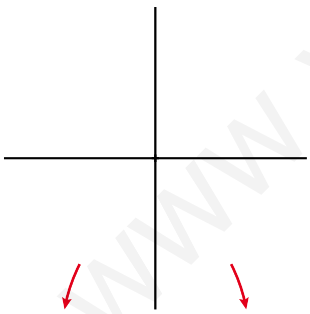
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 - 3x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (7 - 3x) = +\infty$



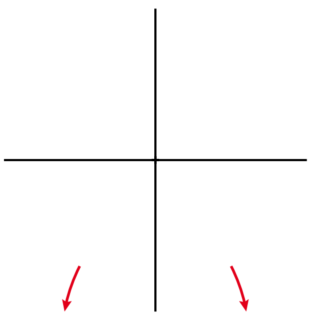
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + 8x + 9) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 + 8x + 9) = -\infty$



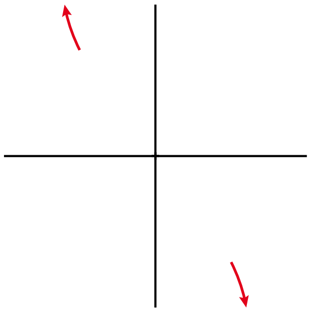
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [1 - (x - 2)^2] = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [1 - (x - 2)^2] = -\infty$



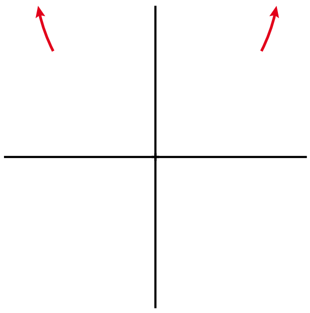
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7x^2 - x^3) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (7x^2 - x^3) = +\infty$



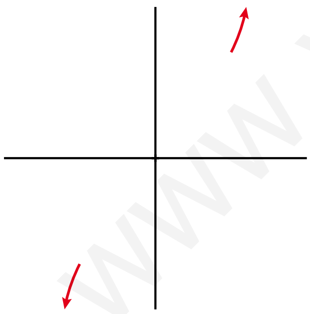
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5 - x)^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (5 - x)^2 = +\infty$



h) $\lim\limits_{x \to +\infty} [(x + 1)^3 - 2x^2] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [(x + 1)^3 - 2x^2] = -\infty$



19 **Calcula estos límites y representa las ramas que obtengas:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2-1}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3}$

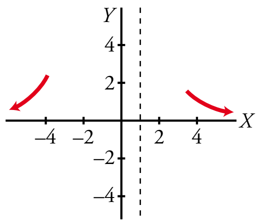
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+2}$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+3}$ h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x}$

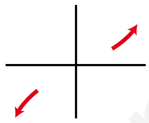
20 **Calcula el límite de todas las funciones del ejercicio anterior cuando $x \to -\infty$.**

Resolución de los ejercicios 19 y 20:

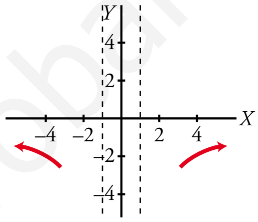
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0$



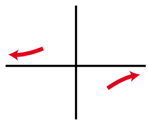
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x} = -\infty$



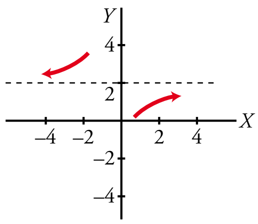
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2-1} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{x^2-1} = 0$



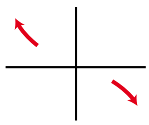
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3} = 0$



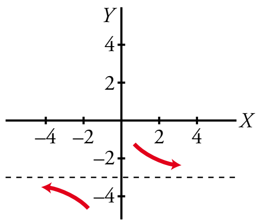
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2$



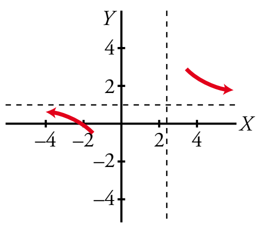
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x} = +\infty$



g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+3} = -3 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2-3x}{x+3} = -3$



h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x} = 1 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x} = 1$



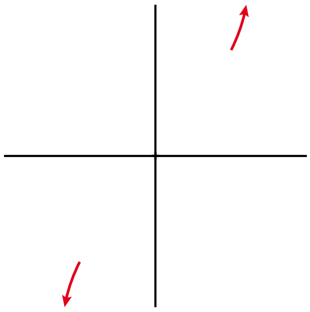
21 **Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ y representa los resultados.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{3x^2}{(x-1)^2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2-10}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1-12x^2}{3x^2}$

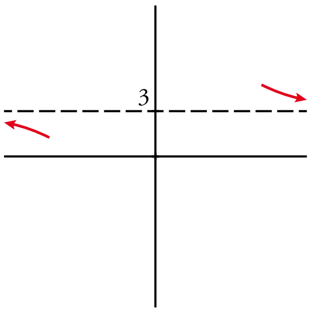
e) $f(x) = \dfrac{5-2x}{x^2+1}$ **f)** $f(x) = \dfrac{1-x}{(2x+1)^2}$ **g)** $f(x) = \dfrac{x^3-x^2}{7-x^2}$ **h)** $f(x) = \dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9}$

Para calcular estos límites debemos tener en cuenta la regla de los grados del numerador y del denominador.

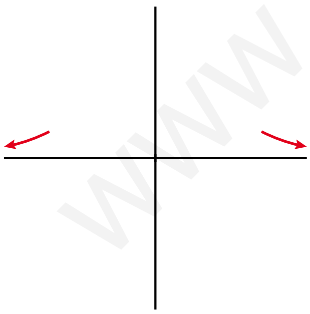
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty$



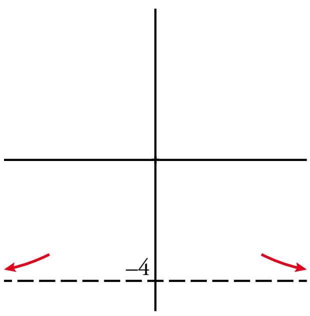
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{(x-1)^2} = 3$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2}{(x-1)^2} = 3$



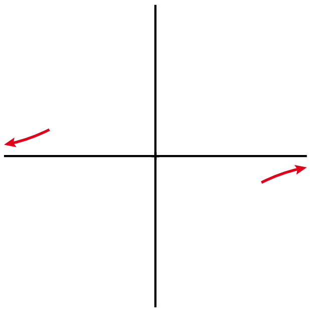
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2-10} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2-10} = 0$



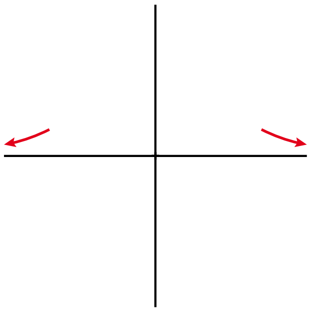
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-12x^2}{3x^2} = -4$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-12x^2}{3x^2} = -4$



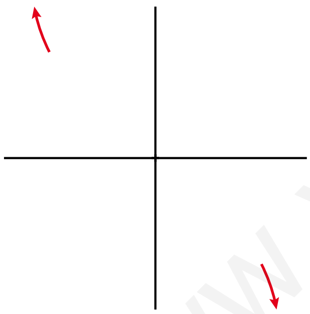
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5-2x}{x^2+1} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5-2x}{x^2+1} = 0$



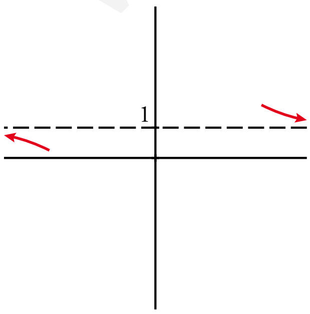
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x}{(2x+1)^2} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-x}{(2x+1)^2} = 0$



g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-x^2}{7-x^2} = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3-x^2}{7-x^2} = +\infty$



h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9} = 1$



22 **Di cuál es el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$:**

a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (5 - x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2 = 2$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3 - x) = +\infty$

23 **Di cuál es el límite de estas funciones cuando $x \to +\infty$:**

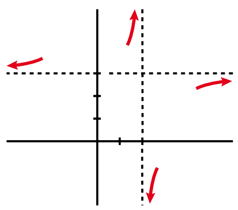
a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{-3}{x^2 + 2x - 4}$ c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ d) $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3}{x^2 + 2x - 4} = 0$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 3$

Página 297

Asíntotas

24



Esta gráfica muestra la posición de la curva $y = f(x)$ respecto de sus asíntotas.

Di cuáles son estas y describe su posición.

- Asíntota vertical: $x = 2$

  Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$

- Asíntota horizontal: $y = 3$

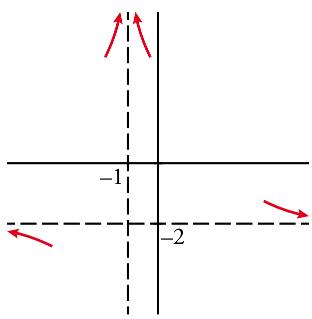
  Si $x \to -\infty$, $f(x) - 3 > 0$

  Si $x \to +\infty$, $f(x) - 3 < 0$

25 **De una función $y = f(x)$ conocemos sus asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas.**

$x = -1 \begin{cases} \text{si } x \to -1^-, & f(x) \to +\infty \\ \text{si } x \to -1^+, & f(x) \to +\infty \end{cases}$ $y = -2 \begin{cases} \text{si } x \to +\infty, & f(x) > -2 \\ \text{si } x \to -\infty, & f(x) < -2 \end{cases}$

Representa esta información.



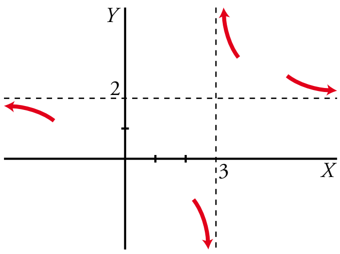
26 **Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:**

a) $y = \dfrac{2x}{x-3}$ **b)** $y = \dfrac{x-1}{x+3}$ **c)** $y = \dfrac{2x+3}{4-x}$

d) $y = \dfrac{2}{1-x}$ **e)** $y = \dfrac{1}{2-x}$ **f)** $y = \dfrac{4x+1}{2x-3}$

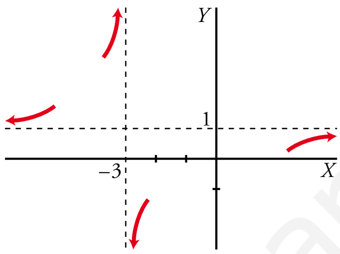
a) Asíntotas:

$x = 3;\ \ y = 2$



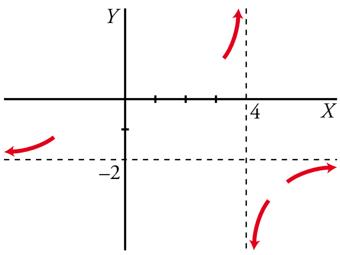
b) Asíntotas:

$x = -3;\ \ y = 1$



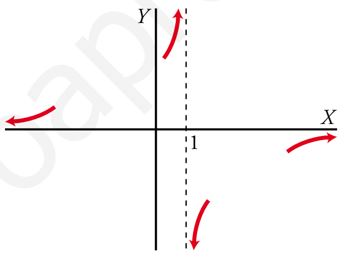
c) Asíntotas:

$x = 4;\ \ y = -2$



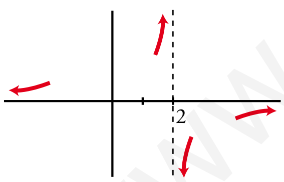
d) Asíntotas:

$x = 1;\ \ y = 0$



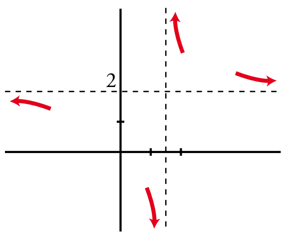
e) Asíntotas:

$x = 2;\ \ y = 0$



f) Asíntotas:

$x = \dfrac{3}{2};\ \ y = 2$

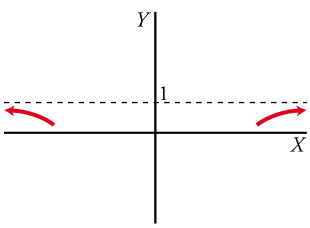


27 **Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:**

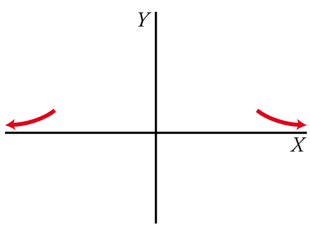
a) $y = \dfrac{x^2}{x^2+4}$ **b)** $y = \dfrac{3}{x^2+1}$ **c)** $y = \dfrac{2x^2-1}{x^2}$

d) $y = \dfrac{x^4}{x-1}$ **e)** $y = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$ **f)** $y = \dfrac{3x}{x^2-1}$

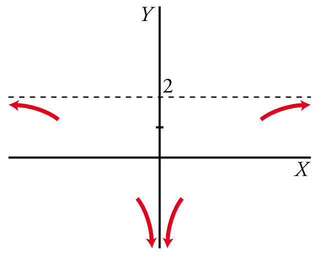
a) Asíntota: $y = 1$



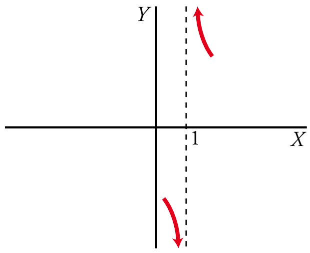
b) Asíntota: $y = 0$



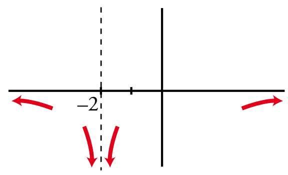
c) Asíntotas: $x = 0$; $y = 2$



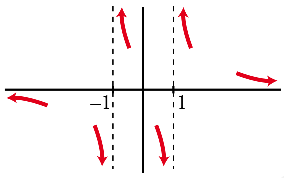
d) Asíntota: $x = 1$



e) Asíntotas: $x = -2$; $y = 0$



f) Asíntotas: $x = 1$, $x = -1$; $y = 0$



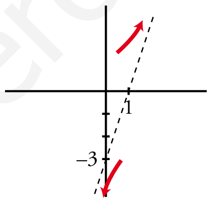
28 **Cada una de las siguientes funciones tiene una asíntota oblicua. Hállala y estudia la posición de la curva respecto a ella:**

a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{3+x-x^2}{x}$ **c)** $f(x) = \dfrac{4x^2-3}{2x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-3}$ **e)** $f(x) = \dfrac{2x^3-3}{x^2-2}$ **f)** $f(x) = \dfrac{-2x^2+3}{2x-2}$

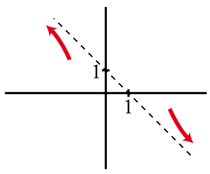
a) $\dfrac{3x^2}{x+1} = 3x - 3 + \dfrac{3}{x+1}$

Asíntota oblicua: $y = 3x - 3$



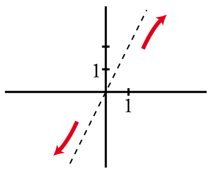
b) $\dfrac{3+x-x^2}{x} = -x + 1 + \dfrac{3}{x}$

Asíntota oblicua: $y = -x + 1$



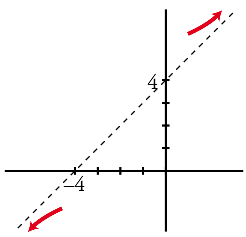
c) $\dfrac{4x^2-3}{2x} = 2x - \dfrac{3}{2x}$

Asíntota oblicua: $y = 2x$



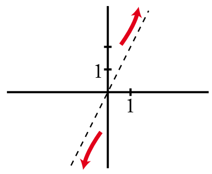
d) $\dfrac{x^2+x-2}{x-3} = x + 4 + \dfrac{10}{x-3}$

Asíntota oblicua: $y = x + 4$



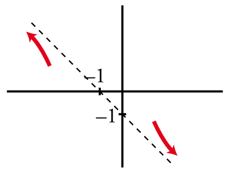
e) $\dfrac{2x^3 - 3}{x^2 - 2} = 2x + \dfrac{4x - 3}{x^2 - 2}$

Asíntota oblicua: $y = 2x$



f) $\dfrac{-2x^2 + 3}{2x - 2} = -x - 1 + \dfrac{1}{2x - 2}$

Asíntota oblicua: $y = -x - 1$



29 **Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:**

a) $y = \dfrac{(3 - x)^2}{2x + 2}$

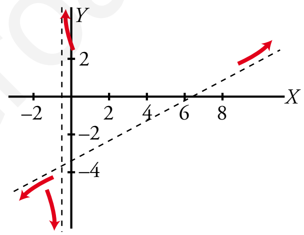
b) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + x + 1}$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

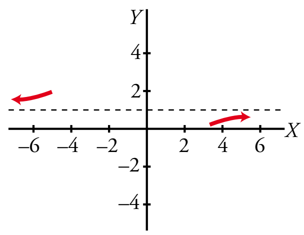
d) $y = \dfrac{3x^2}{x + 2}$

a) $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{13}{4} + \dfrac{49/4}{2x + 1}$

Asíntotas: $x = -\dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{13}{4}$

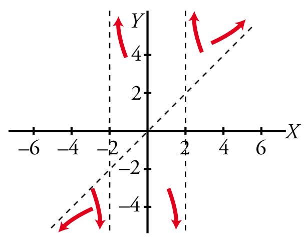


b) Asíntotas: $y = 1$

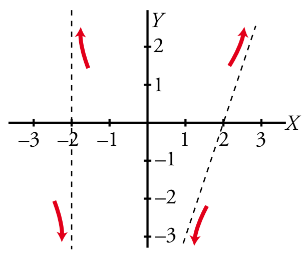


c) $y = x + \dfrac{4x}{(x + 2)(x - 2)}$

Asíntotas: $y = x$; $x = -2$, $x = 2$



d) Asíntotas: $x = -2$; $y = 3x - 6$



Para resolver

30 Calcula, en cada caso, el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \ne 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3 + k \end{array}\right\} \; 5 = 3 + k \;\to\; k = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{array}\right\} \; 5 = 4 + 2k \;\to\; k = 1/2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x+1)}{x} = 1 \;\to\; k = 1$

31 Calcula k para que las siguientes funciones sean continuas en el punto donde cambia su definición. Estudia después su continuidad:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} & \text{si } x \ne 5 \\ k & \text{si } x = 5 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} & \text{si } x \ne 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) Comenzamos estudiando el punto $x = 5$.

$f(5) = k$

$\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5} = \dfrac{0}{0} \;\to$ Indeterminación.

$\dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \dfrac{(x+5)(x-5)}{x(x-5)} = \dfrac{x+5}{x}$

$\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x+5}{x} = 2$

Si $k = 2$, la función es continua en $x = 5$.

Observamos que el denominador también se anula en $x = 0$, luego $f(0)$ no existe. Además:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \dfrac{-25}{0} = \pm\infty$

Por tanto, en $x = 0$ tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I). En el resto de los puntos es continua.

b) Comenzamos estudiando el punto $x = 1$.

$f(1) = k$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \dfrac{0}{0} \;\to$ Indeterminación.

$\dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \dfrac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{x}{x+2}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{1}{3}$

Si $k = \dfrac{1}{3}$, la función es continua en $x = 1$.

Vemos que el denominador también se anula en $x = -2$, luego $f(-2)$ no existe. Además,

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \dfrac{6}{0} = \pm\infty$

Por tanto, en $x = -2$ tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I). En el resto de los puntos es continua.

32 Estudia la continuidad de las siguientes funciones. Represéntalas:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{2-\sqrt{x}} & \text{si } x < 4 \\ log_2(x-2) & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

a) La primera rama es un trozo de hipérbola desplazada una unidad a la derecha. En el punto $x = 1$ presenta una discontinuidad de salto infinito:

Como 1 < 3, $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$

Si $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$

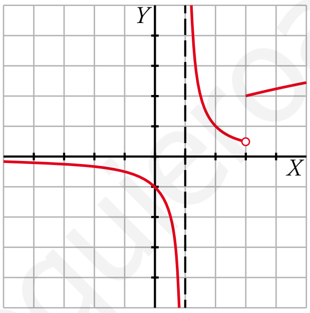
Veamos qué ocurre en el "punto de ruptura" $x = 3$.

$f(3) = \sqrt{3+1} = 2$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x+1} = 2 \end{cases}$$

El límite no existe en el punto $x = 3$ y tiene una discontinuidad de salto finito (tipo II).

La segunda rama está correctamente definida y es continua.



b) El dominio de definición de la primera rama es el intervalo [0, 4) ya que el exponente de la exponencial contiene una raíz que existe solo cuando $x \ge 0$. Es continua en su dominio de definición.

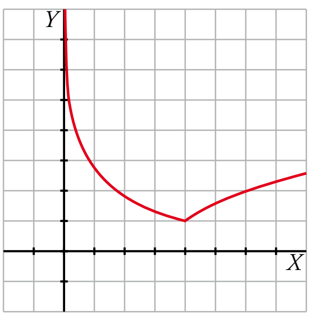
Veamos qué ocurre en el "punto de ruptura" $x = 4$.

$f(4) = log_2(4-2) = 1$

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 4^-} e^{2-\sqrt{x}} = e^{2-\sqrt{4}} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} log_2(x-2) = log_2(4-2) = 1 \end{cases}$$

Por tanto, el límite existe y la función es continua en este punto.

La segunda rama es una función logarítmica desplazada dos unidades hacia la derecha y es continua.



33 **Determina a y b para que esta función sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x + b & \text{si } x < -2 \\ 4 & \text{si } -2 \le x \le 3 \\ ax - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en los puntos de ruptura.

• $x = -2$

$f(-2) = 4$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to -2^-} 3x + b = -6 + b \\ \lim_{x \to -2^+} 4 = 4 \end{cases}$$

Por tanto, $-6 + b = 4 \to b = 10$ para que exista el límite y la función sea continua en $x = -2$.

• $x = 3$

$f(3) = 4$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 3^-} 4 = 4 \\ \lim_{x \to 3^+} ax - 2 = 3a - 2 \end{cases}$$

Por tanto $3a - 2 = 4 \to a = 2$ para que exista el límite y la función sea continua en $x = 3$.

Si $a = 2$ y $b = 10$ la función es continua en los puntos de ruptura. En los demás puntos también es continua por estar formada por trozos de rectas.

34 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{x}$ b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}$ c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{100x}{\sqrt[3]{x^2}}$

d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{\sqrt{4-x^3}}$ e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6-7x}}{4x-2}$ f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2}$

Calcularemos estos límites usando el criterio de los grados del numerador y del denominador.

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{x} = 0$ b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}} = 3$ c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{100x}{\sqrt[3]{x^2}} = -\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{\sqrt{4-x^3}} = 0$ e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6-7x}}{4x-2} = +\infty$ f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2} = \sqrt{2}$

35 **Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas:**

a) $y = 2^{x+3}$ **b)** $y = 1{,}5^x - 1$ **c)** $y = 2 + e^x$ **d)** $y = e^{-x} + 1$

e) $y = log\,(x - 3)$ **f)** $y = 1 - ln\,x$ **g)** $y = ln\,(2x + 4)$ **h)** $y = ln\,(x^2 + 1)$

a) $\lim_{x \to +\infty} 2^{x+3} = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido).

$\lim_{x \to -\infty} 2^{x+3} = 0$ (asíntota horizontal).

b) $\lim_{x \to +\infty} (1{,}5^x - 1) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido).

$\lim_{x \to -\infty} (1{,}5^x - 1) = -1$ (asíntota horizontal).

c) $\lim_{x \to +\infty} (2 + e^x) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido).

$\lim_{x \to -\infty} (2 + e^x) = 2$ (asíntota horizontal).

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x} + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1$ (asíntota horizontal).

$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido).

e) Su dominio es $(3, +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log (x - 3) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más lento).

$\lim\limits_{x \to 3^+} \log (x - 3) = -\infty$ (asíntota vertical).

f) Su dominio es $(0, +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$ (rama parabólica hacia abajo de crecimiento cada vez más lento).

$\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - \ln x) = +\infty$ (asíntota vertical).

g) Su dominio es $(-2, +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln (2x + 4) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más lento).

$\lim\limits_{x \to -2^+} \ln (2x + 4) = -\infty$ (asíntota vertical).

h) Su dominio es $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln (x^2 + 1) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más lento).

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ln (x^2 + 1) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más lento).

Página 298

36 **Halla el límite de las siguientes funciones en los puntos que anulan su denominador:**

a) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x}$

b) $g(x) = \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$

c) $h(x) = \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2}$

¿Cuáles son las asíntotas de f, **de** g **y de** h**?**

a) Hallamos las raíces del denominador.

$x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \dfrac{-9}{0} = \pm\infty$

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \rightarrow \dfrac{2 \cdot (-0{,}01)^3 - 13 \cdot (-0{,}01)^2 + 24 \cdot (-0{,}01) - 9}{(-0{,}01)^3 - 6 \cdot (-0{,}01)^2 + 9 \cdot (-0{,}01)} = 102 \rightarrow$

$\rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} = +\infty$

DERECHA: $x = 0{,}01 \rightarrow \dfrac{2 \cdot 0{,}01^3 - 13 \cdot 0{,}01^2 + 24 \cdot 0{,}01 - 9}{0{,}01^3 - 6 \cdot 0{,}01^2 + 9 \cdot 0{,}01} = -98 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminación.

$\dfrac{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \dfrac{(2x - 1)(x - 3)^2}{x(x - 3)^2} = \dfrac{2x - 1}{x}$; $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x - 1}{x} = \dfrac{5}{3}$

b) Hallamos las raíces del denominador.

$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0 \to x_1 = -2, \; x_2 = 2$

- $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\frac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \frac{(4x+3)(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)^2} = \frac{4x+3}{x-2}; \quad \lim_{x \to -2} \frac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \lim_{x \to -2} \frac{4x+3}{x-2} = \frac{5}{4}$$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\lim_{x \to 2} \frac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \lim_{x \to 2} \frac{4x+3}{x-2} = \frac{11}{0} = \pm\infty$$

IZQUIERDA: $x = 1{,}99 \to \dfrac{4 \cdot 1{,}99 + 3}{1{,}99 - 2} = -1\,096 \to \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = -\infty$

DERECHA: $x = 2{,}01 \to \dfrac{4 \cdot 2{,}01 + 3}{2{,}01 - 2} = 1\,104 \to \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = +\infty$

c) Hallamos las raíces del denominador.

$x^4 + 2x^3 - 8x^2 = 0 \to x_1 = -4, \; x_2 = 0, \; x_3 = 2$

- $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\frac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \frac{(x-2)(x+4)^2}{x^2(x+4)(x-2)} = \frac{x+4}{x^2}; \quad \lim_{x \to -4} \frac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \lim_{x \to -4} \frac{x+4}{x^2} = 0$$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \dfrac{-32}{0} = \pm\infty$

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \to \dfrac{-0{,}01 + 4}{(-0{,}01)^2} = 39\,900 \to \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = +\infty$

DERECHA: $x = 0{,}001 \to \dfrac{0{,}01 + 4}{0{,}01^2} = 40\,100 \to \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \lim_{x \to 2} \frac{x+4}{x^2} = \frac{3}{2}$$

Las asíntotas verticales son:

- De $f(x)$, la recta $x = 0$.
- De $g(x)$, la recta $x = 2$.
- De $h(x)$, la recta $x = 0$.

37 **Halla las asíntotas de las siguientes funciones y estudia la posición de la curva respecto a ellas:**

a) $f(x) = \dfrac{x^4 + 6x^2 - 7}{x(x^2 + 6)}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x-2)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - 8x - 1}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 8x - 12}{x - 3}$

a) • Asíntotas verticales:

El denominador se anula cuando $x = 0$. Calculamos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 + 6x^2 - 7}{x(x^2 + 6)} = \frac{-7}{0} = \pm\infty$$

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical. Estudiamos la posición:

Si $x \to 0^-$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 0^+$, $f(x) \to -\infty$

• Ramas en el infinito:

Como la diferencia entre los grados del numerador y del denominador es 1, tiene una asíntota oblicua.

$$\frac{x^4 + 6x^2 - 7}{x(x^2 + 6)} = \frac{x^4 + 6x^2 - 7}{x^3 + 6x} = x - \frac{7}{x^3 + 6x}$$

La recta $y = x$ es la asíntota oblicua. Estudiamos la posición:

$$f(x) - x = \frac{-7}{x^3 + 6x} \begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \\ + \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$

b) • Asíntotas verticales:

El denominador se anula cuando $x = 2$. Calculamos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x-2)^2} = \frac{0}{0} \to \text{Indeterminación.}$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x-2)^2} = \frac{(x-2)(x^2+3)}{2(x-2)^2} = \frac{x^2+3}{2(x-2)}; \quad \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2+3}{2(x-2)} = \frac{7}{0} = \pm\infty$$

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical. Estudiamos la posición:

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

• Ramas en el infinito:

Como la diferencia entre los grados del numerador y del denominador es 1, tiene una asíntota oblicua.

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x-2)^2} = \frac{x^2+3}{2(x-2)} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{7}{2x-4}$$

La recta $y = \frac{x}{2} + 1$ es la asíntota oblicua. Estudiamos la posición:

$$f(x) - \left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{7}{2x-4} \begin{cases} + \text{ si } x \to +\infty \\ - \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$

c) • Asíntotas verticales.

El denominador se anula cuando $x = -2$, $x = 2$. Calculamos:

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^3 + x^2 - 8x - 1}{x^2 - 4} = \frac{3}{0} = \pm\infty$$

La recta $x = -2$ es una asíntota vertical. Estudiamos la posición:

Si $x \to -2^-$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to -2^+$, $f(x) \to -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^3 + x^2 - 8x - 1}{x^2 - 4} = \frac{3}{0} = \pm\infty$

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical. Estudiamos la posición:

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

- Ramas en el infinito:

Como la diferencia entre los grados del numerador y del denominador es 1, tiene una asíntota oblicua.

$\frac{2x^3 + x^2 - 8x - 1}{x^2 - 4} = 2x + 1 + \frac{3}{x^2 - 4}$

La recta $y = 2x + 1$ es la asíntota oblicua. Estudiamos la posición:

$f(x) - (2x + 1) = \frac{3}{x^2 - 4} \begin{cases} + \text{ si } x \to +\infty \\ + \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$

d) • Asíntotas verticales:

El denominador se anula cuando $x = 3$. Calculamos:

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 12}{x - 3} = \frac{3}{0} = \pm\infty$

La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. Estudiamos la posición:

Si $x \to 3^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 3^+$, $f(x) \to +\infty$

- Ramas en el infinito:

Como la diferencia entre los grados del numerador y del denominador es 2, tiene ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido y ambas son hacia arriba porque:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 12}{x - 3} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 12}{x - 3} = +\infty$

38 Calcula el límite de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x}$ cuando $x \to 0$, $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$. Di cuáles son sus asíntotas y sitúa la curva respecto a ellas.

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{0} = \pm\infty$

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical. Estudiamos su posición:

Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} = 1$, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal por la derecha.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} = -1$ (numerador y denominador tienen distinto signo).

La recta $y = -1$ es una asíntota horizontal por la izquierda.

Si $x \to +\infty$, $f(x) - 1 = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x}{x} > 0$, la función está encima de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x) - (-1) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} + x}{x} < 0$, la función está debajo de la asíntota.

39 **En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función $M(t) = \frac{30t}{t+4}$ (t en días).**

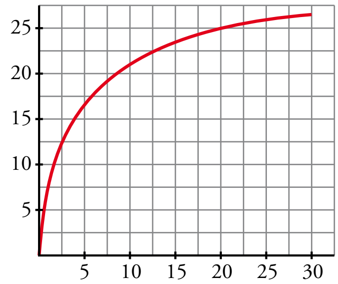
a) ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Y el décimo?

b) Representa la función sabiendo que el periodo de entrenamiento es de un mes.

c) ¿Qué ocurriría con el número de montajes si el entrenamiento fuera mucho más largo?

a) $M(1) = 6$ montajes el primer día.

$M(10) = 21{,}43 \to 21$ montajes el décimo día.

b) 

c) Se aproxima a 30, pues $\lim_{t \to +\infty} \frac{30t}{t+4} = 30$.

40 **El número de peces de una piscifactoría evoluciona según la función $f(t) = 50 + \frac{100t^2}{t^2+1}$ (t en días).**

a) Comprueba que la población aumenta la primera semana.

b) Averigua si el crecimiento será indefinido o tiende a estabilizarse.

a) Calculamos una tabla con los valores de la primera semana.

t	0	1	2	3	4	5	6
f(t)	50	100	130	140	144	146	147

Podemos comprobar que el número crece pero de una forma cada vez más lenta.

b) Para estudiar el comportamiento de la función a largo plazo podemos calcular $\lim_{x \to +\infty} \left(50 + \frac{100t^2}{t^2+1}\right) = 150$.

Este resultado indica claramente que el crecimiento tiende a estabilizarse.

41 **Determina el valor de a y de b de modo que las rectas $x = 3$ e $y = \frac{3}{2}$ sean asíntotas de la función $f(x) = \frac{ax+3}{bx-4}$.**

¿Puede tener asíntota oblicua?

Para que $x = 3$ sea una asíntota, el denominador se debe anular en ese punto. Luego:

$b \cdot 3 - 4 = 0 \to b = \frac{4}{3}$

$$f(x) = \frac{ax+3}{\frac{4}{3}x - 4} = \frac{3ax+9}{4x-12}$$

Para que $y = \frac{3}{2}$ sea una asíntota horizontal tiene que ocurrir que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{3}{2}$.

Por otro lado, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3ax+9}{4x-12} = \frac{3a}{4}$

Por tanto, $\frac{3a}{4} = \frac{3}{2} \to a = 2$

No puede tener asíntota oblicua.

42 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \le 2 \\ ln\,(x-1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$**, calcula el valor de** a **y de** b **para que** f **sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.**

Para que su gráfica pase por el origen de coordenadas, $f(0) = 0$.

Por tanto, $2 \cdot 0^2 + a \cdot 0 + b = 0$, de donde vemos que $b = 0$.

Exigimos la continuidad en el punto de ruptura:

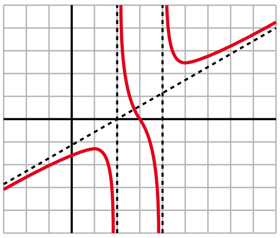
$f(2) = 2 \cdot 2^2 + a \cdot 2 = 2a + 8$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (2x^2 + ax) = 2a + 8 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} ln\,(x-1) = 0 \end{cases} \qquad \text{Luego } 2a + 8 = 0 \;\to\; a = -4$$

La función es continua en el resto de $\mathbb{R}$ porque está formada por dos trozos: uno de parábola y otro de función logarítmica bien definido.

43 **Observa la gráfica de las siguientes funciones y describe sus ramas infinitas, sus asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas:**

a)



b)

a) Asíntotas verticales: rectas $x = 2$ y $x = 4$.

Posición:

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 4^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 4^+$, $f(x) \to +\infty$

Asíntota oblicua: recta $y = \dfrac{x}{2} - 1$

Posición:

Si $x \to +\infty$, $f(x) > \dfrac{x}{2} - 1$

Si $x \to -\infty$, $f(x) < \dfrac{x}{2} - 1$

b) Asíntotas verticales: recta $x = 1$

Si $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$

Asíntota horizontal: recta $x = -2$ en $+\infty$

Si $x \to +\infty$, $f(x) > 2$

Rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido en $-\infty$.

44 Representa, en cada caso, una función que cumpla las condiciones dadas.

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$, $f(x) < 3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $f(x) < 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$, $f(x) > -1$

c) Asíntota vertical: $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

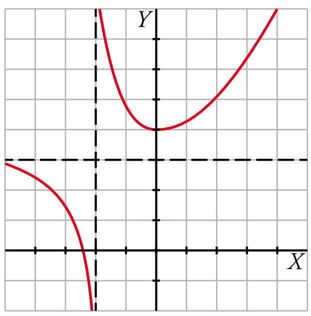
Asíntota oblicua: $y = x + 2$

diferencia $[f(x) - y] < 0$ **si** $x \to \pm\infty$

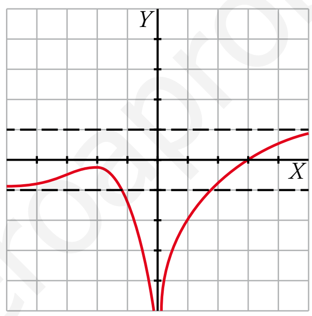
d) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, $f(x) > 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $f(x) < 2$

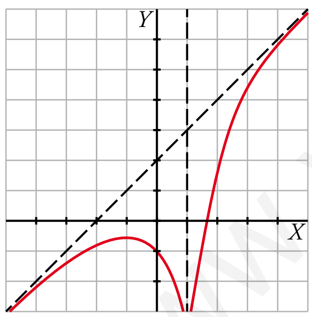
a)



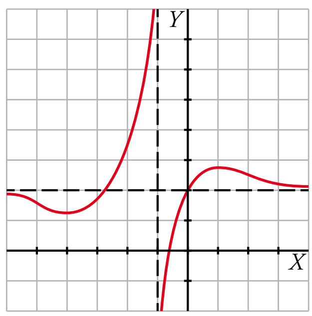
b)



c)



d)



45 Considera las funciones $y = sen\, x$ e $y = cos\, x$ definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$. Halla las asíntotas de las funciones $f(x) = \dfrac{1}{sen\, x}$; $g(x) = \dfrac{1}{cos\, x}$; $h(x) = \dfrac{1}{1 - 2\, cos\, x}$ y sitúa la curva respecto a ellas.

Solo tiene sentido el estudio de las asíntotas verticales.

• $f(x) = \dfrac{1}{sen\, x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$sen\, x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi$ son asíntotas verticales.

Posición:

Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to \pi^-$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to \pi^+$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2\pi^-$, $f(x) \to -\infty$

- $g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

  $\cos x = 0 \;\to\; x = \dfrac{\pi}{2},\; x = \dfrac{3\pi}{2}$ son asíntotas verticales.

  Posición:

  Si $x \to \dfrac{\pi}{2}^-$, $g(x) \to +\infty$

  Si $x \to \dfrac{\pi}{2}^+$, $g(x) \to -\infty$

  Si $x \to \dfrac{3\pi}{2}^-$, $g(x) \to -\infty$

  Si $x \to \dfrac{3\pi}{2}^+$, $g(x) \to +\infty$

- $h(x) = \dfrac{1}{1 - 2\cos x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

  $1 - 2\cos x = 0 \;\to\; x = \dfrac{\pi}{3},\; x = \dfrac{5\pi}{3}$ son asíntotas verticales.

  Posición:

  Si $x \to \dfrac{\pi}{3}^-$, $h(x) \to -\infty$

  Si $x \to \dfrac{\pi}{3}^+$, $h(x) \to +\infty$

  Si $x \to \dfrac{5\pi}{3}^-$, $h(x) \to +\infty$

  Si $x \to \dfrac{5\pi}{3}^+$, $h(x) \to -\infty$

46 **Calcula el valor de a para que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 5x}{x+1} - ax$ sea un número real.**

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 - 5x}{x+1} - ax \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 5x - ax^2 - ax}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(3-a)x^2 - (5+a)x}{x+1}$$

Para que el límite sea un número real, el grado del numerador debe ser igual al del denominador. Por tanto:

$3 - a = 0 \;\to\; a = 3$, resultando ser el límite igual a -8.

47 **Halla los siguientes límites (utiliza la calculadora).**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^5}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(2x+3)}{x^2}$ **e)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (2^x - x^4)$ **f)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}75^x - x^2)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x} = 0$ porque para $x = 100 \;\to\; \dfrac{100^3}{e^{100}} = 3{,}7201 \cdot 10^{-38}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$ porque para $x = 10\,000 \;\to\; \dfrac{10\,000}{\ln 10\,000} = 1\,085{,}7$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^5} = +\infty$ porque para $x = 100 \;\to\; \dfrac{e^{100} - 1}{100^5} = 2{,}6881 \cdot 10^{33}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(2x+3)}{x^2} = 0$ porque para $x = 100 \;\to\; \dfrac{\ln(2 \cdot 100 + 3)}{100^2} = 0{,}00053$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - x4) = +\infty$ porque para $x = 100 \;\to\; 2^{100} - 100^4 = 1{,}2677 \cdot 10^{30}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}75x - x^2) = -\infty$ porque para $x = 100 \;\to\; 0{,}75^{100} - 100^2 = -10\,000$

48 **La función $f(x) = \dfrac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9}$ es discontinua en $x = 3$ y $x = -3$.**

Estudia el tipo de discontinuidad que presenta en esos puntos según los valores de m.

La función $f(x)$ en los puntos $x = 3$ y $x = -3$ no está definida.

- $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9}$

  Si $3^3 + m \cdot 3^2 + 9 = 0$, es decir, si $m = -4$, tendríamos una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$.

  Por tanto, si $m = -4$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x^2 - x - 3)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 3}{x + 3} = \dfrac{1}{2}$

  La discontinuidad en $x = 3$ es evitable del tipo III.

  Para $m = -4$ en en $x = -3$ tenemos una discontinuidad de salto infinito (tipo I) porque:

  $$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 9} = \frac{-54}{0} = \pm\infty$$

- $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9}$

  Si $(-3)^3 + m \cdot (-3)^2 + 9 = 0$, es decir, si $m = 2$, tendríamos una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$.

  Por tanto, si $m = 2$, $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+3)(x^2 - x + 3)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - x + 3}{x - 3} = \dfrac{-5}{2}$

  y tenemos una discontinuidad evitable de tipo III en $x = -3$.

  Para $m = 2$ en $x = 3$ es de salto infinito (tipo I) porque:

  $$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \frac{54}{0} = \pm\infty$$

Si $m \neq -4$ y $m \neq 2$, las discontinuidades en $x = 3$ y $x = -3$ son de salto infinito (tipo I) porque el numerador de la función no se anula.

Página 299

Cuestiones teóricas

49 **¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta y pon ejemplos.**

a) Si no existe $f(2)$, no se puede calcular $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

b) Si no existe $f(1)$, $f(x)$ no puede ser continua en $x = 1$.

c) Una función no puede tener más de dos asíntotas horizontales.

d) Una función puede tener cinco asíntotas verticales.

e) Si $g(a) = 0$ podemos afirmar que $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tiene asíntota vertical.

f) La función $y = 2^{-x}$ no tiene asíntotas.

a) Falso. En una discontinuidad evitable de tipo III no existe la función en un punto pero sí existe el límite.

b) Verdadero, ya que no se cumple una de las condiciones de la continuidad.

c) Verdadero. Si tuviera tres o más asíntotas horizontales, dos de ellas coincidirían por uno de los extremos del eje OX y esto es imposible porque la función no puede tender simultáneamente a dos resultados diferentes.

d) Verdadero. Incluso puede tener infinitas asíntotas verticales, como ocurre con la función $y = tg\, x$.

e) Falso. Si $f(a) = 0$, puede ocurrir que la función tenga una discontinuidad evitable en $x = a$.

f) Falso. Porque $\lim_{x \to +\infty} 2^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2^x} = 0$ y la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

50 **¿Cuáles son los puntos de discontinuidad de $y = E(x)$ e $y = Mant(x)$?**

Son los puntos de la forma $x = k$ con k número entero.

51 **Justifica por qué no existe $\lim_{x \to +\infty} sen\, x$.**

Como la función $y = sen\, x$ es periódica, los valores que toma y oscilan cuando $x \to +\infty$ y, además, lo hacen sin acercarse a ningún número concreto. Por tanto, el límite no puede existir.

52 **¿Cuál de estos límites no existe?:**

a) $\lim_{x \to 4^-} \sqrt{4 - x}$ **b)** $\lim_{x \to 4^+} \sqrt{4 - x}$

El límite b) porque cuando $x \to 4^+$, $x > 4$. Entonces $4 - x < 0$ y la raíz cuadrada no existe.

53 **Dada la función $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + h$, justifica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:**

a) Si $a > 0$ y n es par, entonces $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b) Si $a > 0$ y n es impar, entonces $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

c) Si $a < 0$ y n es par, entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

d) Si $a < 0$ y n es impar, entonces $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

a) Falso.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ax^n = +\infty$ porque $ax^n > 0$ al ser n par y $a > 0$.

b) Falso.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ax^n = -\infty$ porque $ax^n < 0$ al ser n impar y $a > 0$.

c) Verdadero.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ax^n = -\infty$ porque $ax^n < 0$ al ser n par y $a < 0$.

d) Verdadero.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ax^n = +\infty$ porque $ax^n > 0$ al ser n impar y $a < 0$.

Para profundizar

54 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim_{x \to \pm\infty} |2x + 1|$ **b)** $\lim_{x \to \pm\infty} (|x| + x - 3)$ **c)** $\lim_{x \to \pm\infty} (|x + 4| + |x|)$ **d)** $\lim_{x \to \pm\infty} (|x + 2| - |x|)$

a) $\lim_{x \to +\infty} |2x + 1| = \lim_{x \to +\infty} (2x + 1) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} |2x + 1| = \lim_{x \to -\infty} (-2x + 1) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (|x| + x - 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + x - 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 3) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (|x| + x - 3) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x + x - 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} -3 = -3$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (|x + 4| + |x|) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + 4 + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x + 4) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (|x + 4| + |x|) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x - 4 - x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x - 4) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (|x + 2| - |x|) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + 2 - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2 = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (|x + 2| - |x|) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x - 2 + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2 = -2$

55 Halla las asíntotas de las funciones siguientes:

a) $y = \dfrac{|x|}{2 - x}$ **b)** $y = \dfrac{|2x + 1|}{x - 1}$

a) • Verticales: $x = 2$

Posición:

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$

• Horizontales:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|x|}{2 - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2 - x} = -1$. La recta $y = -1$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x|}{2 - x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{2 - x} = 1$. La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

b) • Verticales: $x = 1$

Posición:

Si $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$

• Horizontales:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|2x + 1|}{x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 1}{x - 1} = 2$. La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|2x + 1|}{x - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x + 1}{x - 1} = -2$. La recta $y = -2$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

56 La función $y = 2^{1/x}$, ¿tiene límite cuando $x \to 0$?

$\lim\limits_{x \to 0} 2^{1/x} = 2^{\pm\infty}$

Estudiamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 0^+} 2^{1/x} = 2^{+\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} 2^{1/x} = 2^{-\infty} = 0$

Por tanto, no existe el límite dado.

57 Halla $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$. Para ello, multiplica numerador y denominador por el binomio conjugado $(\sqrt{x} + 1)$ del denominador.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$\dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \dfrac{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \dfrac{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1} = \sqrt{x} + 1 \to \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x} + 1 = 2$

58 **Halla los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{2x}}{x - 2}$ b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{4 - x} - 1}$ c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{2x - 1} - 3}{x - 5}$

d) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x - 7}{\sqrt{3x + 4} - 5}$ e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{6x + 1} - 5}{\sqrt{2x + 1} - 3}$ f) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{3x - 2} - 5}{\sqrt{2x + 7} - 5}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{2x}}{x - 2} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\frac{x - \sqrt{2x}}{x - 2} = \frac{(x - \sqrt{2x})(x + \sqrt{2x})}{(x - 2)(x + \sqrt{2x})} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 2)(x + \sqrt{2x})} = \frac{x(x - 2)}{(x - 2)(x + \sqrt{2x})} = \frac{x}{x + \sqrt{2x}}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x}{x + \sqrt{2x}} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{4 - x} - 1} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\frac{x - 3}{\sqrt{4 - x} - 1} = \frac{(x - 3)(\sqrt{4 - x} + 1)}{(\sqrt{4 - x} - 1)(\sqrt{4 - x} + 1)} = \frac{(x - 3)(\sqrt{4 - x} + 1)}{3 - x} = \sqrt{4 - x} + 1$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{\sqrt{4 - x} - 1} = \lim_{x \to 3} \sqrt{4 - x} + 1 = 2$$

c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{2x - 1} - 3}{x - 5} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\frac{\sqrt{2x - 1} - 3}{x - 5} = \frac{(\sqrt{2x - 1} - 3)(\sqrt{2x - 1} + 3)}{(x - 5)(\sqrt{2x - 1} + 3)} = \frac{2x - 10}{(x - 5)(\sqrt{2x - 1} + 3)} = \frac{2(x - 5)}{(x - 5)(\sqrt{2x - 1} + 3)} = \frac{2}{\sqrt{2x - 1} + 3}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{2x - 1} - 3}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{2}{\sqrt{2x - 1} + 3} = \frac{1}{3}$$

d) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x - 7}{\sqrt{3x + 4} - 5} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\frac{x - 7}{\sqrt{3x + 4} - 5} = \frac{(x - 7)(\sqrt{3x + 4} + 5)}{(\sqrt{3x + 4} - 5)(\sqrt{3x + 4} + 5)} = \frac{(x - 7)(\sqrt{3x + 4} + 5)}{3x - 21} = \frac{(x - 7)(\sqrt{3x + 4} + 5)}{3(x - 7)} = \frac{\sqrt{3x + 4} + 5}{3}$$

$$\lim_{x \to 7} \frac{x - 7}{\sqrt{3x + 4} - 5} = \lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{3x + 4} + 5}{3} = \frac{10}{3}$$

e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{6x + 1} - 5}{\sqrt{2x + 1} - 3} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\frac{\sqrt{6x + 1} - 5}{\sqrt{2x + 1} - 3} = \frac{(\sqrt{6x + 1} - 5)(\sqrt{6x + 1} + 5)(\sqrt{2x + 1} + 3)}{(\sqrt{2x + 1} - 3)(\sqrt{6x + 1} + 5)(\sqrt{2x + 1} + 3)} = \frac{(6x - 24)(\sqrt{2x + 1} + 3)}{(2x - 8)(\sqrt{6x + 1} + 5)} =$$

$$= \frac{6(x - 4)(\sqrt{2x + 1} + 3)}{2(x - 4)(\sqrt{6x + 1} + 5)} = \frac{3(\sqrt{2x + 1} + 3)}{\sqrt{6x + 1} + 5}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{6x + 1} - 5}{\sqrt{2x + 1} - 3} = \lim_{x \to 4} \frac{3(\sqrt{2x + 1} + 3)}{\sqrt{6x + 1} + 5} = \frac{9}{5}$$

f) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{3x - 2} - 5}{\sqrt{2x + 7} - 5} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\frac{\sqrt{3x - 2} - 5}{\sqrt{2x + 7} - 5} = \frac{(\sqrt{3x - 2} - 5)(\sqrt{3x - 2} + 5)(\sqrt{2x + 7} + 5)}{(\sqrt{2x + 5} + 5)(\sqrt{3x - 2} + 5)(\sqrt{2x + 7} + 5)} = \frac{(3x - 27)(\sqrt{2x + 7} + 5)}{(2x - 18)(\sqrt{3x - 2} + 5)} =$$

$$= \frac{3(x - 9)(\sqrt{2x + 7} + 5)}{2(x - 9)(\sqrt{3x - 2} + 5)} = \frac{3(\sqrt{2x + 7} + 5)}{2(\sqrt{3x - 2} + 5)}$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{3x - 2} - 5}{\sqrt{2x + 7} - 5} = \lim_{x \to 9} \frac{3(\sqrt{2x + 7} + 5)}{2(\sqrt{3x - 2} + 5)} = \frac{3}{2}$$

59 **Calcula las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ y estudia la posición de la función respecto de ellas. ¿Tiene asíntota horizontal?**

El dominio de definición de la función es la solución de la inecuación $x^2 - 1 > 0$, es decir, $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Las asíntotas verticales son las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Solo podemos acercarnos por un lado en cada una de las asíntotas.

Posición:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Veamos ahora las asíntotas horizontales. Usamos la regla de los grados del numerador y del denominador.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

Por tanto, no tiene asíntotas horizontales.

Autoevaluación

Página 299

1 **Calcula el límite de $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \le 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$ en los puntos de abscisas 0, 3 y 5. Di si la función es continua en esos puntos.**

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \le 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3^2 - 3 - 7 = -1 \end{array} \right\} \text{No tiene límite en } x = 3.$$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 5^2 - 5 - 7 = 13$$

Es continua en $x = 0$ y en $x = 5$. No es continua en $x = 3$, porque no tiene límte en ese punto.

2 **Halla los siguientes límites:**

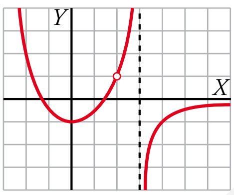
a) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{(x-4)^2}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{x-1} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

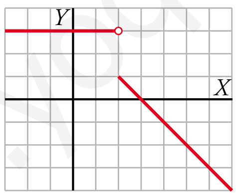
b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{49}} = \dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{(x-4)^2} = +\infty$ (Si $x \to 4^+$ o si $x \to 4^-$, los valores de la función son positivos).

3 **a)**



b)



Sobre la gráfica de estas dos funciones, halla, en cada caso, los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 3} f(x); \quad \lim_{x \to 2} f(x); \quad \lim_{x \to +\infty} f(x); \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\}$ No tiene límite en $x = 3$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{array} \right\}$ No tiene límite en $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

4 **Halla las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 2x}$ y estudia la posición de la curva respecto a ellas.**

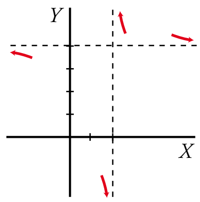
Simplificamos: $\dfrac{4x^2}{x^2 - 2x} = \dfrac{4x}{x - 2} \to y = \dfrac{4x}{x - 2}$

- Asíntota vertical: $x = 2$

Posición $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4x}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x}{x-2} = +\infty \end{cases}$

- Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4x}{x-2} = 4;\ y = 4$

Posición: $\begin{cases} x \to +\infty, & y > 4 \\ x \to -\infty, & y < 4 \end{cases}$



5 **Justifica qué valor debe tomar a para que la función $f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$.**

$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$

La función es continua para valores de x menores que 1 y mayores que 1, porque ambos tramos son rectas.

Para que sea continua en $x = 1$, debe cumplirse: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$f(1) = a - 2$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a - 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - 2a \end{cases}$

Para que exista el límite, debe ser: $a - 2 = 4 - 2a \to 3a = 6 \to a = 2$

6 **Halla el límite de $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6}$ cuando $x \to 3$; $x \to 2$; $x \to +\infty$; $x \to -\infty$ y representa la información que obtengas.**

- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{0}{0}$

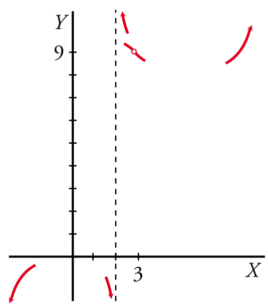
  Simplificamos: $\dfrac{x^2(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{x^2}{x-2}$

  $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2}{x-2} = 9$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{x-2} \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

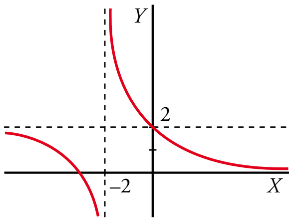
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-2} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-2} = -\infty$



7 Representa una función que cumpla las siguientes condiciones:

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ b) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$



8 Estudia las ramas infinitas de $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+4}$ y sitúa la curva respecto a su asíntota.

No tiene asíntotas verticales porque $x^2 + 4 \neq 0$ para cualquier valor de x.

No tiene asíntotas horizontales porque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+4} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+4} = -\infty$.

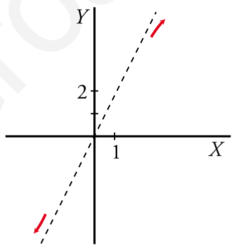
Tiene una asíntota oblicua, porque el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 & x^2+4 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 8x & 2x \\ \quad\; -8x & \end{array}$$

$$y = \frac{2x^3}{x^2+4} = 2x - \frac{8x}{x^2+4}$$

Asíntota oblicua: $y = 2x$

Posición $\begin{cases} x \to +\infty & \text{curva} < \text{asíntota} \\ x \to -\infty & \text{curva} > \text{asíntota} \end{cases}$



Resuelve

Página 301

Movimiento de una partícula

Un investigador, para estudiar el movimiento de una partícula, la ha iluminado con destellos de flash cada décima de segundo (0,1 s) durante cuatro segundos. Esta es la fotografía a tamaño real:

1. Aproxima la velocidad de la partícula en el instante $t = 2$ s hallando su velocidad media en los intervalos [2; 2,5] y [2; 2,1]. Para ello, toma medidas sobre la fotografía.

2. Calcula las velocidades medias anteriores tomando valores sobre la ecuación del movimiento de dicha partícula: $s = \frac{1}{2}(t^4 - 8t^3 + 18t^2)$

3. Halla ahora las velocidades medias en los intervalos [2; 2,001] y [2; 2,000001] tomando de nuevo valores sobre la ecuación del movimiento de la partícula. ¿Podemos considerar que esta última velocidad media es muy parecida a la velocidad instantánea en $t = 2$ s?

1. La distancia que separa los puntos en los instantes $t = 2$ y $t = 2,5$ es de 12,5 mm, luego la velocidad es:

$$\frac{12,5}{0,5} = 25 \text{ mm/s} = 0,025 \text{ m/s}$$

La distancia que separa los puntos en los instantes $t = 2$ y $t = 2,1$ es de 3,5 mm, luego la velocidad es:

$$\frac{3,5}{0,1} = 33 \text{ mm/s} = 0,035 \text{ m/s}$$

2. $$\left.\begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{2}(2^4 - 8 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2) = 12 \\ s_2 = \frac{1}{2}(2,5^4 - 8 \cdot 2,5^3 + 18 \cdot 2,5^2) = 13,28 \end{array}\right\} \rightarrow v_1 = \frac{13,28 - 12}{0,5} = 2,56$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \\ s_3 = \frac{1}{2}(2,1^4 - 8 \cdot 2,1^3 + 18 \cdot 2,1^2) = 12,37 \end{array}\right\} \rightarrow v_2 = \frac{12,37 - 12}{0,1} = 3,77$$

3. $$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \\ s_4 = \frac{1}{2}(2,001^4 - 8 \cdot 2,001^3 + 18 \cdot 2,001^2) = 12,003997 \end{array}\right\} \rightarrow v = \frac{12,003997 - 12}{0,001} = 3,997$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \\ s_5 = \frac{1}{2}(2,000001^4 - 8 \cdot 2,000001^3 + 18 \cdot 2,000001^2) = 12,000004 \end{array}\right\} \rightarrow v = \frac{12,000004 - 12}{0,000001}$$

Sí podemos considerar que esta última velocidad es muy parecida a la velocidad instantánea en $t = 2$ s porque el intervalo de tiempo transcurrido es tan solo una millonésima de segundo.

1 Medida del crecimiento de una función

Página 302

Hazlo tú. Halla la T.V.M. de $y = \sqrt{x-1}$ en $[1, 2]$, $[1, 5]$ y $[1, 10]$.

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{0}}{1} = 1$$

$$\text{T.V.M. } [1, 5] = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{0}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{T.V.M. } [1, 10] = \frac{f(10)-f(1)}{10-1} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{0}}{9} = \frac{1}{3}$$

1 ¿Verdadero o falso?

a) La T.V.M. mide el crecimiento medio de una función en un intervalo.

b) Si f es creciente en $[a, b]$, su T.V.M. en ese intervalo es positiva, y si es decreciente, su T.V.M. es negativa.

c) Si la T.V.M. de f en $[a, b]$ es 0, significa que f es constante en $[a, b]$.

a) Verdadero.

b) Verdadero. El signo de la T.V.M. depende solo del signo del numerador. Si f es creciente $f(b) > f(a)$, luego el numerador es positivo. Si f es decreciente, $f(b) < f(a)$, luego el numerador es negativo.

c) Falso. Solo podemos afirmar que $f(a) = f(b)$. Esto no quiere decir que sea constante.

2 Halla la T.V.M. de la función $y = x^2 - 8x + 12$ en los siguientes intervalos:

$[1, 2]$, $[1, 3]$, $[1, 4]$, $[1, 5]$, $[1, 6]$, $[1, 7]$, $[1, 8]$

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{0-5}{1} = -5$$

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{-3-5}{2} = -4$$

$$\text{T.V.M. } [1, 4] = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{-4-5}{3} = -3$$

$$\text{T.V.M. } [1, 5] = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{-3-5}{4} = -2$$

$$\text{T.V.M. } [1, 6] = \frac{f(6)-f(1)}{6-1} = \frac{0-5}{5} = -1$$

$$\text{T.V.M. } [1, 7] = \frac{f(7)-f(1)}{7-1} = \frac{5-5}{6} = 0$$

$$\text{T.V.M. } [1, 8] = \frac{f(8)-f(1)}{8-1} = \frac{12-5}{7} = 1$$

3 **Halla la T.V.M. de $y = x^2 - 8x + 12$ en el intervalo variable [1, 1 + h].**

Comprueba que, dando a h los valores adecuados, se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

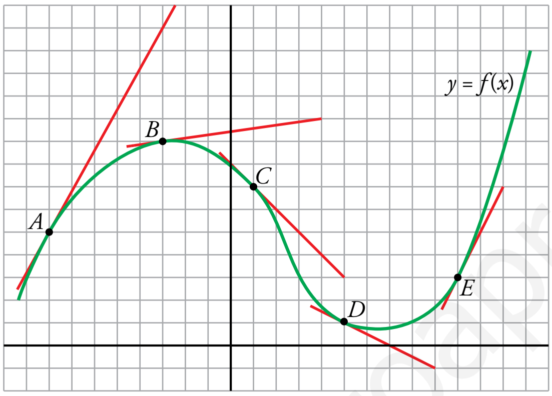
$$\text{T.V.M. } [1,\ 1+h] = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-8(1+h)+12-5}{h} = \frac{h^2-6h}{h} = \frac{h(h-6)}{h} = h-6$$

Dando a h los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

Página 303

4 **En la gráfica, en verde, de la función $y = f(x)$ adjunta, se han señalado cinco puntos: *A*, *B*, *C*, *D* y *E*.**

En cada uno de ellos está trazada la recta tangente, cuya pendiente se puede calcular.



Expresa los resultados utilizando expresiones del tipo:

$f'(a) = \ldots$

Por ejemplo, para el punto *B*:

$f'(-3) = \ldots$

PUNTO	PENDIENTE
A	$f'(-8) = \frac{9}{5}$
B	$f'(-3) = \frac{1}{7}$
C	$f'(1) = -1$
D	$f'(5) = -\frac{1}{2}$
E	$f'(10) = 2$

2 Obtención de la derivada a partir de la expresión analítica

Página 305

Hazlo tú. Halla la derivada de $y = \dfrac{3}{x-2}$ en los puntos de abscisas 1, –1 y 5.

- $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

  $f(1+h) = \dfrac{3}{1+h-2} = \dfrac{3}{h-1}$

  $f(1) = \dfrac{3}{1-2} = -2$

  $f(1+h) - f(1) = \dfrac{3}{h-1} - (-3) = \dfrac{3h}{h-1}$

  $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{\frac{3h}{h-1}}{h} = \dfrac{3}{h-1}$

  $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3}{h-1} = -3$

- $f'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

  $f(-1+h) = \dfrac{3}{-1+h-2} = \dfrac{3}{h-3}$

  $f(-1) = \dfrac{3}{-1-2} = -1$

  $f(-1+h) - f(-1) = \dfrac{3}{h-3} - (-1) = \dfrac{h}{h-3}$

  $\dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \dfrac{\frac{h}{h-3}}{h} = \dfrac{1}{h-3}$

  $f'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h-3} = -\dfrac{1}{3}$

- $f'(5) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h}$

  $f(5+h) = \dfrac{3}{5+h-2} = \dfrac{3}{h+3}$

  $f(5) = \dfrac{3}{5-2} = 1$

  $f(5+h) - f(5) = \dfrac{3}{h+3} - 1 = \dfrac{-h}{h+3}$

  $\dfrac{f(5+h) - f(5)}{h} = \dfrac{\frac{-h}{h+3}}{h} = -\dfrac{1}{h+3}$

  $f'(5) = \lim\limits_{h \to 0} \left(-\dfrac{1}{h+3}\right) = -\dfrac{1}{3}$

Hazlo tú. **Halla la derivada de $y = \dfrac{x^2}{2} + 7x$ en los puntos de abscisas 0, 1, 2, 3, 4 y 5.**

$$f(x+h) = \frac{(x+h)^2}{2} + 7(x+h) = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} + 7x + 7h$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} + 7x + 7h - \left(\frac{x^2}{2} + 7x\right) = xh + \frac{h^2}{2} + 7h$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{xh + \frac{h^2}{2} + 7h}{h} = x + \frac{h}{2} + 7$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0}\left(x + \frac{h}{2} + 7\right) = x + 7$$

$f'(0) = 0 + 7 = 7$ $\quad f'(1) = 1 + 7 = 8$ $\quad f'(2) = 9$ $\quad f'(3) = 10$ $\quad f'(4) = 11$ $\quad f'(5) = 12$

1 ¿Verdadero o falso?

a) La derivada de una función, $y = f(x)$, en $x = a$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

b) $f'(3) = 0$ significa que la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $x = 3$ es paralela al eje X.

c) Si $f'(2) > 0$, entonces f es creciente en el punto de abscisa 2.

a) Verdadero.

b) Verdadero. La pendiente de la recta tangente en $x = 3$ es cero, luego la recta es horizontal.

c) Verdadero, debido a la inclinación de la recta tangente a f en ese punto.

2 Halla la derivada de $y = \dfrac{1}{x}$ en el punto de abscisa –2.

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$f(-2+h) - f(-2) = \frac{1}{-2+h} + \frac{1}{2} = \frac{-2+h+2}{2(-2+h)} = \frac{h}{2h-4}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{2h-4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h-4} = -\frac{1}{4}$$

3 Halla la derivada de $y = -2x + 4$ en los puntos de abscisas –3, 0, 4 y 7. Explica por qué obtienes en todos los casos el mismo resultado.

- $f'(-3) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$

  $f(-3 + h) - f(-3) = -2(-3 + h) + 4 - 10 = 6 - 2h - 6 = -2h$

  $f'(-3) = \lim_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

- $f'(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$

  $f(h) - f(0) = -2h + 4 - 4 = -2h$

  $f'(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

• $f'(4) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h}$

$f(4 + h) - f(4) = -2(4 + h) + 4 - (-4) = -8 - 2h + 8 = -2h$

$f'(4) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

• $f'(7) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(7+h) - f(7)}{h}$

$f(7 + h) - f(7) = -2(7 + h) + 4 - (-10) = -14 - 2h + 14 = -2h$

$f'(7) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

Como la función es una línea recta, crece o decrece siempre de la misma forma y al ser la derivada una forma de medir el crecimiento de una función, esta debe valer lo mismo en todos los puntos.

4 **Halla la derivada de $y = 3x^2 - 5x + 1$ en los puntos de abscisas –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.**

Calculamos la derivada de forma general y la evaluamos en cada uno de los puntos pedidos.

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f(x + h) - f(x) = 3(x + h)^2 - 5(x + h) + 1 - (3x^2 - 5x + 1) =$

$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 1 - 3x^2 + 5x - 1 = 3h^2 + 6hx - 5h$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h^2 + 6hx - 5h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (3h + 6x - 5) = 6x - 5$

$f'(-2) = -17$

$f'(-1) = -11$

$f'(0) = -5$

$f'(1) = 1$

$f'(2) = 7$

$f'(3) = 13$

$f'(4) = 19$

$f'(5) = 25$

$f'(6) = 31$

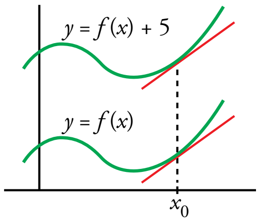
3 Función derivada de otra

Página 306

1 **¿Verdadero o falso?**

Las rectas tangentes en un punto cualquiera, x_0, a las gráficas de $y = f(x)$ e $y = f(x) + 5$ son paralelas.

Eso significa que las dos funciones tienen la misma función derivada.



Verdadero, porque al ser paralelas las rectas tangentes en cualquier punto, deben tener la misma pendiente en todos los puntos.

2 **Halla la derivada de $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ y, a partir de ella, calcula $f'(4)$, $f'(-1)$, $f'(1)$ y $f'(5)$.**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{3}{x+h-2} - \dfrac{3}{x-2}}{h} = 3 \cdot \frac{\dfrac{x-2-x-h+2}{(x+h-2)(x-2)}}{h} = \frac{-3}{(x+h-2)(x-2)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(x+h-2)(x-2)} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$f'(4) = \frac{-3}{4}$$

$$f'(-1) = \frac{-1}{3}$$

$$f'(1) = -3$$

$$f'(5) = \frac{-1}{3}$$

3 **Halla la función derivada de $f(x) = \sqrt{x-3}$ y calcula las pendientes de las rectas tangentes a la curva en los puntos de abscisas $x = 4$ y $x = 7$.**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h-3} - \sqrt{x-3}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h-3} - \sqrt{x-3})(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3})}{h(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3})} =$$

$$= \frac{x+h-3-(x-3)}{h(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3})} = \frac{1}{\sqrt{x-3} + \sqrt{h+x-3}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x-3} + \sqrt{h+x-3}} = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

$$f'(4) = \frac{1}{2}$$

$$f'(7) = \frac{1}{4}$$

4 **Halla la función derivada de $f(x) = x^3 + x^2$.**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 + (x+h)^2 - (x^3 + x^2)}{h} = \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 + h^2 + 2hx + x^2 - x^3 - x^2}{h} =$$

$$= \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3 + h^2 + 2hx}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2 + h + 2x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2 + h + 2x) = 3x^2 + 2x$$

Página 307

5 **En la fórmula que sirve para hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto**

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

di el papel que desempeña cada una de las letras que intervienen. La x es la variable independiente, ¿de qué función?

a es la abscisa del punto en el que se halla la recta tangente.

$f(a)$ es la ordenada de dicho punto.

$f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente o, también, la derivada de la función en el punto de abscisa a.

x es la variable independiente de la recta tangente.

y es la variable dependiente de dicha recta.

4 Reglas para obtener las derivadas de algunas funciones

Página 308

1 **Calcula:** a) $D(x^5)$ b) $D\left(\frac{1}{x^2}\right)$ c) $D\left(\sqrt[3]{x}\right)$ d) $D\left(\sqrt[3]{x^2}\right)$ e) $D\left(\frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{x^2}\right)$

a) $D(x^5) = 5x^4$

b) $D\left(\frac{1}{x^2}\right) = D(x^{-2}) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

c) $D\left(\sqrt[3]{x}\right) = D(x^{1/3}) = \frac{1}{3}x^{(1/3)-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $D\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = D(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

e) $D\left(\frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{x^2}\right) = D\left(\frac{x^{3/2}\cdot x^{4/3}}{x^2}\right) = D\left(x^{5/6}\right) = \frac{5}{6}x^{(5/6)-1} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$

Página 310

Hazlo tú. **Halla la función derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = 5x^4 - 2x^2 + 3x - 7$ **b)** $g(x) = \sqrt{5x} - \sqrt[3]{3x^4}$ **c)** $h(x) = \frac{3x}{x^2\sqrt[3]{x}}$

a) $f'(x) = 5\cdot 4x^3 - 2\cdot 2x + 3 = 20x^3 - 4x + 3$

b) $g(x) = \sqrt{5}\sqrt{x} - \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{x^4} = \sqrt{5}\,x^{1/2} - \sqrt[3]{3}\,x^{4/3}$

$g'(x) = \sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} - \sqrt[3]{3}\cdot\frac{4}{3}x^{1/3} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} - \frac{4\sqrt[3]{3}}{3}\sqrt[3]{x}$

c) $h(x) = \frac{3x}{x^2\,x^{1/3}} = 3x^{-4/3}$

$h'(x) = 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-7/3} = -\frac{4}{x^{7/3}} = -\frac{4}{x^2\sqrt[3]{x}}$

Hazlo tú. **Halla la función derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \frac{5^{4x}}{125}$ **b)** $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 3}$ **c)** $h(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x}$

a) $f(x) = \frac{1}{125}(5^4)^x = \frac{1}{125}625^x$

$f'(x) = \frac{1}{125}625^x\,ln\,625 = \frac{ln\,625}{125}625^x$

b) $g'(x) = \frac{(2x-3)\cdot(x^2+x-3)-(x^2-3x+1)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-3)^2} = \frac{2x^3-x^2-9x+9-(2x^3-5x^2-x+1)}{(x^2+x-3)^2} = \frac{4x^2-8x+8}{(x^2+x-3)^2}$

c) $h(x) = x^2 - 5x + 2 - \frac{1}{x}$

$h'(x) = 2x - 5 + \frac{1}{x^2}$

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

2 $f(x) = 5x^2 + 7x - 2\sqrt{x}$

$$f'(x) = 5 \cdot 2x + 7 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 10x + 7 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3 $f(x) = \sqrt{3x^3} \cdot e^x$

$$f(x) = \sqrt{3}\sqrt{x^3}\, e^x = \sqrt{3}\, x^{3/2} e^x$$

$$f'(x) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}x^{1/2} e^x + x^{3/2} e^x\right) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\, e^x + x\sqrt{x}\, e^x\right) = \sqrt{3x}\, e^x\left(\frac{3}{2} + x\right)$$

4 $f(x) = \dfrac{e^x \cdot \cos x}{2^{x+4}}$

$$f(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x \cos x}{2^x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{(e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x)\, 2^x - e^x \cos x\, 2^x \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x \ln 2}{2^x} =$$

$$= \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x (\cos x - \operatorname{sen} x - \ln 2 \cos x)}{2^x}$$

5 $f(x) = x \cdot 3^x \cdot \operatorname{tg} x$

$$f'(x) = 3^x \cdot \operatorname{tg} x + x \cdot 3^x \ln 3 \cdot \operatorname{tg} x + \frac{x \cdot 3^x}{\cos^2 x}$$

6 $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot x - \operatorname{lon}_2 x \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{1}{\ln 2} - \log_2 x}{x^2} = \frac{1 - \ln 2 \log_2 x}{x^2 \ln 2}$$

7 $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x + 3}{x^2}$

$$f(x) = 2x - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2x - 5 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x^{-2}$$

$$f'(x) = 2 + \frac{5}{x^2} + 3 \cdot (-2)\, x^{-3} = 2 + \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3}$$

8 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)\, 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

9 $f(x) = (\operatorname{arc\,sen} x)(x + 3)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}(x + 3) + (\operatorname{arc\,sen} x) \cdot 1 = \frac{x + 3}{\sqrt{1 - x^2}} + \operatorname{arc\,sen} x$$

10 $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cos x - (\operatorname{arc\,sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{1 - x^2}} \cos x + (\operatorname{arc\,sen} x) \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sqrt{1 - x^2}\, (\operatorname{arc\,sen} x) \operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - x^2} \cos^2 x}$$

11 $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot 5^x}{x^3}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}5^x$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}5^x + \dfrac{1}{x}5^x \ln 5 = 5^x \dfrac{x \ln 5 - 1}{x^2}$

Página 311

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

12 $f(x) = sen\,(x^2 - 5x + 7)$

$f'(x) = (2x - 5)\ cos\,(x^2 - 5x + 7)$

13 $f(x) = \sqrt[3]{(5x+3)^2} = (5x+3)^{2/3}$

$f'(x) = \dfrac{2}{3}(5x+3)^{-1/3} \cdot 5 = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{5x+3}}$

14 $f(x) = sen^2\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$D\left(sen^2\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \begin{cases} (\square^2)' = 2\square \\ (sen\,\square)' = cos\,\square \\ \left(3x + \frac{\pi}{2}\right)' = 3 \end{cases}$$

$f'(x) = 2sen\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot 3 = 6sen\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

También, usando la fórmula del seno del ángulo doble, podríamos dar el resultado de esta otra manera:

$f'(x) = 2sen\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot 3 = 3sen\,(6x+\pi) = -3\ sen\,6x$

15 $f(x) = \dfrac{log\ x^2}{x}$

$f(x) = \dfrac{2\ log\ x}{x} \to f'(x) = \dfrac{2(1 - \ln 10\ log\ x)}{x^2 \ln 10}$

16 $f(x) = cos\,(3x - \pi)$

$f'(x) = -3\ sen\,(3x - \pi)$

17 $f(x) = \sqrt{1+2x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$

18 $f(x) = x\,e^{2x+1}$

$f'(x) = e^{2x+1} + x\,e^{2x+1}\cdot 2 = e^{2x+1}(1+2x)$

19 $f(x) = \dfrac{sen\,(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}\,cos\,(x^2+1) + [x\ sen\,(x^2+1)]/\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \dfrac{2x(1-x^2)\,cos\,(x^2+1) + x\ sen\,(x^2+1)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

5 Utilidad de la función derivada

Página 312

Hazlo tú. Halla las rectas tangentes a $y = x^3 - 2x^2$ paralelas a $y = -x$.

Buscamos las rectas de pendiente –1:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 \to f'(x) = 3x^2 - 4x$$

La ecuación $f'(x) = -1$ nos proporciona las abscisas de los puntos en los que las rectas tangentes son paralelas a la recta dada.

$$f'(x) = -1 \to 3x^2 - 4x = -1 \to 3x^2 - 4x + 1 = 0 \to x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 1$$

$$x = \frac{1}{3} \to f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{5}{27} \to \text{Recta tangente } y = -1\cdot\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{27} \to y = -x + \frac{4}{27}$$

$$x = 1 \to f(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 = -1 \to \text{Recta tangente } y = -1\cdot(x-1) - 1 \to y = -x$$

Página 313

Hazlo tú. Halla los puntos singulares de $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$ y determina los intervalos donde crece o decrece.

Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$f'(x) = 0 \to 6x^2 - 6x - 12 = 0 \to x^2 - x - 2 = 0 \to x_1 = -1,\ x_2 = 2$$

$$f(1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 3 = 10 \to (-1, 10) \text{ es un punto singular.}$$

$$f(2) = 2\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 - 12\cdot 2 + 3 = -17 \to (2, -17) \text{ es otro punto singular.}$$

Teniendo en cuenta las ramas infinitas:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = -\infty$$

Tenemos que los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$ son intervalos de crecimiento. En el intervalo $(-1, 2)$ la función decrece.

Página 314

1 Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $y = x^4 - 2x - 3$ en los puntos de abscisa –1, 0 y 2.

$f(x) = x^4 - 2x - 3 \quad f'(x) = 4x^3 - 2$

- $f(-1) = 6 \quad f'(-1) = -6$

  La recta tangente en $x = -1$ es $y = -6(x + 1) + 6$, es decir, $y = -6x$.

- $f(0) = -3 \quad f'(0) = -2$

  La recta tangente en $x = 0$ es $y = -2(x - 0) - 3$, es decir, $y = -2x - 3$.

- $f(2) = 9 \quad f'(2) = 30$

  La recta tangente en $x = 2$ es $y = 30(x - 2) + 9$, es decir, $y = 30x - 51$.

2 **Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 3x$ cuya pendiente sea 3.**

Para que la pendiente de la recta tangente sea 3, debe ser $f'(x) = 3$.

$$f'(x) = x^3 - 4x + 3$$

$f'(x) = 3 \to x^3 - 4x + 3 = 3 \to x(x^2 - 4) = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$ son las abscisas de los puntos en los que la pendiente es 3.

$x_1 = 0 \to f(0) = 0 \to$ La recta tangente es $y = 3x$.

$x_2 = 2 \to f(2) = 2 \to$ La recta tangente es $y = 3(x - 2) + 2$, es decir, $y = 3x - 4$.

$x_3 = -2 \to f(-2) = -10 \to$ La recta tangente es $y = 3(x + 2) - 10$, es decir, $y = 3x - 4$.

3 **Halla el valor máximo de la función $y = -x^3 + 12x + 3$ en el intervalo $[0, 3]$ y en el intervalo $[-5, 3]$. Halla el mínimo en cada uno de esos intervalos.**

Calculamos primero los puntos singulares de la función:

$$f'(x) = -3x^2 + 12$$

$$f'(x) = 0 \to -3x^2 + 12 = 0 \to x_1 = -2,\ x_2 = 2$$

- En el intervalo [0, 3] evaluamos:

  $f(0) = 3 \quad f(2) = 19 \quad f(3) = 12$

  El máximo se encuentra en $x = 2$ y vale 19.

  El mínimo se encuentra en $x = 0$ y vale 3.

- En el intervalo [–5, 3] evaluamos:

  $f(-5) = 68 \quad f(-2) = -13 \quad f(2) = 19 \quad f(3) = 12$

  El máximo se encuentra en $x = -5$ y vale 68.

  El mínimo se encuentra en $x = -2$ y vale –13.

4 **Halla los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital:**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5x}{tg\ 3x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{2x - 5}{2x + 3} = \frac{-1}{7}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5x}{tg\ 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{5}{(1 + tg^2\, 3x) \cdot 3} = \frac{5}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 10}}{1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 10} = 0$

6 Representación de funciones

Página 316

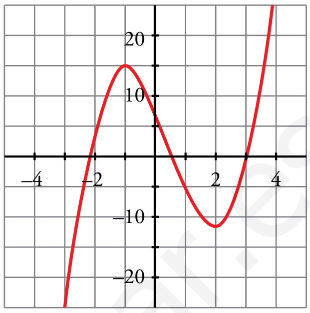
1 Representa estas funciones:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ **b)** $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$ **c)** $y = x^4 + 4x^3$

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$

Máximo en (–1, 15).

Mínimo en (2, –12).



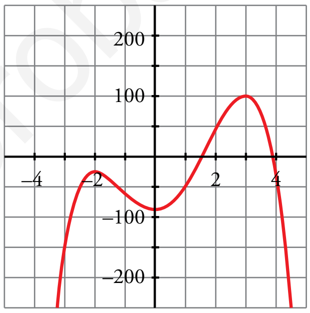
b) $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 72x = -12x(x^2 - x - 6) = 0$

$x = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$

Máximo en (–2, –26) y en (3, 99).

Mínimo en (0, –90).



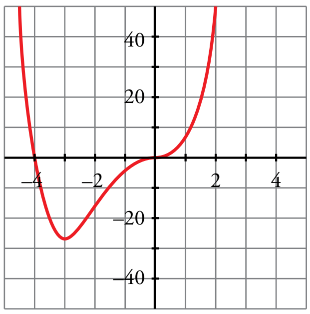
c) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

Mínimo en (–3, –27).

Punto de inflexión en (0, 0).

$f(x) = 0 \rightarrow x^3(x + 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$

Puntos de corte con los ejes: (0, 0) y (–4, 0).



Página 318

2 Representa las siguientes funciones racionales, siguiendo los pasos de la página anterior:

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **e)** $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

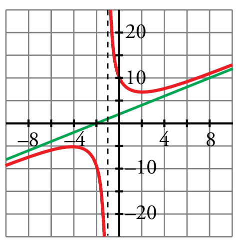
a) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+1) - (x^2+3x+11)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x + 3x + 3 + 3 - x^2 - 3x - 11}{(x+1)^2} =$

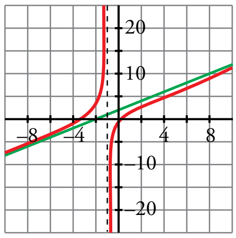
$= \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -4$

Máximo en (–4, –5). Mínimo en (2, 7).

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$



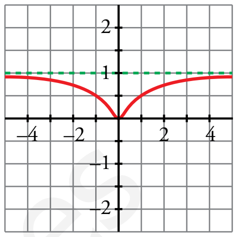


b) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+3x+3-x^2-3x}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} \neq 0$

Puntos de corte con los ejes: (0, 0) y (–3, 0)

Asíntota vertical: $x = -1$

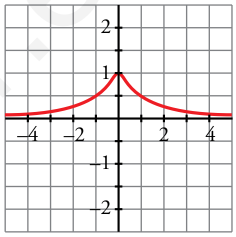
Asíntota oblicua: $y = x + 2$



c) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1)-x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow x = 0$

Mínimo en (0, 0).

Asíntota horizontal: $y = 1$



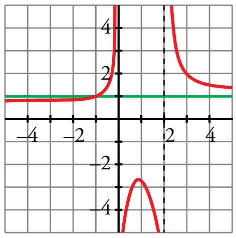
d) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow x = 0$

Máximo en (0, 1).

Asíntota horizontal: $y = 0$

e) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-2x)-(x^2+2)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{2x^3-4x^2-2x^3+2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} =$

$$= \frac{-2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 0,73 \\ x_2 = -2,73 \end{cases}$$



Máximo en (0,73; –2,73).

Mínimo en (–2,73; 0,73).

Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 1$

f) • Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asíntota vertical:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \end{array}\right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

• Asíntota horizontal:

$y = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $y = 1$ es asíntota horizontal

Cuando $x \to -\infty$, $y < 1$; y cuando $x \to +\infty$, $y < 1$.

Por tanto, la curva está por debajo de la asíntota.

• Puntos singulares:

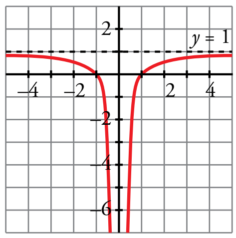
$f'(x) = \dfrac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{2x^3-2x^3+2x}{x^4} = \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3}$

$f'(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no tiene puntos singulares

Observamos que $f'(x) < 0$ si $x < 0$; y que $f'(x) > 0$ si $x > 0$.

Luego la función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y es creciente en $(0, +\infty)$.

• Corta al eje X en (–1, 0) y (1, 0).



Ejercicios y problemas resueltos

Página 319

1. Función derivada a partir de la definición

Hazlo tú. **Dada $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, halla $f'(x)$ aplicando la definición.**

$$f(x+h)-f(x)=\frac{x+h}{x+h+1}-\frac{x}{x+1}=\frac{(x+h)(x+1)-x(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)}=\frac{x^2+x+hx+h-x^2-xh-x}{(x+h+1)(x+1)}=\frac{h}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{(x+h+1)(x+1)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h+1)(x+1)}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

2. Reglas de derivación

Hazlo tú. **Halla $f'(x)$ siendo: $f(x)=ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$**

$$f(x)=2\,ln\,\frac{x+1}{x}=2\,[ln(x+1)-ln\,x]$$

$$f'(x)=2\left(\frac{1}{x+1}\cdot 1-\frac{1}{x}\right)=-\frac{2}{x(x+1)}$$

3. Ecuación de la recta tangente en un punto

Hazlo tú. **Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=tg\,x$ en $x=\dfrac{3\pi}{4}$.**

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=tg\,\frac{3\pi}{4}=-1$$

$$f'(x)=1+tg^2\,x \to f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2\ \text{(pendiente de la recta tangente).}$$

La ecuación de la recta tangente en $x=\dfrac{3\pi}{4}$ es $y=2\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)-1$, es decir, $y=2x-\dfrac{3}{2}\pi-1$

Página 320

4. Recta tangente paralela a una recta

Hazlo tú. **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=3x^2-4x$ que sea paralela a la recta $2x-y+5=0$.**

Despejando y en la ecuación de la recta dada, podemos obtener su pendiente.

$y=2x+5 \to$ La pendiente de la recta es 2.

Las abscisas de los puntos en los que la recta tangente es paralela a la recta anterior son las soluciones de la ecuación $f'(x)=2$.

$f'(x)=6x-4 \to 6x-4=2 \to x=1$ es el punto en el que la tangente y la recta dada son paralelas.

Finalmente, como $f(1)=-1$, la recta buscada es $y=2(x-1)-1$, es decir, $y=2x-3$.

5. Puntos de tangente horizontal

Hazlo tú. Halla los puntos singulares de la función $f(x) = x^3 - 6x^2$ y di si son máximos o mínimos.

Hallamos las abscisas de los puntos singulares resolviendo la ecuación $f'(x) = 3x^2 - 12x$:

$$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 12x = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = 4$$

Calculamos las ordenadas de estos puntos:

$$f(0) = 0 \qquad f(4) = -32$$

Los puntos singulares son (0, 0) y (4, –32).

Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 6x^2) = +\infty \to (4, -32) \text{ es un mínimo.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 6x^2) = -\infty \to (0, 0) \text{ es un máximo.}$$

6. Coeficientes de una función que tiene puntos singulares

Hazlo tú. Halla b y c de modo que la función $f(x) = x^3 + bx^2 + c$ pase por (1, 0) y $f'(1) = 5$.

Si f pasa por (1, 0), entonces $f(1) = 0$.

$1^3 + b \cdot 1^2 + c = 0 \to c = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx$

$f'(1) = 5 \to 3 \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 = 5 \to b = 1$

Página 321

7. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

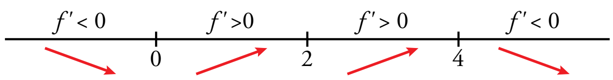
Hazlo tú. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2 - x}$.

$Dom = \mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{2x(2 - x) - x^2(-1)}{(2 - x)^2} = \frac{4x - x^2}{(x - 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \to \frac{4x - x^2}{(x - 2)^2} = 0 \to 4x - x^2 = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = 4$$

Estudiamos los signos de f dentro del dominio de definición en los intervalos cuyos extremos son los puntos singulares.



Por tanto, f crece en $(0, 2) \cup (2, 4)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

8. Problema de optimización

Hazlo tú. De todos los rectángulos de 36 m de perímetro, halla las dimensiones del que tiene la mayor superficie.

Llamamos b y h a la base y a la altura del rectángulo, respectivamente.

Como el perímetro es 36, se tiene que $2b + 2\text{h} = 36 \to \text{h} = 18 - b$

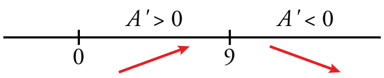
Buscamos el rectángulo de área máxima:

$$A = bh = b(18 - b)$$

Hallamos los puntos singulares:

$$A' = 0 \rightarrow A' = 18 - 2b = 0 \rightarrow b = 9$$

Estudiamos si el valor obtenido es un máximo:



Por tanto, para $b = 9$ el área es máxima.

Calculamos h: $h = 18 - 9 = 9$ y obtenemos el área máxima $A = 81\ m^2$.

Página 322

9. Estudio y representación de una función polinómica

Hazlo tú. Estudia y representa esta función:

$$\boldsymbol{f(x) = 1 + (x - 3)^3}$$

- Por ser una función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} [1 + (x - 3)^3] = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} [1 + (x - 3)^3] = -\infty$$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 3(x - 3)^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x - 3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$

Como $f(3) = 1$, el punto $(3, 1)$ es el único punto singular.

- Crecimiento y decrecimiento:

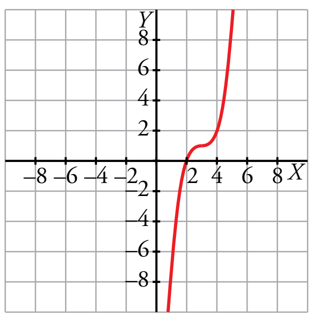
Como $f'(x) = 3(x - 3)^2 > 0$ para todo $x \neq 3$, la función crece a ambos lados de $x = 3$ y no es ni máximo ni mínimo.

- Cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = -26$

$y = 0 \rightarrow 1 + (x - 3)^3 = 0 \rightarrow (x - 3)^3 = -1 \rightarrow x = 2$

- Gráfica:



10. Estudio y representación de una función racional

Hazlo tú. Estudia y representa esta función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 8}{x}$$

- La función no está definida en $x = 0 \rightarrow Dom = \mathbb{R} - \{0\}$
- Asíntota vertical: $x = 0$

  Posición:

  Si $x \rightarrow 0^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$

  Si $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$

- Asíntotas horizontales y oblicuas:

  Como el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, tiene una asíntota oblicua. Dividimos:

  $f(x) = 2x + \frac{8}{x} \rightarrow$ La asíntota es $y = 2x$

  Posición:

  Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) - y = \frac{8}{x} < 0$. Curva bajo la asíntota.

  Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) - y = \frac{8}{x} > 0$. Curva sobre la asíntota.

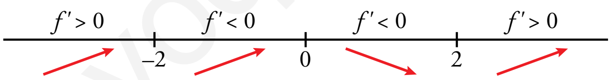
- Puntos singulares:

  $f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$

  $f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 2$

  $f(-2) = -8$, $f(2) = 8$. Por tanto, $(-2, -8)$ y $(2, 8)$ son los puntos singulares.

- Crecimiento y decrecimiento:



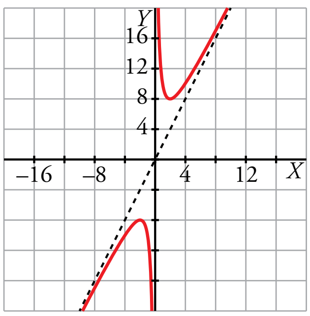
- Cortes con los ejes:

  No corta al eje *OY*.

  $y = 0 \rightarrow \frac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^2 + 8 = 0$ No tiene solución (no cota al eje *OX*).

- Gráfica:

  $y = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$



Página 323

11. Función derivada de funciones definidas "a trozos"

Hazlo tú. Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - 1 & \text{si } x < 4 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

a) Llamamos $f_1(x) = \dfrac{x^2}{4} - 1$ y $f_2(x) = 2x - 5$

Ambas funciones son continuas.

$\left.\begin{array}{l} f_1(4) = \dfrac{4^2}{4} - 1 = 3 \\ f_2(4) = 2 \cdot 4 - 5 = 3 \end{array}\right\}$ Como ambas coinciden, la función es continua en $x = 4$.

$\left.\begin{array}{l} f'_1(x) = \dfrac{x}{2} \to f'_1(4) = 2 \\ f'_2(x) = 2 \to f'_2(4) = 2 \end{array}\right\}$ Como coinciden, la función es derivable en $x = 4$ y $f'(4) = 2$.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x < 4 \\ 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

b) Llamamos $g_1(x) = 3 - x$ y $g_2(x) = x^2 + 3$

Ambas funciones son continuas.

$\left.\begin{array}{l} g_1(-1) = 3 - (-1) = 4 \\ g_2(-1) = (-1)^2 + 3 = 4 \end{array}\right\}$ Como ambas coinciden, la función es continua en $x = -1$.

$\left.\begin{array}{l} g'_1(x) = -1 \to g'_1(-1) = -1 \\ g'_2(x) = 2x \to g'_2(-1) = -2 \end{array}\right\}$ Como son distintas, la función no es derivable en $x = -1$.

La función derivada es $g'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Página 324

12. Parámetros para que una función sea continua y derivable

Hazlo tú. Calcula a y b para que las siguientes funciones sean derivables en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 4x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **en $x = 2$.**

b) $g(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x < -3 \\ x^2 + bx & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$ **en $x = -3$.**

a) Llamamos $f_1(x) = ax^2 + 1$ y $f_2(x) = 4x - b$.

Ambas funciones son continuas.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, se debe cumplir que $f_1(2) = f_2(2)$.

$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = 4a + 1 \\ f_2(2) = 8 - b \end{array}\right\}$ Por tanto: $4a + 1 = 8 - b$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 2$, se debe cumplir que $f'_1(2) = f'_2(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'_1(x) = 2ax \rightarrow f'_1(2) = 4a \\ f'_2(x) = 4 \rightarrow f'_2(2) = 4 \end{array}\right\} \text{ Luego } 4a = 4$$

Resolvemos el sistema resultante:

$$\left.\begin{array}{r} 4a + 1 = 8 - b \\ 4a = 4 \end{array}\right\} \rightarrow a = 1, \; b = 3$$

b) Llamamos $g_1(x) = a - x$ y $g_2(x) = x^2 + bx$

Ambas funciones son continuas.

Para que $g(x)$ sea continua en $x = -3$, se debe cumplir que $g_1(-3) = g_2(-3)$.

$$\left.\begin{array}{l} g_1(-3) = a + 3 \\ g_2(-3) = 9 - 3b \end{array}\right\} \text{ Por tanto: } a + 3 = 9 - 3b$$

Para que $g(x)$ sea derivable en $x = -3$, se debe cumplir que $g'_1(-3) = g'_2(-3)$.

$$\left.\begin{array}{l} g'_1(x) = -1 \rightarrow g'_1(-3) = -1 \\ g'_2(x) = 2x + b \rightarrow g'_2(-3) = -6 + b \end{array}\right\} \text{ Luego } -1 = -6 + b$$

Resolvemos el sistema resultante:

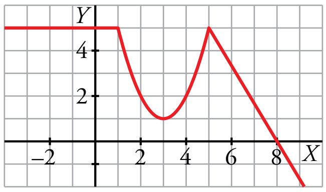
$$\left.\begin{array}{r} a + 3 = 9 - 3b \\ -1 = -6 + b \end{array}\right\} \rightarrow a = -9, \; b = 5$$

Ejercicios y problemas guiados

Página 325

1. Derivadas sobre la gráfica

Observando la gráfica de esta función $y = f(x)$:



a) Hallar el valor de $f'(-2)$, $f'(3)$, $f'(6)$.

b) ¿Para qué valores de x es $f'(x) < 0$?

a) $f'(-2) = 0$ porque es constante en las proximidades de $x = -2$.

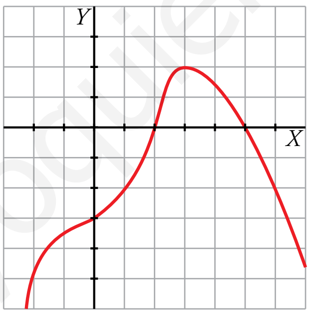
$f'(3) = 0$ porque en $x = 3$ hay un mínimo.

$f'(6) = -\frac{5}{3}$ porque la gráfica es la recta $y = \frac{-5x+40}{3}$ con pendiente $-\frac{5}{3}$.

b) $f'(x) < 0$ en $(1, 3) \cup (5, +\infty)$ porque la función es decreciente en estos intervalos.

2. Función polinómica

Representar una función polinómica sabiendo que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$, que sus puntos de tangente horizontal son $(0, -3)$ y $(3, 2)$, y que corta al eje X solo en $x = 2$ y en $x = 5$.



3. Triángulo rectángulo de área máxima

De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 12 m, hallar las dimensiones del que tiene el área máxima.

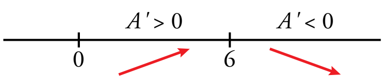
Supongamos que a y b son los catetos del triángulo rectángulo: $a + b = 12 \to b = 12 - a$.

El área del triángulo es el semiproducto de la base por la altura, luego:

$$A = \frac{ab}{2} = \frac{a(12-a)}{2}$$

Para hallar el área máxima, calculamos los puntos singulares: $A' = 0 \to A' = 6 - a = 0$.

Veamos si $a = 6$ es un máximo:

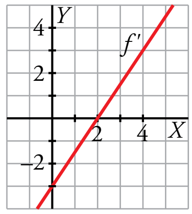


En efecto, lo es. Por tanto, si $a = 6$ y $b = 12 - 6 = 6$, se obtiene el triángulo rectángulo de área máxima.

La hipotenusa es $\sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$.

4. Gráfica de la función derivada

Esta es la gráfica de f', función derivada de f.



a) Obtener $f'(0)$, $f'(2)$ y $f'(4)$.

b) ¿Tiene f algún punto singular?

c) Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de f.

a) $f'(0) = -3 \quad f'(2) = 0 \quad f'(4) = 3$

b) En $x = 2$ se anula la derivada primera. Además, esta es negativa a la izquierda de 2 y positiva a la derecha. Por tanto, la función pasa de decreciente a creciente en $x = 2$ y este punto es un mínimo.

c) La función decrece en $(-\infty, 2)$ y crece en $(2, +\infty)$.

5. Regla de la cadena

Si $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$, $g(2) = 3$, $g'(2) = 1$, ¿cuál es la ecuación de la tangente a $y = g[f(x)]$ en $x = 1$?

$g[f(1)] = g(2) = 3$

$D[g[f(1)]] = g'[f(1)] \cdot f'(1) = g'(2) \cdot f'(1) = 1 \cdot (-1) = -1$

La ecuación de la recta tangente es $y = -1(x - 1) + 3$, es decir, $y = -x + 4$.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 326

Para practicar

Tasa de variación media

1 **Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo [1, 3] e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:**

a) $f(x) = 1/x$ **b)** $f(x) = (2-x)^3$ **c)** $f(x) = x^2 - x + 1$ **d)** $f(x) = 2^x$

T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = \dfrac{f(3)-f(1)}{2}$

a) T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{1/3-1}{2} = -\dfrac{1}{3} \to$ Decrece

b) T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{-1-1}{2} = -1 \to$ Decrece

c) T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{7-1}{2} = 3 \to$ Crece

d) T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{8-2}{2} = 3 \to$ Crece

2 **a) Halla la T.V.M. de las funciones $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en el intervalo [1, 1 + h].**

b) Calcula la T.V.M. de esas funciones en el intervalo [1; 1,5] utilizando las expresiones obtenidas en el apartado anterior.

a) Para la función $f(x)$:

T.V.M. [1, 1 + h] $= \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{-(1+h)^2+5(1+h)-3-1}{h} = \dfrac{-1-2h-h^2+5+5h-4}{h} = 3-h$

Para la función $g(x)$:

T.V.M. [1, 1 + h] $= \dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \dfrac{\frac{1}{1+h+1}-\frac{1}{2}}{h} = \dfrac{\frac{2-h-2}{2(2+h)}}{h} = \dfrac{-1}{2h+4}$

b) Para la función $f(x)$:

T.V.M. [1; 1,5] = 3 – 0,5 = 2,5

Para la función $g(x)$:

T.V.M. [1; 1,5] $= \dfrac{-1}{2\cdot 0,5+4} = \dfrac{-1}{5}$

3 **Compara la T.V.M. de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ en los intervalos [2, 3] y [3, 4], y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.**

Para $f(x)$: T.V.M. [2, 3] = 19

T.V.M. [3, 4] = 37

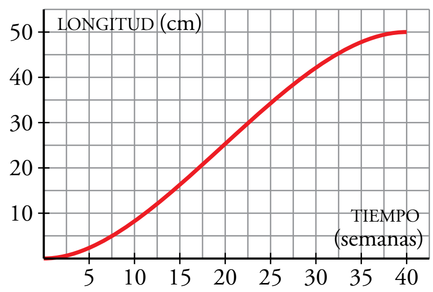
Para $g(x)$: T.V.M. [2, 3] = 18

T.V.M. [3, 4] = 54

En [2, 3] crece más $f(x)$.

En [3, 4] crece más $g(x)$.

4 **Esta gráfica muestra la longitud de un feto durante el embarazo. Estudia el crecimiento medio en los intervalos [5, 15] y [20, 30] y di en qué periodo es mayor el crecimiento:**



T.V.M: [5, 15] $= \dfrac{f(15) - f(5)}{10} = \dfrac{17 - 2}{10} = 1{,}5$ cm/semana

T.V.M. [20, 30] $= \dfrac{f(30) - f(20)}{10} = \dfrac{42 - 25}{10} = 1{,}7$ cm/semana

El crecimiento medio es mayor entre las semanas 20 y 30.

Definición de derivada

5 **Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$, utilizando la definición de derivada:**

a) $f(x) = 3x^2 - 1$

b) $f(x) = (2x + 1)^2$

c) $f(x) = 3/x$

d) $f(x) = 1/(x + 2)^2$

a) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(1+h)^2 - 1 - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(1 + h^2 + 2h) - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 + 3h^2 + 6h - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(3h + 6)}{h} = 6$$

b) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2(1+h) + 1)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2h + 3)^2 - 9}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h^2 + 9 + 12h - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4h + 12)}{h} = 12$$

c) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3/(1+h) - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 - 3 - 3h}{h(1+h)} = -3$$

d) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{(1+h+2)^2} - \dfrac{1}{9}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{9 - h^2 - 6h - 9}{9(h+3)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - 6h}{9h(h+3)^2} = \lim_{h \to 0} \frac{-h - 6}{9(h+3)^2} = \frac{-2}{27}$$

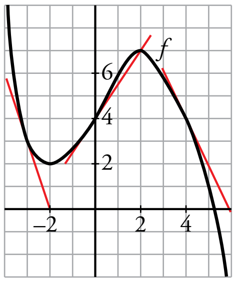
6 **Aplica la definición de derivada para hallar la pendiente de la tangente en $x = 2$ de las curvas $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{3x - 7}$.**

- $$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{4(2+h) - (2+h)^2 - 4}{h} = \frac{8 + 4h - 4 - 4h - h^2 - 4}{h} = -h$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} (-h) = 0$$

- $$\frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \frac{\dfrac{1}{3(2+h) - 7} - (-1)}{h} = \frac{\dfrac{1}{3h - 1} + 1}{h} = \frac{3}{3h - 1}$$

$$g'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3}{3h - 1} = -3$$

7 

Observa la gráfica de f en la que se han trazado las tangentes en $x = –3$, $x = 0$ y $x = 4$ y responde.

a) ¿Cuál es el valor de $f'(–3)$, $f'(0)$ y $f'(4)$?

b) ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?

c) En $x = 1$, ¿la derivada es positiva o negativa? ¿Y en $x = 3$?

a) $f'(–3) = –3$ $\quad f'(0) = \dfrac{3}{2}$ $\quad f'(4) = –2$

b) En $x = –2$ y $x = 2$.

c) En $x = 1$ la derivada es positiva porque la pendiente de la tangente lo es. Análogamente, la derivada en $x = 3$ es negativa.

8 Halla la función derivada de las siguientes funciones, aplicando la definición:

a) $f(x) = \dfrac{(5x - 3)}{2}$

b) $f(x) = x^2 + 7x - 1$

c) $f(x) = x^3 - 5x$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

a) $$\frac{f(x+\text{h}) - f(x)}{\text{h}} = \frac{\dfrac{5(x+\text{h})-3}{2} - \dfrac{5x-3}{2}}{\text{h}} = \frac{5x+5\text{h}-3-5x+3}{2\text{h}} = \frac{5}{2}$$

$$f'(x) = \lim_{\text{h}\to 0} \frac{f(x+\text{h}) - f(x)}{\text{h}} = \lim_{\text{h}\to 0} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

b) $$\frac{f(x+\text{h}) - f(x)}{\text{h}} = \frac{(x+\text{h})^2 + 7(x+\text{h}) - 1 - (x^2+7x-1)}{\text{h}} =$$

$$= \frac{x^2 + 2\text{h}x + \text{h}^2 + 7x + 7\text{h} - 1 - x^2 - 7x + 1}{\text{h}} = 2x + \text{h} + 7$$

$$f'(x) = \lim_{\text{h}\to 0} \frac{f(x+\text{h}) - f(x)}{\text{h}} = \lim_{\text{h}\to 0} (2x + \text{h} + 7) = 2x + 7$$

c) $$\frac{f(x+\text{h}) - f(x)}{\text{h}} = \frac{(x+\text{h})^3 - 5(x+\text{h}) - (x^3 - 5x)}{\text{h}} =$$

$$= \frac{x^3 + 3\text{h}x^2 + 3\text{h}^2x + \text{h}^3 - 5x - 5\text{h} - x^3 + 5x}{\text{h}} = 3x^2 + 3\text{h}x + \text{h}^2 - 5$$

$$f'(x) = \lim_{\text{h}\to 0} \frac{f(x+\text{h}) - f(x)}{\text{h}} = \lim_{\text{h}\to 0} (3x^2 + 3\text{h}x + \text{h}^2 - 5) = 3x^2 - 5$$

d) $$\frac{f(x+\text{h}) - f(x)}{\text{h}} = \frac{\dfrac{x+\text{h}-1}{x+\text{h}} - \dfrac{x-1}{x}}{\text{h}} = \frac{x(x+\text{h}-1) - (x+\text{h})(x-1)}{\text{h}x(x+\text{h})} =$$

$$= \frac{x^2 + \text{h}x - x - (x^2 - x + \text{h}x - \text{h})}{\text{h}x(x+\text{h})} = \frac{1}{x(\text{h}+x)}$$

$$f'(x) = \lim_{\text{h}\to 0} \frac{f(x+\text{h}) - f(x)}{\text{h}} = \lim_{\text{h}\to 0} \frac{1}{x(\text{h}+x)} = \frac{1}{x^2}$$

Reglas de derivación

9 **Halla la función derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 7x^2 - 4x$

b) $f(x) = 3\ cos\ (2x + \pi)$

c) $f(x) = \frac{1}{3x} + \sqrt{x}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

e) $f(x) = \frac{1}{7x+1} + \frac{\sqrt{2x}}{3}$

f) $f(x) = x\ sen\ \frac{x}{2}$

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$

h) $f(x) = ln\ 3x + e^{-x}$

i) $f(x) = \frac{tg\ x}{2}$

j) $f(x) = \sqrt{3}\ arc\ sen\ 2x$

a) $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x - 4 = x^2 + 14x - 4$

b) $f(x) = -3cos\ 2x$

$f'(x) = -3(-sen\ 2x) \cdot 2 = 6sen\ 2x$

c) $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

e) Teniendo en cuenta que $\frac{\sqrt{2x}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{x}$:

$f'(x) = \frac{0 \cdot (7x+1) - 1 \cdot 7}{(7x+1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-7}{(7x+1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{x}}$

f) $f'(x) = 1 \cdot sen\ \frac{x}{2} + x \cdot cos\ \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = sen\ \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\ cos\ \frac{x}{2}$

g) $f(x) = (x-4)^{-1/2}$

$f'(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^{-3/2} = -\frac{1}{2(x-4)\sqrt{x-4}}$

h) $f(x) = ln\ 3 + ln\ x + e^{-x}$

$f'(x) = \frac{1}{x} + e^{-x}(-1) = \frac{1}{x} - e^{-x}$

i) $f'(x) = \frac{1 + tg^2\ x}{2}$ o también $f'(x) = \frac{1}{2\ cos^2\ x}$

j) $f'(x) = \sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1-4x^2}}$

10 **Aplica las reglas de derivación y simplifica si es posible.**

a) $f(x) = (5x-2)^3$

b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{3x} + \dfrac{x}{3}\right)^4$

c) $f(x) = \sqrt[3]{(6-x)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-4}}$

f) $f(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{2x+1}$

g) $f(x) = x^3 \cos^2 3x$

h) $f(x) = tg^3\, x^2$

i) $f(x) = \sqrt{7 \cdot \ln x}$

j) $f(x) = arc\ tg\ \dfrac{x^2}{3}$

a) $f'(x) = 3(5x-2)^2 \cdot 5 = 15(5x-2)^2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{81}\left(\dfrac{1}{x} + x\right)^4$

$$f'(x) = \frac{4}{81}\left(\frac{1}{x}+x\right)^3\left(-\frac{1}{x^2}+1\right) = \frac{4}{81}\left(\frac{1+x^2}{x}\right)^3\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = \frac{4}{81}\,\frac{(x^4-1)\,(x^2+1)^2}{x^5}$$

c) $f(x) = (6-x)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(6-x)^{-1/3}(-1) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{6-x}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{6-x}}$$

d) $f(x) = \dfrac{e^x(1+e^{-2x})}{e^x} = 1 + e^{-2x}$

$f'(x) = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}$

e) $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-4}}}\cdot\frac{3x^2(x^2-4)-x^3\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^3}}\;\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}\;\frac{x(x^3-12x)}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}\cdot\frac{x^3-12x}{(x^2-4)^2}$$

f) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{8}e^{2x+1} + \dfrac{x^3}{8}e^{2x+1}\cdot 2 = \dfrac{e^{2x+1}}{8}(2x^3+3x^2)$

g) $f'(x) = 3x^2\cos^2 3x + x^3\cdot 2\cos 3x\cdot(-\operatorname{sen} 3x)\cdot 3 = 3x^2[\cos^2 3x - 2x\cos 3x\operatorname{sen} 3x] = 3x^2[\cos^2 3x - x\operatorname{sen} 6x]$

h) $f'(x) = 3tg^2\,x^2\cdot(1+tg^2\,x^2)\cdot 2x = 6x\,tg^2\,x^2\cdot(1+tg^2\,x^2)$

i) $f(x) = \sqrt{7}\sqrt{\ln x}$

$$f'(x) = \sqrt{7}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{7}}{2x\sqrt{\ln x}}$$

j) $$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{3}\right)^2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{9}{x^2+9}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{x^2+9}$$

11 **Deriva las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \sqrt{arc\ cos\ e^x}$

b) $f(x) = log\ (sen\ x^2)$

c) $f(x) = sen^2\ x + e^{cos\ x}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{2x}}{2^{x-1}}$

e) $f(x) = e^{sen\ x} \cdot ln\ tg\ x$

f) $f(x) = 3\ cos\ (ln\ x)$

g) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

h) $f(x) = arc\ tg\ \dfrac{1-x}{1+x}$

i) $f(x) = 7^{\sqrt{x}} + \dfrac{cos\ x}{x^2}$

j) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{arc\ cos\ e^x}} \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot e^x = \dfrac{-e^x}{2\sqrt{arc\ cos\ e^x\ (1-e^{2x})}}$

b) $f(x) = ln\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}} = ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^{1/2} = \dfrac{1}{2}\ ln\ \dfrac{x}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\ \frac{1}{\dfrac{x}{x^2+1}} \cdot \frac{1\,(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\ \frac{x^2+1}{x}\ \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{2x(x^2+1)}$$

c) $f'(x) = 2sen\ x\ cos\ x + e^{cos\ x}\ (-sen\ x) = sen\ 2x - sen\ x \cdot e^{cos\ x}$

d) $f(x) = \sqrt[4]{2} \cdot \dfrac{x^{1/4}}{2^{x-1}}$

$$f'(x) = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\dfrac{1}{4} \cdot x^{-3/4} \cdot 2^{x-1} - x^{1/4} \cdot 2^{x-1} \cdot ln\ 2 \cdot 1}{(2^{x-1})^2} = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - ln\ 2\sqrt[4]{x}}{2^{x-1}} = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{1 - 4x\ ln\ 2}{2^{x+1} \cdot \sqrt[4]{x^3}}$$

e) $f'(x) = e^{sen\ x} \cdot cos\ x \cdot ln\ tg\ x + e^{sen\ x} \cdot \dfrac{1}{tg\ x} \cdot \dfrac{1}{cos^2\ x} = e^{sen\ x}\left(cos\ x \cdot ln\ tg\ x + \dfrac{1}{sen\ x\ cos\ x}\right)$

f) $f'(x) = 3\,[-sen\,(ln\ x)] \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{-3\ sen\,(ln\ x)}{x}$

g) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \dfrac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x}}$

h) $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2} \dfrac{-1\,(1+x) - (1-x)\,1}{(1+x)^2} = \dfrac{(1+x)^2}{(1+x)^2 + (1-x)^2}\ \dfrac{-2}{(x+1)^2} = \dfrac{-2}{2+2x^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}$

i) $f'(x) = 7^{\sqrt{x}} \cdot ln\ 7 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{-sen\ x \cdot x^2 - cos\ x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{ln\ 7 \cdot 7^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{x\ sen\ x + 2\ cos\ x}{x^3}$

j) $f(x) = \dfrac{e^x\,(1-e^{-2x})}{e^x\,(1+e^{-2x})} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

$$f'(x) = \frac{-e^{-2x}\,(-2)\,(1+e^{-2x}) - (1-e^{-2x})\,e^{-2x}\,(-2)}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{2e^{-2x}\,(1+e^{-2x}) + 2e^{-2x}\,(1-e^{-2x})}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{4e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}$$

12 **Aplica las propiedades de los logaritmos antes de aplicar las reglas de derivación, para obtener la derivada de estas funciones:**

a) $f(x) = ln\,\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **b)** $f(x) = ln\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$ **c)** $f(x) = ln\,(x \cdot e^{-x})$

d) $f(x) = log\,\dfrac{(3x-5)^3}{x}$ **e)** $f(x) = log\,(tg\,x)^2$ **f)** $f(x) = log\,\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$

a) $f(x) = ln\,(x^2+1) - ln\,(x^2-1)$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{x^4-1} = \frac{-4x}{x^4-1}$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}[ln\,x - ln\,(x^2+1)]$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2+1-2x^2}{x^3+x}\right] = \frac{1-x^2}{2x^3+2x}$$

c) $f(x) = ln\,x + ln\,e^{-x} = ln\,x - x$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

d) $f(x) = 3\,log\,(3x-5) - log\,x$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{3}{3x-5} \cdot \frac{1}{ln\,10} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln\,10} = \frac{1}{ln\,10}\left[\frac{9}{3x-5} - \frac{1}{x}\right] =$$

$$= \frac{1}{ln\,10} \cdot \frac{9x-3x+5}{(3x^2-5x)} = \frac{6x+5}{ln\,10\,(3x^2-5x)}$$

e) $f(x) = 2\,log\,(tg\,x)$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1+tg^2\,x}{tg\,x} \cdot \frac{1}{ln\,10} = \frac{2\,(1+tg^2\,x)}{tg\,x \cdot ln\,10}$$

f) $f(x) = x\,ln\,x$

$$f'(x) = ln\,x + x \cdot \frac{1}{x} = ln\,x + 1$$

Página 327

Recta tangente y recta normal

13 **Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la función f en el punto de abscisa indicado en cada caso.**

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ en $x = 2$ **b)** $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $x = 3$

c) $f(x) = \dfrac{2-x}{x^3}$ en $x = -1$ **d)** $f(x) = ln\,x$ en $x = e^2$

e) $f(x) = sen\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ en $x = \dfrac{\pi}{3}$

a) $f'(x) = 2x - 5$

$f(2) = 0$

$f'(2) = -1$

La recta tangente es $y = -1(x-2) + 0$, es decir, $y = -x + 2$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{-1}(x-2) + 0$, es decir, $y = x - 2$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$f(3) = 2$

$f'(3) = \dfrac{1}{4}$

La recta tangente es $y = \dfrac{1}{4}(x-3) + 2$, es decir, $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{1/4}(x-3)+2$, es decir, $y = -4x + 14$

c) $f'(x) = \dfrac{-1\cdot x^3 - (2-x)\cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \dfrac{2x-6}{x^4}$

$f(-1) = -3$

$f'(-1) = -8$

La recta tangente es $y = -8(x+1) - 3$, es decir, $y = -8x - 11$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{-8}(x+1) - 3$, es decir, $y = \dfrac{1}{8}x - \dfrac{23}{8}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(e^2) = 2$

$f'(e^2) = \dfrac{1}{e^2}$

La recta tangente es $y = \dfrac{1}{e^2}(x - e^2) + 2$, es decir, $y = \dfrac{1}{e^2}x + 1$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{1/e^2}(x-e^2)+2$, es decir, $y = -e^2x + e^4 - 2$

e) $f'(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

La recta tangente es $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{-\sqrt{3}/2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$, es decir, $y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$

14 **Halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente a cada una de las siguientes funciones es igual a 2:**

a) $y = x^2 - 2x$

b) $y = \dfrac{x}{x+2}$

c) $y = 4\sqrt{x+3}$

d) $y = \ln(4x-1)$

a) $f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 2 \;\rightarrow\; 2x - 2 = 2 \;\rightarrow\; x = 2$

b) $f'(x) = \dfrac{1\cdot(x+2) - x\cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{2}{(x+2)^2}$

$f'(x) = 2 \;\rightarrow\; \dfrac{2}{(x+2)^2} = 2 \;\rightarrow\; (x+2)^2 = 1 \;\rightarrow\; x_1 = -1,\; x_2 = -3$

c) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+3}}$

$f'(x) = 2 \to \dfrac{2}{\sqrt{x+3}} = 2 \to \sqrt{x+3} = 1 \to x = -2$

d) $f'(x) = \dfrac{4}{4x-1}$

$f'(x) = 2 \to \dfrac{4}{4x-1} = 2 \to 4x - 1 = 2 \to x = \dfrac{3}{4}$

15 **Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta tangente a f, que sea paralela a la recta dada.**

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ **paralela a** $2x + y + 1 = 0$

b) $f(x) = x^3 - 3x$ **paralela a** $y = 6x + 10$

c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ **paralela a** $5x - y = 0$

a) $2x + y + 1 = 0 \to y = -2x - 1$

Por tanto, la recta tangente debe tener pendiente –2 para que sea paralela.

$f'(x) = 2x + 4$

$f'(x) = -2 \to 2x + 4 = -2 \to x = -3$

$f(-3) = -2$ y la recta tangente es $y = -2(x+3) - 2$.

b) La recta tangente debe tener pendiente 6 para que sea paralela.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 6 \to 3x^2 - 3 = 6 \to x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3}$

Si $x = -\sqrt{3} \to f(-\sqrt{3}) = 0$

La recta tangente en $x = -\sqrt{3}$ es $y = 6(x + \sqrt{3})$

Si $x = \sqrt{3} \to f(\sqrt{3}) = 0$

La recta tangente en $x = \sqrt{3}$ es $y = 6(x - \sqrt{3})$

c) $5x - y = 0 \to y = 5x$

Por tanto, la recta tangente debe tener pendiente 5 para que sea paralela.

$f'(x) = \dfrac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2}$

$f'(x) = 5 \to \dfrac{5}{(x+2)^2} = 5 \to (x+2)^2 = 1 \to x_1 = -1,\ x_2 = -3$

Si $x = -1 \to f(-1) = -4$

La recta tangente en $x = -1$ es $y = 5(x+1) - 4$

Si $x = -3 \to f(-3) = 6$

La recta tangente en $x = -3$ es $y = 5(x+3) + 6$

16 **Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a la función $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.**

Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen haciendo $y = 0$.

$y = 0 \to 4 - x^2 = 0 \to x = -2,\ x = 2$

$f'(x) = -2x$

Si $x = -2 \to f'(-2) = 4$. La recta tangente en $x = -2$ es $y = 4(x+2)$

Si $x = 2 \to f'(2) = -4$. La recta tangente en $x = 2$ es $y = -4(x-2)$

17 **Obtén los puntos donde la recta tangente es horizontal y escribe su ecuación.**

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $y = x^4 - 4x^3$

d) $y = x^3 - 12x$

e) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

f) $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

Los puntos donde la recta tangente es horizontal son aquellos en los que $f'(x) = 0$.

a) $f'(x) = 6x - 2$

$f'(x) = 0 \to 6x - 2 = 0 \to x = \dfrac{1}{3}$

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{1}{3} + 5 = \dfrac{14}{3}$

La ecuación de la recta tangente es $y = \dfrac{14}{3}$

b) $f'(x) = 6x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \to 6x^2 - 6x = 0 \to x = 0,\ x = 1$

$f(0) = 0 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

$f(1) = 0 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = 0$.

c) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 0 \to 4x^3 - 12x^2 = 0 \to x = 0,\ x = 3$

$f(0) = 0 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

$f(3) = -27 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 3$ es $y = -27$.

d) $f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 12 = 0 \to x = -2,\ x = 2$

$f(-2) = 16 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = -2$ es $y = 16$.

$f(2) = -16 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y = -16$.

e) $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \to \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \to x^2 - 1 = 0 \to x = -1,\ x = 1$

$f(-1) = 1 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = -1$ es $y = -2$.

$f(1) = 1 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = 2$.

f) $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \to \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \to x = 0$

$f(0) = 0 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento

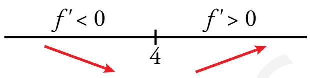
18 **Halla, en cada caso, los puntos singulares de la función y determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**

a) $f(x) = x^2 - 8x + 3$ **b)** $f(x) = 12x - 3x^2$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2$

d) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

a) $f'(x) = 2x - 8$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 2x - 8 = 0 \ \rightarrow \ x = 4$

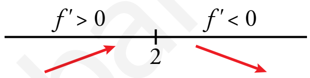


Como $f(4) = -5$, el punto $(4, -5)$ es un punto singular.

Intervalo de crecimiento $(4, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento $(-\infty, 4)$.

b) $f'(x) = 12 - 6x$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 12 - 6x = 0 \ \rightarrow \ x = 2$



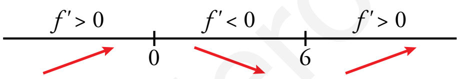
Como $f(2) = 12$, el punto $(2, 12)$ es un punto singular.

Intervalo de crecimiento $(-\infty, 2)$. Intervalo de decrecimiento $(2, +\infty)$.

c) $f'(x) = x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ x^2 - 6x = 0 \ \rightarrow \ x = 0, \ x = 6$

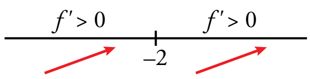
Como $f(0) = 0$ y $f(6) = -36$, los puntos $(0, 0)$ y $(6, -36)$ son puntos singulares.



Intervalos de crecimiento $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento $(0, 6)$.

d) $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 3x^2 + 12x + 12 = 0 \ \rightarrow \ x = -2$



Como $f(-2) = -8$, el punto $(-2, -8)$ es un punto singular.

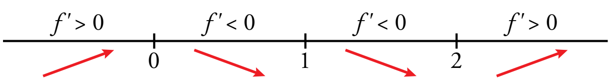
Intervalo de crecimiento $\mathbb{R}$.

e) $Dom = \mathbb{R} - \{1\}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \ \rightarrow \ x = 0, \ x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$ son puntos singulares.



Intervalos de crecimiento $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Intervalos de decrecimiento $(0, 1) \cup (1, 2)$

f) $Dom = \mathbb{R} - \{-2\}$

$f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$

No tiene puntos singulares. Como $f'(x) > 0$ siempre que $x \neq -2$ y la función no está definida en $x = -2$, los intervalos de crecimiento son $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

19 **Comprueba que las siguientes funciones no tienen puntos singulares y determina los intervalos donde crecen o decrecen:**

a) $y = x^3 + 3x$ **b)** $y = \frac{1}{x}$ **c)** $y = \sqrt{x}$ **d)** $y = \ln x$

a) $f'(x) = 3x^2 + 3$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 + 3 = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$, la función es creciente en todo $\mathbb{R}$.

b) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \to -\frac{1}{x^2} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) < 0$ siempre que $x \neq 0$ y no está definida en $x = 0$, los intervalos de decrecimiento son $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

c) $Dom = [0, +\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0 \to \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$ siempre que $x \neq 0$, el intervalo de crecimiento es $[0, +\infty)$.

d) $Dom = (0, +\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \to \frac{1}{x} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$ en su dominio de definición, el intervalo de crecimiento es $(0, +\infty)$.

20 **Halla los puntos singulares de las siguientes funciones y, con ayuda de las ramas infinitas, determina si son máximos o mínimos:**

a) $y = x^3 - 2x^2 + x + 2$ **b)** $y = 3x^2 - x^3$

c) $y = x^4 - 8x^2 + 10$ **d)** $y = -3x^4 - 12x$

e) $y = \frac{3}{x^2 + 1}$ **f)** $y = \frac{x^3 + 4}{x}$

a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 4x + 1 = 0 \to x = \frac{1}{3}, \; x = 1$

Como $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{58}{27}$ y $f(1) = 2$, los puntos $\left(\frac{1}{3}, \frac{58}{27}\right)$ y $(1, 2)$ son puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$$ Por tanto $\left(\frac{1}{3}, \frac{58}{27}\right)$ es un máximo y $(1, 2)$ es un mínimo.

b) $f'(x) = 6x - 3x^2$

$f'(x) = 0 \to 6x - 3x^2 = 0 \to x = 0, \; x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$ son puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$$ Por tanto, $(0, 0)$ es un mínimo y $(2, 4)$ es un máximo.

c) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 16x = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 0,\ x = 2$

Como $f(-2) = -6,\ f(0) = 10$ y $f(2) = -6$, los puntos $(-2, -6)$, $(0, 10)$ y $(2, -6)$ son puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right\}\ \text{Por tanto, } (-2, -6) \text{ y } (2, -6) \text{ son mínimos.}$$

El punto $(0, 10)$ debe ser un máximo porque está entre dos mínimos.

d) $f'(x) = -12x^3 - 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow -12x^3 - 12 = 0 \rightarrow x = -1$

Como $f(-1) = 9$ el punto $(-1, 9)$ es un punto singular.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\end{array}\right\}\ \text{Por tanto, } (-1, 9) \text{ es un máximo.}$$

e) $f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

Como $f(0) = 3$, el punto $(0, 3)$ es un punto singular.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0\end{array}\right\}\ \text{Por tanto, } (0, 3) \text{ es un máximo.}$$

f) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

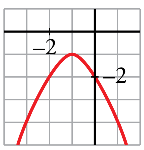
$f'(x) = 2x - \dfrac{4}{x^2}$

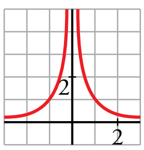
$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - \dfrac{4}{x^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{2}$

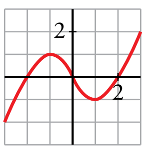
Como $f\left(\sqrt[3]{2}\right) = 3\sqrt[3]{4}$, el punto $\left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right)$ es un punto singular.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right\}\ \text{Por tanto, } \left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right) \text{ es un mínimo.}$$

21 Indica en cada una de estas funciones los valores de x en los que f' es positiva y en los que f' es negativa:

a)


b)


c)


a) $f' > 0$ si $x < -1$

$f' < 0$ si $x > -1$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

$f' < 0$ si $x > 0$

c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

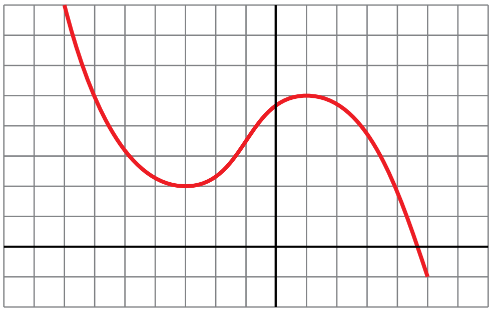
$f' < 0$ si $x \in (-1, 1)$

Gráficas de funciones polinómicas y racionales

22 **Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos que:**

- **Es continua.**
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- **Sus puntos de tangente horizontal son (–3, 2) y (1, 5).**

Indica si los puntos de tangente horizontal son máximos o mínimos.



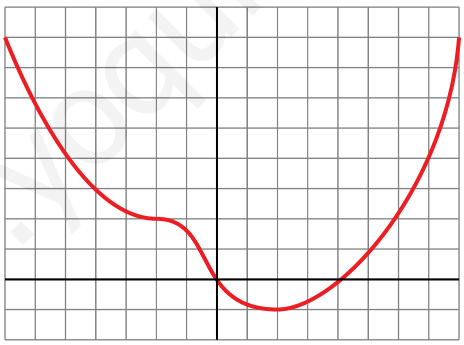
(–3, 2) es un mínimo.

(1, 5) es un máximo.

23 **De una función polinómica sabemos que:**

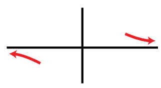
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- **Su derivada es igual a 0 solo en (–2, 2) y en (2, –1).**
- **Corta a los ejes solo en (0, 0) y en (4, 0).**

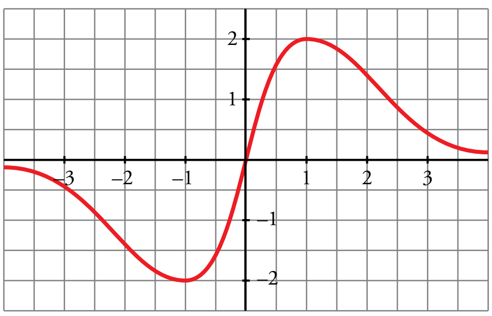
Represéntala gráficamente.



24 **Representa una función continua $y = f(x)$ de la que sabemos que:**

- **Sus puntos de tangente horizontal son (–1, –2) y (1, 2).**
- **Sus ramas infinitas son así:**





25 **Comprueba que la función $y = (x - 1)^3$ pasa por los puntos (0, –1), (1, 0) y (2, 1). Su derivada se anula en el punto (1, 0). ¿Puede ser un máximo o un mínimo ese punto?**

$f'(x) = 3(x-1)^2$: $f(0) = -1 \ \to$ pasa por (0, –1)

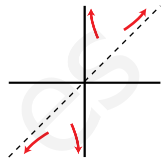
$f(1) = 0 \ \to$ pasa por (1, 0)

$f(2) = 1 \ \to$ pasa por (2, 1)

$f'(1) = 0$

El punto (1, 0) no es ni máximo ni mínimo.

26 **Comprueba que la función $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ tiene dos puntos de tangente horizontal, (–1, –2) y (1, 2); sus asíntotas son $x = 0$ e $y = x$ y la posición de la curva respecto de las asíntotas es la que se indica en la ilustración. Represéntala.**



$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

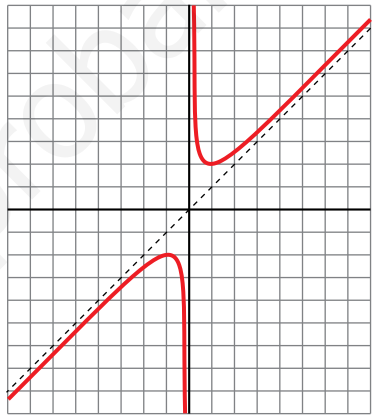
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \ \to \ x = -1, \ x = 1$

Puntos (–1, –2) y (1, 2).

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Asíntota vertical en $x = 0$.

Asíntota oblicua en $y = x$.

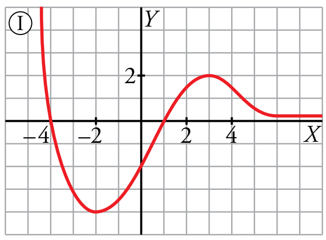


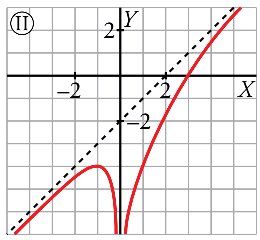
Página 328

27 **Observa estas gráficas y describe:**

a) Sus ramas infinitas, asíntotas y posición de la curva con respecto a ellas.

b) Sus puntos singulares, crecimiento y decrecimiento.





a) • Función I

Tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$.

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y la función queda por encima de la asíntota.

• Función II

La recta $y = x - 2$ es una asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$. En ambos casos, la función queda por debajo de la asíntota.

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical y la función tiende a $-\infty$ por los dos lados.

b) • Función I

El punto (–2, –4) es un mínimo. El punto (3, 2) es un máximo.

Hay otro punto singular, (0,5; –1), pero no es ni máximo ni mínimo.

• Función II

Solo tiene un punto singular, el máximo (–1, –4).

28 **Dada la función** $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ **comprueba que:**

- **Tiene derivada nula en (0, 0).**
- **La recta** $y = 2$ **es una asíntota horizontal.**
- **La posición de la curva respecto a la asíntota es:**

Si $x \to -\infty,\ y < 2$

Si $x \to +\infty,\ y < 2$

Represéntala.

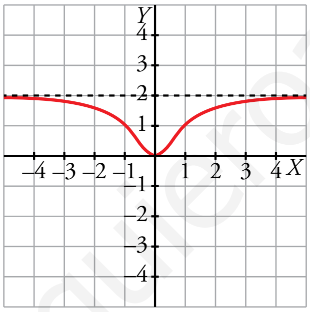
- $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f'(0)=0 \end{array}\right\} \to$ La derivada en (0, 0) es nula.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = 2 \to$ La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.

- $f(x) - 2 = \dfrac{2x^2}{1+x^2} - 2 = -\dfrac{2}{x^2+1}$

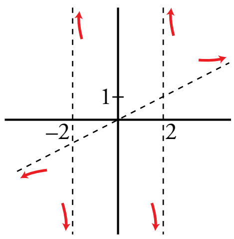
Como la diferencia siempre es negativa, la función queda por debajo de la asíntota $y = 2$.

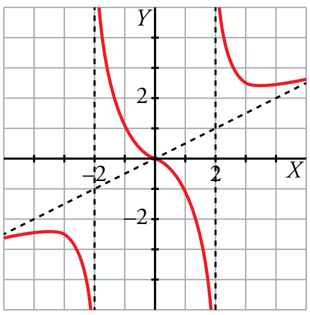


29 **Completa la gráfica de una función de la que sabemos que tiene tres puntos singulares:**

$$\left(-3, \frac{-5}{2}\right),\ (0, 0),\ \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

y que sus ramas infinitas son las representadas a la derecha.





30 **Representa una función $y = f(x)$ de la que conocemos:**

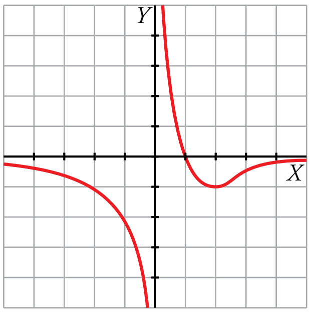
- **Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$**
- **Corta al eje X en $x = 1$.**
- **Asíntota horizontal: $y = 0$**

  Si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$

  Si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$
- **Asíntota vertical: $x = 0$**

  Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$
- **Mínimo en $(2, -1)$.**



31 **Representa $y = f(x)$ de la que conocemos:**

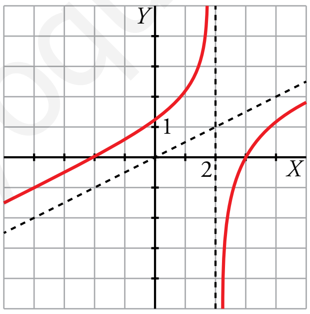
- **Asíntota vertical: $x = 2$**

  Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$

  Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$
- **Asíntota oblicua: $y = x/2$**

  Si $x \to +\infty$, $f(x) < x/2$

  Si $x \to -\infty$, $f(x) > x/2$
- **Cortes con los ejes: $(0, 1)$, $(-2, 0)$, $(3, 0)$**



Para resolver

32 **a) Halla el vértice de la parábola $y = x^2 + 6x + 11$ teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal.**

b) Halla las coordenadas del vértice de una parábola cualquiera $y = ax^2 + bx + c$.

a) $f'(x) = 2x + 6 = 0 \to x = -3$

Punto $(-3, 2)$.

b) $f'(x) = 2ax + b$

$f'(x) = 0 \to 2ax + b = 0 \to x = \dfrac{-b}{2a}$ es la abscisa del vértice.

$f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\dfrac{-b}{2a}\right) + c = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$ es la ordenada de vértice.

33 **Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 1 \to 4a + 2b + c = 1 \\ f'(2) = 2 \to 4a + b = 2 \\ f(5) = -2 \to 25a + 5b + c = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -7 \end{array}$$

La función es $f(x) = -x^2 + 6x - 7$.

34 **Halla el valor de x para el que las tangentes a las curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$ e $y = x^2 + 6x$ sean paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.**

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \to f'(x) = 6x - 2 \\ g(x) = x^2 + 6x \to g'(x) = 2x + 6 \end{array}\right\} 6x - 2 = 2x + 6 \to x = 2$$

Para $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ la tangente en $x = 2$ es:

$y = 10(x - 2) + 13 \to y = 10x - 7$

Para $g(x) = x^2 + 6x$ la tangente en $x = 2$ es:

$y = 10(x - 2) + 16 \to y = 10x - 4$

35 **Halla a, b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x = -4$ y en $x = 0$ y que pase por $(1, 1)$.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4) = 0 \to 48 - 8a + b = 0 \\ f'(0) = 2 \to b = \ \ 0 \\ f(1) = 1 \to 1 + a + b + c = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 6 \\ c = -6 \end{array}$$

La función es $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$.

36 **La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $4x - 3y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?**

Despejamos y de la ecuación de la recta tangente: $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

$f'(2)$ es la pendiente de la recta tangente en $x = 2$, es decir, $f'(2) = \frac{4}{3}$.

Como la recta tangente y la curva pasan por el punto de tangencia, $f(2) = \frac{4}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} = 3$.

37 **Halla una función de segundo grado sabiendo que pasa por $(0, 1)$ y que la pendiente de la recta tangente en el punto $(2, -1)$ vale 0.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \to 1 = c \\ f(2) = -1 \to -1 = 4a + 2b + c \\ f'(2) = 0 \to 0 = 4a + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array}$$

La función es $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

38 **Representa las siguientes funciones hallando los puntos singulares y las ramas infinitas:**

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ **b)** $f(x) = x^4 + 4x^3$ **c)** $f(x) = 12x - x^3$ **d)** $f(x) = -x^4 + 4x^2$

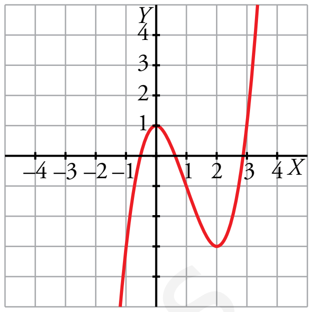
a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 2$

$f(0) = 2,\;\; f(2) = -3 \;\rightarrow\;$ Los puntos singulares son (0, 1) y (2, –3).

$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = -\infty$



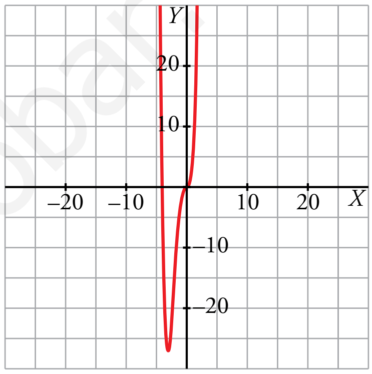
b) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x^3 + 12x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = -3,\; x = 0$

$f(-3) = -27,\; f(0) = 0 \;\rightarrow\;$ Los puntos singulares son (–3, –27) y (0, 0).

$\lim_{x \to +\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$



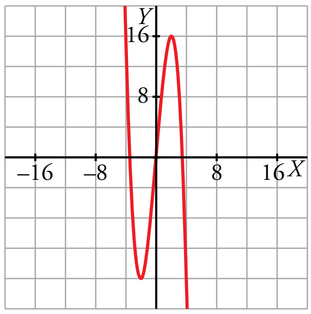
c) $f'(x) = 12 - 3x^2$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 12 - 3x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = -2,\; x = 2$

$f(-2) = -16,\; f(2) = 16 \;\rightarrow\;$ Los puntos singulares son (–2, –16) y (2, 16).

$\lim_{x \to +\infty} (12x - x^3) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (12x - x^3) = +\infty$



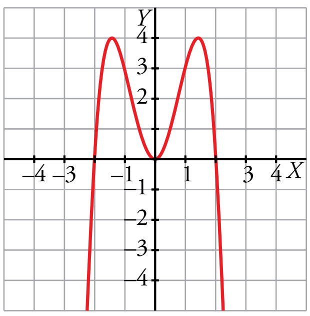
d) $f'(x) = -4x^3 + 8x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x^3 + 8x = 0 \;\rightarrow\; x = -\sqrt{2},\; x = 0,\; x = \sqrt{2}$

$f\left(-\sqrt{2}\right) = 4,\; f(0) = 0,\; f\left(\sqrt{2}\right) = 4 \;\rightarrow\;$ Los puntos singulares son $\left(-\sqrt{2}, 4\right)$, (0, 0) y $\left(\sqrt{2}, 4\right)$.

$\lim_{x \to +\infty} (-x^4 + 4x^2) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (-x^4 + 4x^2) = -\infty$



39 **Estudia y representa.**

a) $y = x^3 - 3x + 2$ **b)** $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$ **c)** $y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$ **d)** $y = x^4 - 8x^2 + 2$

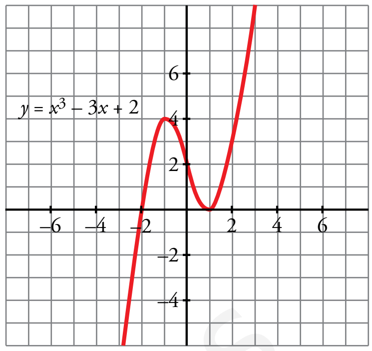
a) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = \pm 1$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \rightarrow (1, 0) \\ f(-1) = 4 \rightarrow (-1, 4) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x + 2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x + 2) = +\infty$$



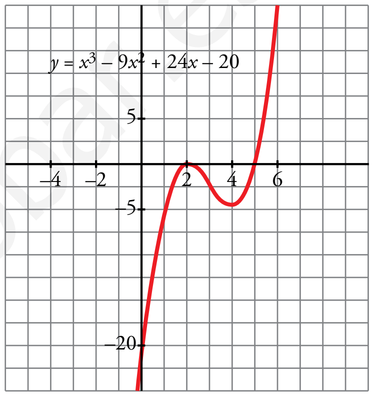
b) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(4) = -4 \rightarrow (4, -4) \\ f(2) = 0 \rightarrow (2, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 9x + 24x - 20) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 9x + 24x - 20) = +\infty$$

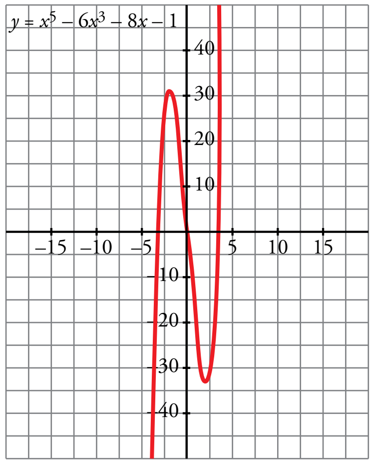


c) $f'(x) = 5x^4 - 18x^2 - 8$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow f(2) = -33 \rightarrow (2, -33) \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = 31 \rightarrow (-2, 31) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = +\infty$$

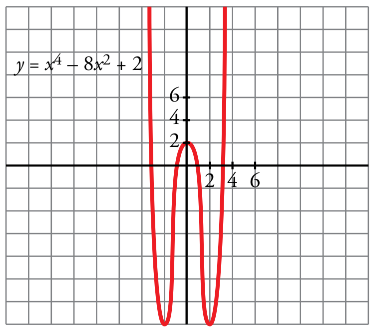


d) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow (0, 2) \\ x = 2 \rightarrow f(2) = -14 \rightarrow (2, -14) \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = -14 \rightarrow (-2, -14) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = -\infty$$

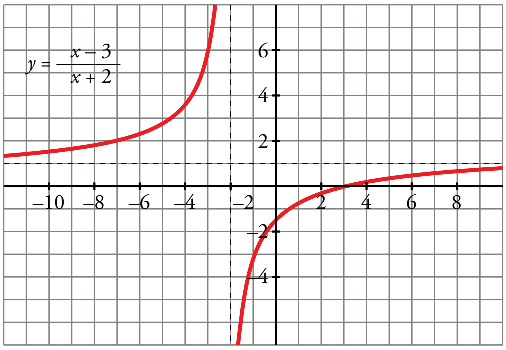


40 **Comprueba que estas funciones no tienen puntos de tangente horizontal. Represéntalas estudiando sus ramas infinitas y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{3} + 4x$ **d)** $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

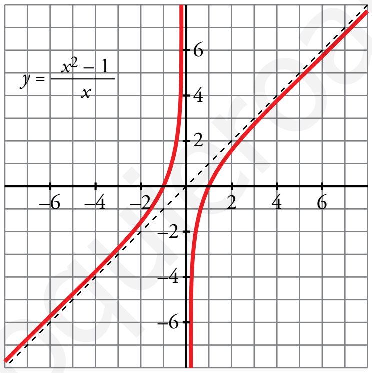
a) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$, (3, 0).



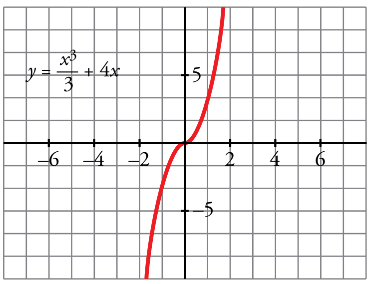
b) $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: (1, 0), (–1, 0)



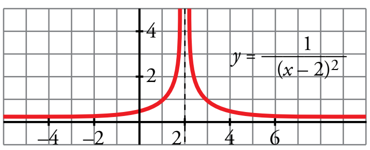
c) $f'(x) = x^2 + 4 \neq 0$

El punto de corte es (0, 0).



d) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$

El punto de corte es $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$.



41 **Estudia y representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 16}$ b) $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$ c) $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 6x + 5}$

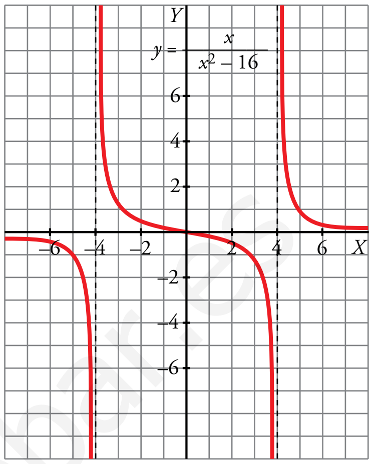
d) $y = \dfrac{(x - 1)^2}{x + 2}$ e) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$ f) $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$

Asíntotas verticales: $x = -4$, $x = 4$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.

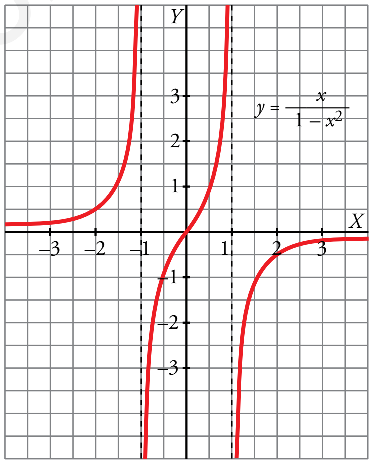


b) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.



c) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 4x + 17}{(x^2 - 6x + 5)^2}$

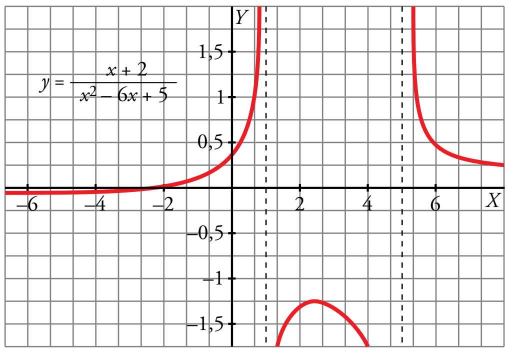
Asíntotas verticales: $x = 5$, $x = 1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

(–6,58; –0,052), (2,58; –1,197)



d) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}$

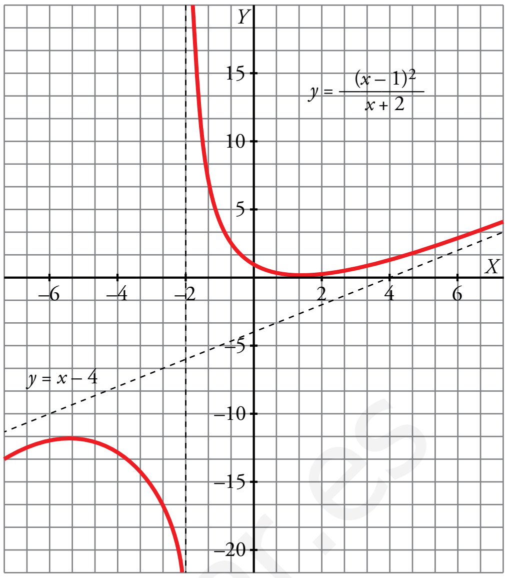
Asíntotas verticales: $x = -2$

Asíntotas oblicuas: $y = x - 4$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son:

(1, 0), (–5, 12)



e) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}$

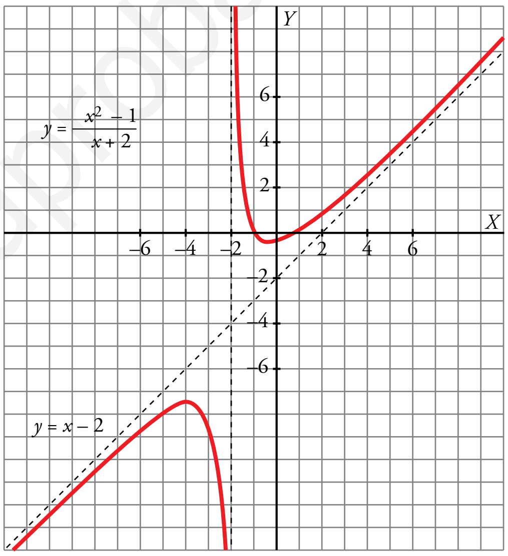
Asíntotas verticales: $x = -2$

Asíntotas oblicuas: $y = x - 2$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

(–0,26; –0,54), (–3,73; –7,46)



f) $f'(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$

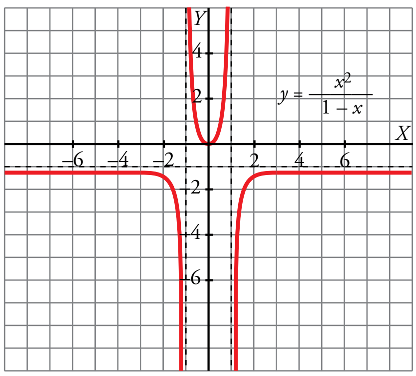
Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = -1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

(0, 0)



Página 329

42 **Halla las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y los mínimos y representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$ **c)** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 - 5}{2x - 4}$

a) $f'(x) = \dfrac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$

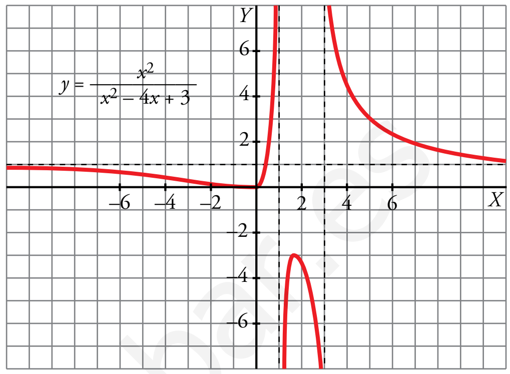
Asíntotas verticales: $x = 3$, $x = 1$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(0, 0)$, $\left(\dfrac{3}{2}, -3\right)$



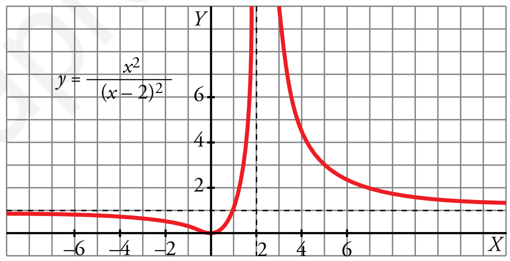
b) $f'(x) = -\dfrac{4x}{(x-2)^3}$

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son: $(0, 0)$



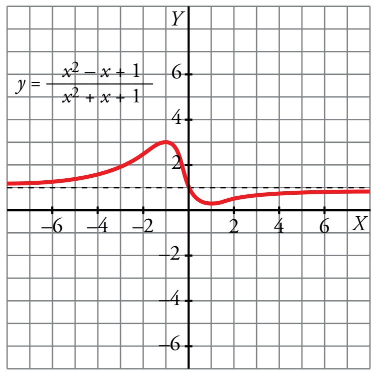
c) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$, $(-1, 3)$

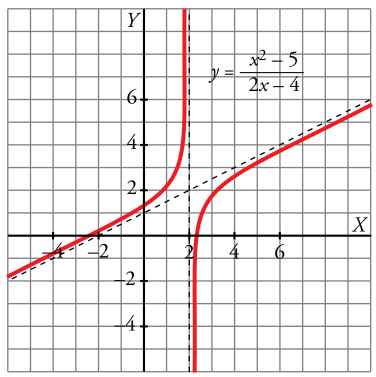


d) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 10}{(2x-4)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas oblicuas: $y = \dfrac{x}{2} + 1$

No hay asíntotas horizontales ni puntos de tangente horizontal.



43 **Calcula el valor de a para que $f(x) = ln\left(\dfrac{x^2}{x+a}\right)$ verifique que $f'(2) = 0$.**

$f(x) = 2ln\, x - ln\,(x + a)$

$f'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x+a} \to f'(2) = 1 - \dfrac{1}{2+a}$

$f'(2) = 0 \to 1 - \dfrac{1}{2+a} = 0 \to a = -1$

44 **Dada $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$, halla el valor de a y b para que la recta tangente a f en $x = -2$ sea $y = 2x - 3$.**

Como la recta tangente en $x = -2$ es $y = 2x - 3$, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = 2(-2) - 3 = -7 \\ f'(-2) = 2 \end{array}\right\}$$

$f'(x) = 6x^2 + 24x + a$

$f'(-2) = 2 \to 6(-2)^2 + 24(-2) + a = 2 \to a = 26$

$f(-2) = -7 \to 2(-2)^3 + 12(-2)^2 + 26(-2) + b = -7 \to b = 13$

45 **Halla el valor de k para que la tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 5x + k$ en $x = 1$ pase por el origen de coordenadas.**

- Pendiente de la recta tangente:

  $f'(x) = 2x - 5 \to f'(1) = -3$

- Punto de tangencia: $x = 1$; $y = 1 - 5 + k \to (1, -4 + k)$

- Ecuación de la recta tangente:

  $y = -4 + k - 3(x - 1)$

- Para que pase por (0, 0), debe verificarse:

  $0 = -4 + k + 3 \to k = 1$

46 **Halla los puntos de la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ en los que la recta tangente forma un ángulo de 45° con el eje de abscisas.**

Si la recta tangente forma un ángulo de 45° con el eje OX, su pendiente es $tg\, 45° = 1$.

Buscamos los puntos donde $f'(x) = 1$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

$f'(x) = 1 \to 3x^2 - 6x + 1 = 1 \to x = 0,\ x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = -2$, los puntos (0, 0) y (2, –2) son los que cumplen las condiciones del problema.

47 **Dada la parábola $y = 5 + 6x - 3x^2$, se traza la cuerda que une los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 3$. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a esa cuerda.**

$f(0) = 5$ y $f(3) = -4$. Por tanto, la pendiente de la cuerda que pasa por estos puntos es $\dfrac{-4-5}{3-0} = -3$.

Tratamos de encontrar el punto que cumple la igualdad $f'(x) = -3$:

$f'(x) = 6 - 6x$

$f'(x) = -3 \to 6 - 6x = -3 \to x = \dfrac{3}{2}$

Como $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 5 + 6 \cdot \dfrac{3}{2} - 3 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{29}{4}$, la recta tangente es $y = -3\left(x - \dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{29}{4}$.

48 **El coste total (en dólares) de fabricación de q unidades de cierto artículo es: $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$**

El coste medio por unidad es: $M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$

a) ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el coste medio por unidad sea mínimo?

b) Calcula $C(q)$ y $M(q)$ para el valor de q que has hallado en el apartado a).

a) $M(q) = \dfrac{3q^2+5q+75}{q}$

$$M'(q) = \frac{(6q+5)q-(3q^2+5q+75)}{q^2} = \frac{6q^2+5q-3q^2-5q-75}{q^2} = \frac{3q^2-75}{q^2} = 0 \;\rightarrow$$

$\rightarrow\; q^2 = 25 \;\rightarrow\; q = 5$ unidades

Se deben fabricar 5 unidades.

b) $C(5) = 175$; $M(5) = 35$

49 **La función $f(x) = \dfrac{60x}{x^2+9}$ indica los beneficios obtenidos por una empresa desde que comenzó a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en años).**

a) Represéntala gráficamente.

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

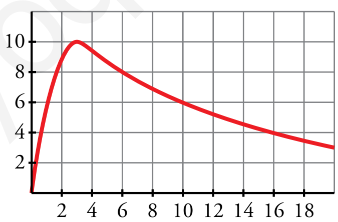
c) ¿Perderá dinero la empresa en algún momento?

a) $f'(x) = \dfrac{60(x^2+9)-60x\cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \dfrac{60x^2+540-120x^2}{(x^2+9)^2} = \dfrac{-60x^2+540}{(x^2+9)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 3$ ($x = -3$ no está en el dominio).

Máximo en (3, 10).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \;\rightarrow$ asíntota horizontal: $y = 0$

La gráfica sería:



b) Beneficio máximo en $x = 3 \;\rightarrow$ A los 3 años.

El beneficio sería $f(3) = 10$ miles de euros.

c) No perderá dinero ni llegará un momento en que no obtenga beneficios ni pérdidas, pues $f(x) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x > 0$.

50 **Aplica la regla de L'Hôpital para resolver los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-1}{sen\ x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\ x}{5x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\ x}{x^2+5x-1}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{ln(2x+1)}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-sen\ x}{sen\ x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x}{x+tg\ x}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-1}{sen\ x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{cos\ x} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\ x}{5x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1+tg^2 x}{5} = \dfrac{1}{5}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2+5x-1} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1/x}{2x+5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x(2x+5)} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln(2x+1)} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\dfrac{2}{2x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x(2x+1)}{2} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{\cos x} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x + \operatorname{tg} x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1+1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{2}$

51 Halla los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4[x - \ln(1+x)]}{x \ln(1+x)}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2(e^x-1)e^x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2e^{2x}-2e^x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{4e^{2x}-2e^x} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4[x - \ln(1+x)]}{x \ln(1+x)} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\left[1 - \dfrac{1}{1+x}\right]}{\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4 \cdot \dfrac{x}{1+x}}{\dfrac{(1+x)\ln(1+x)+x}{1+x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{(1+x)\ln(1+x)+x} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{\ln(1+x) + \dfrac{1+x}{1+x} + 1} = \dfrac{4}{2} = 2$

52 Dada la función $f(x) = ax^3 + bx$, halla a y b para que f pase por el punto (1, 3) y en ese punto la tangente sea paralela a la recta $y = 4x + 1$.

Pasa por (1, 3) $\to f(1) = 3 \to a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = 3 \to a + b = 3$

Para que la recta tangente sea paralela a la recta dada, $f'(1) = 4$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$f'(1) = 4 \to 3a \cdot 1^2 + b = 4 \to 3a + b = 4$

Ahora, resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=3 \\ 3a+b=4 \end{array}\right\} \to a = \frac{1}{2},\ b = \frac{5}{2}$$

53 Determina, en cada caso, los valores máximo y mínimo de la función en el intervalo que se indica.

a) $y = x^2 - 6x - 4,\quad x \in [0, 5]$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5,\quad x \in [-1, 4]$

c) $y = x^3 - 3x^2,\quad x \in [-2, 4]$

d) $y = \dfrac{x}{x^2+1},\quad x \in [0, 2]$

Hallamos los puntos singulares que quedan dentro de los diferentes intervalos, evaluamos en ellos y en los extremos de los intervalos.

a) $f'(x) = 2x - 6$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = 3$

$f(0) = -4 \quad f(3) = -13 \quad f(5) = -9$

El máximo se encuentra en $x = 0$ y vale -4.

El mínimo se encuentra en $x = 3$ y vale -13.

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 12x + 12 = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

$f(-1) = -24 \quad f(2) = 3 \quad f(4) = 83$

El máximo se encuentra en $x = 4$ y vale 83.

El mínimo se encuentra en $x = -1$ y vale -24.

c) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 2$

$f(-2) = -20 \quad f(0) = 0 \quad f(2) = -4 \quad f(4) = 16$

El máximo se encuentra en $x = 4$ y vale 16.

El mínimo se encuentra en $x = -2$ y vale -20.

d) $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = -1,\; x = 1$

$f(0) = 0 \quad f(-1) = f(1) = \dfrac{1}{2} \quad f(2) = \dfrac{2}{5}$

El máximo se encuentra en $x = 1$ y vale $\dfrac{1}{2}$.

El mínimo se encuentra en $x = 0$ y vale 0.

54 Halla los máximos y los mínimos de las funciones $y = sen\, x$ e $y = cos\, x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

• $y = sen\, x$

$f'(x) = cos\, x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; cos\, x = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2},\; x = \dfrac{3\pi}{2}$

$f(0) = 0 \quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \quad f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1 \quad f(2\pi) = 0$

El máximo se encuentra en $x = \dfrac{\pi}{2}$ y vale 1.

El mínimo se encuentra en $x = \dfrac{3\pi}{2}$ y vale -1.

• $y = cos\, x$

$f'(x) = -sen\, x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; sen\, x = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = \pi,\; x = 2\pi$

$f(0) = 1 \quad f(\pi) = -1 \quad f(2\pi) = 1$

Los máximos se encuentran en $x = 0$ y $x = 2\pi$ y valen 1.

El mínimo se encuentra en $x = \pi$ y vale -1.

55 **Estudia el crecimiento de las siguientes funciones y di cuáles son sus máximos y sus mínimos:**

a) $y = (x^2 - 3x + 1)e^x$

b) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

c) $y = ln\,(x^2 + 1)$

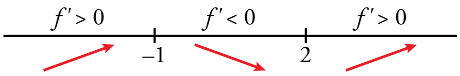
d) $y = x\,ln\,x$

a) Puntos singulares:

$f'(x) = (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x + 1)e^x = e^x(x^2 - x - 2)$

$f'(x) = 0 \;\to\; e^x(x^2 - x - 2) = 0 \;\to\; x^2 - x - 2 = 0 \;\to\; x = -1,\;\; x = 2$

Crecimiento y decrecimiento:



$f(-1) = \dfrac{5}{e} \;\to\; \left(-1, \dfrac{5}{e}\right)$ es un máximo.

$f(2) = -e^2 \;\to\; (-1, -e^2)$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

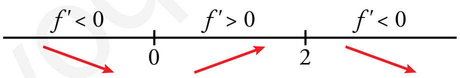
Intervalos de decrecimiento $(-1, 2)$.

b) Puntos singulares:

$f'(x) = \dfrac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{2x - x^2}{e^x}$

$f'(x) = 0 \;\to\; \dfrac{2x - x^2}{e^x} = 0 \;\to\; x = 0,\;\; x = 2$

Crecimiento y decrecimiento:



$f(0) = 0 \;\to\; (0, 0)$ es un mínimo.

$f(2) = \dfrac{4}{e^2} \;\to\; \left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$ es un máximo.

Intervalos de crecimiento $(0, 2)$.

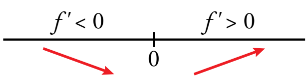
Intervalos de decrecimiento $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) Puntos singulares:

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

$f'(x) = 0 \;\to\; \dfrac{2x}{x^2 + 1} = 0 \;\to\; x = 0$

Crecimiento y decrecimiento:



$f(0) = 0 \;\to\; (0, 0)$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento $(0, +\infty)$.

Intervalos de decrecimiento $(-\infty, 0)$.

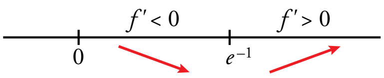
d) $Dom = (0, +\infty)$

Puntos singulares:

$f'(x) = ln\, x + 1$

$f'(x) = 0 \;\to\; ln\, x + 1 = 0 \;\to\; x = e^{-1}$

Crecimiento y decrecimiento:



$f(e^{-1}) = -e^{-1} \;\to\; (e^{-1}, -e^{-1})$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento $(e^{-1}, +\infty)$.

Intervalos de decrecimiento $(0, e^{-1})$.

56 **Prueba que existe un punto de la curva $y = arc\ tg\, \dfrac{x-1}{x+1}$ en el que la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.**

La bisectriz del primer cuadrante tiene pendiente 1. Por tanto, el punto en el que la recta tangente es paralela a ella, cumple la ecuación.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

$f'(x) = 1 \;\to\; \dfrac{1}{x^2+1} = 1 \;\to\; x = 0$

$f(0) = -\dfrac{\pi}{4} \;\to\;$ En el punto $\left(0, -\dfrac{\pi}{4}\right)$ la tangente a la curva es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

57 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de estas funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ -2x + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} e^x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Llamemos $f_1(x) = x^2 - 2x + 1$ y $f_2(x) = -2x + 5$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = 1 \\ f_2(2) = 1 \end{array}\right\}$ Por tanto, la función $f(x)$ también es continua en el punto de ruptura y, en consecuencia, lo es en todo $\mathbb{R}$.

$f'_1(x) = 2x - 2$ y $f'_2(x) = -2$

$\left.\begin{array}{l} f'_1(2) = 2 \\ f'_2(2) = -2 \end{array}\right\}$ Como $f'_1(2) \neq f'_2(2)$, la función $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

La derivada queda así:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b) Llamemos $g_1(x) = 2x - 5$ y $g_2(x) = \sqrt{x-2}$. Ambas funciones son continuas y derivables donde están definidas.

$\left.\begin{array}{l} g_1(3) = 1 \\ g_2(3) = 1 \end{array}\right\}$ Por tanto, la función $g(x)$ también es continua en el punto de ruptura y, en consecuencia, lo es en todo $\mathbb{R}$.

$g'_1(x) = 2$ y $g'_2(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$

$\left.\begin{array}{l} g'_1(3) = 2 \\ g'_2(3) = 1/2 \end{array}\right\}$ Como $g'_1(3) \neq g'_2(3)$, la función $g(x)$ no es derivable en $x = 3$.

La derivada queda así:

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

c) Llamemos $h_1(x) = e^x + 2$ y $h_2(x) = x^2 + x + 3$. Ambas funciones son continuas y derivables.

$\left.\begin{array}{l} h_1(0) = 3 \\ h_2(0) = 3 \end{array}\right\}$ Por tanto, la función $h(x)$ también es continua en el punto de ruptura y, en consecuencia, lo es en todo $\mathbb{R}$.

$h'_1(x) = e^x$ y $h'_2(x) = 2x + 1$

$\left.\begin{array}{l} h'_1(0) = 1 \\ h'_2(0) = 1 \end{array}\right\}$ Como $h'_1(0) = h'_2(0)$, la función $h(x)$ es derivable en $x = 0$ y $h'(0) = 1$.

La derivada queda así:

$$h'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

58 **Calcula, en cada caso, los valores de m y n para que las funciones siguientes sean derivables en $\mathbb{R}$:**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \le 2 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} mx^2 + nx - 3 & \text{si } x < 1 \\ 2nx - 4 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x \le 0 \\ mx + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d) $j(x) = \begin{cases} mx^2 + 3x & \text{si } x < -2 \\ x^2 - nx - 4 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

a) Llamemos $f_1(x) = x^2 - 5x + m$ y $f_2(x) = -x^2 + nx$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

Para que la función sea continua en el punto de ruptura $x = 2$ debe ser:

$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = -6 + m \\ f_2(2) = -4 + 2n \end{array}\right\} \to -6 + m = -4 + 2n$

$f'_1(x) = 2x - 5$ y $f'_2(x) = -2x + n$

Para que sea derivable en el punto de ruptura $x = 2$ debe ser:

$\left.\begin{array}{l} f'_1(2) = -1 \\ f'_2(2) = -4 + n \end{array}\right\} \to -1 = -4 + n$

Resolvemos el sistema:

$\left.\begin{array}{l} -6 + m = -4 + 2n \\ -1 = -4 + n \end{array}\right\} \to$ Los valores son $m = 8$, $n = 3$.

b) Llamemos $g_1(x) = mx^2 + nx - 3$ y $g_2(x) = 2nx - 4$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

Para que la función sea continua en el punto de ruptura $x = 1$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} g_1(1) = m + n - 3 \\ g_2(1) = 2n - 4 \end{array}\right\} \to m + n - 3 = 2n - 4$$

$g'_1(x) = 2mx + n$ y $g'_2(x) = 2n$

Para que sea derivable en el punto de ruptura $x = 1$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} g'_1(1) = 2m + n \\ g'_2(1) = 2n \end{array}\right\} \to 2m + n = 2n$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} m + n - 3 = 2n - 4 \\ 2m + n = 2n \end{array}\right\} \to \text{Los valores son } m = 1,\ n = 2.$$

c) Llamemos $h_1(x) = (x - 1)^3$ y $h_2(x) = mx + n$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

Para que la función sea continua en el punto de ruptura $x = 0$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} h_1(0) = -1 \\ h_2(0) = n \end{array}\right\} \to n = -1$$

$h'_1(x) = 3(x - 1)^2$ y $h'_2(x) = m$

Para que sea derivable en el punto de ruptura $x = 0$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} h'_1(0) = 3 \\ h'_2(0) = m \end{array}\right\} \to m = 3$$

d) Llamemos $j_1(x) = mx^2 + 3x$ y $j_2(x) = x^2 - nx - 4$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

Para que la función sea continua en el punto de ruptura $x = -2$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} j_1(-2) = 4m - 6 \\ j_2(-2) = 2n \end{array}\right\} \to 4m - 6 = 2n$$

$j'_1(x) = 2mx + 3$ y $j'_2(x) = 2x - n$

Para que sea derivable en el punto de ruptura $x = -2$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} j'_1(-2) = -4m + 3 \\ j'_2(-2) = -4 - n \end{array}\right\} \to -4m + 3 = -4 - n$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4m - 6 = 2n \\ -4m + 3 = -4 - n \end{array}\right\} \to \text{Los valores son } m = 2,\ n = 1.$$

Página 330

59 Dada las funciones $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x$ y $f(x) = e^{2x}$ halla, en cada caso, f', f'', f''', f^{IV}. ¿Cuál será la derivada enésima de cada una de las funciones dadas?

- $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x$

  $f'(x) = 4x^3 - 10x + 6$

  $f''(x) = 12x^2 - 10$

  $f'''(x) = 24x$

  $f^{IV}(x) = 24$

  $f^{V}(x) = 0$ y, desde esta, todas las derivadas sucesivas siguientes.

- $f(x) = e^{2x}$

  $f'(x) = 2\,e^{2x}$

  $f''(x) = 4\,e^{2x}$

  $f'''(x) = 8\,e^{2x}$

  $f^{IV}(x) = 16\,e^{2x}$

  La fórmula general, teniendo en cuenta que los coeficientes son potencias de 2, es:

  $f^{n}(x) = 2^n e^{2x}$

60 Halla dos números positivos cuya suma sea 100 y su producto sea máximo.

Sean x e y dos números positivos.

$x + y = 100 \ \rightarrow\ y = 100 - x$

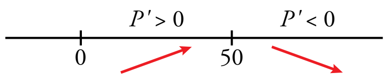
El producto es $P = xy = x(100 - x) = 100x - x^2$

Buscamos que el producto sea máximo:

$P' = 100 - 2x$

$P' = 0 \ \rightarrow\ 100 - 2x = 0 \ \rightarrow\ x = 50 \ \rightarrow\ y = 100 - 50 = 50$

Ahora comprobamos si el valor $x = 50$ es un máximo:



Por tanto, cuando $x = y = 50$ se obtiene el producto máximo que es, $P = 2\,500$.

61 Calcula dos números cuya suma sea 50 y tales que la suma de sus cuadrados sea mínima.

Sean x e y dos números.

$x + y = 50 \ \rightarrow\ y = 50 - x$

La suma de los cuadrados es $S = x^2 + y^2 = x^2 + (50 - x)^2 = 2x^2 - 100x + 2\,500$

Buscamos que la suma de cuadrados sea mínima:

$S' = 4x - 100$

$S' = 0 \ \rightarrow\ 4x - 100 = 0 \ \rightarrow\ x = 25 \ \rightarrow\ y = 50 - 25 = 25$

Ahora comprobamos si el valor $x = 25$ es un mínimo:

$S' < 0$ 25 $S' > 0$

Por tanto, cuando $x = y = 25$ se obtiene la suma de cuadrados mínima que es, $S = 1\,250$.

62 Encuentra dos números positivos cuyo producto sea 100 y su suma sea mínima.

Sean x, y los números positivos.

$xy = 100 \to y = \dfrac{100}{x}$

La suma es $S = x + y = x + \dfrac{100}{x}$

Queremos encontrar la suma mínima:

$S' = 1 - \dfrac{100}{x^2}$

$S' = 0 \to 1 - \dfrac{100}{x^2} = 0 \to x = \pm 10 \to x = 10$ (solo es válido el resultado positivo)

Veamos si es un mínimo:

0    $S' < 0$ 10 $S' > 0$

Por tanto, cuando $x = 10$, $y = \dfrac{100}{10} = 10$, se obtiene la suma mínima, que es $S = 20$.

63 Halla la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 30 cm cuya área sea la mayor posible.

** Llama x a la mitad de la base.*

Si llamamos x a la mitad de la base y h a la altura del triángulo, el lado desigual mide $2x$ y cada uno de los lados iguales mide $\dfrac{30 - 2x}{2} = 15 - x$.

Por el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{(15 - x)^2 - x^2} = \sqrt{225 - 30x}$

El área del triángulo es $A = \dfrac{2x\sqrt{225 - 30x}}{2} = x\sqrt{225 - 30x}$

$A' = \sqrt{225 - 30x} + \dfrac{x(-30)}{2\sqrt{225 - 30x}} = \dfrac{225 - 30x - 15x}{\sqrt{225 - 30x}} = \dfrac{225 - 45x}{\sqrt{225 - 30x}}$

$A' = 0 \to \dfrac{225 - 45x}{\sqrt{225 - 30x}} = 0 \to 225 - 45x = 0 \to x = 5$ cm

Comprobamos si hemos obtenido un máximo.

0    $A' > 0$ 5 $A' < 0$

En efecto, $x = 5$ cm es un máximo. La base mide 10 cm, la altura mide $h = \sqrt{225 - 150} = 5\sqrt{3}$ cm y el área máxima es $A = 25\sqrt{3}$ cm^2.

64 **Con 100 m de valla queremos delimitar una parcela rectangular aprovechando una pared, de modo que solo tengamos que vallar tres de sus lados. Calcula las dimensiones de la parcela de área máxima que podemos vallar.**

Llamamos x a los lados del rectángulo perpendiculares a la pared e y al lado paralelo a ella.

$2x + y = 100 \;\to\; y = 100 - 2x$

El área del rectángulo es:

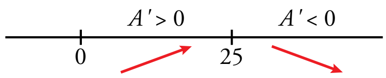
$A = xy = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$

Queremos hallar el valor que da lugar al área máxima:

$A' = 100 - 4x$

$A' = 0 \;\to\; 100 - 4x = 0 \;\to\; x = 25$ m

Comprobamos que es un máximo:



Por tanto, el área máxima se da si $x = 25$ m, $y = 100 - 50 = 50$ m y es $A = 25 \cdot 50 = 1\,250$ m^2.

65 **Halla los lados del rectángulo de área máxima entre todos los que tienen la diagonal igual a 12 cm.**

Llamemos x, y a la base y a la altura del rectángulo, respectivamente.

$x^2 + y^2 = 12^2 \;\to\; y = \sqrt{144 - x^2}$

El área del rectángulo es:

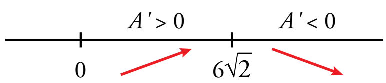
$A = xy = x\sqrt{144 - x^2}$

Hallamos el valor que da el área máxima:

$$A' = \sqrt{144 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{144 - x^2}} = \frac{144 - 2x^2}{\sqrt{144 - x^2}}$$

$A' = 0 \;\to\; \dfrac{144 - 2x^2}{\sqrt{144 - x^2}} = 0 \;\to\; 144 - 2x^2 = 0 \;\to$ Obtenemos solo una solución válida: $x = 6\sqrt{2}$ cm.

Comprobamos que es un máximo:



Los lados $x = 6\sqrt{2}$ cm, $y = \sqrt{144 - (6\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{2}$ cm nos dan el rectángulo de área máxima, que es $A = 72$ cm^2.

66 **Se quiere construir un barril cilíndrico con una capacidad de 150 *l*. Halla el radio y la altura del cilindro para que la cantidad de chapa empleada en su construcción sea mínima.**

Sean r y h el radio y la altura del cilindro, respectivamente.

$\pi r^2 \mathrm{h} = 150 \;\to\; \mathrm{h} = \dfrac{150}{\pi r^2}$

La cantidad de chapa es igual a la suma del área lateral más las áreas de las tapas:

$$A = 2\pi r\mathrm{h} + 2\pi r^2 = 2\left(\pi r\,\frac{150}{\pi r^2} + \pi r^2\right) = 2\left(\frac{150}{r} + \pi r^2\right)$$

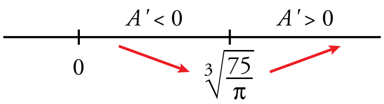
Hallamos el valor que da el área mínima.

$$A' = 2\left(-\frac{150}{r^2} + 2\pi r\right)$$

$$A' = 0 \rightarrow -\frac{150}{r^2} + 2\pi r = 0 \rightarrow 2\pi r = \frac{150}{r^2} \rightarrow r^3 = \frac{150}{2\pi} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{h} = \frac{150}{\pi r^2} = \frac{150}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}\right)^2} = 2\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$$

Comprobamos que $r = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$ es un mínimo:



Por tanto, las medidas son $r = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$ dm, $\text{h} = 2\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$ dm.

67 De todos los ortoedros de base cuadrada y área total igual a 20 cm² halla las dimensiones del que tiene el mayor volumen.

Supongamos que x es el lado de la base cuadrada y que y es la altura del ortoedro.

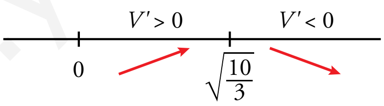
El área total es igual a 20 cm² $\rightarrow 2x^2 + 4xy = 20 \rightarrow y = \frac{10 - x^2}{2x}$

El volumen del ortoedro es $V = x^2 y = x^2\,\frac{10 - x^2}{2x} = \frac{10x - x^3}{2}$.

Hallamos el valor de x que da el volumen máximo.

$$V' = \frac{10 - 3x^2}{2}$$

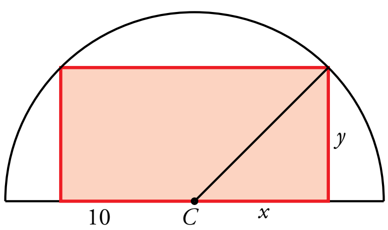
$V' = 0 \rightarrow \frac{10 - 3x^2}{2} = 0 \rightarrow x = \sqrt{\frac{10}{3}}$ (el resultado negativo no tiene sentido).



La altura es $y = \frac{10 - \sqrt{10/3}^2}{2\sqrt{10/3}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$ y el volumen máximo, $V = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}$ cm³.

68 En un semicírculo de radio 10 cm se inscribe un rectángulo. Calcula las dimensiones de dicho rectángulo para que su área sea máxima.

Sean x e y la semibase y la altura del rectángulo, respectivamente.



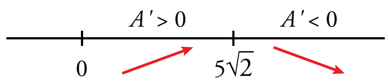
$x^2 + y^2 = 10^2 \rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$

El área es $A = 2x\sqrt{100 - x^2}$

Hallamos el valor de x que da el área máxima:

$$A' = 2\left(\sqrt{100-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}\right) = 2\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

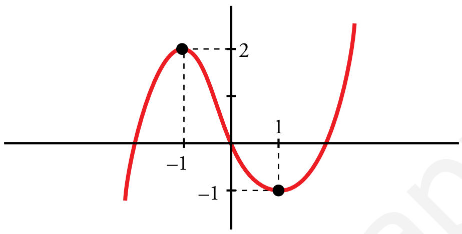
$A' = 0 \;\to\; 2\dfrac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}} = 0 \;\to\; 100-2x^2 = 0 \;\to\; x = 5\sqrt{2}$ (el resultado negativo no tiene sentido).



Si $x = 5\sqrt{2}$ cm $\to$ $y = \sqrt{100-(5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}$ cm y el área máxima es $A = 50$ cm^2.

Cuestiones teóricas

69 **Dibuja una función que tenga derivada nula en $x = 1$ y en $x = -1$, derivada negativa en el intervalo [–1, 1] y positiva para cualquier otro valor de x.**

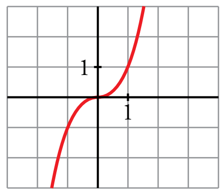


70 **Pon ejemplos de funciones f cuya derivada sea $f'(x) = 2x$. ¿Cuántas existen?**

Existen infinitas.

$f(x) = x^2 + k$, donde x es cualquier número.

71 **Esta es la gráfica de la función $y = x^3$.**



a) ¿Tiene algún punto singular?

b) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$?

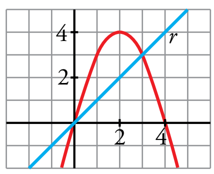
c) ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en $x = 0$?

a) El punto (0, 0) tiene tangente horizontal. Este es el único punto singular.

b) La función es creciente en $x = 0$.

c) La recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

72 **¿Existe algún punto de la función $y = 4x - x^2$ en el que la tangente sea paralela a la recta r? En caso afirmativo, hállalo.**



$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 4-2x \\ \text{Pendiente de la recta} = 1 \end{array}\right\} \; 4-2x = 1 \;\to\; x = \frac{3}{2}$$

Punto $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{15}{4}\right)$

73 **Demuestra, utilizando la derivada, que la abscisa del vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es $x = \dfrac{-b}{2a}$.**

$f'(x) = 2ax + b = 0 \;\to\; x = \dfrac{-b}{2a}$

74 **Sabiendo que $f'(2) = 0$, ¿cuál de estas afirmaciones es correcta?**

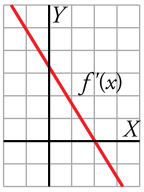
a) La función f tiene máximo o mínimo en $x = 2$.

b) La recta tangente en $x = 2$ es horizontal.

c) La función pasa por el punto (2, 0).

La correcta es la b).

75



Esta es la gráfica de f', la función derivada de f.

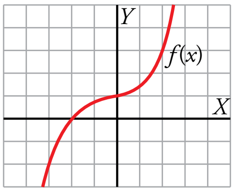
a) ¿Tiene f algún punto de tangente horizontal?

b) ¿Es f creciente o decreciente?

a) Sí, en $x = 2$, puesto que $f'(2) = 0$.

b) Si $x < 2$ es creciente, pues $f' > 0$; y si $x > 2$ es decreciente, pues $f' > 0$.

76



Observa la gráfica de la función $y = f(x)$.

¿Cuál será la gráfica de una función $y = g(x)$ tal que $g'(x) = f'(x)$ y $g(0) = -1$?

Como $f(0) = 1$, debe ser $g(x) = f(x) - 2$, es decir, sería la misma gráfica que la de $f(x)$ pero desplazada dos unidades hacia abajo. De esta forma:

$g(0) = f(0) - 2 = 1 - 2 = -1$

$g'(x) = D[f(x) - 2] = f'(x)$

77 **Sabemos que $f'(x) = \dfrac{1}{x-3}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Halla, si es posible:**

a) $Df[g(2)]$

b) $Df[g(x)]$

c) $Dg[f(2)]$

a) $Df[g(2)] = Df(2^2 + 1) = Df(5) = \dfrac{1}{5-3} = \dfrac{1}{2}$

b) $Df[g(x)] = Df(x^2 + 1) = \dfrac{1}{x^2+1-3} = \dfrac{1}{x^2-2}$

c) No es posible porque no se puede determinar $f(2)$.

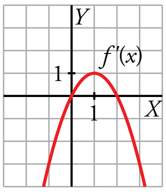
78 **Sabemos que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ y $h(x) = e^{f(x)}$. ¿Cuál de estos tres valores corresponde a $h'(0)$?:**

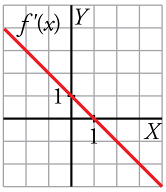
a) $\dfrac{1}{e}$ **b) 0** **c) 1**

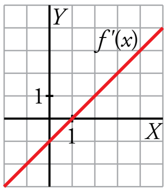
$h'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

Por tanto, $h'(0) = e^{f(0)} \cdot f'(0) = e^0 \cdot 1 = 1$, que se corresponde con b).

79 **¿Cuál de estas gráficas corresponde a la función derivada de una curva que tiene un máximo en $x = 1$? ¿Por qué?:**

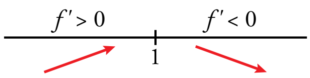
a)


b)


c)


La gráfica del apartado b), porque $f'(1) = 0$.

Además,



En consecuencia, $x = 1$ es un máximo.

80 **¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.**

a) Si $f'(a) > 0$, entonces f es creciente en $x = a$.

b) Si $f'(a) = 0$, entonces f no crece ni decrece en $x = a$.

c) Si f es decreciente en $x = a$, entonces $f'(a) < 0$.

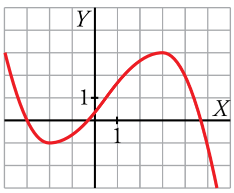
a) Verdadero.

b) Falso. Hay funciones con puntos singulares donde la función es creciente. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es creciente en el punto singular (0, 0).

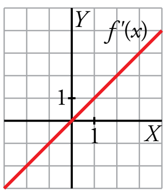
c) Falso. La función $f(x) = -x^3$ siempre es decreciente y $f'(0) = 0$.

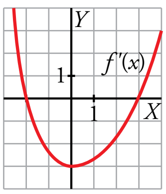
Página 331

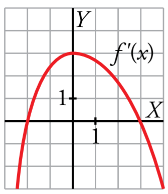
81 **Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$.**



¿Cuál de las siguientes gráficas puede ser la de $f'(x)$? Justifícalo:

a)


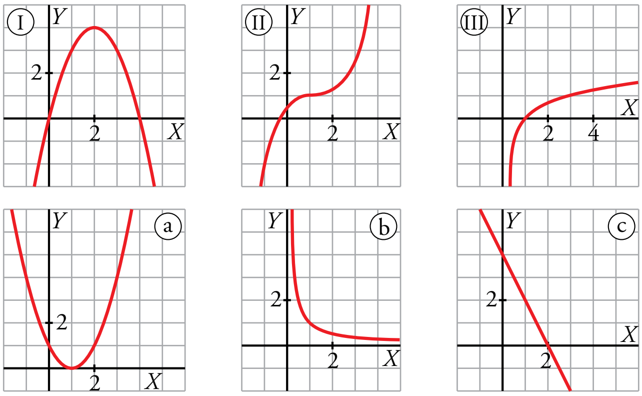
b)


c)


La gráfica del apartado c), porque $f'(-2) = f'(3) = 0$ al ser $x = -2$ y $x = 3$ puntos singulares de $f(x)$.

Como $f(x)$ crece en el intervalo $(-2, 3)$, $f'(x) > 0$ y esto solo curre en el apartado c). El resto de la gráfica de c) es coherente con la de $f(x)$.

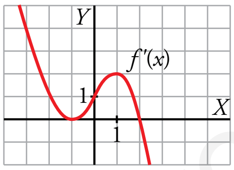
82 **Asocia a cada una de las gráficas I, II, III la gráfica de su función derivada.**

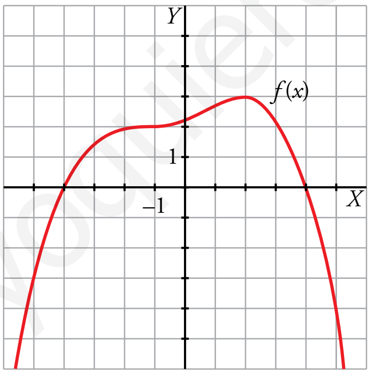


I → c II → a III → b

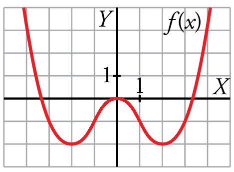
Para profundizar

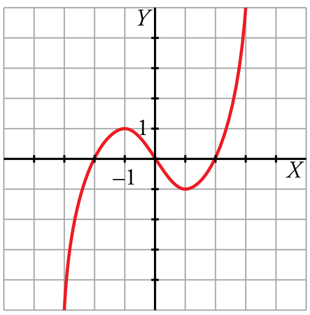
83 **Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos que $f(-1) = 2$, $f(2) = 3$ y que tiene por gráfica de su función derivada $f'(x)$ la siguiente:**





84 **Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y representa de forma aproximada la función $y = f'(x)$.**





85 Halla las asíntotas oblicuas de la función $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ y estudia la posición de la curva con respecto a ellas. Calcula los puntos singulares y representa la función.

Asíntotas oblicuas:

Como la función no es un cociente de polinomios, hallamos las asíntotas oblicuas usando límites.

Recordemos que si la asíntota es $y = ax + b$, entonces:

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = 0$$

Cuando $x \to +\infty$, la asíntota oblicua es $y = x$.

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x} = -1 \text{ (porque } x \text{ es negativa)}$$

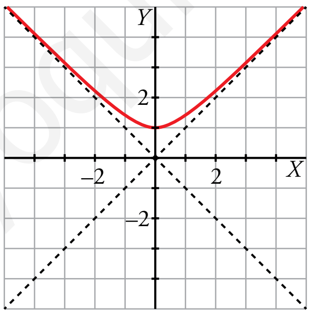
$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - (-x)\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)} = 0$$

Cuando $x \to -\infty$, la asíntota oblicua es $y = -x$.

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Esta derivada solo se anula si $x = 0$. Como $f(0) = 1$, el único punto singular es (0, 1).



86 Prueba que la función $f(x) = \sqrt{x}$ no tiene derivada en $x = 0$.

El dominio de definición de $f(x)$ es el intervalo (0, +∞), por tanto, para poder usar la definición de derivada, solo podemos calcular el límite por la derecha.

La derivada en $x = 0$ debería ser el límite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}h}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Como el límite anterior no existe, la función $f(x) = \sqrt{x}$ no es derivable en $x = 0$.

87 **Dada la función:** $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \le 0 \\ ln\,(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$**, determina los valores de** a**,** b **y** c **para que la función sea continua, tenga un máximo en** $x = -1$ **y la tangente en** $x = -2$ **sea paralela a la recta** $y = 2x$**.**

Llamamos $f_1(x) = ax^2 + bx + c$ y $f_2(x) = ln\,(x + 1)$. Ambas funciones son continuas y derivables donde están definidas.

Para que sea continua en $x = 0$, debe ocurrir que $f_1(0) = f_2(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f_1(0) = c \\ f_2(0) = 0 \end{array}\right\} \to c = 0$$

Para que tenga un máximo en $x = -1$, debe ocurrir que $f'(-1) = 0$, es decir, $f'_1(-1) = 0$.

$f'_1(x) = 2ax + b$

$2a(-1) + b = 0 \to -2a + b = 0$

Para que la tangente en $x = -2$ sea paralela a la recta $y = 2x$, debe ser $f'(-2) = 2$, es decir, $f'_1(-2) = 2$.

Por tanto, $2a(-2) + b = 2 \to -4a + b = 2$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -2a + b = 0 \\ -4a + b = 2 \end{array}\right\} \to a = -1,\ b = -2$$

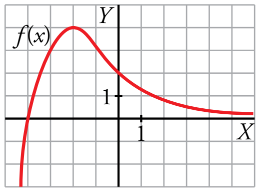
La función es $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \le 0 \\ ln\,(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Ahora podemos comprobar que el punto $(-1, 1)$ es un máximo de $f(x)$ estudiando $f'_1(x) = -2x - 2$ en el intervalo de definición de $f_1(x)$.

Autoevaluación

Página 331

1 **Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y responde.**



a) ¿Cuál es la T.V.M. en los intervalos [0, 3] y [–4, –2]?

b) ¿Tiene algún punto de tangente horizontal?

c) ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?

d) Sabemos que la tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. ¿Cuánto vale $f'(0)$?

a) T.V.M. $[0, 3] = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{1/2 - 2}{3} = -\dfrac{1}{2}$

T.V.M. $[-4, -2] = \dfrac{f(-2) - f(-4)}{-2 - (-4)} = \dfrac{4 - 0}{-2 + 4} = 2$

b) Sí, $P(-2, 4)$.

c) Si $x < -2$, $f'(x) > 0$.

d) La recta $y = -x$ (bisectriz del 2.º cuadrante) tiene pendiente igual a –1. Por tanto, $f'(0) = -1$.

2 **Dada $f(x) = x^2 - 3x$, prueba que $f'(-2) = -7$ aplicando la definición de derivada.**

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$$

$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) = 4 + 6 = 10$

$f(-2 + h) = (-2 + h)^2 - 3(-2 + h) = 4 - 4h + h^2 + 6 - 3h = h^2 - 7h + 10$

$f(-2 + h) - f(-2) = h^2 - 7h$

$$\frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \frac{h^2 - 7h}{h} = h - 7$$

$$\lim_{h \to 0} h - 7 = -7$$

Por tanto, $f'(-2) = -7$.

3 **Halla la derivada de las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x^2}$ **b)** $y = ln\left(\dfrac{x}{3} \cdot e^{-x}\right)$ **c)** $y = cos^2\, \pi x$ **d)** $y = \left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right)^3$

a) $f(x) = x^{1/3} + 2x^{-2}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} - 4x^{-3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{x^3}$$

b) $f(x) = ln\left(\dfrac{x}{3}\right) + ln\, e^{-x} = ln\, x - ln\, 3 - x$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$$

c) $f'(x) = 2\pi\, cos\, \pi\, x\, (-sen\, \pi x) = -2\pi\, cos\, \pi x \cdot sen\, \pi x$

d) $f'(x) = 3\left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right)^2 D\left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right) = 3\,\dfrac{x^4}{(x - 2)^2} \cdot \dfrac{2x(x - 2) - x^2}{(x - 2)^2} = \dfrac{3x^4(x^2 - 4x)}{(x - 2)^4}$

4 **Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = ln\, x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$.**

Punto de tangencia: $x = 1$, $y = ln\, 1^2 = 0 \;\to\; P(1, 0)$

Pendiente de la recta tangente: $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x} \;\to\; f'(1) = 2$

Ecuación: $y = 0 + 2(x - 1) \;\to\; y = 2x - 2$

5 **Halla los puntos singulares de la función $y = 2 + (1 - x)^3$. ¿Tiene máximo o mínimo relativo esa función?**

$f(x) = 2 + (1 - x)^3 \;\to\; f'(x) = 3(1 - x)^2(-1) = -3(1 - x)^2$

$f'(x) = 0 \;\to\; -3(1 - x)^2 = 0 \;\to\; 1 - x = 0 \;\to\; x = 1$

$f(1) = 2 + (1 - 1)^3 = 2$

Punto singular: (1, 2).

Como $f'(x) = -3(1 - x)^2$ es menor que 0 para cualquier valor de $x \neq 1$, f es decreciente en todo su dominio y, por tanto, el punto singular no es máximo ni mínimo.

6 **Dada la función: $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{2 - x}$**

a) Estudia las asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas.

b) Halla los máximos y los mínimos.

c) Represéntala.

a) • Asíntotas verticales. Recta $x = 2$ porque este valor anula el denominador pero no el numerador.

IZQUIERDA: $\dfrac{1{,}99^2 - 2 \cdot 1{,}99 + 4}{2 - 1{,}99} = 398 \;\to\; f(x) \to +\infty$

DERECHA: $\dfrac{2{,}01^2 - 2 \cdot 2{,}01 + 4}{2 - 2{,}01} = -402 \;\to\; f(x) \to -\infty$

• Ramas infinitas. Como la diferencia entre los grados del numerador y del denominador es 1, tiene una asíntota oblicua.

$\dfrac{x^2 - 2x + 4}{-x + 2} = -x - \dfrac{4}{x - 2} \;\to$ La recta $y = -x$ es la asíntota oblicua.

$f(x) - (-x) = -\dfrac{4}{x - 2}$

Si $x \to -\infty$, $f(x) - (-x) > 0 \;\to$ La función está encima de la asíntota.

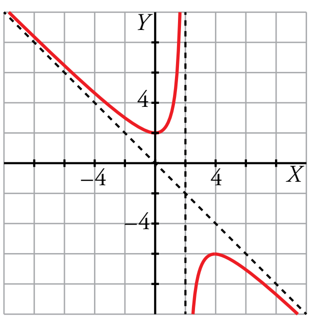
Si $x \to -\infty$, $f(x) - (-x) < 0 \;\to$ La función está debajo de la asíntota.

b) $f'(x) = \dfrac{(2x - 2)(2 - x) - (x^2 - 2x + 4) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \dfrac{-x^2 + 4x}{(2 - x)^2}$

$f'(x) = 2 \;\to\; \dfrac{-x^2 + 4x}{(2 - x)^2} = 0 \;\to\; -x^2 + 4x = 0 \;\to\; x = 0,\; x = 4$

$f(0) = 0$, $f(4) = -6 \;\to$ Los puntos (0, 2) y (4, –6) son puntos singulares, donde el primero es un mínimo y el segundo es un máximo.

c)



7 Representa la función $f(x) = x^3 - 12x + 16$.

$y = x^3 - 12x + 16$ es una función polinómica, por ello es continua en $\mathbb{R}$.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 12x + 16) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 12x + 16) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 3x^2 - 12$

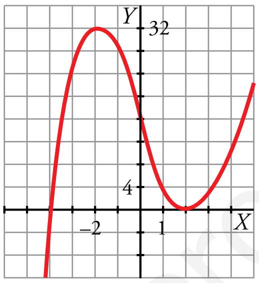
$$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 12 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 3 + 16 = 0 \to (2, 0)$

$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 16 = 32 \to (-2, 32)$

Los puntos singulares son $(2, 0)$ y $(-2, 32)$.

Esta es su gráfica:



8 Estudia y representa $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntota vertical: $x = 0$. Posición $\begin{cases} x \to 0^-, & f(x) \to -\infty \\ x \to 0^+, & f(x) \to -\infty \end{cases}$

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1;\ y = 1. \text{ Posición } \begin{cases} x \to +\infty, & f(x) < 1 \\ x \to -\infty, & f(x) < 1 \end{cases}$$

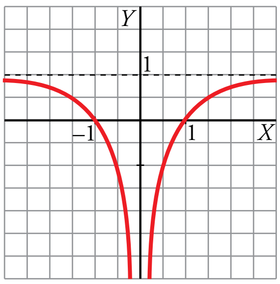
Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x\,x^2 - (x^2 - 1)\,2x}{(x^2)^2} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$f'(x) = 0 \to \dfrac{2}{x^3} = 0$. No tiene solución.

No tiene puntos singulares.

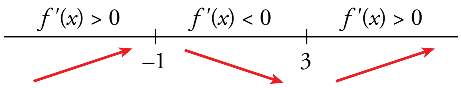
Esta es su gráfica:



9 **Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.**

$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \to f'(x) = x^2 - 2x - 3$

Buscamos los valores de x para los que $f'(x) > 0 \to x^2 - 2x - 3 > 0$



Intervalos de crecimiento de f: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

Intervalos de decrecimiento de f: $(-1, 3)$

La función tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 3$.

10 **Calcula el valor de b y c para que la función $y = x^3 + bx^2 + c$ tenga un punto singular en $P(2, -3)$.**

Si $P(2, -3)$ es un punto singular, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = -3 \\ f'(2) = 0 \end{array}\right\}$$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2^3 + b \cdot 2^2 + c = -3 \\ 3 \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 4b + c = -11 \\ 4b = -12 \end{array}\right\} \to b = -3, \ c = 1$$

11 **Halla dos números cuya suma sea 34 y tales que su producto sea máximo.**

Supongamos que los números son x e y:

$x + y = 34 \to y = 34 - x$

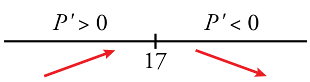
Buscamos el producto máximo:

$P = xy = x(34 - x) = 34x - x^2$

$P' = 34 - 2x$

$P' = 0 \to 34 - 2x = 0 \to x = 17 \to y = 17$

Comprobamos que el valor obtenido es un máximo del producto



Por tanto, los números son $x = 17$, $y = 17$ y el producto máximo es 289.

Resuelve

Página 337

Relación funcional y relación estadística

En cada uno de los siguientes casos debes decir si, entre las dos variables que se citan, hay relación funcional o relación estadística (correlación) y, en este último caso, indicar si es positiva o negativa:

a) En un conjunto de familias:

Estatura media de los padres - Estatura media de los hijos

b) Entre los países del mundo respecto a España:

Volumen de exportación - Volumen de importación

c) En los países del mundo:

Tasa de mortalidad infantil - Médicos por cada 1 000 habitantes

d) En las viviendas de una ciudad:

kWh consumidos durante enero - Coste del recibo de la luz

Número de personas en cada casa - Coste del recibo de la luz

e) En los equipos de fútbol:

Posición al finalizar la liga - Número de partidos perdidos

Posición al finalizar la liga - Número de partidos ganados

a) Estadística, porque la estatura media de los padres no nos permite saber exactamente la estatura media de los hijos. Hay correlación positiva. Normalmente, los hijos de padres altos son altos.

b) Estadística, porque el volumen de exportación no nos permite saber exactamente el volumen de importación. Hay correlación negativa. Normalmente, los países que exportan mucho, importan poco.

c) Estadística, porque la tasa de mortalidad infantil no nos permite saber exactamente el número de médicos por cada 1 000 habitantes. Hay correlación negativa. Normalmente, los países que tienen una tasa de mortalidad infantil grande, tienen pocos médicos por cada 1 000 habitantes.

d) *kWh consumidos durante enero - Coste del recibo de la luz* → Funcional; si conocemos los kWh consumidos durante enero, podemos calcular el coste del recibo de la luz.

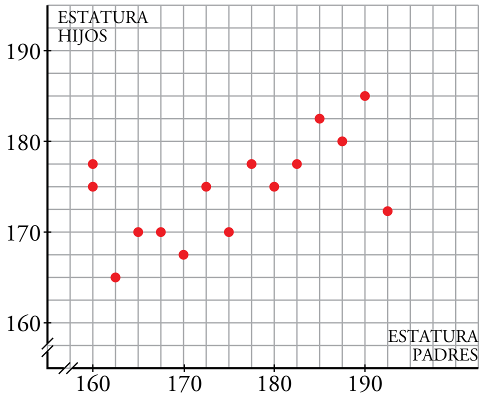
Número de personas en cada casa - Coste del recibo de la luz → Estadística, porque el número de personas en cada casa no nos permite saber exactamente el coste del recibo de la luz. Hay correlación positiva. Normalmente, cuantas más personas hay en una casa, más luz se consume.

e) *Posición al finalizar la liga - Número de partidos perdidos* → Estadística, porque la posición al finalizar la liga no nos permite saber exactamente el número de partidos perdidos. Hay correlación negativa. Normalmente, cuanto más alta es la posición en la liga, menos partidos se han perdido.

Posición al finalizar la liga - Número de partidos ganados → Estadística, porque la posición al finalizar la liga no nos permite saber exactamente el número de partidos ganados. Hay correlación positiva. Normalmente, cuanto más alta es la posición en la liga, más partidos se han ganado.

Ejemplo de relación estadística

En la siguiente gráfica, cada punto corresponde a un chico. La abscisa es la estatura de su padre, y la ordenada, su propia altura:



a) Identifica a Guillermo y Gabriel, hermanos de buena estatura, cuyo padre es bajito.

b) Identifica a Sergio, de estatura normalita, cuyo padre es muy alto.

c) ¿Podemos decir que hay una cierta relación entre las estaturas de estos 15 chicos y las de sus padres?

a) Guillermo y Gabriel están representados mediante los puntos (160, 175) y (160; 177,5).

b) Sergio está representado con el punto (192,5; 172,5).

c) Sí; en general, cuanto más alto sea el padre, más altos son los hijos.

1 Distribuciones bidimensionales. Nubes de puntos

Página 339

1 ¿Verdadero o falso?

a) En una distribución bidimensional, para cada valor de x solo puede haber un valor de y.

b) Cuantos más puntos tenga una distribución bidimensional, más fuerte es su correlación.

c) Las series temporales son distribuciones estadísticas en las que una de las variables es el tiempo. Aunque no sean distribuciones bidimensionales propiamente dichas, pueden tratarse del mismo modo que estas.

a) Falso, se pueden mirar las nubes de puntos de esta misma página.

b) Falso, la correlación depende de la relación entre las características que se estudian en una población, no del número de elementos de la población.

c) Verdadero.

2 Correlación lineal

Página 341

1 ¿Verdadero o falso?

a) Cuanto más próximos estén a una recta los puntos de una distribución bidimensional, más fuerte es su correlación lineal.

b) Si la recta de regresión tiene pendiente negativa, la correlación lineal es negativa.

c) Si los puntos de la nube no se aproximan a ninguna recta, entonces las variables están incorreladas.

a) Verdadero. Porque la correlación estudia las distancias de los puntos a la recta de regresión. Cuanto más pequeña es la distancia a la recta, mayor es la correlación.

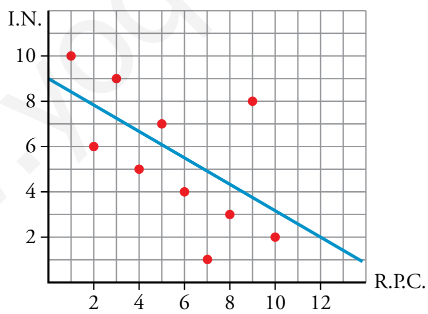
b) Verdadero. Una recta de pendiente negativa indica, como el signo del coeficiente de correlación, que al aumentar una variable, la otra disminuye.

c) Verdadero.

2 La siguiente tabla muestra cómo se ordenan entre sí diez países, A, B, C…, según dos variables, R.P.C. (*renta per cápita*) e I.N. (*índice de natalidad*). Representa los resultados en una nube de puntos, traza la recta de regresión y di cómo te parece la correlación.

PAÍSES	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
R.P.C.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I.N.	10	6	9	5	7	4	1	3	8	2

La correlación es negativa y moderadamente alta (–0,62).



3 Parámetros asociados a una distribución bidimensional

Página 343

1 ¿Verdadero o falso?

a) El signo de la correlación (r) coincide con el de la covarianza (σ_{xy}).

b) Si cambiamos las unidades en que se expresa la variable x, entonces se modifican los valores de $\bar{x}$, σ_x, σ_{xy} y r.

c) Aunque cambiemos las unidades en que se da la variable x (o la y, o ambas) el valor de la correlación, r, no se modifica.

a) Verdadero, $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$; como σ_x y σ_y son positivas, el signo de r es el de σ_{xy}.

b) Falso. Varían todos los parámetros menos r, porque r es el único que no tiene dimensiones.

c) Verdadero.

2 Obtén mediante cálculos manuales los coeficientes de correlación de las distribuciones con las que hemos trabajado en el epígrafe anterior:

Salto de altura - Salto con pértiga

Salto de altura - 1 500 m lisos

Salto de altura - Lanzamiento de peso

Hazlo también con una calculadora con modo LR.

a) x: salto de altura

y: salto con pértiga

Elaboramos la tabla como en el ejercicio resuelto:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	1	1	1	1
2	4	4	16	8
3	2	9	4	6
4	3	16	9	12
5	5	25	25	25
6	7	36	49	42
7	6	49	36	42
8	8	64	64	64
36	36	204	204	200

$\bar{x} = \dfrac{36}{8} = 4,5 \qquad \bar{y} = \dfrac{36}{8} = 4,5$

$\sigma_x = \sqrt{\dfrac{204}{8} - 4,5^2} = 2,2913$

$\sigma_y = \sqrt{\dfrac{204}{8} - 4,5^2} = 2,2913$

$\sigma_{xy} = \dfrac{204}{8} - 4,5 \cdot 4,5 = 4,75$

$r = \dfrac{4,75}{2,2913 \cdot 2,2913} = 0,90475$

b) x: salto de altura

y: 1 500 m lisos

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	3	1	9	3
2	2	4	4	4
3	5	9	25	15
4	1	16	1	4
5	7	25	49	35
6	6	36	36	36
7	4	49	16	28
8	8	64	64	64
36	36	204	204	189

$\bar{x} = \dfrac{36}{8} = 4,5 \qquad \bar{y} = \dfrac{36}{8} = 4,5$

$\sigma_x = \sqrt{\dfrac{204}{8} - 4,5^2} = 2,2913$

$\sigma_y = \sqrt{\dfrac{204}{8} - 4,5^2} = 2,2913$

$\sigma_{xy} = \dfrac{189}{8} - 4,5 \cdot 4,5 = 3,375$

$r = \dfrac{3,375}{2,2913 \cdot 2,2913} = 0,64285$

c) x: salto de altura

y: lanzamiento de peso

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	7	1	49	7
2	5	4	25	10
3	8	9	64	24
4	6	16	36	24
5	4	25	16	20
6	1	36	1	6
7	3	49	9	21
8	2	64	4	16
36	36	204	204	128

$\bar{x} = \dfrac{36}{8} = 4{,}5 \qquad \bar{y} = \dfrac{36}{8} = 4{,}5$

$\sigma_x = \sqrt{\dfrac{204}{8} - 4{,}5^2} = 2{,}2913$

$\sigma_y = \sqrt{\dfrac{204}{8} - 4{,}5^2} = 2{,}2913$

$\sigma_{xy} = \dfrac{128}{8} - 4{,}5 \cdot 4{,}5 = -4{,}25$

$r = \dfrac{-4{,}25}{2{,}2913 \cdot 2{,}2913} = -0{,}80952$

4 Recta de regresión

Página 345

1 ¿Verdadero o falso?

a) Cuanto más fuerte sea la correlación, más puntos habrá de la nube que se encuentren exactamente sobre la recta de regresión.

b) Cuanto más fuerte sea la correlación, más cerca de la recta de regresión estarán los puntos de la nube.

c) Cuanto más fuerte sea la correlación, más fiables serán las estimaciones hechas a partir de la recta de regresión.

a) Verdadero. Como r es muy grande, la distancia de los puntos a la recta es muy pequeña o nula.

b) Falso. Habrá muchos puntos cerca de la recta, pero puede haber puntos aislados lejos de la recta.

c) Verdadero. Los valores de una de las variables son más predecibles, puesto que están muy próximos a la recta de regresión.

5 Hay dos rectas de regresión

Página 346

1 ¿Verdadero o falso?

a) En una distribución bidimensional en la que se estudien conjuntamente las estaturas (x) y los pesos (y) de un grupo de jóvenes en la cual $\bar{x} = 170$ cm e $\bar{y} = 65$ kg, es imposible que las rectas de regresión sean $y = 0{,}8x - 67$ e $y = 1{,}1x - 121$.

b) Si en una distribución bidimensional es $\bar{x} = 3$ e $\bar{y} = 5$, entonces es posible que las rectas de regresión sean $y = 2x - 1$ e $y = -x + 8$, pues ambas se cortan en $(3, 5)$.

c) Si las rectas de regresión son $y = \frac{1}{5}x + 10$ e $y = 11x - 2$, entonces la correlación es débil porque las rectas forman un ángulo próximo a 90°.

a) $\left.\begin{cases} y = 0{,}8x - 67 \\ y = 1{,}1x - 121 \end{cases}\right\}$ $x = 180{,}0;\ y = 77{,}0 \ \rightarrow$ Se cortan en (180, 77).

El punto de corte de las rectas de regresión debe ser $(\bar{x}, \bar{y}) = (170, 65)$, luego es verdadera la afirmación.

b) Verdadero, por el razonamiento anterior.

c) Verdadero. Se puede observar en las gráficas de esta página.

6 Tablas de contingencia

Página 347

1 Calcula la media y la desviación típica de la distribución marginal de la *x*. Para ello, asigna a cada intervalo de edades su marca de clase (punto medio) y al último intervalo asígnale el valor 75.

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
21,5	50	1 075	462,25	23 112,5
30,5	85	2 592,5	930,25	79 071,25
43	140	6 020	1 849	258 860
58	100	5 800	3 364	336 400
75	125	9 375	5 625	703 125
	500	24 862,5		1 400 568,75

$$\bar{x} = \frac{24\,862,5}{500} = 49{,}725$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1\,400\,568,75}{500} - 49,725^2} = 18{,}126$$

2 La distribución marginal de la *y* corresponde a una variable cualitativa. Por tanto, no tiene media ni desviación típica. El único parámetro que podemos asignarle es la moda. ¿Cuál es?

Moda = Deportes.

Página 348

3 Comprueba que la siguiente tabla corresponde a la distribución de *x* condicionada a $y \in$ {INF, DOC}.

x	18-25	26-35	36-50	51-65	MÁS DE 65
f	9	21	36	26	46

Halla su media y su desviación típica.

x_i	21,5	30,5	43	58	75	
INF	4	6	15	11	25	61
DOC	5	15	21	15	21	77
INF-DOC	9	21	36	26	46	138

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
21,5	9	193,5	462,25	4 160,25
30,5	21	640,5	930,25	19 535,25
43	36	1 548	1 849	66 564
58	26	1 508	3 364	87 464
75	46	3 450	5 625	258 750
	138	7 340		436 473,5

$$\bar{x} = \frac{7\,340}{138} = 53,188$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{436\,473,5}{138} - 53,188^2} = 18{,}273$$

4 **Haz la distribución de *y* condicionada a $x < 36$.**

y_i	f_i
INF	10
DOC	20
ENT	20
DEP	54
PEL	26
OTR	5

5 **Comprueba, calculando las frecuencias relativas, que el suceso PEL no es independiente de la edad.**

x_i	21,5	30,5	43	58	75	
PEL	11	15	20	16	11	73
	0,15068493	0,20547945	0,2739726	0,21917808	0,15068493	

Se observa que las frecuencias relativas varían según la edad.

6 **Haz la distribución de *x* condicionada a NO DEPORTE y compara sus frecuencias relativas con las de la distribución marginal de la *x*.**

x_i	21,5	30,5	43	58	75	
NO DEP	61	105	166	119	138	589

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
21,5	61	1 311,5	462,25	28 197,25
30,5	105	3 202,5	930,25	97 676,25
43	166	7 138	1 849	306 934
58	119	6 902	3 364	400 316
75	138	10 350	5 625	776 250
	589	28 904		1 609 373,5

$$\bar{x} = \frac{28\,904}{589} = 49{,}073$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1\,609\,373{,}5}{500} - 40{,}073^2} = 28{,}471$$

La media es similar; sin embargo, la desviación típica es mayor si consideramos los datos de las personas que no ven deportes.

Página 350

7 Otro grupo de 154 personas han realizado los mismos tests, con los resultados que se dan en la tabla de la derecha. Halla el coeficiente de correlación.

y_i \ x_i	0	1	2	3	4
0	17	22	6	4	1
1	15	14	8	2	0
2	13	6	10	5	1
3	5	4	2	6	2
4	3	1	0	3	4

De los datos obtenemos las siguientes tablas:

y_i \ x_i	0	1	2	3	4	
0	17	22	6	4	1	50
1	15	14	8	2	0	39
2	13	6	10	5	1	35
3	5	4	2	6	2	19
4	3	1	0	3	4	11
	53	47	26	20	8	154

Distribución marginal de la x:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
0	53	0	0	0
1	47	47	1	47
2	26	52	4	104
3	20	60	9	180
4	8	32	16	128
	154	191		459

$$\bar{x} = \frac{194}{154} = 1,26$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{459}{154} - 126^2} = 1,18$$

Distribución marginal de la y:

y_i	f_i	$y_i \cdot f_i$	y_i^2	$y_i^2 \cdot f_i$
0	50	0	0	0
1	39	39	1	39
2	35	70	4	140
3	19	57	9	171
4	11	44	16	176
	154	210		526

$$\bar{y} = \frac{210}{154} = \frac{15}{11} = 1,36$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{526}{154} - 136^2} = 1,25$$

$$\sigma_{xy} = \frac{400}{154} - 1,36 \cdot 1,18 = 0,99$$

$$r = \frac{0,99}{1,25 \cdot 1,18} = 0,67$$

Ejercicios y problemas resueltos

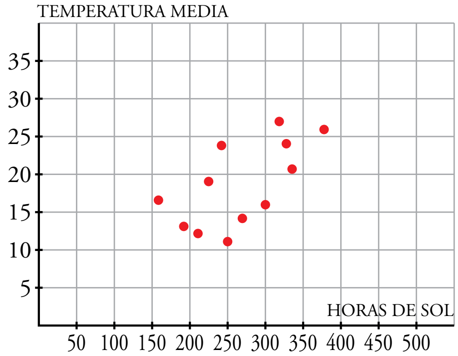
Página 351

1. Relación funcional y relación estadística

Hazlo tú. Haz lo mismo con las variables *Horas de sol - Temperatura media en Almería*.

	E	F	Mr	Ab	My	Jn	Jl	Ag	S	O	N	D
HORAS DE SOL	216	251	271	300	335	329	377	321	244	225	159	194
TEMPERATURA MEDIA	12,2	10,8	14,5	15,6	20,4	24,1	25,8	26,7	23,7	19,3	16,4	13,5

a) Es una distribución bidimensional en la que se relacionan las variables x: horas de sol e y: temperatura media en Almería, correspondientes a un año.

b) 

c) Es una relación estadística, el número de horas de sol no determina la temperatura media.

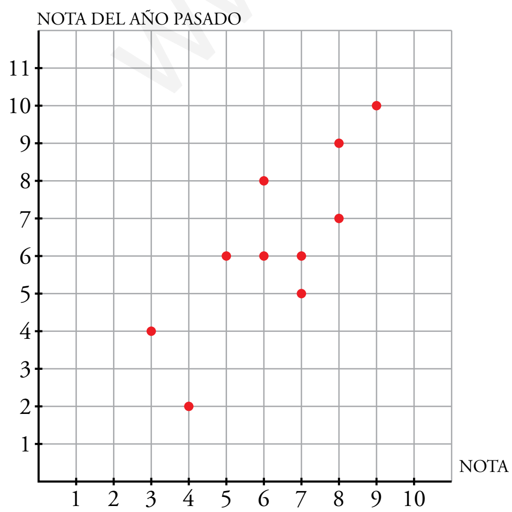
2. Análisis gráfico de una distribución bidimensional

Hazlo tú. Estudia la correlación entre la NOTA de un exámen de Matemáticas y las otras variables que aparecen en la siguiente tabla:

NOTA	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9
NOTA DEL AÑO PASADO	4	2	6	6	8	5	6	9	7	10
COCIENTE INTELECTUAL	120	102	118	105	95	110	103	107	115	125

a) x: Nota

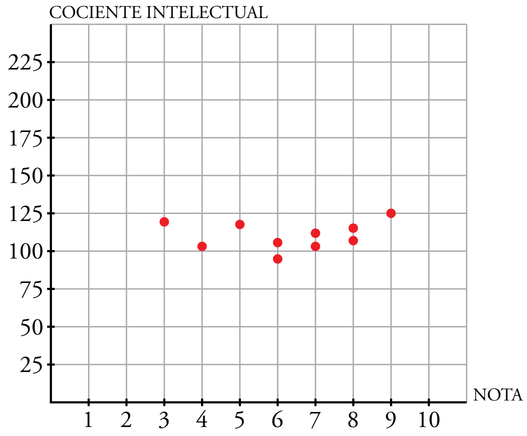
y: Nota del año pasado



Hay una correlación positiva bastante fuerte.

b) x: Nota

y: Cociente intelectual



Hay una correlación positiva bastante fuerte.

Ejercicios y problemas guiados

Página 353

1. Dos rectas de regresión. Estimaciones

La siguiente tabla relaciona las variables

x: gastos en publicidad (miles de euros)

y: ventas (miles de euros)

durante los 6 primeros meses de promoción de un cierto producto:

x	1	2	3	4	5	6
y	10	17	30	28	39	47

a) Hallar las dos rectas de regresión.

b) Efectuar la estimación $\hat{y}(5{,}5)$ y explicar su significado.

c) Para obtener unas ventas de 20 000 €, ¿cuántos miles de euros se estima que hay que gastar en publicidad?

¿Serán fiables estas estimaciones?

a)

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	10	1	100	10
2	17	4	289	34
3	30	9	900	90
4	28	16	784	112
5	39	25	1 521	195
6	47	36	2 209	282
21	171	91	5 803	723

$$\bar{x} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

$$\bar{y} = \frac{171}{6} = 28{,}5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{91}{6} - 3{,}5^2} = 1{,}71$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{5\,803}{6} - 28{,}5^2} = 12{,}45$$

$$\sigma_{xy} = \frac{723}{6} - 3{,}5 \cdot 28{,}5 = 20{,}75$$

Pendiente de la recta de regresión de Y sobre X:

$$m_{yx} = \frac{20{,}75}{1{,}71^2} = 7{,}1$$

$$y - 28{,}5 = 7{,}1(x - 3{,}5)$$

Pendiente de la recta de regresión de X sobre Y:

$$m_{xy} = \frac{12{,}45^2}{20{,}75} = 7{,}47$$

$$y - 28{,}5 = 7{,}47(x - 3{,}5)$$

b) $\hat{y}(5{,}5) = 7{,}1(5{,}5 - 3{,}5) + 28{,}5 = 42{,}7$

c) $\hat{x}(20) \;\rightarrow\; 20 - 28{,}5 = 7{,}47(x - 3{,}5) \;\rightarrow\; y = 2{,}36$

$$r = \frac{20{,}75}{1{,}71 \cdot 12{,}45} = 0{,}97$$

2. Tabla de doble entrada

Una compañía discográfica ha recopilado en la tabla de la derecha la siguiente información sobre el número de conciertos dados por 15 grupos musicales durante un verano, y las ventas de discos de estos grupos (en miles).

DISCOS (x) \ CONC. (y)	10 - 30	30 - 40	40 - 80
1 - 5	3	0	0
5 - 10	1	4	1
10 - 20	0	1	5

a) Calcular el número medio de discos vendidos.

b) ¿Cuál es el coeficiente de correlación?

c) Obtener la recta de regresión de Y sobre X.

d) Si un grupo musical vende 18 000 discos, ¿qué número de conciertos se prevé para él?

a)

DISCOS (x_i) \ CONC. (y_i)	20	35	60	
2,5	3	0	0	3
7,5	1	4	1	6
15	0	1	5	6
	4	5	6	

b)

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
2,5	3	7,5	6,25	18,75
7,5	6	45	56,25	337,5
15	6	90	225	1 350
	15	142,5		1 706,25

$$\bar{x} = \frac{142,5}{15} = 9,5$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1\,706,25}{15} - 9,5^2} = 4,85$$

y_i	f_i	$y_i \cdot f_i$	y_i^2	$y_i^2 \cdot f_i$
20	4	80	400	1 600
35	5	175	1 225	6 125
60	6	360	3 600	21 600
	15	615		29 325

$$\bar{y} = \frac{615}{15} = 41$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{29\,325}{15} - 41^2} = 16,55$$

$$\Sigma x \cdot y \cdot f = 6\,825$$

$$\sigma_{xy} = \frac{6\,825}{15} - 9,5 \cdot 41 = 65,5$$

$$r = \frac{65,5}{4,85 \cdot 16,55} = 0,81$$

c) $m_{yx} = \dfrac{65,5}{4,85^2} = 2,78$

Recta de regresión de Y sobre X

$y - 41 = 2,78(x - 9,5)$

d) $\hat{y}(18) = 2,78(18 - 9,5) = 64,63$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 354

Para practicar

Sin fórmulas

1 **Para cada uno de los siguientes casos, indica:**

- **Cuáles son las variables que se relacionan.**
- **Si se trata de una relación funcional o de una relación estadística y, en este último caso, determina el signo de la correlación.**

a) ***Renta mensual de una familia - Gasto mensual en electricidad***

b) ***Radio de una esfera - Volumen de esta***

c) ***Litros de lluvia recogidos en una ciudad - Tiempo dedicado a ver la televisión por sus habitantes***

d) ***Longitud del trayecto recorrido en una línea de cercanías - Precio del billete***

e) ***Peso de los alumnos de 1.º de Bachillerato - Número de calzado que usan***

f) ***Toneladas de tomate recogidas en una cosecha - Precio del kilo de tomate en el mercado***

g) ***Superficie de una vivienda - Valor de la misma***

a) Renta (€), gasto (€).

Correlación positiva.

b) Relación funcional.

c) Relación estadística. Seguramente muy débil. Positiva (¿cabe pensar que cuanto más llueva más tiempo pasarán en casa y, por tanto, más verán la televisión?).

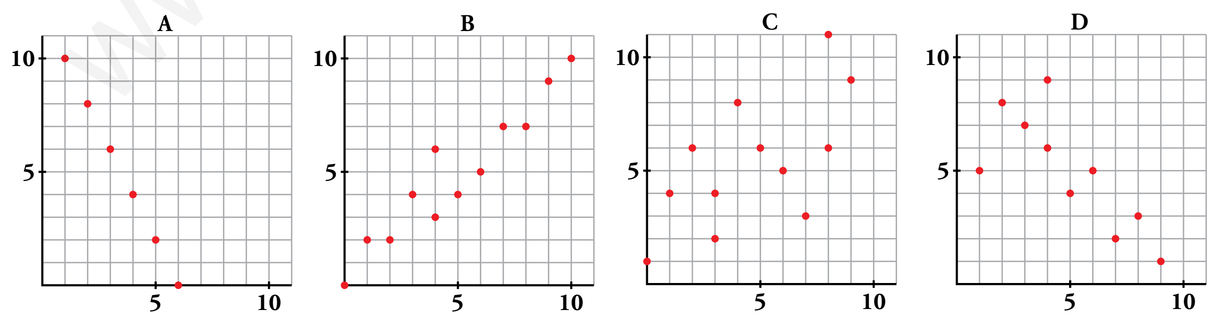
d) Aunque lo parezca *a priori*, seguramente la relación no es funcional. Es una correlación positiva fuerte.

e) Correlación positiva.

f) Correlación negativa (cuanto mayor sea la cosecha, más baratos estarán los tomates).

g) Correlación positiva.

2 **a) Copia en tu cuaderno y traza a ojo una recta de regresión para cada una de estas distribuciones bidimensionales:**

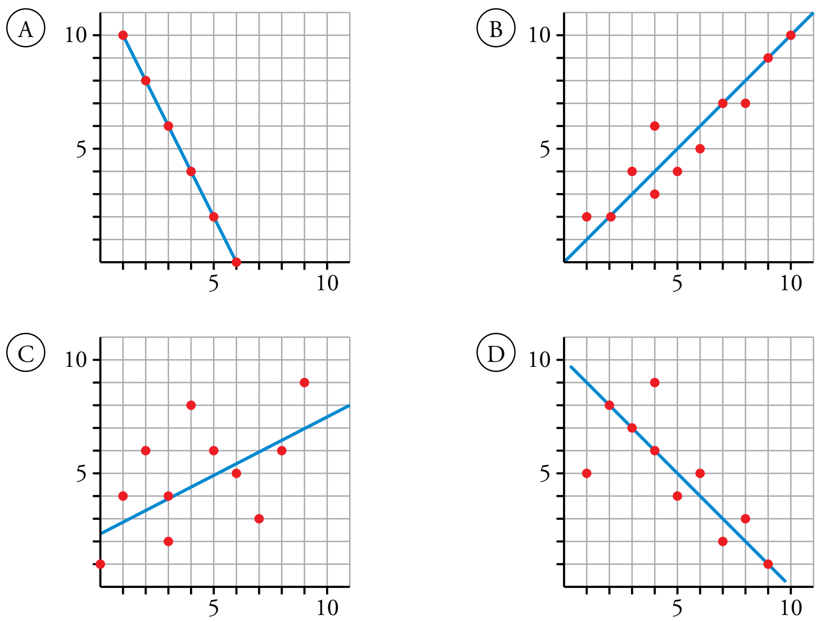


b) ¿Cuáles de ellas tienen correlación positiva y cuáles tienen correlación negativa?

c) Sin hacer cálculos, elige, de entre los siguientes valores, la correlación de cada una de las distribuciones:

0 0,64 1 –0,98 0,95 –1 –0,76

d) Una de ellas presenta relación funcional, ¿cuál? Da la expresión analítica de la función que relaciona las dos variables.

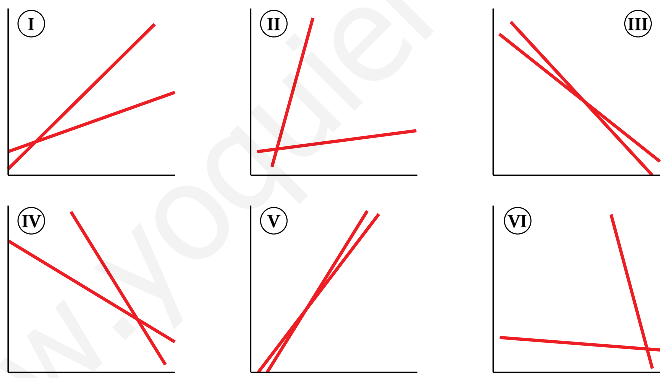
a) 

b) B y C tienen correlación positiva; A y D, negativa.

c) A → –1; B → 0,95; C → 0,64; D → –0,76

d) La A es relación funcional: $y = 12 - 2x$.

3 **Cada una de estas seis distribuciones bidimensionales está representada por sus dos rectas de regresión:**



Sus coeficientes de correlación son, no respectivamente:

–0,9 0,99 0,6 –0,2 –0,5 0,1

Asigna, razonadamente, a cada una su valor.

I → 0,6

II → 0,1

III → –0,9

IV → –0,5

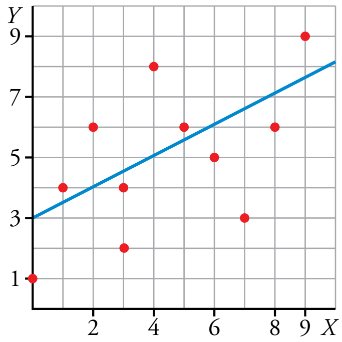
V → 0,99

VI → –0,2

4 **Representa la nube de puntos de esta distribución y estima cuál de estos tres puede ser el coeficiente de correlación:**

a) $r = 0{,}98$ **b)** $r = -0{,}87$ **c)** $r = 0{,}58$

x	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9
y	1	4	6	2	4	8	6	5	3	6	9

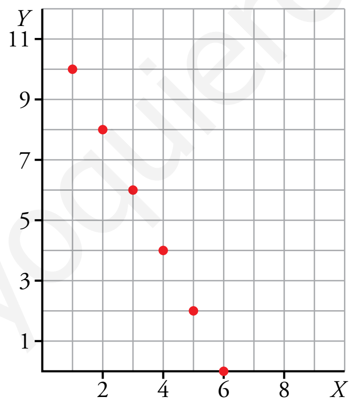


c) $r = 0{,}58$

5 **Representa sobre papel cuadriculado la nube de puntos correspondiente a esta distribución:**

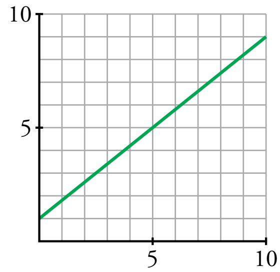
x	1	2	3	4	5	6
y	10	8	6	4	2	0

¿Cuál crees que es el coeficiente de correlación?



$r = -1$ porque están alineados.

6 **a) En tu cuaderno, en una cuadrícula como esta, sitúa diez puntos de modo que estimes que su correlación sea 0,9 y una de sus rectas de regresión sea la que ves.**

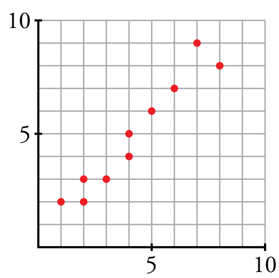


b) Repite la experiencia para conseguir un coeficiente de correlación de 0,6.

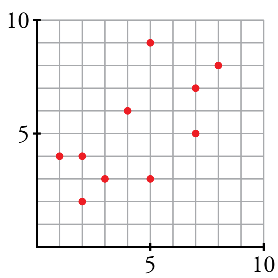
c) Haz lo mismo para un coeficiente de 0,3.

* ***Atención: se pide estimar, pero no calcular.***

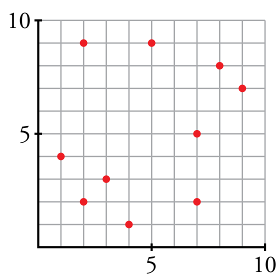
a) $r = 0{,}9$



b) $r = 0{,}6$



c) $r = 0{,}3$

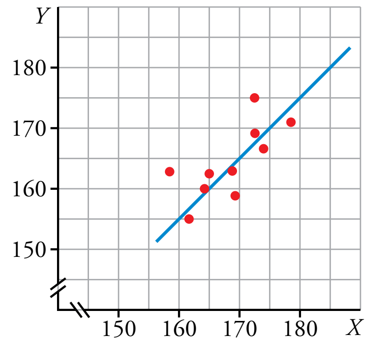


7 **Las estaturas de 10 chicas y las de sus madres son:**

x_i	158	162	164	165	168	169	172	172	174	178
y_i	163	155	160	161	164	158	175	169	166	172

a) Representa estos valores mediante una nube de puntos.

b) Traza a ojo una recta de regresión y di si la correlación es positiva o negativa y más o menos fuerte de lo que esperabas.



La correlación es positiva y fuerte.

Página 355

Con fórmulas

8 **Esta es la distribución bidimensional dada por la nube de puntos B del ejercicio 2:**

x	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10
y	0	2	2	4	3	6	4	5	7	7	9	10

Halla:

a) $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x, σ_y, σ_{xy}.

b) El coeficiente de correlación, *r*. Interprétalo.

c) Las ecuaciones de las dos rectas de regresión.

$n = 12$, $\Sigma x = 59$, $\Sigma y = 59$

$\Sigma x^2 = 401$ $\Sigma y^2 = 389$ $\Sigma xy = 390$

a) $\bar{x} = 4,92$ $\bar{y} = 4,92$

$\sigma_x = 3,04$ $\sigma_y = 2,87$ $\sigma_{xy} = 8,33$

b) $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 0,95$. Se trata de una correlación fuerte y positiva.

c) Recta de regresión de Y sobre X:

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = 0,90 \rightarrow y = 4,92 + 0,9(x - 4,92)$$

Recta de regresión de X sobre Y:

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = 1,01 \rightarrow y = 4,92 + \frac{1}{1,01}(x - 4,92) \rightarrow y = 4,92 + 0,99(x - 4,92)$$

9 **a) Representa la nube de puntos correspondiente a la siguiente distribución bidimensional:**

x	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9
y	1	4	6	2	4	8	6	5	3	6	9

b) Comprueba con la calculadora que sus parámetros son:

$\bar{x} = 4{,}4$ $\quad \bar{y} = 4{,}9$ $\quad \sigma_{xy} = 3{,}67$

$\sigma_x = 2{,}77$ $\quad \sigma_y = 2{,}31$ $\quad r = 0{,}58$

c) Halla las ecuaciones de las dos rectas de regresión, X sobre Y e Y sobre X, y represéntalas junto con la nube de puntos.

a) Representada en el ejercicio 4.

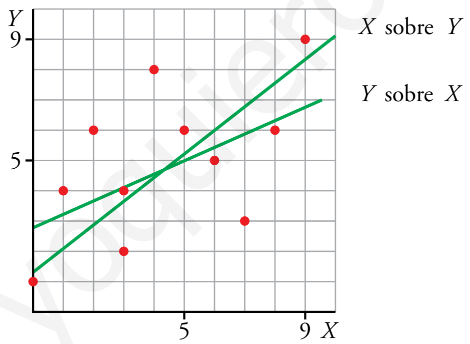
b) Se comprueba.

c) • Recta de regresión de Y sobre X:

$$m_{yx} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{3{,}67}{2{,}77^2} = 0{,}48 \to y = 4{,}9 + 0{,}48(x - 4{,}4) \to y = 0{,}48x + 2{,}79$$

• Recta de regresión de X sobre Y:

$$m_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{3{,}67}{2{,}31^2} = 0{,}69 \to \frac{1}{m_{xy}} = 1{,}45 \to y = 4{,}9 + 1{,}45(x - 4{,}4) \to y = 1{,}45x - 1{,}48$$



10 **Una distribución bidimensional en la que los valores de x son 12, 15, 17, 21, 22 y 25, tiene una correlación $r = 0{,}99$ y su recta de regresión es $y = 10{,}5 + 3{,}2x$.**

a) Calcula $\hat{y}(13)$, $\hat{y}(20)$, $\hat{y}(30)$, $\hat{y}(100)$.

b) ¿Cuáles de las estimaciones anteriores son fiables, cuál poco fiable y cuál no se debe hacer?

c) Expresa los resultados en términos adecuados.

Por ejemplo:

$\hat{y}(13) = 52{,}1$. "Para $x = 13$ es muy probable que el valor correspondiente de y sea próximo a 52".

a) $\hat{y}(13) = 52{,}1$; $\quad \hat{y}(20) = 74{,}5$; $\quad \hat{y}(30) = 106{,}5$; $\quad \hat{y}(100) = 330{,}5$

b) $\hat{y}(13)$ e $\hat{y}(20)$ son estimaciones fiables, $\hat{y}(30)$ es poco fiable e $\hat{y}(100)$ es una estimación nada fiable.

c) Son fiables $\hat{y}(13)$ e $\hat{y}(20)$, porque 13 y 20 están en el intervalo de valores utilizados para obtener la recta de regresión.

$\hat{y}(30)$ es menos fiable, pues 30 está fuera del intervalo, aunque cerca de él.

$\hat{y}(100)$ es una estimación nada fiable, pues 100 está muy lejos del intervalo [12, 25].

11 **Observa la distribución D del ejercicio 2.**

a) Descríbela mediante una tabla de valores.

b) Realiza los cálculos para obtener su coeficiente de correlación.

c) Representa los puntos en tu cuaderno.

Halla la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X y represéntala.

d) Calcula $\hat{y}(4{,}5)$, $\hat{y}(11)$, $\hat{y}(20)$ dilucidando cuánto de fiables son dichas estimaciones.

a)

x	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9
y	5	8	7	6	9	4	5	2	3	1

b) $n = 10$ $\qquad \Sigma x = 49 \qquad \bar{x} = \dfrac{49}{19} = 4{,}9$

$\Sigma y = 50 \qquad \bar{y} = \dfrac{50}{10} = 5$

$\Sigma x^2 = 301 \qquad \sigma_x = \sqrt{\dfrac{301}{10} - 4{,}9^2} = 2{,}47$

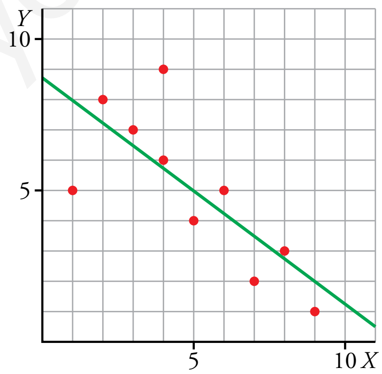
$\Sigma y^2 = 310 \qquad \sigma_y = \sqrt{\dfrac{301}{10} - 5^2} = 2{,}45$

$\Sigma xy = 199 \qquad \sigma_{xy} = \dfrac{199}{10} - 4{,}9 \cdot 5 = -4{,}6$

$$r = \frac{4{,}6}{2{,}47 \cdot 2{,}45} = -0{,}76$$

c) Recta de regresión de Y sobre X:

$$y = 5 - \frac{4{,}6}{6{,}1}(x - 4{,}9) \;\rightarrow\; y = 8{,}675 - 0{,}75x$$



d) $\hat{y}(4{,}5) = 5{,}56$

$\hat{y}(11) = -3{,}04$

$\hat{y}(20) = -14{,}95$

Como $r = 0{,}76$, la estimación para 4,5 la podemos considerar fiable, pero las de 11 y 20, que no están en el intervalo de datos, no se pueden considerar muy fiables.

12 **Calcula las correlaciones correspondientes a las nubes de puntos que inventaste en el ejercicio 6. Comprueba si las correlaciones obtenidas se parecen a las que pretendías alcanzar.**

a) $r = 0,97$

b) $r = 0,64$

c) $r = 0,25$

Para resolver

13 **La siguiente tabla recoge los datos económicos de algunas de las películas más rentables de un año (las cantidades están dadas en millones de euros):**

***x*: GASTOS**	18	15	20	11	10	6	6	14	16	12
***y*: RECAUDACIÓN**	93	83	80	47	46	44	36	34	33	26

a) Halla el coeficiente de correlación.

b) Obtén la recta de regresión de Y sobre X y estima qué recaudación cabe esperar si se invierten 30 millones de euros en una película.

a) $r = 0,6$

b) $y = 3,05x + 13,05$

$\hat{y}(30) = 104,55$

Cabe esperar que se recauden 104,55 millones de euros.

14 **Un excursionista, en diez marchas distintas, toma las siguientes medidas:**

***x*: altura de lugar (en m)**

***y*: presión atmosférica (en mm Hg)**

***z*: número de pulsaciones en reposo**

x	0	184	231	481	730	911	1 343	1 550	1 820	2 184
y	760	745	740	720	700	685	650	630	610	580
z	73	78	75	78	83	80	89	80	85	92

Halla el coeficiente de correlación y la recta de regresión para la distribución x-y y para la distribución x-z y analiza los resultados.

- x: altura del lugar (en m)

  y: presión atmosférica (en mm Hg)

  $r = –0,99$

  Recta de regresión: $y = –0,08x + 759$

  Hay casi una relación funcional entre la altura de un lugar y su presión atmosférica. Además, cuando aumenta la altura, disminuye la presión.

- x: altura del lugar (en m)

  z: número de pulsaciones en reposo

  $r = 0,85$

  Recta de regresión: $y = 6,87x + 74,8$

  Hay una correlación fuerte entre la altura de un lugar y el número de pulsaciones, en reposo, de una persona. Además, cuando aumenta la altura, aumentan las pulsaciones en reposo.

15 **En la siguiente tabla se consignan los goles a favor (x) y los goles en contra (y) al final del campeonato de liga de 1.ª división de fútbol de 10 equipos:**

x	95	102	64	54	62	60	62	46	45	35	54	41
y	21	33	44	44	61	55	53	55	46	42	68	56

Halla el coeficiente de correlación entre las dos variables y analiza lo que has obtenido.

x: goles a favor

y: goles en contra

$r = -0,61$

r es negativo, luego cuantos más goles a favor tiene un equipo, menos goles en contra tiene. La correlación no es muy fuerte, por lo que no es demasiado fiable estimar los goles en contra sabiendo los goles a favor.

16 **La siguiente tabla relaciona el número atómico de varios metales, x, con su densidad, y:**

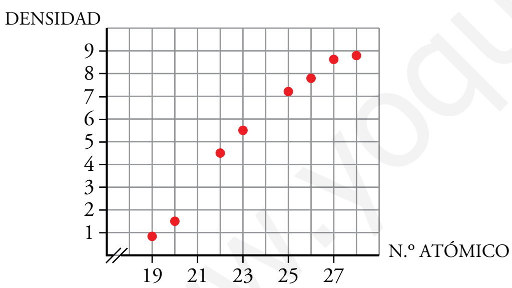
ELEMENTO	K	Ca	Ti	V	Mn	Fe	Co	Ni
N.° ATÓMICO	19	20	22	23	25	26	27	28
DENSIDAD	0,86	1,54	4,50	5,60	7,11	7,88	8,70	8,80

a) Representa los puntos, halla el coeficiente de correlación y calcula la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X.

b) Estima la densidad del cromo sabiendo que su número atómico es 24 → Cr (24).

c) Estima la densidad del escandio → Sc (21).

a)



$r = 0,98$

$y = -16,5 + 0,93x$

b) $\hat{y}(24) = 5,86$

La densidad del cromo se estima en, aproximadamente, 5,86. Su valor real es 7,1.

c) $\hat{y}(21) = 3,06$

La densidad del escandio se estima en, aproximadamente, 3,01. Su valor real es 2,9.

Página 356

17 **La siguiente tabla relaciona tres variables sociométricas relativas a doce países:**

a) Halla el coeficiente de correlación entre las variables x-y y entre las variables x-z.

b) ¿Qué conclusiones sacas de los resultados obtenidos?

PAÍS	x: RENTA PER CÁPITA ($)	y: ÍNDICE DE NATALIDAD (‰)	z: ESPECTATIVA DE VIDA AL NACER (años)
A	873	50	49
B	402	48	50
C	536	47	54
D	869	44	57
E	1171	41	61
F	636	36	64
G	1417	35	59
H	2214	31	63
I	1334	28	63
J	769	26	61
K	1720	25	64
L	2560	24	70

a) x: renta per cápita ($)

y: índice de natalidad (‰)

$r = -0{,}68$

La correlación es negativa; es decir, si aumenta la renta per cápita, disminuye el índice de natalidad.

x: renta per cápita ($)

z: expectativa de vida al nacer (años)

$r = 0{,}82$

La correlación es positiva; es decir, si aumenta la renta per cápita, aumenta la expectativa de vida al nacer.

b) La correlación es mayor en valor absoluto en el segundo caso, luego la renta per cápita es más determinante de la expectativa de vida al nacer que del índice de natalidad.

18 **La siguiente tabla recoge datos de ocho alumnos de secundaria de un centro escolar, relativos al número de horas por día que ven la televisión y la nota media obtenida en la última evaluación:**

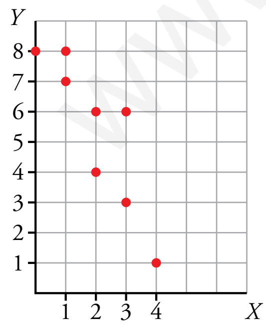
x: N.° DE HORAS DE TV	0	2	1	3	4	2	1	3
y: NOTA MEDIA	8	6	8	6	1	4	7	3

a) Represente gráficamente los datos. ¿Permite el análisis gráfico deducir el signo del coeficiente de correlación de Y sobre X? ¿Y el de X sobre Y?

b) Halla el coeficiente de correlación de las dos variables.

c) Calcula la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X.

d) ¿Qué nota media puede esperar quien ve la televisión tres horas y media diarias? ¿Y quien la ve cinco horas?

a) 

Los dos signos son negativos; es decir, si aumentan las horas por día que ven la televisión, disminuye la nota media obtenida en la última evaluación.

b) $r = -0{,}87 \rightarrow$ correlación fuerte

c) Recta de regresión de Y sobre X: $y = -1{,}67x + 8{,}70$

d) $\hat{y}(3{,}5) = -1{,}67 \cdot 3{,}5 + 8{,}70 = 2{,}86$

$\hat{y}(5) = -1{,}67 \cdot 5 + 8{,}70 = 0{,}35$

Si ve la televisión tres horas y media diarias, cabe esperar que saque un 2,86.

Si ve la televisión cinco horas, cabe esperar que saque un 0,35.

19 **Elegimos seis automóviles al azar. Su antigüedad, en años, y el número de kilómetros que han rodado, en miles de kilómetros, están relacionados por la siguiente tabla:**

ANTIGÜEDAD	1	2	4	4	5	6	7
KILÓMETROS RECORRIDOS	15	45	32	61	60	132	93

a) Calcula la media y la desviación típica de las dos variables que intervienen.

b) Calcula el coeficiente de correlación e interprétalo.

c) Si un automóvil tiene tres años, ¿cuántos kilómetros estimas que ha rodado?

d) ¿Y si tiene cinco años? ¿Y diez? Justifica tus respuestas.

x: antigüedad

y: kilómetros recorridos

a) $\bar{x} = 4{,}14$

$\sigma_x = 1{,}96$

$\bar{y} = 62{,}57$

$\sigma_y = 36{,}37$

b) $r = 0{,}81$

Es positiva; es decir, si aumenta la antigüedad, aumentan los kilómetros recorridos. La correlación es fuerte porque r está próximo a 1.

c) Recta de regresión de Y sobre X:

$y = 15{,}1x$

$\hat{y}(3) = 15{,}1 \cdot 3 = 45{,}3 \to$ Se estima que recorre 45 300 km en 3 años.

$\hat{y}(5) = 15{,}1 \cdot 5 = 75{,}5 \to$ Se estima que recorre 75 500 km en 5 años.

$\hat{y}(10) = 15{,}1 \cdot 10 = 151 \to$ Se estima que recorre 151 000 km en 10 años.

Esta última estimación es menos precisa que las anteriores, pues 10 no está en el intervalo [0, 7] del que se tienen los datos.

Cuestiones teóricas

20 **El coeficiente de correlación de una distribución bidimensional es 0,87.**

Si los valores de las variables se multiplican por 10, ¿cuál será el coeficiente de correlación de esta nueva distribución?

El mismo, puesto que r no depende de las unidades; es adimensional.

21 **Hemos calculado la covarianza de una cierta distribución y ha resultado negativa.**

Justifica por qué podemos afirmar que tanto el coeficiente de correlación como las pendientes de las dos rectas de regresión son números negativos.

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Como σ_x y σ_y son positivas, el signo de r es el mismo que el de σ_{xy}, luego si la covarianza es negativa, r también lo es.

$m_{yx} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$, cuyo signo es el mismo que el signo de σ_{xy}.

$m_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$ cuyo signo es el mismo que el signo de σ_{xy}.

Luego si la covarianza es negativa, m_{yx} y m_{xy} son negativas.

22 **¿Qué punto tienen en común las dos rectas de regresión?**

El centro de gravedad de la distribución, $(\bar{x}, \bar{y})$.

23 **¿Qué condición debe cumplir r para que las estimaciones hechas con la recta de regresión sean fiables?**

$|r|$ debe estar próximo a 1.

24 **Prueba que el producto de los coeficientes de regresión es igual al cuadrado del coeficiente de correlación.**

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}\right)^2 = r^2$$

25 **Explica cómo se calculan $\bar{x}$ e $\bar{y}$ a partir de las dos rectas de regresión de una distribución bidimensional. Aplícalo a este caso:**

La recta de regresión de Y sobre X es: $y = 8{,}7 - 0{,}76x$

La recta de regresión de X sobre Y es: $y = 11{,}36 - 1{,}3x$

$(\bar{x}, \bar{y})$ son las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas de regresión.

$$\begin{cases} y = 8{,}7 - 0{,}76x \\ y = 11{,}36 - 1{,}3x \end{cases} \rightarrow x = 4{,}9259;\ y = 4{,}9563 \quad \begin{cases} \bar{x} = 4{,}9259 \\ \bar{y} = 4{,}9563 \end{cases}$$

26 **Explica cómo se halla el coeficiente de correlación a partir de las dos rectas de regresión de una distribución bidimensional. Aplícalo al caso del ejercicio anterior.**

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$m_{yx} \cdot \frac{1}{m_{xy}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = r^2$$

Luego $r = \sqrt{m_{yx} \cdot \dfrac{1}{m_{xy}}}$

En el ejercicio anterior:

$m_{yx} = -0{,}76;\ m_{xy} = -1{,}3$

$$r = \sqrt{-0{,}76 \cdot \frac{1}{-1{,}3}} = 0{,}7646$$

27 **La estatura media de 100 escolares es de 155 cm con una desviación típica de 15,5 cm.**

La recta de regresión de la estatura respecto al peso es $y = 80 + 1{,}5x$ (x: peso; y: estatura)

a) ¿Cuál es el peso medio de esos escolares?

b) ¿Cuál es el signo del coeficiente de correlación entre peso y estatura?

a) La recta de regresión pasa por $(\bar{x}, \bar{y})$, luego el peso medio será la solución de la ecuación:

$\bar{y} = 80 + 1{,}5\bar{x} \rightarrow 155 = 80 + 1{,}5\bar{x} \rightarrow \bar{x} = 50$ kg

b) El signo del coeficiente de correlación entre peso y estatura es el mismo que el de la pendiente de la recta de regresión, luego es positivo.

28 ¿Verdadero o falso?

a) Si la pendiente de la recta de regresión de Y sobre X es 1, la correlación entre las dos variables es muy fuerte.

b) Si la pendiente de la recta de regresión de Y sobre X es negativa, la pendiente de la recta de regresión de X sobre Y también es negativa.

c) En una relación funcional lineal las dos rectas de regresión coinciden.

d) Cuanto más fuerte sea la correlación entre las variables x e y, mayor es r^2.

a) Falso. Si la pendiente de la recta de regresión de Y sobre X es 1, sabemos que la covarianza es igual a la varianza de x, pero no que r esté próximo a 1.

b) Verdadero, porque $m_{yx} \cdot \dfrac{1}{m_{xy}} = r^2 > 0$

El producto es un número positivo, luego las dos pendientes tienen que tener el mismo signo.

c) Verdadero. En una relación funcional, $r = 1$.

$$r = \sqrt{m_{yx} \cdot \frac{1}{m_{xy}}} \to 1 = m_{yx} \cdot \frac{1}{m_{xy}} \to m_{xy} = m_{yx}$$

Como las dos rectas pasan por $(\bar{x}, \bar{y})$ y tienen la misma pendiente, coinciden.

d) Verdadero, porque $0 \le r^2 \le 1$.

Si la correlación es muy fuerte, $|r|$ está próximo a 1, luego r^2 se aproxima a 1.

Página 357

Para profundizar

29 En una autoescuela, cada alumno realiza un total de 80 tests repartidos en 4 tandas de 20. La siguiente tabla relaciona las variables número de la tanda (x) y número de fallos (y):

x \ y	0 - 3	4 - 7	8 - 11	12 - 15
1	0	4	11	5
2	1	10	7	2
3	12	7	1	0
4	16	4	0	0

Por ejemplo: En la tercera tanda, en 12 de los tests se encontraron de 0 a 3 fallos; en 7, de 4 a 7 fallos…

a) Calcula el coeficiente de correlación y halla la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X.

b) ¿Cuántos fallos se estima que tendrá un alumno en la primera tanda? ¿Y en la segunda? ¿Y en la última?

a)

TANDA = x_i \ FALLOS = y_i	1,5	5,5	9,5	13,5	
1	0	4	11	5	20
2	1	10	7	2	20
3	12	7	1	0	20
4	16	4	0	0	20
	29	25	19	7	80

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$
1	20	20	1	20
2	20	40	4	80
3	20	60	9	180
4	20	80	16	320
	80	200		600

$\bar{x} = \frac{200}{80} = \frac{5}{2} = 2,5$

$\sigma_x = \sqrt{\frac{600}{80} - 2,5^2} = 1,12$

y_i	f_i	$y_i \cdot f_i$	y_i^2	$y_i^2 \cdot f_i$
1,5	29	43,5	2,25	65,25
5,5	25	137,5	30,25	756,25
9,5	19	180,5	90,25	1 714,75
13,5	7	94,5	182,25	1 275,75
	80	456		3 812

$\bar{y} = \frac{456}{80} = \frac{57}{10} = 5,7$

$\sigma_y = \sqrt{\frac{3\,812}{80} - 5,7^2} = 3,89$

$\Sigma x \cdot y \cdot f = 876$

$\sigma_{xy} = \frac{876}{80} - 2,5 \cdot 5,7 = -3,3$

$r = \frac{-3,3}{1,12 \cdot 3,89} = -0,76$

$m_{yx} = \frac{-3,3}{1,12^2} = -2,63$

Recta de regresión de Y sobre X: $y - 5,7 = -2,63(x - 2,5)$

b) $\hat{y}(1) = -2,63(1 - 2,5) + 5,7 = 9,645$

Se estima que tendrá entre 9 y 10 fallos en la primera tanda.

$\hat{y}(2) = -2,63(2 - 2,5) + 5,7 = 7,015$

Se estima que tendrá 7 fallos en la segunda tanda.

$\hat{y}(4) = -2,63(4 - 2,5) + 5,7 = 1,755$

Se estima que tendrá entre 1 y 2 fallos en la cuarta tanda, más veces 2 fallos que 1.

30 **En un estudio realizado a los trabajadores de una cadena de fabricación de piezas de coches sobre su productividad quincenal, se relacionan las horas trabajadas (x) con las unidades producidas (y).**

Sabemos que:

- **La recta de regresión de Y sobre X es:**

  $y = 3{,}47x + 32{,}01$

- **La recta de regresión de X sobre Y es:**

  $y = 3{,}81x + 5{,}36$

- **El intervalo de horas empleadas por los trabajadores es [60, 85].**

a) Halla $\bar{x}$, $\bar{y}$ y el coeficiente de correlación.

b) Si un operario trabaja 70 horas en una quincena, ¿cuántas unidades se estima que produzca? ¿Cómo de fiable es esta estimación? ¿Y si trabaja en total 40 horas? ¿Y si fueran 120 horas?

c) Si un empleado esta quincena ha llegado a producir 300 piezas, ¿cuántas horas se estima que ha trabajado?

a) $(\bar{x}, \bar{y})$ es el punto de corte de las dos rectas de regresión:

$$\left.\begin{cases} y = 3{,}47x + 32{,}01 \\ y = 3{,}81x + 5{,}36 \end{cases}\right\} \rightarrow \bar{x} = 78{,}38;\ \bar{y} = 304$$

$$r^2 = \frac{m_{yx}}{m_{xy}} = \frac{3{,}47}{3{,}81} = 0{,}91 \rightarrow r = \sqrt{0{,}91} = 0{,}95394$$

b) $\hat{y}(70) = 3{,}47 \cdot 70 + 32{,}01 = 274{,}91$

Se estima que el operario produzca unas 275 unidades trabajando 70 horas.

Como r es muy próximo a 1 y, además, 70 está en el intervalo de horas empleadas, la estimación es muy fiable.

$\hat{y}(40) = 3{,}47 \cdot 40 + 32{,}01 = 170{,}81$

Se estima que el operario produzca casi 171 unidades trabajando 40 horas. Esta estimación no es tan fiable como la anterior porque $40 \notin [60, 85]$.

$\hat{y}(120) = 3{,}47 \cdot 120 + 32{,}01 = 448{,}41$

Se estima que el operario produzca alrededor de 448 unidades trabajando 120 horas. Esta estimación no es muy fiable porque $120 \notin [60, 85]$.

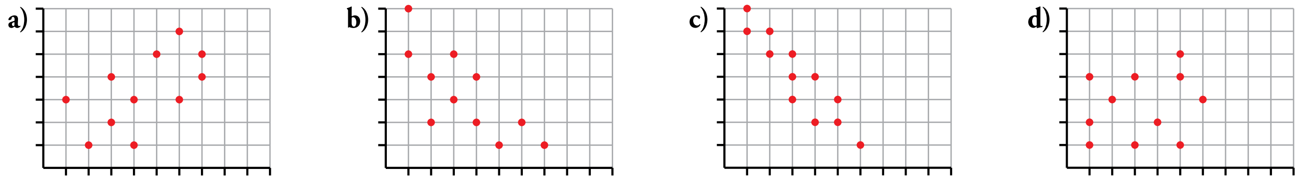
c) $300 = 3{,}81x + 5{,}36 \rightarrow x = 77{,}33$

Se estima que ha trabajado entre 77 y 78 horas.

Autoevaluación

Página 357

1 Observa estas distribuciones bidimensionales:



Asigna razonadamente uno de los siguientes coeficientes de correlación a cada gráfica:

0,2   –0,9   –0,7   0,6

La correlación de a) es positiva, y las de b) y c), negativas. En d) no se aprecia correlación. La correlación de c) es más fuerte que la de b). Por tanto:

a) → 0,6

b) → –0,7

c) → –0,9

d) → 0,2

2 Representa esta distribución bidimensional:

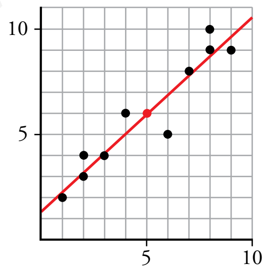
x	1	2	2	3	4	6	7	8	8	9
y	2	4	3	4	6	5	8	9	10	9

a) Calcula los parámetros $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x, σ_y y σ_{xy}.

b) Halla el coeficiente de correlación.

c) Halla la recta de regresión de Y sobre X.

d) Estima el valor de y para $x = 5$ y para $x = 10$. ¿Son “buenas” estas estimaciones?



a) $\bar{x} = 5$, $\bar{y} = 6$

$\sigma_x = 2,8$; $\sigma_y = 2,7$; $\sigma_{xy} = 7,1$

b) $r = 0,95$

c) $y = 0,91x + 1,45$

d) $\hat{y}(5) = 6$; $\hat{y}(10) = 10,55$

Las estimaciones son muy fiables porque $r = 0,95$ es un valor muy alto. Si se tratase de "notas" (de 0 a 10), la segunda estimación habría que "hacerla real" y darle el valor 10.

3 **La recta de regresión de Y sobre X de una cierta distribución bidimensional es $y = 1{,}6x - 3$. Sabemos que $\bar{x} = 10$ y $r = 0{,}8$.**

a) Calcula $\bar{y}$.

b) Estima el valor de y para $x = 12$ y para $x = 50$. ¿Qué estimación te parece más fiable?

c) Halla la recta de regresión de X sobre Y.

a) Puesto que la recta pasa por $(\bar{x}, \bar{y})$:

$\bar{y} = 1{,}6\bar{x} - 3 = 1{,}6 \cdot 10 - 3 = 13$

b) $\hat{y}(12) = 1{,}6 \cdot 12 - 3 = 16{,}2$

$\hat{y}(50) = 1{,}6 \cdot 50 - 3 = 77$

La primera estimación es aceptable por ser 12 próximo a $\bar{x} = 10$ (carecemos de información sobre los valores que toma x). La segunda estimación es muy poco significativa, pues 50 se separa demasiado de $\bar{x}$.

c) Conociendo $r = 0{,}8$ y el coeficiente de regresión de Y sobre X (pendiente de la recta), 1,6:

(Coef. Y sobre X) · (Coef. X sobre Y) = r^2

Coef. X sobre $Y = \dfrac{0{,}8^2}{1{,}6} = 0{,}4$

Por tanto, la pendiente de la recta de regresión de X sobre Y es $m_{xy} = \dfrac{1}{0{,}4} = 2{,}5$.

Ecuación de la recta de regresión de X sobre Y: $y = 6 + 2{,}5(x - 5)$

4 **El *consumo mensual de energía per cápita*, y, en miles de kWh, y la *renta per cápita*, x, en miles de euros, de seis países son:**

	A	B	C	D	E	F
x	11,1	8,5	11,3	4,5	9,9	6,5
y	5,7	5,0	5,1	2,7	4,6	3,1

a) Calcula la recta de regresión de Y sobre X.

b) Halla el coeficiente de correlación entre el consumo y la renta.

c) ¿Qué predicción podemos hacer sobre el consumo de energía per cápita de un país cuya renta per cápita es de 4 400 €? (Recuerda que en la tabla se da la renta en miles de euros.)

d) Estima la *renta per cápita* que tendrá un país en el cual el *consumo de energía per cápita* ha sido de 9 000 kWh.

e) ¿Cómo de fiables son estas estimaciones?

$\bar{x} = 8{,}63$; $\bar{y} = 4{,}37$

$\sigma_x = 2{,}46$, $\sigma_y = 1{,}09$, $\sigma_{xy} = 2{,}51$

a) Recta de regresión de Y sobre X: $y = 4{,}37 + \dfrac{2{,}51}{2{,}46^2}(x - 8{,}63) \to y = 0{,}80 + 0{,}41x$

b) Coeficiente de correlación: $r = \dfrac{2{,}51}{1{,}09 \cdot 2{,}46} = 0{,}93$

c) Para $x = 4{,}4$ estimamos el valor de y: $\hat{y}(4{,}4) = 0{,}79 + 0{,}41 \cdot 4{,}4 = 2{,}59$

Se le estima un consumo de energía de 2,59 miles de kWh por habitante.

d) $9 = 0{,}80 + 0{,}41\hat{x}(9) \to \hat{x}(9) = 20 \to$ Se estima una renta per cápita de 20 000 €.

e) En la primera estimación (apartado c), el valor $x = 4{,}4$ es próximo a los valores de la tabla. Como el coeficiente de correlación es alto (0,93), la estimación es razonablemente fiable. En la segunda estimación (apartado d), el valor $y = 9$ es lejano a los de la tabla. Por tanto, la estimación es poco fiable.