

LÍMITES DE FUNCIONES I
1º Bachillerato. Ciencias y Sociales.

1º Calcula el límite de las siguientes funciones:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 5x + 6}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$

g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3} =$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x-2}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x}$

k) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{2x^2 + 1}}{3x + 6}$

l) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^2 + 8x - 6}{4x^2 - 1}$

m) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+7}{(x+3)^2}$

n) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-8}{\sqrt{x^2+9}-5}$

1.º a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + x}$

• se calcula el valor numérico en $x = -1$.

$$(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2 = -1 + 2 + 1 - 2 = 0.$$

$$(-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$$

es del tipo $\boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$

• se descompone el numerador y el denominador en producto de factores. Una raíz es $-1 \rightarrow$ un factor es $(x+1)$. Se emplea la regla de Ruffini.

Numerador

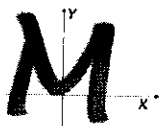
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow (x+1) \cdot (x^2 + x - 2)$$

Denominador $x^2 + x = x \cdot (x+1)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1) \cdot (x^2 + x - 2)}{x \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 2}{x} = \frac{-2}{-1} = \boxed{2}$$

• se vuelven a calcular los valores numéricos.

$$(-1)^2 + (-1) - 2 = 1 - 1 - 2 = -2$$



$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+ax} - x = (\infty - \infty)$$

• se multiplica y divide por el conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+ax} - x) \cdot (\sqrt{x^2+ax} + x)}{\sqrt{x^2+ax} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+ax})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+ax} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+ax - x^2}{\sqrt{x^2+ax} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{\sqrt{x^2+ax} + x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

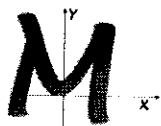
• se divide cada término por la mayor potencia del denominador \boxed{x} .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+ax}}{x} + \frac{x}{x}}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+ax}}{x} = \frac{\sqrt{x^2+ax}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{ax}{x^2}} = \sqrt{1 + \frac{a}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a}{x}} + 1} = \boxed{\frac{a}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0$$



c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

• valor numérico

$$\begin{aligned} 2^2 - 2 - 2 &= 4 - 2 - 2 = 0 \\ 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 &= 4 - 8 + 4 = 0 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)} \end{array} \right.$$

• descomponemos el numerador y el denominador en factores.
Se aplica Ruffini siendo 2 una raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & -1 & -2 \\ & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow (x-2) \cdot (x+1) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & -4 & 4 \\ & & 2 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow (x-2) \cdot (x-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+1)}{(x-2) \cdot (x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-2} = \left(\frac{3}{0}\right) \rightarrow \boxed{\text{tipo } \left(\frac{k}{0}\right)}$$

• Se calculan los límites laterales.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2^+ \\ x > 2}} \frac{x+1}{x-2} = \left(\frac{3}{0^+}\right) = +\infty$$

$\Rightarrow \neq \boxed{\text{no tiene límite.}}$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2^- \\ x < 2}} \frac{x+1}{x-2} = \left(\frac{3}{0^-}\right) = -\infty$$

Observa: $0^+ \Leftrightarrow x \rightarrow 2^+ \rightarrow 0^+ (> 0)$. $(x-2)$ tiende a 0 y es positivo.



$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 5x + 6}$$

• Valor numérico

$$\begin{aligned} 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 &= 8 - 16 + 2 + 6 = 0. \\ 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 &= 4 - 10 + 6 = 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

• se descompone el numerador y el denominador en factores y se simplifica la fracción. Observa que 2 es una raíz de ambos polinomios. Se emplea la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array} \rightarrow (x-2) \cdot (x^2 - 2x - 3)$$

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & -5 & 6 \\ & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array} \rightarrow (x-2) \cdot (x-3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x^2 - 2x - 3)}{(x-2) \cdot (x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x - 3}{x-3} = \frac{-3}{-1} = \boxed{3}$$

• Valor numérico:

$$2^2 - 2 \cdot 2 - 3 = -3 \quad 2 - 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-3}{-1} = 3$$



Departamento de Matemáticas

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} = (\infty - \infty)$$

• se multiplica y divide por el conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}) \cdot (\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1})}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1})^2 - (\sqrt{x^2-x+1})^2}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x+1 - (x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x+1 - x^2+x-1}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

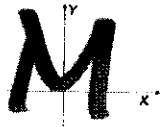
• se divide por la mayor potencia del denominador: x

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} + \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{1+1} = \boxed{1}$$

OBSEVA.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1 + 0 + 0} = \sqrt{1} = 1.$$



$$f) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$$

• se calcula el valor numérico

$$\begin{cases} (-2)^4 - 16 = 16 - 16 = 0 \\ (-2)^3 + 8 = -8 + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{0}{0}\right)$$

• se descomponen en factores el numerador y el denominador. Observa que (-2) es una raíz de ambos polinomios. Aplicando la regla de Ruffini.

Numerador: igualdad notable $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot \underbrace{(x^2 - 4)}_{(x+2) \cdot (x-2)} = (x^2 + 4) \cdot \underbrace{(x+2) \cdot (x-2)}$$

Denominador:

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ & & -2 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array} \rightarrow (x+2) \cdot (x^2 - 2x + 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 + 4) \cdot (x+2) \cdot (x-2)}{(x+2) \cdot (x^2 - 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 + 4) \cdot (x-2)}{x^2 - 2x + 4}$$

• se vuelven a calcular los valores numéricos:

$$\begin{cases} [(-2)^2 + 4] \cdot (-2 - 2) = -32 \\ (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 4 = 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8} = \frac{-32}{16} = \boxed{-2}$$

g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3}$

• se calcula el valor numérico.

$$\begin{array}{l} \text{NUMERADOR} \quad \sqrt{3+6} - 3 = 3 - 3 = 0 \\ \text{DENOMINADOR} \quad 3 - 3 = 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{NUMERADOR} \\ \text{DENOMINADOR} \end{array}} \right\} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$$

• como aparece una raíz cuadrada se multiplica y divide por el conjugado de la expresión que contiene la raíz.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - 3) \cdot (\sqrt{x+6} + 3)}{(\sqrt{x+6} + 3) \cdot (x-3)} =$$

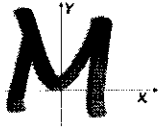
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - 3^2}{(\sqrt{x+6} + 3) \cdot (x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-9}{(\sqrt{x+6} + 3) \cdot (x-3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{x-3}}{(\sqrt{x+6} + 3) \cdot \cancel{(x-3)}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+6} + 3}$$

• se vuelven a tomar valores

$$\sqrt{3+6} + 3 = 6.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$



$$h) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x-2}$$

- Valor numérico en $x=2$

$$\begin{array}{l} \text{NUMERADOR } \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \\ \text{DENOMINADOR } 2 - 2 = 0 \end{array} \left\{ \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right.$$

- se multiplica y divide por el conjugado de la expresión que contiene la raíz.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(x-2) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{2})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2})^2}{(x-2) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{2})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} =$$

- se vuelven a tomar valores:

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x-2} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$$

- valor numérico:

$$\text{NUMERADOR } (1+0)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$$

- se opera para expresar el numerador y denominador como polinomios

$$(1+x)^2 - 1 = 1 + 2x + x^2 - 1 = 2x + x^2$$

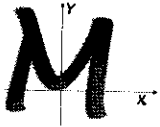
- se descompone el numerador (es muy sencillo pues x es un factor común)

$$2x + x^2 = x \cdot (2+x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} \cdot (2+x)}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (2+x) = \boxed{2}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 3x + 3x^2 + x^3 - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (3 + 3x + x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (3 + 3x + x^2) = \boxed{3}$$



Departamento de Matemáticas

$$k) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{2x^2 + 1}}{3x + 6}$$

- Valor numérico en $x = -2$.

$$\left. \begin{aligned} 3 - \sqrt{2(-2)^2 + 1} &= 3 - \sqrt{9} = 0 \\ 3 \cdot (-2) + 6 &= -6 + 6 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{0}{0}}$$

- se multiplica y divide por el conjugado de la expresión que contiene a la raíz cuadrada.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(3 - \sqrt{2x^2 + 1}) \cdot (3 + \sqrt{2x^2 + 1})}{(3x + 6) \cdot (3 + \sqrt{2x^2 + 1})} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3^2 - (\sqrt{2x^2 + 1})^2}{(3x + 6) \cdot (3 + \sqrt{2x^2 + 1})}$$

numerador:

$$9 - (2x^2 + 1) = 9 - 2x^2 - 1 = 8 - 2x^2 = 2 \cdot (4 - x^2) = 2 \cdot (2+x) \cdot (2-x)$$

denominador:

$$(3x + 6) \cdot (3 + \sqrt{2x^2 + 1}) = 3 \cdot (x + 2) \cdot (3 + \sqrt{2x^2 + 1})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 \cdot (2+x) \cdot (2-x)}{3 \cdot (x+2) \cdot (3 + \sqrt{2x^2 + 1})} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 \cdot (2-x)}{3 \cdot (3 + \sqrt{2x^2 + 1})}$$

- valor numérico en $x = -2$

$$2 \cdot (2 - (-2)) = 8$$

$$3 \cdot (3 + \sqrt{2(-2)^2 + 1}) = 3 \cdot (3 + 3) = 18$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{2x^2 + 1}}{3x + 6} = \frac{8}{18} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

e) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^2 + 8x - 6}{4x^2 - 1}$

• valor numérico en $x = \frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{aligned} 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 6 &= \frac{8}{4} + \frac{8}{2} - 6 = 0 \\ 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 &= \frac{4}{4} - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$$

• se descompone en factores primos el numerador y el denominador; observa que $x = \frac{1}{2}$ es una raíz de ambos polinomios. Aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} 1/2 & 8 & 8 & -6 \\ & & 4 & 6 \\ \hline & 8 & 12 & \underline{0} \end{array} \rightarrow (x - \frac{1}{2}) \cdot (8x + 12)$$

$$\begin{array}{r|rrr} 1/2 & 4 & 0 & -1 \\ & & 2 & +1 \\ \hline & 4 & 2 & \underline{0} \end{array} \rightarrow (x - \frac{1}{2}) \cdot (4x + 2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{(x - \frac{1}{2}) \cdot (8x + 12)}{(x - \frac{1}{2}) \cdot (4x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x + 12}{4x + 2} = \boxed{4}$$

$$\left. \begin{aligned} 8 \cdot \frac{1}{2} + 12 &= 16 \\ 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 &= 4 \end{aligned} \right\} \frac{16}{4} = 4$$

m) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+7}{(x+3)^2}$

• Valor numérico en $x = -3$

$$\left. \begin{array}{l} -3+7=4 \\ (-3+3)^2=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{4}{0}\right)}$$

• límites laterales.

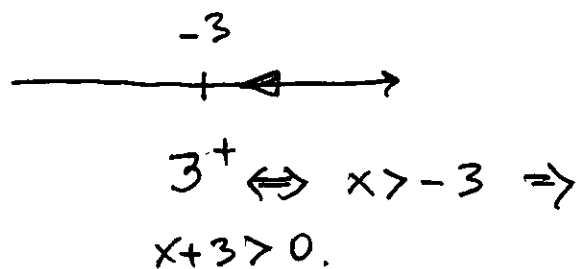
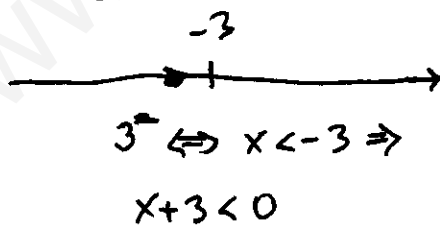
$$\lim_{\substack{x \rightarrow -3^+ \\ x > -3}} \frac{x+7}{(x+3)^2} = \left(\frac{4}{0^+}\right) = +\infty$$

$(x+3)$ tiende a 0 (positivo)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -3^- \\ x < -3}} \frac{x+7}{(x+3)^2} = \left(\frac{4}{0^+}\right) = +\infty$$

$(x+3)$ tiende a 0 (negativo), pero $(x+3)$ está elevado al cuadrado \rightarrow 0 (positivo)

Para los cálculos del signo una representación gráfica te puede ayudar.



• Conclusión:

Como los límites laterales coinciden

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+7}{(x+3)^2} = +\infty}$$

La función $f(x) = \frac{x+7}{(x+3)^2}$ tiene una asíntota vertical en $x = -3$.

$$h) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-8}{\sqrt{x^2+9}-5}$$

- valor numérico en $x=4$

$$\left. \begin{aligned} 2 \cdot 4 - 8 &= 0 \\ \sqrt{4^2+9} - 5 &= 5 - 5 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$$

- se multiplica el numerador y denominador por el conjugado de la expresión que contiene la raíz.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x-8) \cdot (\sqrt{x^2+9}+5)}{(\sqrt{x^2+9}-5) \cdot (\sqrt{x^2+9}+5)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x-8) \cdot (\sqrt{x^2+9}+5)}{(\sqrt{x^2+9})^2 - 5^2}$$

- operando, agrupando ...

$$(2x-8) \cdot (\sqrt{x^2+9}+5) = 2 \cdot (x-4) \cdot (\sqrt{x^2+9}+5)$$

$$(\sqrt{x^2+9})^2 - 5^2 = x^2+9-25 = x^2-16 = (x+4) \cdot (x-4)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 \cdot \cancel{(x-4)} \cdot (\sqrt{x^2+9}+5)}{(x+4) \cdot \cancel{(x-4)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 \cdot (\sqrt{x^2+9}+5)}{x+4} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

- valor numérico en $x=4$

$$\left. \begin{aligned} 2 \cdot (\sqrt{4^2+9}+5) &= 20 \\ 4+4 &= 8 \end{aligned} \right\} \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$