Unidad 4 – Trigonometría I

PÁGINA 87

cuestiones iniciales

1. Un ángulo α, situado en el segundo cuadrante, tiene por coseno $\cos\alpha = -0{,}2$. Determina el resto de las razones trigonométricas de este ángulo.

2. Discute si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados:

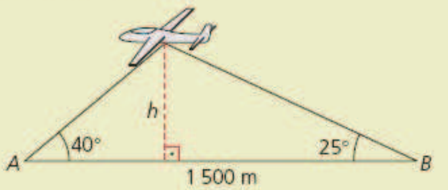
a) El seno de un ángulo vale 1,5.

b) La tangente de un ángulo vale –5 000.

c) El coseno de 720° vale 1.

3. Calcula el área de un pentágono regular de 12 cm de lado.

4. Dos amigos, situados a 1 500 m de distancia, observan en un mismo instante una avioneta, tal como se muestra en la figura. Las visuales que cada uno de ellos dirigen a la avioneta forman, respectivamente, ángulos de 40° y 25° con la horizontal. Calcula la altura a la que se encuentra la avioneta.



SOLUCIONES

1. Sabemos que $\cos\alpha = -0{,}2$ y que $90º < \alpha < 180º$. Utilizando la fórmula $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ hallamos $\text{sen}\,\alpha = 0{,}98$. Por otro lado quedaría:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -4{,}9$$

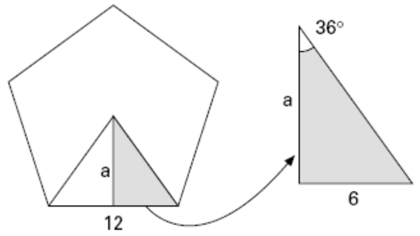
2. La discusión quedaría:

a) Falsa pues $\text{sen}\,\alpha \in [-1, 1]$

b) Verdadera pues $\text{tg}\,\alpha \in (-\infty, +\infty)$

c) Verdadera pues $\cos 720º \cong \cos 360º = 1$.

3. Según el esquema:



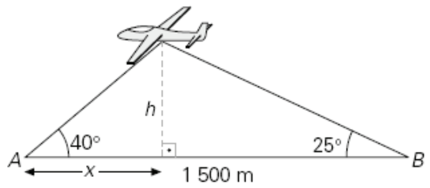
$$360^{\circ} : 5 = 72^{\circ}$$

En el triángulo rayado calculemos el valor de la apotema del pentágono.

$$\operatorname{tg} 36^{\circ} = \frac{6}{a} \Rightarrow a = 8{,}26 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{5 \cdot 12 \cdot 8{,}26}{2} \Rightarrow \text{Área} = 247{,}8 \text{ cm}^2$$

4. Según el esquema:



De los dos triángulos rectángulos de la figura obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 40^{\circ} &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 25^{\circ} &= \frac{h}{1500 - x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} h &= \frac{1500 \cdot \operatorname{tg} 40^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 25^{\circ}}{\operatorname{tg} 40^{\circ} + \operatorname{tg} 25^{\circ}} \\ h &= 449{,}61 \text{ m} \end{aligned}$$

PÁGINA 103

ACTIVIDADES

■ Intenta utilizar las ideas referentes a la fase de llevar adelante la estrategia en la resolución de los siguientes problemas:

1. El pequeño astuto. El pequeño astuto tiene más de 36 cajas, pero menos de 1 991. Las dispone todas en una pila triangular y luego las coloca formando una pila cuadrada. ¿Cuántas cajas tiene?

2. Igualdad. ¿Será cierta la siguiente igualdad?

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{988\cdot 999}+\frac{1}{999\cdot 1\,000}=0{,}999$$

3. Tostado rápido. Hay que tostar en un tostador tres rebanadas de pan. En el tostador caben dos rebanadas a la vez, pero sólo se tuestan por un lado. Se tarda 30 segundos en tostar una cara de una rebanada de pan; 5 segundos en colocarla en el tostador; 5 segundos en sacarla; y 3 segundos en darle la vuelta. ¿Cuál es el mínimo de tiempo que se necesita para tostar las tres rebanadas?

SOLUCIONES

1. Hay que buscar un número que sea a la vez triangular y cuadrado.

$$\text{Números triangulares}: 1, 3, 4, 10, 15, 21, \ldots, \frac{n^2+n}{2}$$

$$\text{Números cuadrados}: 1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2$$

$$\Rightarrow \frac{n^2+n}{2}=x^2 \Rightarrow \text{ esto se cumple para } n=8, \text{ pues } \frac{8^2+8}{2}=x^2 \Rightarrow x^2=36.$$

Como dice que hay más de 36 cajas, hay que buscar otra solución, y ésta es:

$$n=49, \text{ pues } \frac{49^2+49}{2}=35^2=1225 \Rightarrow \text{ Luego } x^2=1225 \text{ cajas tiene.}$$

2. Observamos que:

$$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} \text{ con } n\geq 2.$$

Luego:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$
$$\ldots=\ldots-\ldots$$
$$\frac{1}{998\cdot 999}=\frac{1}{998}-\frac{1}{999}$$
$$\frac{1}{999\cdot 1000}=\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}$$

Sumando:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{998\cdot 999}+\frac{1}{999\cdot 1000}=0,999$$

3. Sean A, B, C, las tres rebanadas. Con A1 indicamos que se tuesta la cara 1 y con A2 indicamos que se tuesta la cara 2.

1.º A_1B_1 tarda: $30s$: tostar cara A_1 y B_1
$5s$: colocar A_1
$5s$: colocar B_1
$5s$: sacar B_1
2.º A_2C_1 tarda: $3s$: dar la vuelta A_1
$5s$: meter C_1
$30s$: tostar cara A_2 y C_1
$3s$: dar la vuelta C_2
3.º B_2C_2 tarda: $5s$: sacar A_2
$5s$: meter B_2
$30s$: tostar cara B_2 y C_2
$5s$: sacar B_2
$5s$: sacar C_2

En total se necesitan: 136 s en tostar las 3 rebanadas.

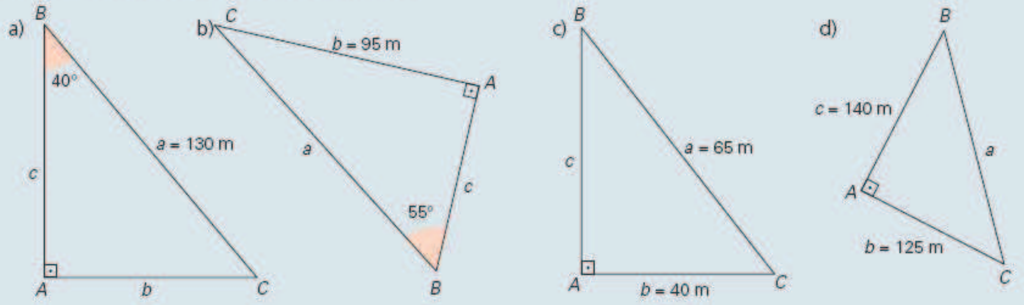
ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla referida a la equivalencia de ángulos en los distintos sistemas de medida:

90°		120°		225°		39° 42′		135° 22′ 42″	
	$\frac{\pi}{4}$ rad		$\frac{3\pi}{2}$ rad		$\frac{4\pi}{3}$ rad		1 rad		2,5 rad

2. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:



3. Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42°. ¿Bajo qué ángulo se verá colocándose a distancia doble? ¿y colocándose a distancia triple?

4. Calcula la altura de un poste, sabiendo que desde un cierto punto del suelo se ve este con un ángulo de 30° y, si nos acercamos 30 m, lo vemos con un ángulo de 45°.

5. Calcula los ángulos de un trapecio isósceles de altura 60 m cuyas bases miden 83 y 51 m.

6. Calcula el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 30 cm de diámetro.

7. Si las puntas de un compás distan 8 cm y cada rama mide 15 cm, ¿qué ángulo forman?

8. Sabiendo que $\cos \alpha = -\frac{5}{12}$ y que el ángulo está en el segundo cuadrante, halla las demás razones trigonométricas.

9. Sabiendo que $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$ y que $180° < x < 270°$, calcula las demás razones trigonométricas.

↑ **Los astrolabios se utilizan para determinar ángulos.**

10. Calcula las restantes razones trigonométricas de un ángulo A cuya tangente es positiva y $\operatorname{sen} A = -\frac{3}{5}$.

1. La tabla queda:

90º	45º	120º	270º	225º
$\frac{\pi}{2}$rad	$\frac{\pi}{4}$rad	$\frac{2\pi}{3}$rad	$\frac{3\pi}{2}$rad	$\frac{5\pi}{4}$rad
240º	39º 42'	57º 20'	135º 22' 42''	143º 19'
$\frac{4\pi}{3}$rad	$0,22\,\pi$rad	1rad	$0,75\,\pi$rad	2,5rad

2. La resolución de los triángulos queda:

I) $\hat{C} = 50º;\ b = 130 \cdot \text{sen } 40º = 83,56 \text{ m};$
$c = 130 \cdot \cos 40º = 99,59 \text{ m}$

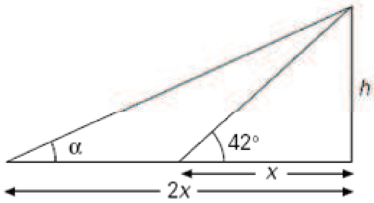
II) $\hat{C} = 35º;\ c = \dfrac{95}{\text{tg } 55º} = 66,52 \text{ m};$

$a = \dfrac{95}{\text{sen } 55º} = 115,97 \text{ m}$

III) $\cos \hat{C} = \dfrac{40}{65} \Rightarrow \hat{C} = 52º\,1';\ \hat{B} = 37º\,59';$
$c = \sqrt{65^2 - 40^2} = 51,23 \text{ m}$

IV) $a = \sqrt{140^2 + 125^2} = 187,68 \text{ m};$
$\text{tg } \hat{C} = \dfrac{140}{125} \Rightarrow \hat{C} = 48º\,14'\,23''$
$\hat{B} = 41º\,45'\,37''$

3. Sea la figura:



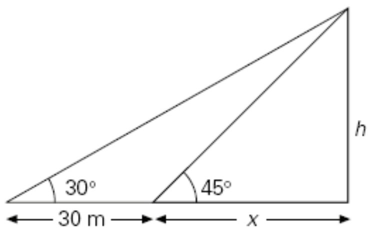
Queda:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 42^{\circ} = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } \alpha = \dfrac{h}{2x} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ tg } \alpha = \frac{1}{2}\text{tg } 42^{\circ} = 0{,}45; \quad \alpha = 24^{\circ}\, 14'\, 15''$$

Si nos colocamos a distancia triple se verificará:

$$\text{tg } \beta = \frac{h}{3x} = \frac{1}{3} \cdot \text{tg } 42^{\circ} = 0{,}3 \;\Rightarrow\; \beta = 16^{\circ}\, 42'\, 23''$$

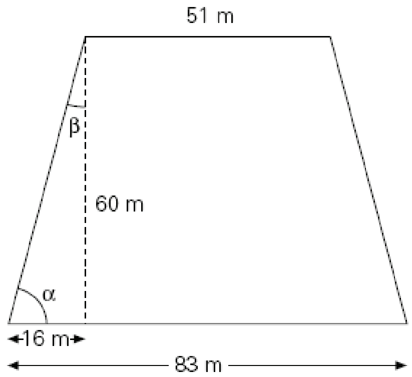
4. Sea la figura:



Queda:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 45^{\circ} = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 30^{\circ} = \dfrac{h}{30+x} \end{array}\right\} \quad h = \frac{30 \cdot \text{tg } 45^{\circ} \cdot \text{tg } 30^{\circ}}{\text{tg } 45^{\circ} - \text{tg } 30^{\circ}} \quad \Rightarrow \quad h = 40{,}98 \text{ m}$$

5. Sea la figura:

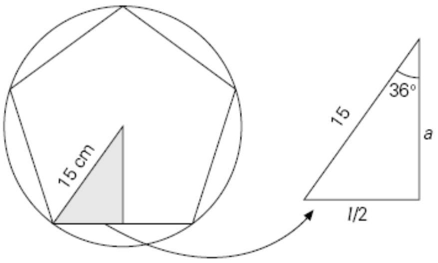


Queda:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{60}{16} \Rightarrow \alpha = 75^{\circ}\,4'\,7''$$
$$\beta = 90 - \alpha = 14^{\circ}\,55'\,53''$$

Los ángulos del trapecio miden $75^{\circ}\,4'\,7''$ los dos agudos y $104^{\circ}\,55'\,33''$ cada uno de los dos obtusos.

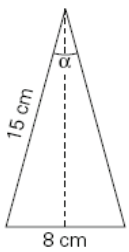
6. Sea la figura:



Llamamos *l* al lado del pentágono. De la figura obtenemos:

$$\operatorname{sen} 36^{\circ} = \frac{l/2}{15} \Rightarrow l = 30 \cdot \operatorname{sen} 36^{\circ} \Rightarrow l = 17{,}63 \text{ cm}$$
$$\text{Perímetro} = 5 \cdot 17{,}63 = 88{,}15 \text{ cm}$$

7. Sea la figura:



Llamamos α al ángulo que forman las ramas del triángulo rectángulo de la figura. Obtenemos:

$$\operatorname{sen} \alpha/2 = \frac{4}{15} \Rightarrow \alpha = 30^{\circ}\,55'\,55''$$

8. Quedan:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{119}}{12} = 0{,}91; \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{-\sqrt{119}}{5} = -2{,}18$$

9. Quedan:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\text{tg}^2 x} \Rightarrow \cos x = \frac{-3}{5} \ \ y \ \ \text{sen}\, x = \frac{-4}{5}$$

10. Quedan:

$$\text{Si tg}\, A > 0 \Rightarrow 0 < A < \frac{\pi}{2} \ \text{ ó } \ \pi < A < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Como sen}\, A = -\frac{3}{5} \Rightarrow \pi < A < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \cos A = -\frac{4}{5} \ \text{ y } \ \text{tg}\, A = \frac{3}{4}$$

11. Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $\dfrac{1+\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{cotg}^2\alpha}$

b) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\mathrm{sen}\,\alpha}$

c) $\dfrac{\cos^2\alpha\cdot(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{\mathrm{cotg}\,\alpha}$

d) $\mathrm{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{cotg}\,\alpha)$

e) $\mathrm{sen}^3\alpha+\mathrm{sen}\,\alpha\cdot\cos^2\alpha$

f) $\cos^3\alpha+\mathrm{sen}^3\alpha+\cos^2\alpha\cdot\mathrm{sen}\,\alpha+\cos\alpha\cdot\mathrm{sen}^2\alpha$

g) $\dfrac{\mathrm{sen}^2\alpha}{1+\cos\alpha}$

h) $\dfrac{\sec\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$

i) $\mathrm{tg}^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\mathrm{sen}^2\alpha$

j) $\mathrm{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha$

12. Determina, sin hacer uso de la calculadora, las siguiente razones trigonométricas:

a) sen 120°
b) sen 1 215°
c) cos 210°
d) tg (–60°)
e) tg 300°
f) $\sec\dfrac{23\pi}{6}$
g) cotg 225°
h) $\mathrm{cosec}\,\dfrac{29\pi}{4}$

13. Sabiendo que sen $\alpha = 0{,}6$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula:

a) sen (180° – α)
b) tg (90° + α)
c) cos (180° + α)
d) sen (270° + α)
e) cos (90° – α)
f) cotg (360° – α)

14. Demuestra, de forma razonada, si son o no ciertas las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{\mathrm{tg}\,a+\mathrm{tg}\,b}{\mathrm{cotg}\,a+\mathrm{cotg}\,b}=\mathrm{tg}\,a\cdot\mathrm{tg}\,b$

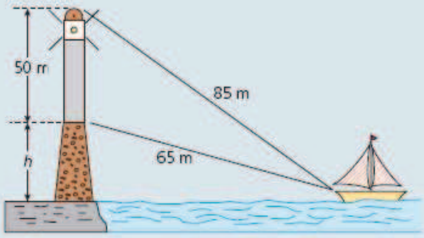
b) $\mathrm{sen}^4x-\mathrm{sen}^2x=\cos^4x-\cos^2x$

c) $\dfrac{1-\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{1+\mathrm{sen}\,\alpha}$

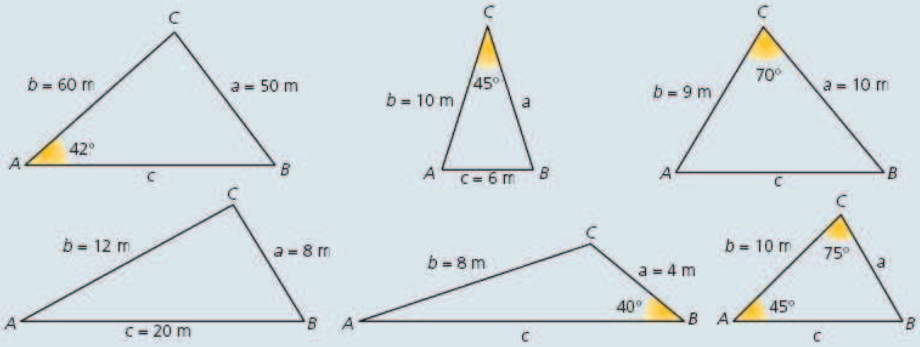
d) $\mathrm{tg}^2x-\mathrm{tg}^2x\cdot\mathrm{sen}^2x=\mathrm{sen}^2x$

15. En la figura aparece dibujado un faro de 50 m de altura situado sobre un promontorio. Las respectivas distancias desde los extremos superior e inferior del faro a un barco son de 85 y 65 m.

Halla la altura del promontorio.



16. Resuelve cada uno de los siguientes triángulos:



11. Las simplificaciones quedan:

a) $\dfrac{1+\text{tg}^2\alpha}{1+\text{cotg}^2\alpha}=\dfrac{1+\text{tg}^2\alpha}{1+\dfrac{1}{\text{tg}^2\alpha}}=\text{tg}^2\alpha$

b) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}=\dfrac{1-\text{sen}^2\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}=1-\text{sen}\,\alpha$

c) $\dfrac{\cos^2\alpha\cdot(1+\text{tg}^2\alpha)}{\text{cotg}\,\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha\cdot\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}}=\text{tg}\,\alpha$

d) $\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha\,(\text{tg}\,\alpha+\text{cotg}\,\alpha)=1$

e) $\text{sen}^3\alpha+\text{sen}\,\alpha\cdot\cos^2\alpha=\text{sen}\,\alpha$

f) $\cos^3\alpha+\text{sen}^3\alpha+\cos^2\alpha\;\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha\;\text{sen}^2\alpha=(\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha)(\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha)=\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha$

g) $\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}=1-\cos\alpha$

h) $\dfrac{\sec\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos\alpha}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}=\cos\alpha$

i) $\text{tg}^2\alpha-\text{tg}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha=\text{tg}^2\alpha\cdot(1-\text{sen}^2\alpha)=\text{tg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\text{sen}^2\alpha$

j) $\text{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha=(\text{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)\cdot(\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)=\text{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha$

12. Queda:

a) $\operatorname{sen} 120^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\operatorname{sen} 1215^{\circ} = \operatorname{sen} 135^{\circ} = \operatorname{sen} 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos 210^{\circ} = -\cos 30^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\operatorname{tg}(-60^{\circ}) = -\operatorname{tg} 60^{\circ} = -\sqrt{3}$

e) $\operatorname{tg} 300^{\circ} = -\operatorname{tg} 60^{\circ} = -\sqrt{3}$

f) $\sec \frac{23\pi}{6} = \sec 330^{\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

g) $\operatorname{cotg} 225^{\circ} = \operatorname{cotg} 45^{\circ} = 1$

h) $\operatorname{cosec} \frac{29\pi}{4} = \operatorname{cosec} 225^{\circ} = -\sqrt{2}$

13. Los cálculos quedan:

a) $\operatorname{sen}(180^{\circ} - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = 0,6$

b) $\operatorname{tg}(90^{\circ} + \alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{4}{3}$

c) $\cos(180^{\circ} + \alpha) = -\cos \alpha = -0,8$

d) $\operatorname{sen}(270^{\circ} + \alpha) = -\cos \alpha = -0,8$

e) $\cos(90^{\circ} - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = 0,6$

f) $\operatorname{cotg}(360^{\circ} - \alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{4}{3}$

14. Se comprueba del siguiente modo:

a) $\dfrac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{cotg\ a + cotg\ b} = \dfrac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{\dfrac{1}{\text{tg}\, a} + \dfrac{1}{\text{tg}\, b}} = \dfrac{(\text{tg}\, a + \text{tg}\, b) \cdot \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b} = \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b$

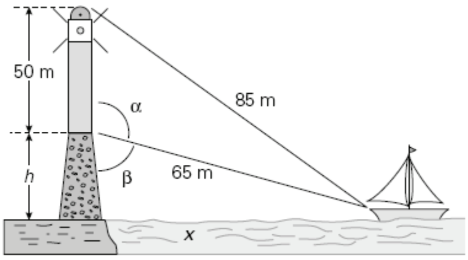
b) $\text{sen}^4 x - \text{sen}^2 x = \text{sen}^2 x\,(\text{sen}^2 x - 1) = (1 - \cos^2 x)\,(-\cos^2 x) = \cos^4 x - \cos^2 x$

c) $\dfrac{1 - \text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1 + \text{sen}\,\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \text{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha$

d) $\text{tg}^2 x - \text{tg}^2 x \cdot \text{sen}^2 x = \text{tg}^2 x\,(1 - \text{sen}^2 x) = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x = \text{sen}^2 x$

Todas las igualdades son verdaderas.

15. Sea la representación del problema:



Por Pitágoras obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 85^2 = x^2 + (50 + h)^2 \\ 65^2 = h^2 + x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad h = 5\text{ m}$$

También podemos calcular el ángulo α por el teorema del coseno:

$$85^2 = 50^2 + 65^2 - 2 \cdot 65 \cdot 50 \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 94^{\circ}\, 24'\, 42''$$

Por tanto $\beta = 180^{\circ} - \alpha = 85^{\circ}\, 35'\, 18'' \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \dfrac{h}{65} \quad \Rightarrow \quad h = 65 \cdot \cos\beta = 5\text{ m}$

16. Los triángulos se resuelven del siguiente modo:

a) $50^2=60^2+c^2-2\cdot 60\cdot c\cdot\cos 42º \;\Rightarrow\; c=74{,}39\,\text{m} \;\; \acute{o} \;\; c=14{,}79\,\text{m}$

$\bullet$Si $c=74{,}39\,\text{m} \;\Rightarrow\; \cos C=\dfrac{50^2+60^2-74{,}39^2}{2\cdot 50\cdot 60} \;\Rightarrow\; C=84º\,35'\,9'' \;$ y $\; B=53º\,24'\,51''$

$\bullet$Si $c=14{,}79\,\text{m} \;\Rightarrow\; \cos C=\dfrac{50^2+60^2-14{,}79^2}{2\cdot 50\cdot 60} \;\Rightarrow\; C=11º\,25'\,5'' \;$ y $\; B=126º\,34'\,55''$

b) $6^2=10^2+a^2-2\cdot 10\cdot a\cos 45º \;\Rightarrow\; a$ no es un número real. Este triángulo no tiene solución.

c) $c^2=9^2+10^2-2\cdot 9\cdot 10\cdot\cos 70º \;\Rightarrow\; c=10{,}93\,\text{m}$
$10^2=9^2+10{,}93^2-2\cdot 9\cdot 10{,}93\cdot\cos A \;\Rightarrow\; A=59º\,17'\,35'' \;$ y $\; B=50º\,42'\,25''$

d) $\cos A=\dfrac{12^2+20^2-8^2}{2\cdot 12\cdot 20} \;\Rightarrow\; A=0º$

Imposible. Además un lado es igual a la suma de los otros dos, por tanto no existe este triángulo.

e) $8^2=4^2+c^2-2\cdot 4\cdot c\cdot\cos 40º \Rightarrow c=10{,}64\,\text{m}$
$\cos A=\dfrac{8^2+10{,}64^2-4^2}{2\cdot 8\cdot 10{,}64} \;\Rightarrow\; A=18º\,44'\,44'' \;$ y $\; C=121º\,15'\,16''$

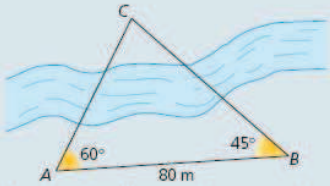
f) $B=60º$.

Utilizando el teorema del seno obtenemos:

$$\frac{a}{\text{sen } 45º}=\frac{10}{\text{sen } 60º} \;\Rightarrow\; a=8{,}16\,\text{m}$$
$$\frac{c}{\text{sen } 75º}=\frac{10}{\text{sen } 60º} \;\Rightarrow\; c=11{,}15\,\text{m}$$

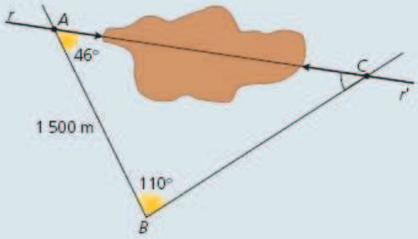
PÁGINA 108

ACTIVIDADES FINALES

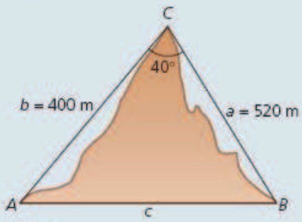


■ 17. Desde dos puntos *A* y *B* situados en la misma orilla de un río y distantes entre sí 80 m, se observa un punto *C*, situado en la orilla opuesta, bajo ángulos de 60° y 45°, respectivamente.
Calcula las distancias desde los puntos *A* y *B* hasta el punto *C*.

■ 18. La figura muestra la forma de construir un túnel que atraviesa una montaña, perforando simultáneamente por ambas caras de la montaña. Fijamos la dirección de perforación ofrecida por *r*, por lo que el problema consiste en encontrar la dirección de perforación dada por *r'*. En la práctica, se procede de la forma siguiente: fijamos un punto *A* en la recta *r* . Elegimos un ángulo *A*, por ejemplo 46°, y medimos una distancia *AB* de 1 500 m, por ejemplo. En *B* tomamos un ángulo, por ejemplo, de 110°. Con estos datos podemos determinar el ángulo *C* y la distancia *BC*. A partir de ambos datos queda determinada la dirección *r'* de perforación. Calcula estos datos.



■ 19. La figura muestra el corte transversal de una montaña en la que se quiere construir un túnel. La cima o punto *C*, visible desde *A* y *B*, se encuentra a 400 m de A y 520 m de *B*, y el ángulo *C* mide 40°.
Calcula la longitud del túnel *AB*.



■ 20. Halla el área de un decágono regular circunscrito a una circunferencia de 10 cm de radio.

■ 21. En un trapecio isósceles conocemos la diagonal, que mide 15 cm; el lado oblicuo, que mide 5 cm; y el ángulo que este forma con la base mayor, que es de 60°. Halla el área del trapecio.

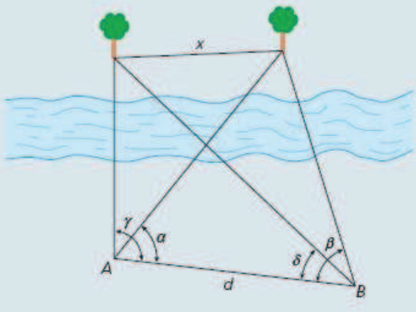
■ 22. Las diagonales de un paralelogramo miden 20 y 16 cm, respectivamente, y uno de los ángulos que forman al cortarse mide 120°. Halla el área y el perímetro del mismo.

■ 23. Dos barcos salen de un puerto, y desde un mismo punto, según dos rectas que forman entre sí un ángulo de 60°. Calcula la distancia que los separará al cabo de dos horas de navegación suponiendo que mantienen velocidades constantes de 50 y 65 km/h, respectivamente.

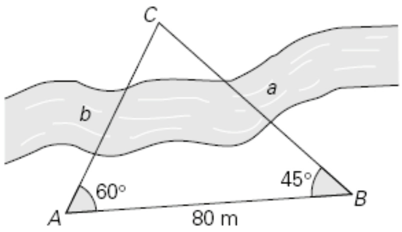
■ 24. Calcula los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un dodecágono de 6 dm de lado.

■ 25. El ángulo en el vértice de un cono de revolución mide 60° y la generatriz 12 m. Halla el volumen del cono.

■ 26. En la vida real se presentan muchas situaciones en las que se necesita conocer la distancia entre dos puntos inaccesibles. Este problema fue resuelto ya en el año 1615 por el sabio holandés Snelius. En la figura tenemos dos árboles a los que no podemos acceder, porque nos lo impide el río. Desde dos puntos *A* y *B* medimos los ángulos α, β, γ y δ, y la distancia d entre ambos puntos. Calcula la distancia *x* sabiendo que $\alpha = 50°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 110°$, $\delta = 40°$ y $d = 120$ m.



17. Un esquema del problema sería:

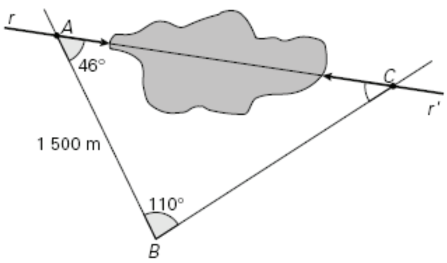


El ángulo $\widehat{C} = 75°$. Utilizando el teorema del seno obtenemos:

$$\frac{a}{\text{sen } 60°} = \frac{80}{\text{sen } 75°} \Rightarrow a = 71{,}73 \text{ m}$$
$$\frac{b}{\text{sen } 45°} = \frac{80}{\text{sen } 75°} \Rightarrow b = 58{,}56 \text{ m}$$

Las distancias pedidas son 71,13 m y 58,56 m.

18. Un esquema del problema es el siguiente:

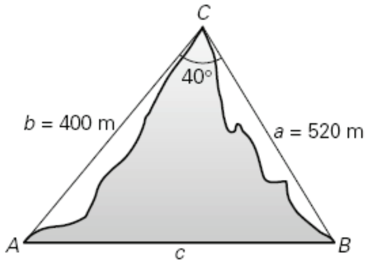


El ángulo $\widehat{C} = 24°$.

Determinamos la distancia BC (lado *a*) mediante el teorema del seno:

$$\frac{1500}{\text{sen } 24°} = \frac{BC}{\text{sen } 46°} \Rightarrow BC = 2\,652{,}85 \text{ m}$$

19. La figura queda:

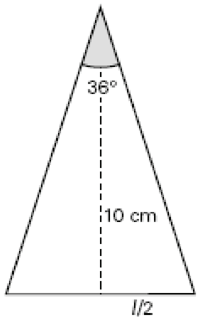


Mediante el teorema del coseno:

$$c^2 = 400^2 + 520^2 - 2 \cdot 400 \cdot 520 \cdot \cos 40º \Rightarrow c = 334,25 \text{ m} = AB$$

20. Como el decágono está circunscrito a la circunferencia, el radio de ésta es la apotema del polígono. El ángulo central del polígono es 36º.

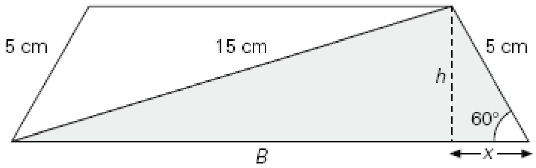
Obtenemos el lado del triángulo de la figura:



El cálculo queda:

$$\text{tg}\, 18º = \frac{l/2}{10} \Rightarrow l = 6,5 \text{ cm} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Área} = \frac{10 \cdot 6,5 \cdot 10}{2} = 325 \text{ cm}^2$$

21. la figura es:



En el triángulo rayado aplicamos el teorema del coseno y obtenemos la base mayor B.

$$15^2 = B^2 + 5^2 - 2 \cdot B \cdot 5 \cdot \cos 60º \Rightarrow B = 16,86 \text{ cm}$$

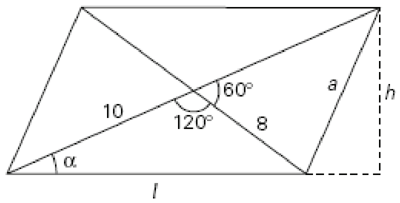
La altura h del triángulo mide: $h = 5 \cdot \text{sen}\, 60º = 4,33 \text{ cm}$

La base menor mide: $B - 2 \cdot x = B - 2 \cdot 5 \cdot \cos 60º = 11,86 \text{ cm}$

El área total queda:

$$\text{Área} = \frac{B + b}{2} h = \frac{16,86 + 11,86}{2} 4,33 = 62,18 \text{ cm}^2$$

22. La figura queda:



Los cálculos son:

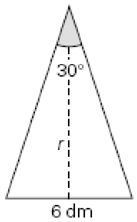
$$l^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow l = 15{,}62 \text{ cm}$$
$$a^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow a = 9{,}17 \text{ cm}$$
$$\text{Perímetro} = 2 \cdot 15{,}62 + 2 \cdot 9{,}17 = 49{,}58 \text{ cm}$$

$$a^2 = 20^2 + l^2 - 2 \cdot 20 \cdot l \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9{,}17^2 = 20^2 + 15{,}62^2 - 2 \cdot 20 \cdot 15{,}62 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \alpha = 26^\circ\, 20'\, 50''$$
$$\text{sen}\, \alpha = \frac{h}{20} \Rightarrow \text{sen}\, 26^\circ\, 20'\, 50'' = \frac{h}{20} \Rightarrow h = 8{,}88 \text{ cm}$$
$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura} = \text{l} \cdot \text{h} = 15{,}62 \cdot 8{,}88 \Rightarrow \text{Área} = 138{,}71 \text{cm}^2$$

23. La distancia d que los separa viene dada por:

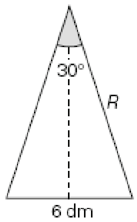
$$d^2 = 100^2 + 130^2 - 2 \cdot 100 \cdot 130 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow d = 117{,}9 \text{ km}$$

24. Las soluciones en cada uno de los casos:



El radio de la circunferencia inscrita es la apotema del dodecágono, por tanto:

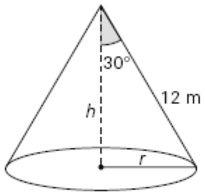
$$\text{tg}\, 15^\circ = \frac{3}{r} \Rightarrow r = 11{,}20 \text{ dm}$$



El radio de la circunferencia circunscrita lo calculamos en el triángulo:

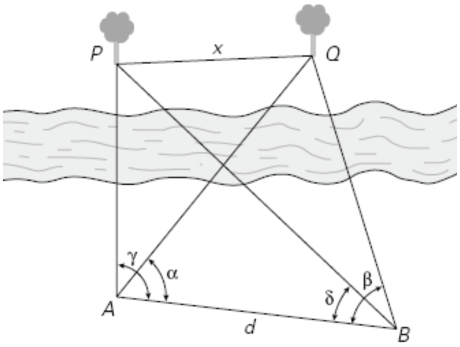
$$\text{sen}\, 15^\circ = \frac{3}{R} \Rightarrow R = 11{,}59 \text{ dm}$$

25. La solución queda:



$$\left.\begin{array}{r} r = 12 \cdot \text{sen } 30^{o} = 6 \text{ m} \\ h = 12 \cdot \cos 30^{o} = 10{,}39 \text{ m} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{V} = \frac{\pi\, r^2\, h}{3} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 10{,}39}{3} = 391{,}7 \text{ m}^3$$

26. Según la figura:



Los cálculos quedan:

Sean P y Q los árboles.

En el triángulo ABP hallamos PB:

$$\frac{PB}{\text{sen } 110^{o}} = \frac{120}{\text{sen } 30^{o}} \Rightarrow PB = 225{,}53 \text{ m}$$

En el triángulo ABQ hallamos BQ:

$$\frac{BQ}{\text{sen } 50^{o}} = \frac{120}{\text{sen } 55^{o}} \Rightarrow BQ = 112{,}22 \text{ m}$$

En el triángulo PBQ hallamos x:

$$x^2 = PB^2 + BQ^2 - 2 \cdot PB \cdot BQ \cdot \cos 35^{o} \Rightarrow x = 148{,}30 \text{ m}$$

Unidad 5 – Trigonometría II

PÁGINA 111

cuestiones iniciales

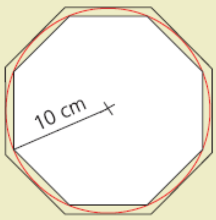
1. Razona la veracidad de las siguientes igualdades:

a) $\cos(60° + 45°) = \cos 60° + \cos 45°$

b) $\text{sen}(2 \cdot 30°) = 2 \cdot \text{sen } 30°$

c) $\text{tg}(45° - 30°) = \text{tg } 45° - \text{tg } 30°$

2. En una circunferencia de 10 cm de radio inscribimos y circunscribimos sendos octógonos regulares. Calcula el área de la superficie comprendida entre ellos.



3. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\text{sen}(x + 25°) = 0,5$ b) $\text{sen } x = \cos x$ c) $\text{tg}(2x) = \sqrt{3}$

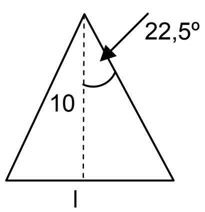
4. Deduce la expresión que permite calcular el área de un triángulo del que se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

SOLUCIONES

1. Las tres igualdades son falsas. Para probarlo basta con utilizar la calculadora.

2. Calculamos el área del octógono circunscrito y le restamos el área del octógono inscrito obteniendo la superficie pedida.

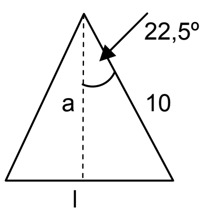
- El octógono circunscrito consta de ocho triángulos como el de la figura:



$$\text{tg}\, 22,5° = \frac{l/2}{10} \Rightarrow l = 8,28\,\text{cm}$$

Área del octógono circunscrito $= 331,2\,\text{cm}^2$

- El octógono inscrito consta de ocho triángulos como el de la figura:



$$\text{sen } 22,5° = \frac{l/2}{10} \Rightarrow l = 7,65\,\text{cm}$$

$$\cos 22,5° = \frac{a}{10} \Rightarrow a = 9,24\,\text{cm}$$

Área del octógono inscrito $= 282,744\,\text{cm}^2$

El área comprendida entre ambos será: $331,2 - 282,744 = 48,456\,\text{cm}^2$

3. Las soluciones quedan:

a) $\operatorname{sen}(x+25^\circ)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=5^\circ+360^\circ K \\ x=125^\circ+360^\circ K \end{cases}$

b) $\operatorname{sen} x=\cos x \Rightarrow \begin{cases} x=45^\circ+360^\circ K \\ x=225^\circ+360^\circ K \end{cases}$

c) $\operatorname{tg}(2x)=\sqrt{3} \Rightarrow \{x=30^\circ+90^\circ K$

4. Supongamos conocidos los lados *b* y *c* y el ángulo A comprendido:

Calculamos la altura: $h=b\cdot \operatorname{sen} A$

El área será:

$$\text{Área}=\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{c\cdot b\cdot \operatorname{sen} A}{2} \Rightarrow \text{Área}=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \operatorname{sen} A$$

PÁGINA 123

ACTIVIDADES

- Practica la fase de revisar el proceso y sacar consecuencias de él en los siguientes problemas:

1. **Vacas lecheras.** Cuatro vacas blancas y tres vacas negras dan tanta leche en cinco días como tres vacas blancas y cinco negras en cuatro días. ¿Qué clase de vaca es la más lechera, la blanca o la negra?
2. **Igualdad.** En un almacén de fruta almacenamos naranjas en pilas con forma de pirámide de base cuadrada. Cada lado de la base lo forman 15 naranjas, ¿cuál es el máximo número de naranjas que podemos apilar? Intenta generalizar este problema.

SOLUCIONES

1. Llamemos B a las vacas blancas y N a las vacas negras:

$$5\cdot(4B+3N)=4\cdot(3B+5N) \quad \Rightarrow \quad 20B+15N=12B+20N \quad \Rightarrow \quad 8B=5N$$

Dan más leche las vacas negras.

2. El número de naranjas en la pirámide es:

$1^2+2^2+3^2+4^2+...+14^2+15^2=1\,240$ naranjas.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Sabiendo que $\text{sen } a = -\frac{12}{13}$ y $\text{tg } b = \frac{24}{7}$, y que $270° < a < 360°$ y $180° < b < 270°$, calcula:

   a) $\text{sen } (a + b)$ b) $\cos (a + b)$ c) $\text{tg } (a + b)$.

2. Partiendo de las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°, calcula:

   a) sen 90° b) cos 90° c) sen 120° d) cos 120° e) tg 120° f) sen 105° g) cos 105° h) tg 105°

3. Sabiendo que el seno de un ángulo es $\text{sen } a = \frac{3}{5}$ y $\frac{\pi}{2} < a < \pi$, halla las razones trigonométricas de $a - 30°$.

4. Justifica las siguientes igualdades:

   a) $\text{sen } (180° + a) = -\text{sen } a$
   b) $\text{tg } \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\text{cotg } a$
   c) $\text{sen } (270° + a) = -\cos a$
   d) $\text{tg } (\pi + 2a) = \text{tg } 2a$
   e) $\cos (90° + a) = -\text{sen } a$
   f) $\text{tg } (270° + a) = -\text{cotg } a$

5. Calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\text{sen } a \cdot \text{sen } (b - c) - \text{sen } b \cdot \text{sen } (a - c) + \text{sen } c \cdot \text{sen } (a - b)$$

6. Demuestra que $\cos (a + b) \cdot \cos (a - b) = \cos^2 a - \text{sen}^2 b = \cos^2 b - \text{sen}^2 a$.

7. Demuestra que $\text{sen } (a + b) \cdot \text{sen } (a - b) = \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$.

8. Halla las expresiones que se piden usando los teoremas de adición:

   a) $\cos 3a$ en función de $\cos a$
   b) $\text{sen } 4a$ en función de $\text{sen } a$

9. Sabiendo que $\text{tg } a = \sqrt{24}$, y que a es un ángulo cuyo seno y coseno son negativos, calcula las razones trigonométricas del ángulo $2a$.

10. Sabiendo que $\text{tg } 2a = \sqrt{3}$, halla $\text{tg } a$

11. Simplifica las expresiones:

    a) $\dfrac{\text{sen } 2a}{1 + \cos 2a}$ b) $\dfrac{\text{sen } 2a}{\text{sen } a} : \dfrac{1 + \cos 2a}{\cos a}$

12. Demuestra que $\text{tg } x = \text{cotg } x - 2 \text{ cotg } 2x$.

13. Comprueba que $\dfrac{\text{tg } a}{\text{tg } 2a - \text{tg } a} = \cos 2a$.

14. Calcula las razones trigonométricas de 22° 30′ y las de 75°. En ambos casos, utiliza las expresiones del ángulo mitad.

1. Quedan:

$$\text{sen}\, a = -\frac{12}{13} \Rightarrow \cos a = \frac{5}{13} \text{ y } \text{tg}\, a = -\frac{12}{5}$$

$$\text{tg}\, b = \frac{24}{7} \Rightarrow \cos b = -\frac{7}{25} \text{ y } \text{sen}\, b = -\frac{24}{25}$$

$$\text{sen}\,(a+b) = -\frac{36}{325};\ \cos\,(a+b) = -\frac{323}{325};\ \text{tg}\,(a+b) = \frac{36}{323}$$

2. Los cálculos son los siguientes:

$$\text{sen}\, 90^{\circ} = \text{sen}\,(30^{\circ} + 60^{\circ}) = 1$$

$$\cos 90^{\circ} = \cos\,(30^{\circ} + 60^{\circ}) = 0$$

$$\text{sen}\, 120^{\circ} = \text{sen}\,(60^{\circ} + 60^{\circ}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^{\circ} = \cos\,(60^{\circ} + 60^{\circ}) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\, 120^{\circ} = \text{tg}\,(60^{\circ} + 60^{\circ}) = -\sqrt{3}$$

$$\text{sen}\, 105^{\circ} = \text{sen}\,(45^{\circ} + 60^{\circ}) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 105^{\circ} = \cos\,(45^{\circ} + 60^{\circ}) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\text{tg}\, 105^{\circ} = \text{tg}\,(45^{\circ} + 60^{\circ}) = -2 - \sqrt{3}$$

3. Quedan:

$$\text{sen}\, a = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos a = -\frac{4}{5}$$

$$\text{sen}\,(a - 30^{\circ}) = \text{sen}\, a \cdot \cos 30^{\circ} - \text{sen}\, 30^{\circ} \cdot \cos a = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}$$

$$\cos\,(a - 30^{\circ}) = \cos a \cdot \cos 30^{\circ} + \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, 30^{\circ} = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$$

$$\text{tg}\,(a - 30^{\circ}) = \frac{\text{sen}\,(a - 30^{\circ})}{\cos\,(a - 30^{\circ})} = -\frac{48 + 25\sqrt{3}}{39}$$

4. Para ello es suficiente con utilizar los teoremas de adición para el seno, coseno y tangente estudiados en esta unidad didáctica.

5. Queda de la forma:

$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(b-c) - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen}(a-c) + \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen}(a-b) =$$
$$= \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos c - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos a +$$
$$+ \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos a = 0$$

6. Queda de la forma:

$$\cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = (\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) \cdot (\cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) =$$
$$= \cos^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b$$

A partir de esta expresión obtenemos las dos igualdades:

- $\cos^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b = \cos^2 a \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 b) - (1 - \cos^2 a) \cdot \operatorname{sen}^2 b = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 b$
- $\cos^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b = \cos^2 b \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 a) - (1 - \cos^2 b) \cdot \operatorname{sen}^2 a = \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a$

7. Queda de la forma:

$$\operatorname{sen}(a+b) \cdot \operatorname{sen}(a-b) = (\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a) \cdot (\operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a) =$$
$$= \operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b \cdot \cos^2 a$$

A partir de esta expresión obtenemos las dos igualdades:

- $\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b \cdot \cos^2 a = \operatorname{sen}^2 a \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 b) - (1 - \operatorname{sen}^2 a) \cdot \operatorname{sen}^2 b = \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b$
- $\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b \cdot \cos^2 a = \cos^2 b \cdot (1 - \cos^2 a) - (1 - \cos^2 b) \cdot \cos^2 a = \cos^2 b - \cos^2 a$

8. Queda:

a) $\cos 3a = \cos(2a + a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$

b) $\operatorname{sen} 4a = \operatorname{sen} 2 \cdot 2a = (4 \operatorname{sen} a - 8 \operatorname{sen}^3 a) \cdot \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a}$

También se puede resolver esta actividad mediante la fórmula de De Moivre.

9. Las razones trigonométricas quedan:

$$\operatorname{tg} a = \sqrt{24} \;\; y \;\; \left(\pi < a < \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{sen} a = -\frac{\sqrt{24}}{5}; \;\; \cos a = -\frac{1}{5}$$

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a = \frac{2\sqrt{24}}{25}; \quad \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = -\frac{23}{25}; \quad \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = -\frac{2\sqrt{24}}{23}$$

10. La tangente queda:

$$\text{tg } 2a = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; \frac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 a} = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; \sqrt{3} \text{ tg}^2 a + 2 \text{ tg } a - \sqrt{3} = 0 \;\Rightarrow\; \text{tg } a = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ o bien } \text{tg } a = -\sqrt{3}$$

11. Las simplificaciones quedan:

a) $$\frac{\text{sen } 2a}{1 + \cos 2a} = \frac{2 \text{ sen } a \cdot \cos a}{2 \cos^2 a} = tg\ a$$

b) $$\frac{\text{sen } 2a}{\text{sen } a} : \frac{1 + \cos 2a}{\cos a} = \frac{\text{sen } 2a \cdot \cos a}{\text{sen } a \cdot (1 + \cos 2a)} = 1$$

12. Partimos del segundo miembro para llegar al primero:

$$\text{cotg } x - 2 \text{ cotg } 2x = \frac{1}{\text{tg } x} - \frac{2}{\text{tg } 2x} = \frac{1}{\text{tg } x} - \frac{2\,(1 - \text{tg}^2 x)}{2 \text{ tg } x} = \frac{1 - 1 + \text{tg}^2 x}{\text{tg } x} = \text{tg } x$$

13. Partiendo del primer miembro obtenemos:

$$\frac{\text{tg } a}{\text{tg } 2a - \text{tg } a} = \frac{\text{tg } a}{\dfrac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 a} - \text{tg } a} = \frac{(1 - \text{tg}^2 a) \text{ tg } a}{\text{tg } a\,(1 + \text{tg}^2 a)} = \cos 2a$$

14. Quedan:

$$\text{sen } 22^\circ\, 30' = \text{sen}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22^\circ\, 30' = \cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{tg } 22^\circ\, 30' = \text{tg}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{sen } 75^\circ = \text{sen}\left(\frac{150^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 150^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 75^{o} = \cos\left(\frac{150^{o}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 150^{o}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 75^{o} = \operatorname{tg}\left(\frac{150^{o}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 150^{o}}{1+\cos 150^{o}}} = 2+\sqrt{3}$$

15. Sabiendo que cotg $a = -2$ y a es el mayor ángulo negativo que verifica esta igualdad, calcula las razones trigonométricas del ángulo mitad.

16. Expresa, en función de una razón trigonométrica del ángulo mitad:

a) $\dfrac{1 - \cos a}{\operatorname{sen} a}$ b) $\dfrac{\operatorname{sen} 2a}{1 + \cos 2a} \cdot \dfrac{\cos a}{1 + \cos a}$

17. Sabiendo que $\cos \dfrac{x}{2} = -\dfrac{2}{3}$ y que x es un ángulo del tercer cuadrante, halla sen x, cos x.

18. Simplifica las expresiones siguientes:

a) $\dfrac{\operatorname{sen} 40° + \operatorname{sen} 20°}{\cos 40° + \cos 20°}$ b) $\dfrac{\operatorname{sen} 195° - \operatorname{sen} 75°}{\operatorname{sen} 195° + \operatorname{sen} 75°}$ c) $\dfrac{\cos 60° - \cos 40°}{\operatorname{sen} 60° - \operatorname{sen} 40°}$

19. Demuestra que $\dfrac{\cos (x - y) - \cos (x + y)}{\operatorname{sen} (x + y) + \operatorname{sen} (x - y)} = \operatorname{tg} y$.

20. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} \left(\dfrac{\pi}{4} + 2x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\operatorname{tg} \left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ e) $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 30° = 0$

b) $\cos \left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}$ d) $\cos \left(\dfrac{1}{2}(x + \pi)\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\operatorname{cotg} \left(\dfrac{x + 45°}{2}\right) = \sqrt{3}$

21. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} 2x = 2 \cos x$
b) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = \cos x$
c) $\operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen} 2x$
d) $\cos 2x - \cos 6x = \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x$
e) $\operatorname{sen} 2x \cdot \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x$
f) $2 \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$

22. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} x = 1 + 2 \cos^2 x$
b) $\sec x + \operatorname{tg} x = 0$
c) $6 \cos^2 \dfrac{x}{2} + \cos x = 1$
d) $6 \cos^2 x + 6 \operatorname{sen}^2 x = 5 + \operatorname{sen} x$
e) $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1$
f) $\cos^2 x = 3 \operatorname{sen}^2 x$

23. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 2$ b) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$ c) $\operatorname{sen} x + \cos x = \dfrac{5}{2}$

24. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} x + \operatorname{sen}^2 y = 2 \\ x + \cos^2 y = 1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = \dfrac{3}{4} \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos (x + y) = 1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right\}$

15. Quedaría:

$$\text{cotg}\, a = -2 \;\Rightarrow\; \left(\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi\right) \;\Rightarrow\; \left(\frac{\pi}{2} < \frac{a}{2} < \pi\right) \quad\Rightarrow\quad \text{tg}\, a = -\frac{1}{2};\; \cos a = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{sen}\,\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}};\;\; \cos\frac{a}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}}}\;;\;\; \text{tg}\,\frac{a}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = 2-\sqrt{5}$$

16. Queda expresado del siguiente modo:

a) $$\frac{1-\cos a}{\text{sen}\, a} = \frac{1-\cos^2\frac{a}{2}+\text{sen}^2\frac{a}{2}}{2\,\text{sen}\,\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}} = \frac{2\,\text{sen}^2\frac{a}{2}}{2\,\text{sen}\,\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}} = \text{tg}\,\frac{a}{2}$$

b) $$\frac{\text{sen}\, 2a}{1+\cos 2a}\cdot\frac{\cos a}{1+\cos a} = \frac{2\,\text{sen}\, a\cdot\cos a}{1+\cos^2 a-\text{sen}^2 a}\cdot\frac{\cos a}{1+\cos^2\frac{a}{2}-\text{sen}^2\frac{a}{2}} = \frac{2\cdot 2\,\text{sen}\,\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}\cdot\cos^2 a}{\left(2\cos^2 a\right)\cdot(2\cos^2\frac{a}{2})} = \text{tg}\,\frac{a}{2}$$

17. Ambas razones trigonométricas quedan:

$$\cos\frac{x}{2} = -\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = -\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \cos x = -\frac{1}{9};\;\; \text{sen}\, x = \frac{-4\sqrt{5}}{9}$$

18. Las simplificaciones quedan:

a) $$\frac{\text{sen}\, 40^\circ+\text{sen}\, 20^\circ}{\cos 40^\circ+\cos 20^\circ} = \frac{2\,\text{sen}\, 30^\circ\cdot\cos 10^\circ}{2\, cos\, 30^\circ\cdot\cos 10^\circ} = \text{tg}\, 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

b) $$\frac{\text{sen}\, 195^\circ-\text{sen}\, 75^\circ}{\text{sen}\, 195^\circ+\text{sen}\, 75^\circ} = \frac{2\cos 135^\circ\cdot\text{sen}\, 60^\circ}{2\,\text{sen}\, 135^\circ\cdot\cos 60^\circ} = \text{cotg}\, 135^\circ\cdot\text{tg}\, 60^\circ = -\sqrt{3}$$

c) $$\frac{\cos 60^\circ-\cos 40^\circ}{\text{sen}\, 60^\circ-\text{sen}\, 40^\circ} = \frac{-2\,\text{sen}\, 50^\circ\cdot\text{sen}\, 10^\circ}{2\cos 50^\circ\cdot\text{sen}\, 10^\circ} = -\text{tg}\, 50^\circ = -1{,}19$$

19. Se demuestra del siguiente modo:

$$\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\text{sen}(x+y)+\text{sen}(x-y)} = \frac{-2\,\text{sen}\, x\cdot\text{sen}\,(-y)}{2\,\text{sen}\, x\cdot\cos y} = \text{tg}\, y$$

20. La solución queda:

a) $x=\frac{\pi}{24}+K\pi$ ó $x=\frac{5\pi}{24}+K\pi$

b) $x=\frac{11\pi}{36}+\frac{2K\pi}{3}$ ó $x=\frac{19\pi}{36}+\frac{2K\pi}{3}$

c) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{K\pi}{2}$

d) $x=-\frac{2\pi}{3}+4K\pi$ ó $x=\frac{8\pi}{3}+4K\pi$

e) $x=10^{o}+120^{o}K$ ó $x=50^{o}+120^{o}K$

f) $x=15^{o}+360^{o}K$

21. Las soluciones quedan:

a) $\operatorname{sen}2x=2\cos x \Rightarrow 2\operatorname{sen}x\cdot\cos x=2\cos x \Rightarrow 2\operatorname{sen}x\cdot\cos x-2\cos x=0$

$\Rightarrow \cos x=0;\ \operatorname{sen}x=1 \Rightarrow \boxed{x=90^{o}+180^{o}K}$

b) $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}3x=\cos x \Rightarrow 2\operatorname{sen}2x\cdot\cos x=\cos x \Rightarrow 2\operatorname{sen}2x\cdot\cos x-\cos x=0$

$\Rightarrow \cos x=0;\ \operatorname{sen}2x=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x=90^{o}+180^{o}K}\boxed{x=15^{o}+180^{o}K}\boxed{x=75^{o}+180^{o}K}$

c) $\operatorname{sen}4x=\operatorname{sen}2x \Rightarrow 2\operatorname{sen}2x\cdot\cos 2x=\operatorname{sen}2x \Rightarrow 2\operatorname{sen}2x\cdot\cos 2x-\operatorname{sen}2x=0$

$\Rightarrow \operatorname{sen}2x\cdot(2\cos 2x-1)=0 \Rightarrow \cos 2x=\frac{1}{2};\ \operatorname{sen}2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0^{o}+90^{o}K}\boxed{x=30^{o}+180^{o}K}\ \boxed{x=150^{o}+180^{o}K}$

d) $\cos 2x-\cos 6x=\operatorname{sen}5x+\operatorname{sen}3x \Rightarrow -2\operatorname{sen}4x\cdot\operatorname{sen}(-2x)=2\operatorname{sen}4x\cdot\cos x$

$\Rightarrow 2\operatorname{sen}4x\cdot(\operatorname{sen}2x-\cos x)=0 \Rightarrow \operatorname{sen}4x=0 \Rightarrow \boxed{x=45^{o}K} \Rightarrow \operatorname{sen}(2x)-\cos x=0$

$\Rightarrow \cos x(2\operatorname{sen}x-1)=0 \Rightarrow \cos x=0;\ \operatorname{sen}x=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x=90^{o}+180^{o}K}\boxed{x=30^{o}+360^{o}K}\ \boxed{x=150^{o}+360^{o}K}$

e) $\text{sen}\,2x\cdot\cos x = 6\text{sen}^3 x \;\Rightarrow\; 2\,\text{sen}\,x\cdot\cos^2 x - 6\text{sen}^3 x = 0 \;\Rightarrow\; 2\,\text{sen}\,x\cdot(\cos^2 x - 3\text{sen}^2 x) = 0$

$\Rightarrow\; \text{sen}\,x = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 0^\circ + 180^\circ K} \;\Rightarrow\; \cos^2 x - 3\text{sen}^2 x = 0 \;\Rightarrow\; \cos^2 x - 3(1-\cos^2 x) = 0$

$\Rightarrow\; \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{x = 30^\circ + 180^\circ K}\; \boxed{x = 150^\circ + 180^\circ K}$

f) $2\text{sen}\,x = \text{tg}\,x \;\Rightarrow\; \text{sen}\,x\,(2\cos x - 1) = 0 \;\Rightarrow\; \text{sen}\,x = 0\;;\; \cos x = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\; \boxed{x = 0^\circ + 180^\circ K}\; \boxed{x = 60^\circ + 360^\circ K}\; \boxed{x = 300^\circ + 360^\circ K}$

22. La solución de cada ecuación queda:

a) $\text{sen}\,x = 1 + 2\cos^2 x \;\Rightarrow\; \text{sen}\,x = 1 + 2 - 2\text{sen}^2 x \;\Rightarrow\; 2\text{sen}^2 x + \text{sen}\,x - 3 = 0$

$\Rightarrow\; \text{sen}\,x = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 90^\circ + 360^\circ K}$

b) $\sec x + \text{tg}\,x = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} = 0$

$\Rightarrow\; \text{sen}\,x = -1 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 270^\circ + 360^\circ K}$

c) $6\cos^2\dfrac{x}{2} + \cos x = 1 \;\Rightarrow\; 6\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}\right)^2 + \cos x = 1 \;\Rightarrow\; 3 + 3\cos x + \cos x = 1$

$\Rightarrow\; \cos x = -\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{x = 120^\circ + 360^\circ K}\boxed{x = 240^\circ + 360^\circ K}$

d) $6\cos^2 x + 6\text{sen}^2 x = 5 + \text{sen}\,x \;\Rightarrow\; 6 = 5 + \text{sen}\,x$

$\Rightarrow\; \text{sen}\,x = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 90^\circ + 360^\circ K}$

e) $\text{tg}\,2x\cdot\text{tg}\,x = 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{2\,\text{tg}^2 x}{1 - \text{tg}^2 x} = 1$

$\Rightarrow\; \text{tg}\,x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l}\boxed{x = 30^\circ + 180^\circ K}\\ \boxed{x = 150^\circ + 180^\circ K}\end{array}$

f) $\cos^2 x = 3\text{sen}^2 x \;\Rightarrow\; 1 = 4\,\text{sen}^2 x$

$\Rightarrow\; \text{sen}\,x = \pm\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l}\boxed{x = 30^\circ + 180^\circ K}\\ \boxed{x = 150^\circ + 180^\circ K}\end{array}$

23. La solución queda:

a) $\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\cos x=2 \ \Rightarrow \ \frac{1}{2}\operatorname{sen} x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1$

$\Rightarrow \ \operatorname{sen}(x+60^{o})=1 \ \Rightarrow \ \boxed{x=30^{o}+360^{o}K}$

b) $\operatorname{sen} x+\cos x=\sqrt{2} \ \Rightarrow \ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=1$

$\Rightarrow \ \operatorname{sen}(x+45^{o})=1 \ \Rightarrow \ \boxed{x=45^{o}+360^{o}K}$

c) $\operatorname{sen} x+\cos x=\frac{5}{2} \ \Rightarrow$ Imposible $\operatorname{sen} x+\cos x \not> 2$

24. Las soluciones de los sistemas quedan:

a) $\left.\begin{array}{l} x+\operatorname{sen}^2 y=2 \\ x+\cos^2 y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sumando ambas ecuaciones: $\Rightarrow 2x+1=3 \ \Rightarrow \ \boxed{x=1}$

$\operatorname{sen}^2 y=1 \ \Rightarrow \ \operatorname{sen} y=\pm 1 \ \Rightarrow \ \boxed{y=\frac{\pi}{2}} \ \boxed{y=\frac{3\pi}{2}}$

b) $\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x\cdot\cos y=\frac{3}{4} \\ \cos x\cdot\operatorname{sen} y=\frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sumando ambas ecuaciones obtenemos: $\Rightarrow \operatorname{sen}(x+y)=1 \ \Rightarrow x+y=90^{o} \ \Rightarrow x=90^{o}-y$

Sustituyendo en la 1ª ecuación: $\operatorname{sen}(90^{\circ}-y)\cdot\cos y=\frac{3}{4} \ \Rightarrow \ \cos^2 y=\frac{3}{4} \ \Rightarrow \ \cos y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \ \boxed{y=30^{\circ};\ x=60^{\circ}} \ \boxed{y=150^{\circ};\ x=300^{\circ}} \ \boxed{y=210^{\circ};\ x=240^{\circ}} \ \boxed{y=330^{\circ};\ x=120^{\circ}}$

c) $\left.\begin{array}{l} \cos x+\cos y=1 \\ \cos(x+y)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ De la 2ª ecuación obtenemos: $\Rightarrow x+y=0^{o} \ \Rightarrow \ x=-y$

Sustituyendo en la 1ª ecuación: $\cos(-y)+\cos y=1 \ \Rightarrow \ 2\cos y=1$

$\Rightarrow \ \cos y=\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \boxed{\begin{array}{l} y=60^{o} \\ x=300^{o} \end{array}} \ \boxed{\begin{array}{l} y=300^{o} \\ x=60^{o} \end{array}}$

d) $\left.\begin{array}{l} x+y=90^{o} \\ \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=\frac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ $y=90^{o}-x$ Sustituyendo en la 2ª ecuación

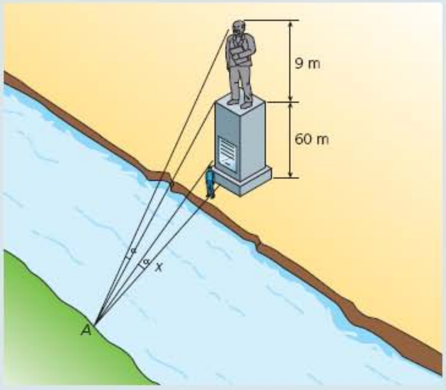
$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}(90^{o}-x)=\frac{\sqrt{6}}{2} \ \Rightarrow \ 2\cdot\operatorname{sen} 45^{o}\cdot\cos(90^{o}-x)=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow \ \cos(45^{o}-x)=\frac{\sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow \ x-45^{o}=30^{o}$ ó $x-45^{o}=330^{o} \ \Rightarrow \ \boxed{\begin{array}{l} y=75^{o} \\ x=15^{o} \end{array}}$ ó $\boxed{\begin{array}{l} y=15^{o} \\ x=75^{o} \end{array}}$

PÁGINA 128

ACTIVIDADES FINALES

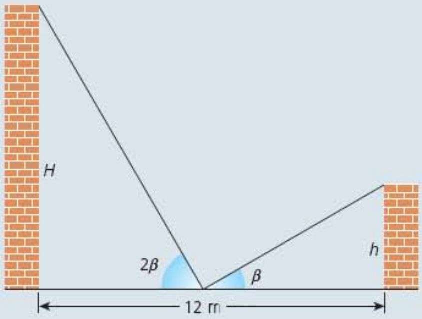
25. En una de las orillas de un río hay un pedestal de 60 m de altura sobre el que se apoya una estatua de 9 m de alzada. Halla la anchura x del río, sabiendo que desde un punto A, situado en la orilla opuesta al pedestal, se ve la estatua bajo el mismo ángulo que se vería a un hombre de 1,80 m situado delante del pedestal.



26. Sabiendo que $\operatorname{tg} \dfrac{A}{2} = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ y que A es un ángulo cuyo seno es menor que su coseno, halla $\cos 3A - \cos A$.

27. Una calle mide 12 m de ancha. Desde el punto medio de la misma se observan los aleros de sendos edificios de alturas H y h bajo ángulos 2β y β, respectivamente.

En el caso de que los ángulos sean de 60° y 30°, calcula H y h. Encuentra la relación general que liga a las alturas H y h, y comprueba que las alturas calculadas anteriormente verifican la relación general.



28. Siendo A, B, C los ángulos de un triángulo, demuestra que:

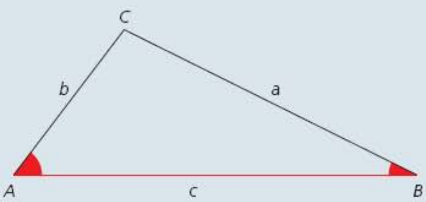
$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$$

Nota: ayúdate del desarrollo de $\operatorname{tg}(A + B + C)$, y recuerda que $A + B + C = 180°$.

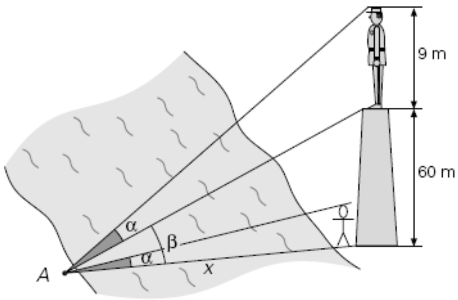
29. En los manuales de agrimensura aparece la siguiente fórmula para calcular el área de un triángulo, siempre que se conozcan los elementos que en ella aparecen:

$$S = \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}$$

Ayudándote de la altura correspondiente al vertice C, demuestra la fórmula anterior.



25. Según la figura siguiente:



Llamando β al ángulo bajo el cual se ve el pedestal, tenemos:

$$\operatorname{tg}(\beta+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha};\quad \frac{60+9}{x}=\frac{\frac{60}{x}+\frac{1,8}{x}}{1-\frac{60}{x}\cdot\frac{1,8}{x}}\Rightarrow\frac{69}{x}=\frac{61,8\cdot x}{x^2-108}$$

$$\Rightarrow 7,2x^2=7\,452\;\Rightarrow\;\boxed{x=32,17\text{ m}}$$

La anchura del río es de 32,17 metros.

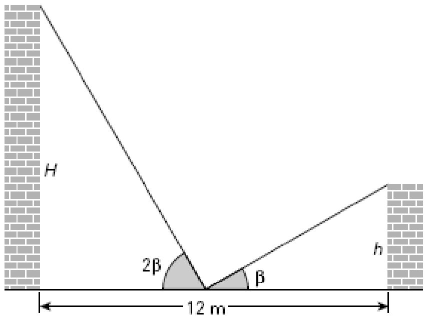
26. Queda del siguiente modo:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=-\sqrt{\frac{3}{2}}\;\Rightarrow\;\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=-\sqrt{\frac{3}{2}}\;\Rightarrow\;\cos A=-\frac{1}{5};\ \operatorname{sen}A=-\frac{\sqrt{24}}{5}<\cos A$$

Hallamos:

$$\cos 3A-\cos A=-2\operatorname{sen}2A\cdot\operatorname{sen}A=\frac{96}{125}$$

27. Sea el esquema:



Los cálculos quedan:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{H}{6} \Rightarrow H = 6 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{H = 10{,}39 \text{ m}}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{h = 3{,}46 \text{ m}}$$

$\operatorname{tg} 2\beta = \dfrac{2\, tg\, \beta}{1 - tg^2\, \beta}$. Sustituyendo $\operatorname{tg} 2\beta = \dfrac{H}{6}$ y $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{h}{6}$ obtenemos: $\dfrac{H}{6} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{h}{6}}{1 - \dfrac{h^2}{36}}$

$$\Rightarrow H \cdot h^2 + 72h - 36H = 0 \Rightarrow \boxed{h = \frac{6\sqrt{36 + H^2} - 36}{H}}$$

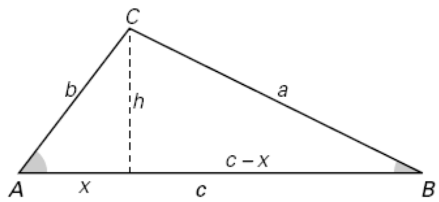
Ésta es la relación que liga ambas alturas. Relación que se verifica para los valores obtenidos anteriormente.

28. A partir del desarrollo de $\operatorname{tg}(A+B+C)$ y de sustituir $A+B+C=180^\circ$, obtenemos la expresión buscada:

$$\operatorname{tg}(A+B+C) = \operatorname{tg}\left[A + (B+C)\right] = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg}(B+C)}{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg}(B+C)} = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} C}$$

Como $A+B+C=180^\circ$ entonces $\operatorname{tg}(A+B+C)=0$ y queda $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$

29. Sea un triángulo:



El área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2}\text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} c \cdot h$$

Vamos a calcular *h*:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} A &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} B &= \frac{h}{c - x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; h = c \cdot \frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}$$

De modo que sustituyendo en el área obtenemos la fórmula buscada:

$$S = \frac{1}{2} c \cdot c \cdot \frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} = \frac{1}{2} c^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}$$