

## EJERCICIOS DE TRIGONOMETRÍA

### Repaso Trigonometría elemental:

1. Completar en el cuaderno la siguiente tabla:

<b>Grados</b>	105°		225°		320°		35°
<b>Radianes</b>		4π/9 rad		π/15 rad		1 rad	

2. **Uso de la calculadora:**

a) Hallar, con cuatro cifras decimales bien aproximados, el valor de las siguientes razones trigonométricas:

$$\begin{array}{cccccc} \text{sen } 35^\circ & \text{cos } 70^\circ & \text{tg } 53^\circ & \text{sen } 26^\circ 37' & \text{cos } 78^\circ 34' 8'' & \text{tg } 34^\circ 12' 43'' \\ \text{sec } 12^\circ & \text{cosec } 23^\circ & \text{ctg } 54^\circ & \text{sen } 235^\circ & \text{cos } 105^\circ & \end{array}$$

b) Dadas las siguientes razones trigonométricas, hallar el ángulo agudo  $\alpha$  del que proceden:  
 $\text{sen } \alpha = 0,25$      $\text{cos } \alpha = 0,74$      $\text{tg } \alpha = 3$      $\text{sec } \alpha = 1,18$      $\text{ctg } \alpha = 1,5$

c) Dado  $\text{cos } \alpha = 0,2$ , hallar, mediante calculadora,  $\text{tg } \alpha$

d) Dado  $\text{sen } \alpha = 0,56$ , hallar, mediante calculadora,  $\text{cos } \alpha$

e) Dada  $\text{tg } \alpha = 2$ , hallar, mediante calculadora,  $\text{sen } \alpha$

f) Dada  $\text{cosec } \alpha = 3$ , hallar, mediante calculadora,  $\text{cos } \alpha$

g) Dada  $\text{sec } \alpha = 1,5$ , hallar, mediante calculadora,  $\text{tg } \alpha$

h) Dada  $\text{ctg } \alpha = 3$ , hallar, mediante calculadora,  $\text{cosec } \alpha$

3. Resolver los siguientes **triángulos, rectángulos** en A, aplicando, siempre que sea posible relaciones trigonométricas (¡no el teorema de Pitágoras!); hallar también su área:

- a)  $a=320$  m,  $B=47^\circ$     (Soluc:  $C=43^\circ$ ;  $b \approx 234,03$  m;  $c \approx 218,24$  m;  $S_{ABC} \approx 25537,64$  m<sup>2</sup>)
- b)  $a=42,5$  m,  $b=35,8$  m    (Soluc:  $B \approx 57^\circ 23' 22''$ ;  $C \approx 32^\circ 36' 38''$ ;  $c \approx 22,90$  m;  $S_{ABC} \approx 409,99$  m<sup>2</sup>)
- c)  $b=32,8$  cm,  $B=22^\circ$     (Soluc:  $C=68^\circ$ ;  $a \approx 87,56$  cm;  $c \approx 81,18$  cm;  $S_{ABC} \approx 1331,40$  cm<sup>2</sup>)
- d)  $b=8$  mm,  $c=6$  mm    (Soluc:  $B \approx 53^\circ 7' 48''$ ;  $C \approx 36^\circ 52' 12''$ ;  $a \approx 10$  mm;  $S_{ABC} = 24$  mm<sup>2</sup>)
- e)  $a=8$  km,  $b=6$  km    (Soluc:  $B \approx 48^\circ 35'$ ;  $C \approx 41^\circ 25'$ ;  $c \approx 5,30$  km;  $S_{ABC} \approx 15,87$  km<sup>2</sup>)
- f)  $a=13$  m,  $c=5$  m    (Soluc:  $B \approx 67^\circ 22' 48''$ ;  $C \approx 22^\circ 37' 12''$ ;  $b \approx 12$  m;  $S_{ABC} \approx 30$  m<sup>2</sup>)
- g)  $c=42,7$  dam,  $C=31^\circ$     (Soluc:  $B=59^\circ$ ;  $a \approx 82,91$  dam;  $b \approx 71,06$  dam;  $S_{ABC} \approx 1517,23$  dam<sup>2</sup>)
- h)  $c=124$  dm,  $B=67^\circ 21'$     (Soluc:  $C \approx 22^\circ 39'$ ;  $a \approx 321,99$  dm;  $b \approx 297,16$  dm;  $S_{ABC} \approx 18423,9$  dm<sup>2</sup>)

4. Una escalera de bomberos de 10 m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de  $45^\circ$  y si se apoya sobre la otra forma un ángulo de  $30^\circ$ . Hallar la anchura de la calle. ¿Qué altura se alcanza sobre cada fachada?

(Soluc: anchura  $\approx 15,73$  m; altura 7,07 y 5 m respectivamente)

## Razones trigonométricas en cualquier cuadrante:

5. Expresar los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo positivo menor de  $360^\circ$  o  $2\pi$  rad (hacer el dibujo en el caso de los cinco primeros):

- a)  $1100^\circ$     b)  $19\pi/3$  rad    c)  $2970^\circ$     d)  $-300^\circ$     e)  $-1040^\circ$     f)  $10\pi$  rad    g)  $43\pi/4$  rad  
h)  $3500^\circ$     i)  $32\pi/3$  rad    j)  $-2620^\circ$     k)  $63\pi/5$  rad    l)  $43\pi/6$  rad    m)  $4980^\circ$

(Soluc: a)  $20^\circ$ ; b)  $90^\circ$ ; c)  $60^\circ$ ; d)  $40^\circ$ ; e)  $0$  rad; f)  $\pi/3$  rad; g)  $3\pi/4$  rad; h)  $260^\circ$ ; i)  $2\pi/3$  rad; j)  $260^\circ$ ; k)  $3\pi/5$  rad; l)  $7\pi/6$  rad)

6. Sobre **papel milimetrado**, y para cada uno de los apartados que figuran a continuación, trazar una circunferencia de radio unidad (usar e indicar una escala conveniente), señalar en ella los ángulos en cuestión (utilizar para ello un transportador de ángulos) y trazar su seno y coseno, medir éstos aproximadamente, y comparar el resultado obtenido con la calculadora:

- a)  $30^\circ$  y  $150^\circ$     b)  $45^\circ$  y  $225^\circ$     c)  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  y  $270^\circ$     d)  $60^\circ$  y  $300^\circ$     e)  $0^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $120^\circ$

7. Utilizando la calculadora, construir una tabla de valores apropiada para representar, sobre **papel milimetrado**, las funciones  $\sin x$ ,  $\cos x$  y  $\operatorname{tg} x$  (Pueden verse dichas gráficas en el anexo final del cuaderno)

8. Sabiendo que  $\cos \alpha = -3/5$  y  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ , calcular las restantes razones trigonométricas.

(Soluc:  $\sin \alpha = -4/5$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 4/3$ )

9. Sabiendo que  $\operatorname{tg} \alpha = -3/4$  y  $\alpha \in 4^\circ$  cuadrante, calcular las restantes razones trigonométricas.

(Soluc:  $\sin \alpha = -3/5$ ,  $\cos \alpha = 4/5$ )

10. Ídem con  $\sec \alpha = 2$  y  $0 < \alpha < \pi/2$

(Soluc:  $\sin \alpha = \sqrt{3}/2$ ,  $\cos \alpha = 1/2$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ )

11. Ídem con  $\operatorname{tg} \alpha = -3$  y  $\pi/2 < \alpha < \pi$

(Soluc:  $\sin \alpha = 3\sqrt{10}/10$ ,  $\cos \alpha = -\sqrt{10}/10$ )

12. Ídem con  $\cos \alpha = 0,2$  y  $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$

(Soluc:  $\sin \alpha = -2\sqrt{6}/5$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -2\sqrt{6}$ )

13. Ídem con  $\sin \alpha = -0,3$  y  $\pi < \alpha < 3\pi/2$

(Soluc:  $\cos \alpha = -0,95$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 0,32$ )

14. Ídem con  $\operatorname{tg} \alpha = 4/3$  y  $\pi < \alpha < 3\pi/2$

(Soluc:  $\sin \alpha = -4/5$ ,  $\cos \alpha = -3/5$ )

15. Calcular las restantes razones trigonométricas sabiendo que:

a)  $\cos \alpha = 4/5$      $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

f)  $\cos \alpha = -1/3$      $\alpha \in 2^\circ$  cuad.

k)  $\sec \alpha = -\sqrt{2}$      $\alpha \in 3^\circ$  cuad.

b)  $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$      $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

g)  $\operatorname{cosec} \alpha = -2$      $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

l)  $\operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{5}$      $\alpha \in 2^\circ$  cuad.

c)  $\sin \alpha = 3/5$      $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

h)  $\sec \alpha = 1$      $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

d)  $\operatorname{ctg} \alpha = -2$      $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

i)  $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$      $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

e)  $\sin \alpha = 1/4$      $\alpha \in 1^\circ$  cuad.

j)  $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$      $\alpha \in 3^\circ$  cuad.

16. Determinar los valores de  $\sin \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$  sabiendo que  $\operatorname{tg} \alpha > 0$  y  $\cos \alpha = -5/12$

17. Encontrar el ángulo  $\alpha$  y las demás razones trigonométricas sabiendo que  $\sin \alpha = 1/2$  y  $\cos \alpha = -\sqrt{3}/2$

18. Resolver las siguientes **ecuaciones trigonométricas** sencillas:

a)  $\sin x = \frac{1}{2}$

b)  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c)  $\operatorname{tg} x = 1$

d)  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e)  $\cos x = \frac{1}{2}$

f)  $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

### Reducción al 1<sup>er</sup> cuadrante:

19. Hallar, **sin calculadora:** **a)**  $\sin 570^\circ$     **b)**  $\cos 14520^\circ$     **c)**  $\sin (-120^\circ)$     **d)**  $\cos (-240^\circ)$   
**e)**  $\operatorname{tg} 2565^\circ$     **f)**  $\cos 15\pi/2$  rad    **g)**  $\sin 55\pi/6$  rad    **h)**  $\operatorname{tg} 79\pi$  rad

(Soluc: a)  $-1/2$ ; b)  $-1/2$ ; c)  $-\sqrt{3}/2$ ; d)  $-1/2$ ; e)  $1$ ; f)  $0$ ; g)  $-1/2$ ; h)  $0$ )

20. Ídem: **a)**  $\cos 225^\circ$     **b)**  $\cos(-60^\circ)$     **c)**  $\operatorname{tg} 120^\circ$     **d)**  $\sin (-1470^\circ)$     **e)**  $\operatorname{tg} 900^\circ$   
**f)**  $\sin 19\pi/6$  rad    **g)**  $\cos 11\pi$  rad

(Soluc: a)  $-\sqrt{2}/2$ ; b)  $1/2$ ; c)  $-\sqrt{3}$ ; d)  $-1/2$ ; e)  $0$ ; f)  $-1/2$ ; g)  $-1$ )

21. Expresar las siguientes razones en función de la de un ángulo del 1<sup>er</sup> cuadrante:

**a)**  $\sin 1485^\circ$     **b)**  $\cos 1560^\circ$     **c)**  $\sin 1000^\circ$     (Soluc:  $\sin 45^\circ$ ;  $-\cos 60^\circ$ ;  $-\sin 80^\circ$ )

22. Ídem: **a)**  $\sin 1300^\circ$     **b)**  $\cos (-690^\circ)$     **c)**  $\operatorname{tg} 170^\circ$     **d)**  $\sin (-1755^\circ)$     **e)**  $\sin (-120^\circ)$     **f)**  $\operatorname{ctg} (-150^\circ)$   
**g)**  $\sin 2700^\circ$     **h)**  $\sec (-25^\circ)$     **i)**  $\cos (-30^\circ)$     **j)**  $\operatorname{cosec} 4420^\circ$

23. Expresar seno, coseno y tangente de  $1755^\circ$  en función de un ángulo del 1<sup>er</sup> cuadrante. Comprobar el resultado con la calculadora.

### Razones trigonométricas de adición y sustracción:

24. **a)** Hallar mediante las fórmulas trigonométricas correspondientes (sin calculadora, y sin utilizar decimales) el seno, coseno y tangente de  $75^\circ$ .

**b)** Utilizando los resultados anteriores, calcular, de la forma más rápida posible, (sin calculadora y sin utilizar decimales) el seno y la tangente de los siguientes ángulos:

**i)**  $105^\circ$     **ii)**  $165^\circ$     **iii)**  $15^\circ$     **iv)**  $195^\circ$     **v)**  $135^\circ$

(Comprobar todos los resultados con la calculadora)

25. Si  $\sin x=12/13$  y  $\sin y=4/5$ , siendo  $x$  e  $y \in 1^{\text{er}}$  cuadrante, calcular:

**a)**  $\sin (x+y)$     **b)**  $\sin (x-y)$     **c)**  $\cos (x+y)$     **d)**  $\cos (x-y)$

(Soluc: a)  $56/65$ ; b)  $16/65$ ; c)  $-33/65$ ; d)  $63/65$ )

26. Si  $\operatorname{tg} a=3/4$ , hallar  $\operatorname{tg} (a+30^\circ)$  y  $\operatorname{tg} (45^\circ-a)$     (Soluc:  $\frac{48+25\sqrt{3}}{39}$ ;  $\frac{1}{7}$ )

27. Hallar el seno y el coseno de  $9^\circ$  y  $6^\circ$  en función de  $\cos 36^\circ$

### Razones trigonométricas de $-\alpha$ , $180-\alpha$ , $180+\alpha$ , etc:

28. Expresar únicamente en función de las razones trigonométricas de  $\alpha$ :

**a)**  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$     **b)**  $\cos\left(\alpha - \frac{9\pi}{2}\right)$     **c)**  $\operatorname{tg}(\alpha + 5\pi)$     **d)**  $\sin\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)$     **e)**  $\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha)$

(Soluc: a)  $\sin \alpha$ ; b)  $\sin \alpha$ ; c)  $\operatorname{tg} \alpha$ ; d)  $-\cos \alpha$ ; e)  $-\operatorname{tg} \alpha$ )

29. Simplificar las siguientes expresiones: **a)**  $\operatorname{tg}(\alpha+180^\circ)+\operatorname{tg}(\alpha-180^\circ)+\operatorname{tg}(\alpha-270^\circ)+\operatorname{tg}(360^\circ-\alpha)$

**b)**  $\sin(\alpha+5\pi)+\sin(\alpha-\pi)+\sin(\alpha+2\pi)+\sin(\alpha+\pi)$

(Soluc: a)  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$ ; b)  $-2 \sin \alpha$ )

30. Calcular  $\sin(5\pi-x)$  sabiendo que  $\cos x=0,5$

31. Siendo  $\operatorname{tg} x=2/3$  calcular:    **a)**  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$     **b)**  $\operatorname{tg}(\pi-x)$     **c)**  $\operatorname{tg}(\pi+x)$

32. Sabiendo que  $\operatorname{tg} a=3/2$  calcular:    **a)**  $\cos(\pi+a)$     **b)**  $\cos(2\pi-a)$     **c)**  $\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$     **d)**  $\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$

(Soluc: a)  $-2\sqrt{13}/13$ ; b)  $2\sqrt{13}/13$ ; c)  $2\sqrt{13}/13$ ; d)  $2\sqrt{13}/13$ )

### Razones trigonométricas del ángulo doble:

33. Calcular el seno y el coseno de  $20^\circ$  en función de  $\sin 10^\circ$ , y comprobar el resultado con la calculadora.

34. Hallar  $\sin 2x$ ,  $\cos 2x$  y  $\operatorname{tg} 2x$ , siendo  $x \in 1^{\text{er}}$  cuadrante, en cada uno de los siguientes casos:

**a)**  $\sin x=1/2$     **b)**  $\cos x=3/5$     **c)**  $\sin x=5/13$

(Soluc: a)  $\sqrt{3}/2$ ;  $1/2$ ;  $\sqrt{3}$     b)  $24/25$ ;  $-7/25$ ;  $-24/7$     c)  $120/169$ ;  $119/169$ ;  $120/119$ )

35. Dado  $a \in 3^{\text{er}}$  cuadrante tal que  $\operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , hallar las razones trigonométricas del ángulo **2a**.

(Soluc:  $\sin 2a = \sqrt{3}/2$ ;  $\cos 2a = 1/2$ )

35b Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo **a** del ejercicio anterior.

(Soluc:  $a=210^\circ$ )

36. Expresar  $\sin 3a$  y  $\cos 3a$  en función de  $\sin a$  y  $\cos a$  respectivamente

(Soluc:  $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$ ;  $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$ )

37. Si  $\cos \alpha = 1/5$  y  $\alpha \in 1^{\text{er}}$  cuadrante, calcular las razones trigonométricas del ángulo  $90^\circ - 2\alpha$

(Soluc:  $-23/25$ ;  $4\sqrt{6}/25$ )

38. Si  $\operatorname{ctg} \alpha = 4/3$ , hallar  $\cos 2\alpha$     (Soluc:  $7/25$ )

39. Sabiendo que  $\operatorname{tg} 2a = \sqrt{3}$ , hallar  $\sin a$  y  $\cos a$ , sabiendo que  $a < 90^\circ$ . ¿De qué ángulo **a** se trata?

(Soluc:  $\sin a = 1/2$ ;  $\cos a = \sqrt{3}/2$ ;  $a = 30^\circ$ )

### Razones trigonométricas del ángulo mitad:

40. Calcular  $\operatorname{tg} \pi/8$     (Soluc:  $\sqrt{2}-1$ )

41. Dado  $\alpha \in 4^\circ$  cuadrante tal que  $\sec \alpha = 2$ , hallar  $\cos \alpha/2$

(Soluc:  $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ )

41b Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo  $\alpha$  del ejercicio anterior. Comprobar, a continuación, mediante fórmulas trigonométricas (sin calculadora) el resultado anterior.

(Soluc:  $\alpha = 300^\circ$ )

42. Sea un ángulo  $a$  situado en el 2º cuadrante tal que  $\operatorname{tg} a = -3/4$ . Hallar las razones trigonométricas del ángulo  $a/2$ .

$$\left( \text{Soluc: } \operatorname{sen} \frac{a}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}; \operatorname{cos} \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10} \right)$$

42b Comprobar con la calculadora el resultado del ejercicio anterior. (Soluc:  $a \cong 143^\circ 7' 48''$ )

43. Dado  $a \in 3^{\text{er}}$  cuadrante tal que  $\operatorname{sen} a = -1/2$ , hallar las razones de  $a/2$ . ¿De qué ángulo  $a$  se trata?

$$\left( \text{Soluc: } \operatorname{sen} \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}; \operatorname{cos} \frac{a}{2} = \frac{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}; a = 210^\circ \right)$$

44. Volver a hacer el ejercicio 38, pero aplicando las fórmulas del ángulo mitad (Ayuda: para ello, plantear el cambio de variable  $a = \alpha/2$ ).

45. Dado  $a \in 4^\circ$  cuadrante con  $\operatorname{tg} a = -\sqrt{3}$ , hallar las razones de  $a/2$

$$\left( \text{Soluc: } \operatorname{sen} \frac{a}{2} = \frac{1}{2}; \operatorname{cos} \frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \operatorname{tg} \frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

45b Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo  $a$  del ejercicio anterior. Comprobar, a continuación, mediante fórmulas trigonométricas (sin calculadora) los resultados anteriores. (Soluc:  $a = 300^\circ$ )

46. Dado  $\alpha \in 3^{\text{er}}$  cuadrante tal que  $\operatorname{cos} \alpha = -1/2$ , hallar, utilizando la fórmula correspondiente (resultados simplificados y racionalizados; no vale utilizar decimales), y **por este orden**:

a)  $\operatorname{sen} 2\alpha$  (Soluc:  $\sqrt{3}/2$ )

b)  $\operatorname{cos} \alpha/2$  (Soluc:  $-1/2$ )

c)  $\operatorname{sen} (\alpha - 30^\circ)$  (Soluc:  $-1/2$ )

d)  $\operatorname{tg} (\alpha + 60^\circ)$  (Soluc:  $-\sqrt{3}$ )

e) Razonar mediante la circunferencia goniométrica (no vale con calculadora) de qué  $\alpha$  se trata.

(Soluc:  $240^\circ$ )

47. Ídem, dado  $\alpha \in 4^\circ$  cuadrante tal que  $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$

a)  $\operatorname{cos} (\alpha + 30^\circ)$  (Soluc:  $\sqrt{3}/2$ )

b)  $\operatorname{tg} (\alpha - 45^\circ)$  (Soluc:  $2 + \sqrt{3}$ )

c)  $\operatorname{sen} (\alpha + 1650^\circ)$  (Soluc:  $1/2$ )

d)  $\operatorname{sen} \alpha/2$  (Soluc:  $1/2$ )

e)  $\operatorname{cos} 2\alpha$  (Soluc:  $-1/2$ )

f) Razonar (sin calculadora) de qué  $\alpha$  se trata. (Soluc:  $300^\circ$ )

48. Ídem con  $\alpha \in 3^{\text{er}}$  cuadrante tal que  $\operatorname{sec} \alpha = -3$

a)  $\operatorname{sen} (\alpha - 60^\circ)$  (Soluc:  $(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})/6$ )

b)  $\operatorname{tg} (\alpha + 45^\circ)$  (Soluc:  $-(9 + 4\sqrt{2})/7$ )

c)  $\operatorname{cos} (\alpha - 2640^\circ)$  (Soluc:  $(1 - 2\sqrt{6})/6$ )

d)  $\operatorname{cos} \alpha/2$  (Soluc:  $-\sqrt{3}/3$ )

e)  $\operatorname{sen} 2\alpha$  (Soluc:  $4\sqrt{2}/9$ )

f) Razonar, mediante calculadora y circunferencia trigonométrica, de qué  $\alpha$  se trata. (Soluc:  $\cong 250^\circ 31' 44''$ )

## Transformación de sumas en productos:

49. Transformar en producto y calcular (comprobar con la calculadora):

a)  $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$     b)  $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$     c)  $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$

(Soluc: a)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     b)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$     c)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ )

## Identidades trigonométricas:

50. Simplificar:

a)  $\frac{\sin 4\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} =$

(Soluc:  $\operatorname{tg} 3\alpha$ )

b)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha} =$

(Soluc:  $2 \operatorname{ctg} \alpha$ )

c)  $\frac{2 \cos (45^\circ + \alpha) \cos (45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha} =$

(Soluc: 1)

d)  $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \sin x =$

(Soluc:  $\operatorname{tg} x$ )

e)  $2 \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha =$

(Soluc:  $\operatorname{tg} \alpha$ )

f)  $\frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\sin(a+b) + \sin(a-b)} =$

(Soluc:  $\operatorname{ctg} a$ )

51. Demostrar las siguientes identidades:

a)  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$

b)  $\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha = \sin \alpha$

c)  $\cos \alpha \cos (\alpha - \beta) + \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) = \cos \beta$

d)  $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)$

e)  $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$

f)  $\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \sin \alpha \sin \beta$

## Ecuaciones trigonométricas:

52. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas elementales:

a)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b)  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c)  $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$

d)  $\sin x = \frac{1}{3}$

e)  $\cos x = -\frac{4}{5}$

f)  $\sin x = 0$

g)  $\cos x = -1$

h)  $\operatorname{cosec} x = -2$

(Sol:  $x = k \cdot 180^\circ$ )

(Sol:  $x = (2k+1) \cdot 180^\circ$ )

i)  $\sec x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

j)  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

k)  $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{2}$

(Sol:  $\exists$  soluc)

l)  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

m)  $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(Sol:  $x = 10^\circ + k \cdot 120^\circ$ ;  $x = 110^\circ + k \cdot 120^\circ$ )

n)  $\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

53. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a)  $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$  (Sol:  $x = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$ )

b)  $\sin x - 2 \cos 2x = -\frac{1}{2}$

(Sol:  $30^\circ, 150^\circ, \cong 311^\circ 24' 35''$  y  $\cong 228^\circ 35' 25''$ )

- c)  $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$  (Sol:  $x=45^\circ+k\cdot 180^\circ$ )
- d)  $\sin 2x = \cos x$   
(Sol:  $x=30^\circ+k\cdot 360^\circ$ ;  $x=150^\circ+k\cdot 360^\circ$ ;  $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$ )
- e)  $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$  (Sol:  $x=k\cdot 360^\circ$ ;  $x=120^\circ+k\cdot 360^\circ$ )
- f)  $2\cos^2 x - \sin^2 x + 1 = 0$  (Sol:  $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$ )
- g)  $\sin^2 x - \sin x = 0$  (Sol:  $x=k\cdot 180^\circ$ ;  $x=90^\circ+k\cdot 360^\circ$ )
- h)  $2\cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0$   
(Sol:  $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$ ;  $x=30^\circ+k\cdot 360^\circ$ ;  $x=330^\circ+k\cdot 360^\circ$ )
- i)  $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$  (Sol:  $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$ )
- j)  $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$  (Sol:  $x=45^\circ+k\cdot 90^\circ$ )
- k)  $2\cos^2 x + \sin x = 1$   
(Sol:  $x=90^\circ+k\cdot 360^\circ$ ;  $x=210^\circ+k\cdot 360^\circ$ ;  $x=330^\circ+k\cdot 360^\circ$ )
- l)  $3\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$   
(Sol:  $x=k\cdot 180^\circ$ ;  $x=30^\circ+k\cdot 360^\circ$ ;  $x=210^\circ+k\cdot 360^\circ$ )
- m)  $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2} \sin x = 0$  (Sol:  $x=45^\circ+k\cdot 180^\circ$ )
- n)  $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$   
(Sol:  $x=60^\circ+k\cdot 360^\circ$ ;  $x=300^\circ+k\cdot 360^\circ$ )
- o)  $\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$  (Sol:  $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$ ;  $x=45^\circ+k\cdot 180^\circ$ )
- p)  $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$  (Sol:  $x=30^\circ+k\cdot 360^\circ$ ;  $x=150^\circ+k\cdot 360^\circ$ )
- q)  $4\sin^2 x \cos^2 x + 2\cos^2 x - 2 = 0$  (Sol:  $x=k\cdot 180^\circ$ ;  $x=45^\circ+k\cdot 90^\circ$ )
- r)  $4\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$   
(Sol:  $x=36^\circ 52' 11,6'' + k\cdot 180^\circ$ ;  $x=135^\circ + k\cdot 180^\circ$ )
- s)  $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = \frac{1}{2}$  (Sol:  $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$ )
- t)  $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 = \cos x$  (Sol:  $x=k\cdot 360^\circ$ )
- u)  $2\sin^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$   
(Sol:  $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$ ;  $x=60^\circ+k\cdot 360^\circ$ ;  $x=300^\circ+k\cdot 360^\circ$ )
- v)  $\cos 2x + 3\sin x = 2$
- w)  $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x = 1$
- x)  $\cos x \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$
- y)  $2\sin x = \operatorname{tg} 2x$
- z)  $\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$
- α)  $\sin 2x \cos x = 6\sin^3 x$
- β)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg} x = 1$
- γ)  $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$  (Sol:  $x=150^\circ+k\cdot 360^\circ$ )

54. Resolver las siguientes ecuaciones, transformando las sumas y diferencias en productos:

- a)  $\sin 3x - \sin x = \cos 2x$
- b)  $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1$
- c)  $\frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x - \cos x} = \sqrt{3}$
- d)  $\sin 3x - \cos 3x = \sin x - \cos x$

### Resolución de triángulos oblicuángulos:

55. Resolver los siguientes triángulos y hallar su área (con \* se indica el caso dudoso):

- a)  $a=6$  m,  $B=45^\circ$ ,  $C=105^\circ$  (Soluc:  $A=30^\circ$ ,  $b=8,49$  m,  $c=11,59$  m,  $S=24,60$  m<sup>2</sup>)
- b)  $a=10$  dam,  $b=7$  dam,  $C=30^\circ$  (Soluc:  $c=5,27$  dam,  $B=41^\circ 38'$ ,  $A=108^\circ 22'$ )
- c)  $b=35,42$  dm,  $A=49^\circ 38'$ ,  $B=70^\circ 21'$  (Soluc:  $C=60^\circ 1'$ ,  $a=28,66$  dm,  $c=32,58$  dm,  $S=439,94$  dm<sup>2</sup>)
- d)  $a=13$  m,  $b=14$  m,  $c=15$  m (Soluc:  $A=53^\circ 7' 48''$ ,  $B=59^\circ 29' 23''$ ,  $C=67^\circ 22' 48''$ ,  $S=84$  m<sup>2</sup>)
- \* e)  $a=42$ ,  $b=32$ ,  $B=40^\circ 32'$  (Soluc:  $A_1=58^\circ 32'$ ,  $C_1=80^\circ 56'$ ,  $c_1=48,62$   
 $A_2=121^\circ 27'$ ,  $C_2=18^\circ$ ,  $c_2=15,22$ )
- f)  $a=15$ ,  $b=22$ ,  $c=17$  (Soluc:  $A=42^\circ 54'$ ,  $B=86^\circ 38'$ ,  $C=50^\circ 28'$ )
- g)  $a=10$  mm,  $b=7$  mm,  $C=60^\circ$  (Soluc:  $8,89$  mm,  $A=77^\circ$ ,  $B=43^\circ$ ,  $S=30,31$  mm<sup>2</sup>)
- h)  $a=10$ ,  $b=9$ ,  $c=7$  (Soluc:  $A=76^\circ 13'$ ,  $B=60^\circ 57'$ ,  $C=42^\circ 50'$ )
- \* i)  $a=60$  cm,  $b=40$  cm,  $A=42^\circ$  (Soluc:  $B=26^\circ 30'$ ,  $c=83,43$  cm,  $C=111^\circ 30'$ ,  $S=116,5$  cm<sup>2</sup>)
- \* j)  $a=40$  cm,  $b=60$  cm,  $A=72^\circ$  (Soluc:  $\exists$  soluc)
- \* k)  $a=50$ ,  $b=60$ ,  $A=42^\circ$  (Soluc:  $B_1=53^\circ 24'$ ,  $C_1=84^\circ 36'$ ,  $c_1=74,39$   $B_2=126^\circ 36'$ ,  $C_2=11^\circ 24'$ ,  $c_2=30,39$ )
- l)  $A=30^\circ$ ,  $B=45^\circ$ ,  $b=\sqrt{2}$  m (Soluc:  $C=105^\circ$ ,  $a=1$  m,  $c=1,93$  m,  $S=0,68$  m<sup>2</sup>)
- m)  $b=3$  hm,  $c=2$  hm,  $A=60^\circ$  (Soluc:  $a=\sqrt{7}$  hm,  $B=79^\circ$ ,  $C=40^\circ 54'$ ,  $S=3\sqrt{3}/2$  hm<sup>2</sup>)
- n)  $A=30^\circ$ ,  $b=\sqrt{3}$ ,  $c=1$
- \* o)  $a=4$ ,  $b=5$ ,  $B=30^\circ$
- p)  $a=1792$ ,  $b=4231$ ,  $c=3164$
- \* q)  $a=12$  hm,  $b=57$  hm,  $A=150^\circ$  (Soluc:  $\exists$  soluc)
- r)  $a=72$ ,  $b=57$ ,  $C=75^\circ 47'$

56. Resolver el triángulo ABC sabiendo que su perímetro es 24 cm, es rectángulo en A y  $\text{sen } B = 3/5$   
 (Soluc:  $a=10 \text{ cm}$ ,  $b=6 \text{ cm}$ ,  $c=8 \text{ cm}$ )

57. Calcular el área de un triángulo de datos  $a=8 \text{ m}$ ,  $B=30^\circ$ ,  $C=45^\circ$

58. En un paralelogramo ABCD el lado AB mide 6 cm, el AD 8 cm, y el ángulo  $A=30^\circ$ . Hallar sus diagonales.

59. Hallar los lados de un triángulo sabiendo que su área mide  $18 \text{ cm}^2$  y dos de sus ángulos  $A=30^\circ$  y  $B=45^\circ$   
 (Soluc:  $a \approx 5,13 \text{ cm}$ ,  $b \approx 7,26 \text{ cm}$ ,  $c \approx 9,92 \text{ cm}$ )

60. TEORÍA: Demostrar, utilizando el teorema del coseno, que el triángulo de lados 9, 12 y 15 es rectángulo.

\* 61. Uno de los lados de un triángulo es doble que el otro, y el ángulo comprendido vale  $60^\circ$ . Hallar los otros dos ángulos. (Soluc:  $30^\circ$  y  $60^\circ$ )

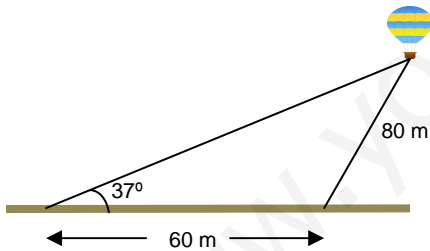
### Problemas de planteamiento:

62. Un grupo decide escalar una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación, que resulta ser  $30^\circ$ . A continuación han avanzado 100 m hacia la base de la montaña y han vuelto a medir el ángulo de elevación, siendo ahora  $45^\circ$ . Calcular la altura de la montaña.  
 (Soluc:  $\approx 136,60 \text{ m}$ )

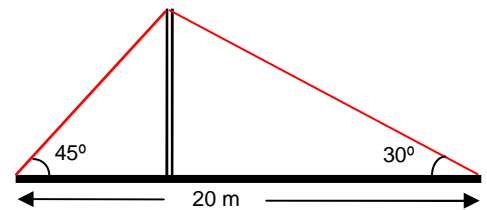
63. Rosa y Juan se encuentran a ambos lados de la orilla de un río, en los puntos A y B respectivamente. Rosa se aleja hasta un punto C distante 100 m del punto A desde la que dirige visuales a los puntos A y B que forman un ángulo de  $20^\circ$  y desde A ve los puntos C y B bajo un ángulo de  $120^\circ$ . ¿Cuál es la anchura del río? (Soluc:  $\approx 53,21 \text{ m}$ )

64. Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 km, la BC es 9 km y el ángulo que forman AB y BC es de  $120^\circ$ . ¿Cuánto distan A y C? (Soluc:  $\approx 13 \text{ km } 77 \text{ m}$ )

65. Se ha colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta, como muestra la figura. ¿Cuánto miden el cable y el mástil?  
 (Sol: cable  $\approx 25 \text{ m}$ ; mástil  $\approx 7,32 \text{ m}$ )



66. Un globo aerostático está sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de  $37^\circ$ . Hallar la altura del globo y la longitud del cable más extenso. (Sol:  $\approx 71,80 \text{ m}$  y  $119,31 \text{ m}$ , respectivamente)



67. Se lanza una falta desde un punto situado a 25 m y 28 m de ambos postes de una portería reglamentaria de fútbol, es decir, 7,32 m de longitud. ¿Bajo qué ángulo se verá la portería desde dicho punto? (Hacer un dibujo previo que explique la situación). ¿A qué distancia se encuentra del centro de la portería?  
 (Sol:  $\approx 14^\circ 29' 54''$ )

Si el punto estuviera a 26 y 27 m, ¿tendría más ángulo de tiro? La distancia, ¿sería menor?

68. Desde la puerta de una casa, A, se ve el cine B, que está a 120 m, y el quiosco C, que está a 85 m, bajo un ángulo  $B\hat{A}C = 40^\circ$ . ¿Qué distancia hay entre el cine y el quiosco? (Hacer un dibujo previo que explique la situación).  
 (Sol:  $\approx 77,44 \text{ m}$ )

