

TRIGONOMETRÍA

A. Introducción teórica

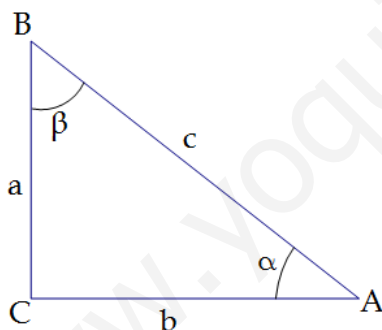
- A.1 Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo.
- A.2. Valores del seno, coseno y tangente para ciertos ángulos significativos (en grados y radianes).
- A.3. Significado geométrico de las razones trigonométricas en la esfera goniométrica.
- A.4. Relaciones entre las razones trigonométricas.
- A.5. Resolución de triángulos: Teoremas del seno y del coseno.

B. Ejercicios resueltos

- B.1. Razones trigonométricas.
- B.2. Ecuaciones trigonométricas.
- B.3. Problemas.

A. INTRODUCCIÓN TEÓRICA

A.1 Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo:



Las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo son las siguientes funciones:

La función seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente.

Todas ellas pueden entenderse como relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo.

Veamos las expresiones de cada una de ellas referidas a los ángulos α y β del triángulo rectángulo aquí representado:

a) Para el ángulo α :

función seno	función coseno	función tangente
$\text{sen}\alpha = \frac{a}{c}$	$\text{cos}\alpha = \frac{b}{c}$	$\text{tg}\alpha = \frac{a}{b}$
función cosecante	función secante	función cotangente
$\text{cosec}\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha} = \frac{c}{a}$	$\text{sec}\alpha = \frac{1}{\text{cos}\alpha} = \frac{c}{b}$	$\text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha} = \frac{b}{a}$

b) Para el ángulo β :

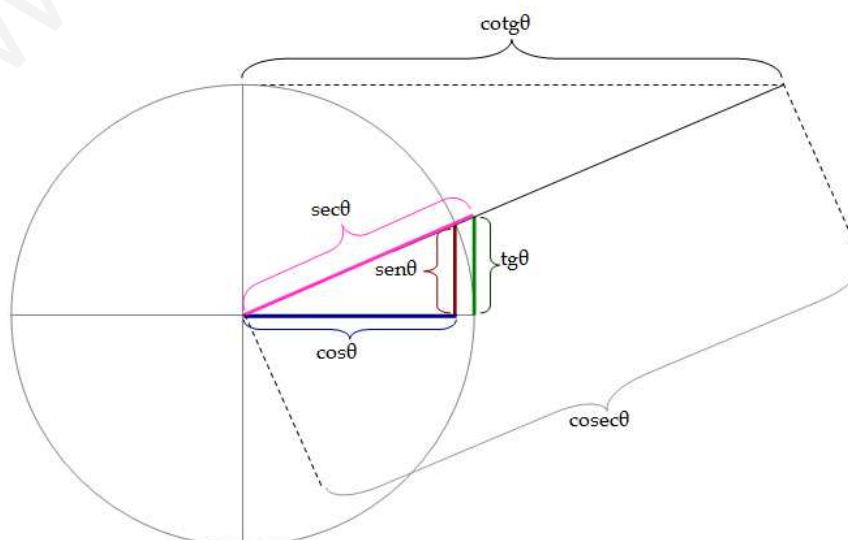
función seno	función coseno	función tangente
$\text{sen}\beta = \frac{b}{c}$	$\text{cos}\beta = \frac{a}{c}$	$\text{tg}\beta = \frac{b}{a}$
función cosecante	función secante	función cotangente
$\text{cosec}\beta = \frac{1}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{b}$	$\text{sec}\beta = \frac{1}{\text{cos}\beta} = \frac{c}{a}$	$\text{cotg}\beta = \frac{1}{\text{tg}\beta} = \frac{a}{b}$

A.2. Valores del seno, coseno y tangente para ciertos ángulos significativos (en grados y radianes)

ángulo		sen	cos	tg	ángulo		sen	cos	tg
0°	0 rad	0	1	0	60°	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
30°	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	90°	$\frac{\pi}{2}$ rad	1	0	∞
45°	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	180°	π rad	0	-1	0

A.3. Significado geométrico de las razones trigonométricas en la esfera goniométrica

Se llama *circunferencia goniométrica* a aquella que tiene por radio la unidad. Para una circunferencia goniométrica es posible dar un sentido muy intuitivo a todas las razones trigonométricas. Vamos a verlo mediante el siguiente dibujo.



A.4. Relaciones entre las razones trigonométricas

a) Relaciones fundamentales:

El seno, el coseno y la tangente de un ángulo están relacionados mediante la siguiente igualdad:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{cos}\theta} = \operatorname{tg}\theta$$

Por otro lado, se cumple la siguiente igualdad, estrechamente vinculada al teorema de Pitágoras:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{cos}^2\theta = 1$$

b) Relaciones del ángulo suma-diferencia:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cos}\beta \pm \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{cos}\alpha$$

$$\operatorname{cos}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{cos}\alpha \cdot \operatorname{cos}\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

c) Relaciones del ángulo doble

Es un caso particular del anterior en el que α y β son iguales.

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cos}\alpha$$

$$\operatorname{cos}(2\alpha) = \operatorname{cos}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

d) Relaciones del ángulo mitad

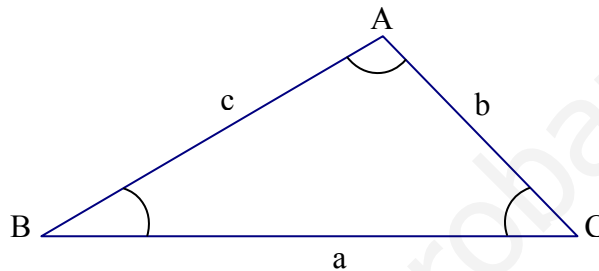
$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \operatorname{cos}\alpha}{2}$$

$$\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \operatorname{cos}\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

A.5. Resolución de triángulos: Teoremas del seno y del coseno

Sea el siguiente triángulo. ¡No hace falta que sea rectángulo! Se verifican las siguientes dos expresiones, conocidas como *teorema del seno* y *teorema del coseno*.



a) Teorema del seno: $\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C}$

b) Teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

B. EJERCICIOS RESUELTOS

B.1. Cálculo de razones trigonométricas

1. Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = 0,86$ calcula las demás razones trigonométricas directas e inversas

Solución:

Las razones trigonométricas directas son el *seno*, el *coseno* y la *tangente*, y las inversas la *cosecante*, la *secante* y la *cotangente*. Vamos a relacionar todas ellas con el seno, que es el dato que nos dan:

- $\operatorname{sen}\alpha = 0,86$

- El coseno se deduce a partir de la ecuación fundamental $\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1$:

$$\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1 \Rightarrow \text{cos}^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta \Rightarrow \text{cos}\theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta}$$

Sustituyendo datos:

$$\text{cos}\theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta} \Rightarrow \text{cos}\theta = \sqrt{1 - 0,86^2} \Rightarrow \text{cos}\theta = \frac{1}{2}$$

- La tangente buscada se deduce de la fórmula fundamental $\frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta} = \text{tg}\theta$. Sólo hay que sustituir en ella los valores conocidos:

$$\frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta} = \text{tg}\theta \Rightarrow \text{tg}\theta = \frac{0,86}{0,5} \Rightarrow \text{tg}\theta = 1,72$$

- La cosecante es la inversa del seno.

$$\text{cosec}\alpha = \text{sen}^{-1}\alpha = \frac{1}{0,86} = 1,26$$

- La secante es la inversa del coseno.

$$\text{sec}\alpha = \text{cos}^{-1}\alpha = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

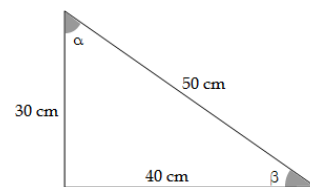
- La cotangente es la inversa de la tangente.

$$\text{cotg}\alpha = \text{tg}^{-1}\alpha = \frac{1}{1,72} = 0,58$$

2. Calcula las relaciones trigonométricas directas de α y β

Solución:

Las razones trigonométricas directas son el *seno*, el *coseno* y la *tangente*.



- Para el ángulo α :

$$\text{sen}\alpha = \frac{40}{50} \Rightarrow \text{sen}\alpha = 0,8,$$

$$\text{cos}\alpha = \frac{30}{50} \Rightarrow \text{cos}\alpha = 0,6$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{40}{30} \Rightarrow \text{tg}\alpha = 1,33$$

Observa que se cumple que $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$

- Para el ángulo β :

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{30}{50} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = 0,6$$

$$\operatorname{cos}\beta = \frac{40}{50} \Rightarrow \operatorname{cos}\beta = 0,8$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{30}{40} \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = 0,75$$

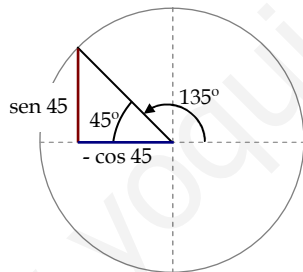
Observa que también se cumple que $\operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{cos}^2\beta = 1$, como no podía ser de otra manera.

3. Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

- 135°

Solución:

El ángulo 135° está en el 2º cuadrante. Será equivalente a un ángulo de 45° para el que $\operatorname{sen}45$ es positivo y $\operatorname{cos}45$ es negativo, tal como se indica en la figura.



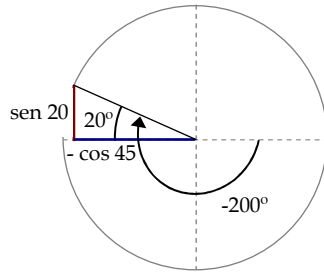
- -560°

Solución:

Como el ángulo es mayor que 360° lo tratamos del siguiente modo:

$$\left. \begin{array}{l} 560 \\ 200 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lfloor \frac{360}{200} \rfloor \\ 1 \end{array} \Rightarrow 1 \text{ vuelta} \cdot 360^\circ + 200^\circ$$

El ángulo que tenemos que manejar es -200° . Ello es equivalente a un ángulo de 20° en el segundo cuadrante, en donde $\operatorname{sen}20$ es positivo y $\operatorname{cos}20$ es negativo



4. Sabiendo que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y que α está en el 4º cuadrante, halla las demás razones trigonométricas.

Solución:

Si α está en el 4º cuadrante entonces $\cos \alpha$ es positivo y $\sin \alpha$ es negativo.

El $\sin \alpha$ lo deducimos usando la relación fundamental de la trigonometría: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\text{Así: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{\left(1 - \frac{3}{4}\right)} = -\frac{1}{2}$$

El resto de razones trigonométricas se obtiene de forma inmediata:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\sqrt{3};$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}}; \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = -2$$

5. Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y que α está en el 2º cuadrante, halla las demás razones trigonométricas.

Solución:

Si α está en el 2º cuadrante entonces $\cos \alpha$ es negativo y $\sin \alpha$ es positivo.

- Utilizamos la relación $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ para hallar $\sin \alpha$:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Hallamos $\cos \alpha$ a partir de $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$:

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{3}{2}.$$

- Las obtención de las razones trigonométricas inversas es inmediata:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{2}{3}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\sqrt{3}$$

6. Si α está en el tercer cuadrante y $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{2}$, determina las siguientes razones trigonométricas:

- $\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)$

Solución:

Como α está en el tercer cuadrante el $\operatorname{sen} \alpha$ es negativo, como bien indica el enunciado. Pero, en general, $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180 - \alpha)$, así que

$$\operatorname{sen}(180 - \alpha) = -\frac{1}{2}$$

- $\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha)$

Solución:

Como α está en el tercer cuadrante el $\operatorname{sen} \alpha$ es negativo. Además:

$$\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen}(180 - \alpha), \text{ así que } \operatorname{sen}(180 - \alpha) = \frac{1}{2}$$

- $\cos(180^\circ - \alpha)$

Solución:

Como α está en el tercer cuadrante $\cos \alpha$ es negativo. Además:
 $\cos \alpha = -\cos(180 - \alpha)$.

Deduzcamos $\cos \alpha$:

Usamos la relación fundamental de la trigonometría:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -\left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Entonces, } \cos(180 - \alpha) = \frac{3}{4}$$

- $\cos(180^\circ + \alpha)$

Solución:

Se cumple que $\cos \alpha = -\cos(180 + \alpha)$. Entonces:

$$-\frac{3}{4} = -\cos(180 + \alpha) \Rightarrow \cos(180 + \alpha) = \frac{3}{4}$$

- $\text{tg}(180^\circ - \alpha)$

Solución:

$$\text{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\text{sen}(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

- $\text{tg}(180^\circ + \alpha)$

Solución:

$$\text{tg}(180^\circ + \alpha) = \frac{\text{sen}(180^\circ + \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

B.2. Demostración de igualdades trigonométricas:

$$7. \frac{2\text{sen } \alpha + 3}{2\text{tg } \alpha + 3\text{sec } \alpha} = \cos \alpha$$

Solución:

- Vamos a tratar de manipular el lado izquierdo de la igualdad, para convertirlo en $\cos \alpha$. Teniendo en cuenta que $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$ y que

$$\text{sec } \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \text{ podemos escribir:}$$

$$\frac{2\text{sen } \alpha + 3}{2\text{tg } \alpha + 3\text{sec } \alpha} = \frac{2\text{sen } \alpha + 3}{2\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + \frac{3}{\cos \alpha}}$$

- Operamos esa expresión con el fin de simplificarla:

$$\frac{2\frac{\operatorname{sen} \alpha + 3}{\cos \alpha}}{\frac{\operatorname{sen} \alpha + 3}{\cos \alpha}} = \frac{2\operatorname{sen} \alpha + 3}{\frac{\operatorname{sen} \alpha + 3}{\cos \alpha}} = \frac{\cos \alpha (2\operatorname{sen} \alpha + 3)}{\operatorname{sen} \alpha + 3} = \cos \alpha$$

- Como acabamos de ver, la igualdad se cumple.

8. $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$

Solución:

Vamos a manipular primeramente el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$$A = \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

Manipulamos el miembro de la derecha, que llamaremos B:

En $B = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$ vamos a reescribir el denominador de una forma

más conveniente:

Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ se deduce que $1 - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos^2 \alpha$. Entonces:

$$B = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

Observamos que $A=B$, luego la identidad es verdadera.

9. $\operatorname{tg}(\alpha) \cdot \cot g(\alpha) - \frac{2\operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1 + \cot g^2(\alpha)}} = [\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)] \cdot \left(\frac{1}{\sec(\alpha)} - \frac{1}{\operatorname{cosec}(\alpha)} \right)$

Solución:

Vamos a manipular primeramente el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$$\begin{aligned}
 A &= \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \cot g(\alpha) - \frac{2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1 + \cot g^2(\alpha)}} = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} - \frac{2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\alpha)}}} = \\
 &= 1 - \frac{2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2(\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}}} = 1 - \frac{2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}}} = 1 - \frac{2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}}} = \\
 &= 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(\alpha)
 \end{aligned}$$

Manipulamos el miembro de la derecha, que llamaremos B:

$$\begin{aligned}
 B &= [\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)] \cdot \left(\frac{1}{\sec(\alpha)} - \frac{1}{\operatorname{cosec}(\alpha)} \right) = \\
 &= [\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)] \cdot [\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)] = \\
 &= \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - \operatorname{sen}^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(\alpha)
 \end{aligned}$$

Observamos que $A=B$, luego la identidad es cierta.

10. $\frac{1}{\sec^2 \alpha} = \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$

Solución:

Manipulamos primeramente el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$$A = \frac{1}{\sec^2 \alpha} = \cos^2 \alpha$$

Manipulamos el miembro de la derecha, que llamaremos B:

$$B = \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

Observamos que $A=B$, luego la identidad es cierta.

11. $\operatorname{cosec}^4 \alpha - 1 = 2 \cot g^2 \alpha + \cot g^4 \alpha$

Solución:

Manipulamos el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$$A = \operatorname{cosec}^4 \alpha - 1 = (\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1)(\operatorname{cosec}^2 \alpha + 1)$$

Recordamos que $\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha$. Entonces:

$$\begin{aligned} (\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1)(\operatorname{cosec}^2 \alpha + 1) &= (1 + \cot^2 \alpha - 1)(1 + \cot^2 \alpha + 1) = \\ &= \cot^2 \alpha (\cot^2 \alpha + 2) = \cot^4 \alpha + 2 \cot^2 \alpha. \end{aligned}$$

Hemos llegado a obtener el lado B de la expresión dada, luego se ha demostrado que la igualdad es cierta.

$$12. \quad \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Solución:

Partiendo del miembro de la izquierda, que llamaremos A, mediante manipulaciones adecuadas llegaremos al miembro de la derecha:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\alpha &= 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha = 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \cdot \operatorname{cos} \alpha = 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cos}^2 \alpha = \\ &= 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha}} = 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha}} = 2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha}} = \\ &= \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}. \text{ Queda así demostrado.} \end{aligned}$$

$$13. \quad \frac{2 \cdot \operatorname{sen} x + 3}{2 \cdot \operatorname{tg} x + 3 \cdot \operatorname{sec} x} = \operatorname{cos} x$$

Solución:

Partiendo del miembro de la izquierda, que llamaremos A, mediante

B.3. Ecuaciones trigonométricas

$$14. \quad \text{Resuelve: } \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Solución:

$$x = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \\ x_2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

15. Resuelve: $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Solución:

$$x = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 45^\circ = 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4} \\ x_2 = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ = 315^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

16. $\text{tg } x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Solución:

$$x = \text{tg}^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ = 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \\ x = 30^\circ + 180^\circ = 210^\circ = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

17. Resuelve la ecuación $\cos 2x = \text{sen } x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

Solución:

- Hay que recordar que $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$. Así:

$$\cos 2x = \text{sen } x \Rightarrow \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \text{sen } x$$

- Por otro lado, hay que tener en cuenta que $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$. Por ello:

$$\cos^2 x - \text{sen}^2 x = \text{sen } x \Rightarrow 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x = \text{sen } x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \text{sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen } x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} =$$

$$= \begin{cases} \text{sen } x = -1 \\ \text{sen } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Finalmente estudiamos cada uno de estos dos casos:

$$\text{Si } \sin x = -1, \text{ entonces: } x_1 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Si } \sin x = \frac{1}{2}, \text{ entonces: } x_2 = \frac{\pi}{6} \text{ y } x_3 = \frac{5\pi}{6}$$

18. Resuelve la ecuación $\sin 2x \cdot \cos x = 6\sin^3 x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

Solución:

- Hay que recordar que $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$. Así:
 $\sin 2x \cdot \cos x = 6\sin^3 x \Rightarrow 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \cos x = 6\sin^3 x \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x = 6\sin^3 x$
- Por otro lado, hay que tener en cuenta que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Por ello:

$$2 \cdot \sin x \cdot (1 - \sin^2 x) = 6 \cdot \sin^3 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot (1 - \sin^2 x) = 3 \cdot \sin x \cdot \sin^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot (4 \cdot \sin^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Finalmente estudiamos cada uno de estos tres casos:

$$\text{Si } \sin x = 0, \text{ entonces: } x_1 = 0$$

$$\text{Si } \sin x = \frac{1}{2}, \text{ entonces: } x_2 = \frac{\pi}{6} \text{ y } x_3 = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Si } \sin x = -\frac{1}{2}, \text{ entonces: } x_4 = \frac{7\pi}{6} \text{ y } x_5 = \frac{11\pi}{6}$$

19. Resuelve: $\cos 2x - \cos 6x = \sin 5x + \sin 3x$

Solución:

- Vamos a utilizar las siguientes relaciones:

$$\cos A - \cos B = -2 \cdot \sin \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cdot \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

- Entonces:

$$\cos 2x - \cos 6x = -2 \cdot \operatorname{sen} \frac{2x+6x}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{2x-6x}{2}$$

$$\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{5x+3x}{2} \cdot \cos \frac{5x-3x}{2}$$

- Sustituimos lo obtenido en la ecuación dada y pasamos todo a un miembro

$$-2 \cdot \operatorname{sen}(4x) \cdot \operatorname{sen}(-2x) = 2 \cdot \operatorname{sen}(4x) \cdot \cos(x)$$

- Si tenemos en cuenta que $\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen}(a)$ y sacamos factor común, entonces:

$$2 \cdot \operatorname{sen}(4x) \cdot [\operatorname{sen}(2x) - \cos(x)] = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot \operatorname{sen}(4x) = 0 \\ \operatorname{sen}(2x) - \cos(x) = 0 \end{cases}$$

- Resolvemos la primera ecuación de las dos:

$$2 \cdot \operatorname{sen}(4x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 + 2k\pi \Rightarrow x = k \frac{\pi}{2} \\ 4x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Resolvemos la segunda ecuación:

$$\operatorname{sen}(2x) - \cos(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cos(x) - \cos(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [2 \cdot \operatorname{sen}(x) - 1] \cos(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \\ 2 \cdot \operatorname{sen}(x) - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

La solución es entonces la unión de todas estas soluciones.

20. Resuelve el siguiente sistema en el intervalo $[0, 2\pi]$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y &= 1 \\ 2x + 2y &= \pi \end{aligned} \right\}$$

Solución:

- Despejamos x en la segunda ecuación y llevaremos su valor a la primera ecuación:

$$2x + 2y = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - y, \text{ por lo que:}$$

$$\text{sen } x + \text{sen } y = 1 \Rightarrow \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - y \right) + \text{sen } y = 1$$

- Ahora, para poder simplificar esta expresión usamos la fórmula del seno de la diferencia de dos ángulos:

$$\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - y \right) = \text{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \cos y - \cos \frac{\pi}{2} \cdot \text{sen } y = \cos y, \text{ es decir:}$$

$$\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - y \right) + \text{sen } y = 1 \Rightarrow \cos y + \text{sen } y = 1$$

- Intentamos expresar el coseno en función del seno, elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación:

$$\begin{aligned} (\cos y + \text{sen } y)^2 &= 1^2 \Rightarrow \cos^2 y + \text{sen}^2 y + 2 \cdot \text{sen } y \cos y = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 + 2 \cdot \text{sen } y \cos y = 1 \Rightarrow \text{sen } y \cos y = 0 \end{aligned}$$

Pero $\text{sen } y \cos y = \text{sen } 2y$, por lo que $\text{sen } y \cos y = 0 \Rightarrow \text{sen } 2y = 0$

- Las soluciones para $\text{sen } 2y = 0$ están dadas por: $2y = 0$ y $2y = \pi$, esto es: $y_1 = 0$; $y_2 = \frac{\pi}{2}$. Teniendo en cuenta que $x = \frac{\pi}{2} - y$, entonces:

$$y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$y_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_2 = 0$$

21. Calcula las soluciones del siguiente sistema, en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } x &= 2 \cdot \text{sen } y \\ x - y &= \frac{\pi}{3} \end{aligned} \right\}$$

Solución:

- Despejamos x en la segunda ecuación y llevaremos su valor a la primera ecuación:

$$x - y = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + y, \text{ por lo que:}$$

$$\text{sen } x = 2 \cdot \text{sen } y \Rightarrow \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + y \right) = 2 \cdot \text{sen } y$$

- Usamos la fórmula del seno de la suma de dos ángulos en el miembro izquierdo de la ecuación:

$$\text{sen} \left(\frac{\pi}{3} + y \right) = \text{sen} \frac{\pi}{3} \cdot \cos y + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \text{sen } y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos y + \frac{1}{2} \text{sen } y$$

Entonces la fórmula a resolver es:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos y + \frac{1}{2} \text{sen } y = 2 \text{sen } y \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos y = \frac{1}{2} \text{sen } y \Rightarrow \sqrt{3} = \text{tg } y$$

$$\text{Solución: } \text{tg } y = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \\ y_2 = 180^\circ + 60^\circ = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

22. Calcula las soluciones del siguiente sistema.

$$\left. \begin{aligned} 4y \cdot \text{sen } x \cdot \cos x &= 3 \\ 2y \cdot \cos 2x &= \sqrt{3} \end{aligned} \right\}$$

Solución:

- Dividimos las dos ecuaciones del sistema:

$$\left. \begin{aligned} 4y \cdot \text{sen } x \cdot \cos x &= 3 \\ 2y \cdot \cos 2x &= \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{4y \cdot \text{sen } x \cdot \cos x}{2y \cdot \cos 2x} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x}{\cos 2x} = \sqrt{3}$$

- Recordamos que $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = \text{sen } 2x$ y sustituimos en la ecuación:

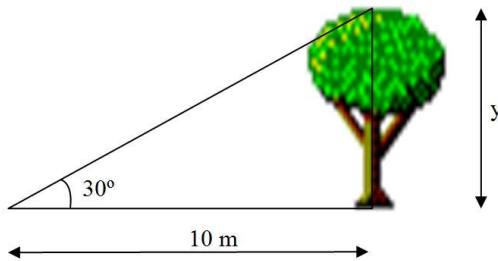
$$\frac{2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x}{\cos 2x} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\text{sen } 2x}{\cos 2x} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{tg } 2x = \sqrt{3}$$

- Despejamos x :

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

B.4. Problemas

23. Calcula la altura de un árbol que a una distancia de 10 m se ve bajo un ángulo de 30° .

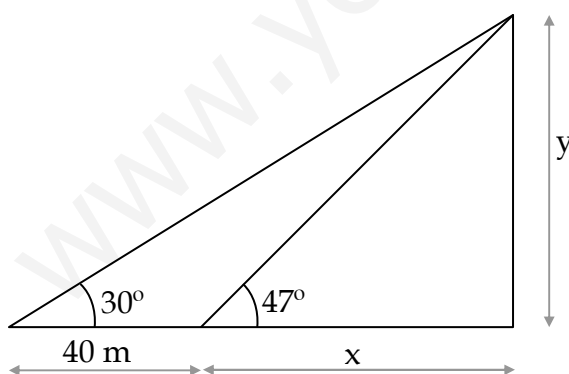


Solución:

La altura, y , del árbol la deducimos de la relación siguiente:

$$\operatorname{tg}30 = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 10 \cdot \operatorname{tg}30 \Rightarrow y = 5,77 \text{ m}$$

24. Calcula x e y :



Solución:

Aplicamos la relación $\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$ a los dos triángulos rectángulos, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}47 = \frac{y}{x} \\ \operatorname{tg}30 = \frac{y}{40+x} \end{cases} \quad \text{Operando:}$$

$$\begin{cases} x \cdot \operatorname{tg}47 = y \\ (40+x) \operatorname{tg}30 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot \operatorname{tg}47 = y \\ (40+x) \operatorname{tg}30 = y \end{cases} \Rightarrow x \cdot \operatorname{tg}47 = (40+x) \cdot \operatorname{tg}30 \Rightarrow$$

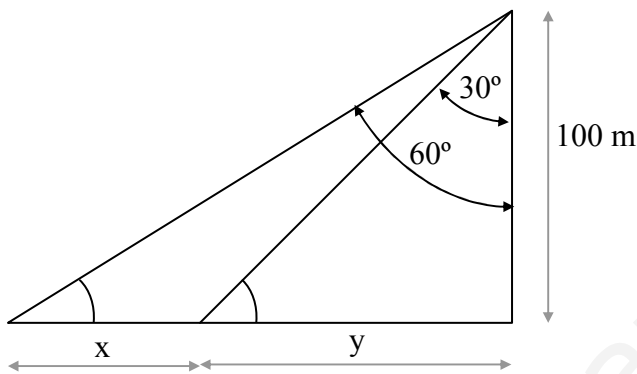
$$\Rightarrow 1,07x = 23,09 + 0,58x \Rightarrow 0,49x = 23,09 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{23,09}{0,49} \Rightarrow x = 47,12 \text{ m.}$$

Calculemos finalmente el valor de y:

$$x \cdot \operatorname{tg}47 = y \Rightarrow 47,12 \cdot 1,07 = y \Rightarrow y = 50,42 \text{ m}$$

25. Calcula x



Solución:

Tenemos dos triángulos. De cada uno de ellos obtendremos una ecuación trigonométrica.

$$\operatorname{tg}30 = \frac{y}{100}$$

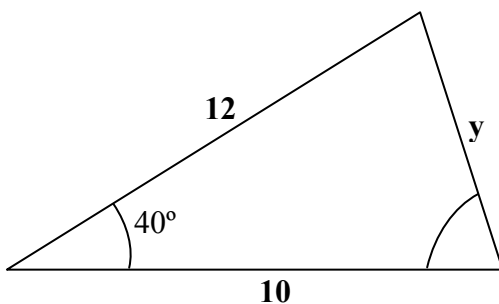
Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 57,7 = y \\ 173,2 - x = y \end{array} \right\} \Rightarrow 57,7 = 173,2 - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 115,5 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg}60 = \frac{x+y}{100}$$

26. Calcula el valor de y (las longitudes están expresadas en m)



Solución:

Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

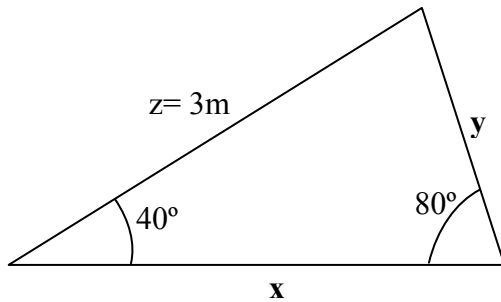
Entonces:

$$y^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos 40 \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{100 + 144 - 240 \cdot \cos 40} = 6,35 \text{ m}$$

27. Calcula el valor de los lados x e y , aplicando el Teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$



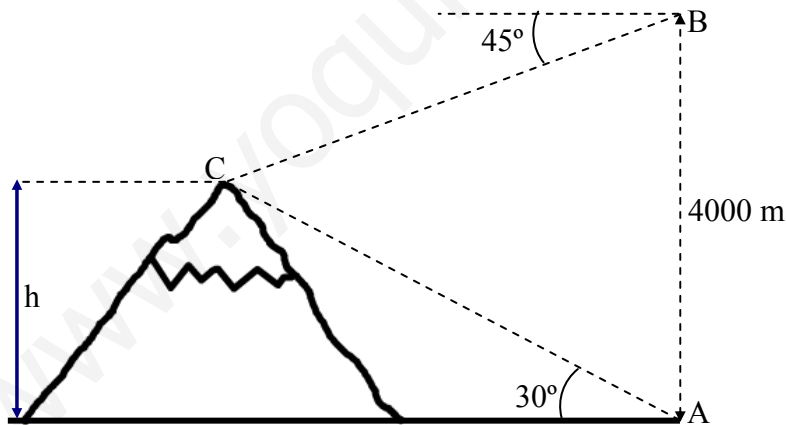
Solución:

Sustituimos los valores dados en la expresión del teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} \Rightarrow$$

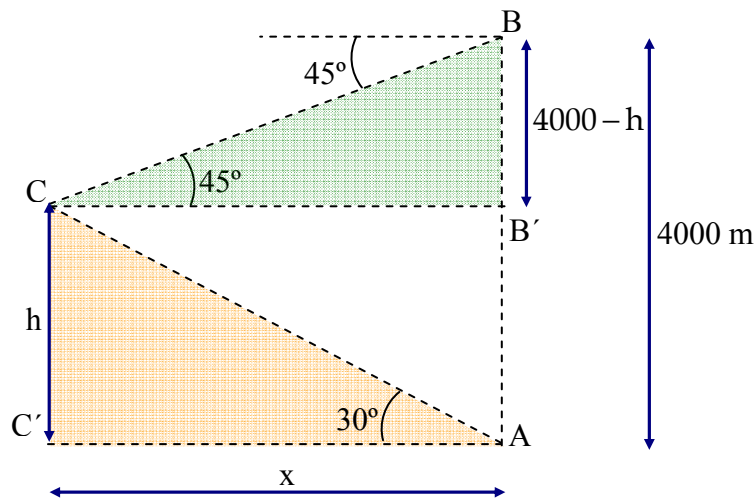
$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3 \cdot \text{sen}40}{\text{sen}80} = 1,96 \text{ m} \\ x = \frac{3 \cdot \text{sen}60}{\text{sen}80} = 2,64 \text{ m} \end{cases}$$

28. Halla la altura de la montaña



Solución:

Rehacemos el dibujo y de él extraeremos dos ecuaciones, cada una de ellas perteneciente a un triángulo rectángulo (el $\widehat{CBB'}$ y el $\widehat{ACC'}$)

Triángulo $\widehat{CBB'}$:

$$\operatorname{tg} 45 = \frac{4000 - h}{x}$$

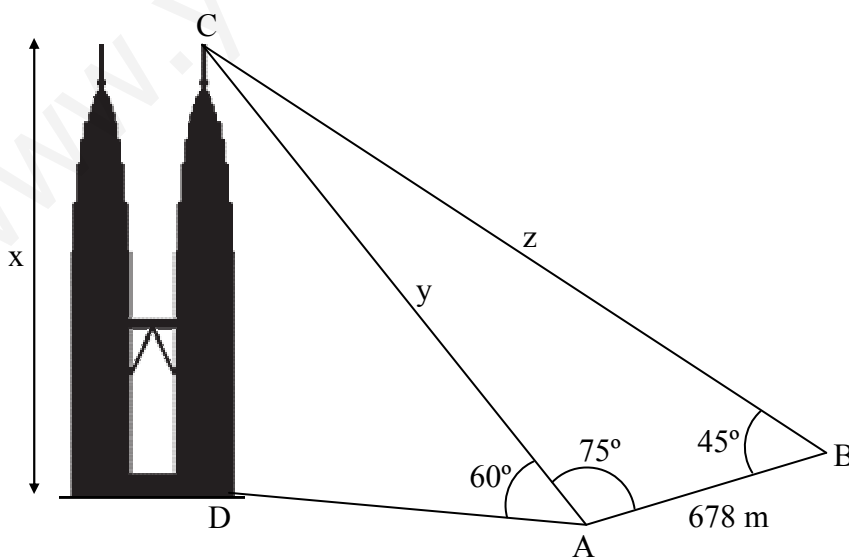
Triángulo $\widehat{ACC'}$:

$$\operatorname{tg} 30 = \frac{h}{x}$$

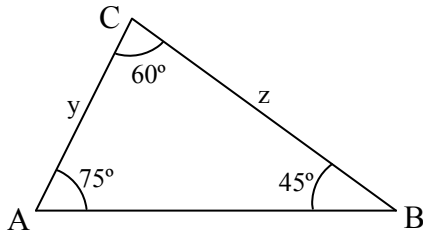
Resolvamos éste sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 45 = \frac{4000 - h}{x} \\ \operatorname{tg} 30 = \frac{h}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 = \frac{4000 - h}{x} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 4000 - h \\ x = h\sqrt{3} \end{array} \right\} \Rightarrow 4000 - h = h\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{4000}{\sqrt{3} + 1} \text{ m} \approx 1464 \text{ m}$$

29. Halla la altura de las Torres Petronas, x y también las distancias y , z .Solución:

- Primeramente vamos a centrarnos en el triángulo \widehat{ABC} . De él deduciremos las distancias y, z

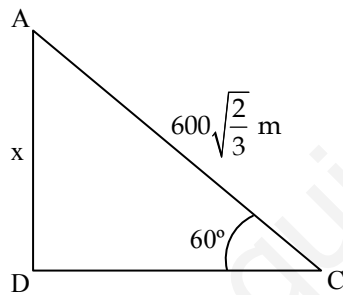


$$\frac{y}{\text{sen}45} = \frac{z}{\text{sen}75} = \frac{678}{\text{sen}60} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{\text{sen}45} = \frac{678}{\text{sen}60} \\ \frac{z}{\text{sen}75} = \frac{678}{\text{sen}60} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{678}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ \frac{z}{\text{sen}75} = \frac{678}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 678 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ m} \\ z = \frac{1356}{\sqrt{3}} \cdot \text{sen}75 \text{ m} \end{cases}$$

- Ahora nos fijamos en el triángulo \widehat{ACD} . De él obtendremos la altura de las torres, x .



$$x = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 678 \cdot \text{sen}60 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 678 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{452 \text{ m}}$$