

<p>La trigonometría nace con la observación de los fenómenos astronómicos.</p> 	<p>En el conjunto megalítico de Stonehenge (Gran Bretaña), construido entre 2200 y 1600 a.C., la alineación de dos grandes piedras indica el día más largo del año.</p> 	<p>El primer antecedente escrito de la trigonometría lo encontramos en el problema 56 del papiro de Rhind. Escrito por Ahmés alrededor del 1800 a.C. transcribiendo otro del 500 a.C.</p> 
<p>En la antigua Babilonia se introdujo la medida del ángulo en grados.</p> <p>La división de la circunferencia en 360°, probablemente va unida a la del año en 360 días.</p> <p>Así, como el sol recorre una circunferencia en un año, un grado sería el recorrido en un día.</p> 	<p>Con la cultura griega la trigonometría experimentó un nuevo y definitivo impulso.</p> <p>Aristarco de Samos (s. III a.C.) halló la distancia al sol y a la luna utilizando triángulos.</p> <p>Hiparco de Nicea (s. II a.C.) es considerado como el "inventor" de la trigonometría.</p> <p>Ptolomeo, en el siglo II, escribió el "Almagesto" que influyó a lo largo de toda la Edad Media.</p> 	<p>El desarrollo de la trigonometría debe mucho a la obra de los árabes, quienes transmitieron a Occidente el legado griego.</p> <p>Fueron los primeros en utilizar la tangente.</p> <p>Hacia el año 833, Al-Kwuarizmi construyó la primera tabla de senos.</p> 
<p>En Europa se publica en 1533, el primer tratado de trigonometría: "De trianguli omnia modi, libri V". Escrito en 1464 en Königsberg, por Johann Müller, conocido como el Regiomontano.</p> 	<p>Newton utiliza en 1671 las coordenadas polares.</p> <p>La física de los fenómenos ondulatorios, como el producido por una cuerda que vibra, llevó a Euler (1707-1783) al estudio de las funciones trigonométricas.</p> 	<p>Hoy, en nuestros días, las utilidades de la trigonometría abarcan los más diversos campos: de la topografía a la acústica, la óptica y la electrónica.</p> 



### Investiga

Seguramente habrás visto esta señal en las carreteras y conoces lo que indica: pendiente prolongada. También recordarás el concepto de pendiente de una recta. Según éste el 10% significa que cada 100 m recorridos en horizontal, subimos (o bajamos) 10 en vertical. Pero algunos interpretan los 100 m como el camino real recorrido. ¿Tú qué opinas?, ¿influye mucho considerarlo de una u otra forma?.

### Recuerda

Antes de seguir adelante te conviene comprobar que recuerdas la semejanza de triángulos y el Teorema de Pitágoras.

# Trigonometría

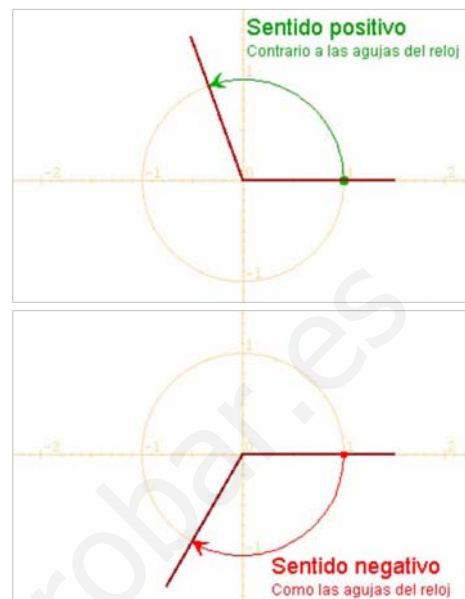
## 1. Los ángulos y su medida

**Trigonometría** es una palabra que deriva del griego Τριγωνομετρία, Tri (Τρι) tres, gono (γωνο) ángulo, metría (μετρία) medida, es decir, "medida de tres ángulos". Puedes consultar la definición de trigonometría que da el diccionario de la R.A.E.

En este curso se tratará únicamente la trigonometría plana.

Con objeto de estudiar los ángulos y su medida consideraremos que un ángulo es un recorrido en la circunferencia con centro el origen y de radio unidad o circunferencia goniométrica, el punto de partida de estos recorridos se situará en el punto de coordenadas (1,0) y la medida de un ángulo será la medida de ese recorrido.

Los ángulos pueden tener sentido positivo o negativo según sea el de su recorrido; si es contrario al de las agujas del reloj será positivo y si es igual, negativo.



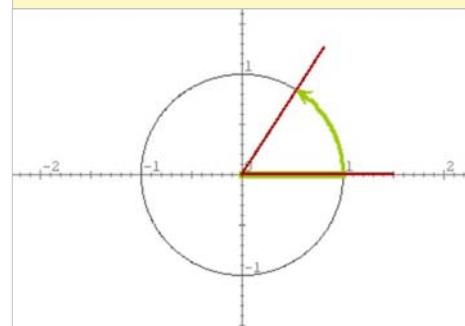
### Radianes

Medir un ángulo es medir su recorrido en la circunferencia.

Como la medida de toda la circunferencia es  $2 \cdot \pi \cdot \text{radio}$ , resulta conveniente tomar como unidad de medida el radio.

En las figuras, los ángulos se representan en una circunferencia de radio 1, ello no significa que el radio mida 1 cm o 1 pie o 1 m, sino que el radio es la unidad de medida tomada. Por razones evidentes a esta unidad se le llama **radián**.

El ángulo de **1 radián** es aquel cuyo recorrido en la circunferencia es igual al radio.



### Grados sexagesimales

Ya conoces el sistema sexagesimal de medida de ángulos.

Al dividir la circunferencia en 360 partes iguales, obtenemos un grado, a su vez cada grado se compone de 60 minutos y cada minuto de 60 segundos.

Así un ángulo se mide en:

**grados° minutos' segundos''**



## De grados a radianes y de radianes a grados

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

De grados a radianes:

✓ multiplicamos por  $\frac{\pi}{180}$

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

De radianes a grados:

✓ multiplicamos por  $\frac{180}{\pi}$

El semiperímetro de la semicircunferencia es  $\pi \cdot \text{radio}$

$$\pi \text{ radianes} = 180 \text{ grados}$$

es decir,  $\pi$  veces un radián = 180 veces un grado  
 $\pi \cdot 1 \text{ radián} = 180 \cdot 1 \text{ grado}$

Si despejamos el grado resulta:

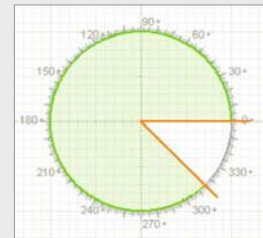
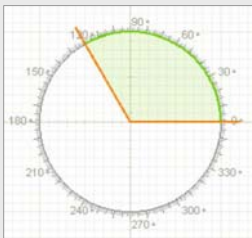
$$1 \text{ grado} = \pi/180 \text{ radianes} \sim 0.0175 \text{ radianes}$$

Si despejamos el radián resulta:

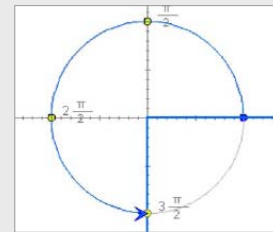
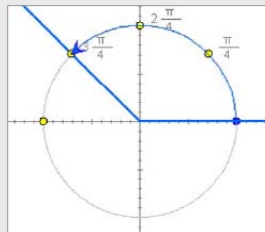
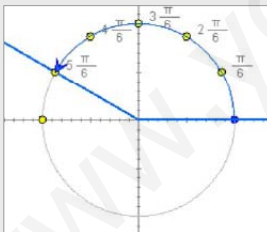
$$1 \text{ radián} = 180/\pi \text{ grados} \sim 57.2957 \text{ grados}$$

## EJERCICIOS resueltos

1. Dibuja en la circunferencia goniométrica los ángulos de  $120^\circ$ ,  $-50^\circ$  y  $315^\circ$ .



2. Dibuja en la circunferencia goniométrica el ángulo de  $5\pi/6$ ,  $3\pi/4$ , y  $3\pi/2$  rad.



3. Pasa a radianes: a)  $150^\circ$ , b)  $210^\circ$ , c)  $270^\circ$ , d)  $60^\circ$

$$a) 150^\circ = \frac{150 \cdot \pi}{180} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

$$b) 210^\circ = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

$$c) 270^\circ = \frac{270 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

$$d) 60^\circ = \frac{60 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

4. Pasa a grados: a)  $11\pi/6$  rad, b)  $\pi/4$  rad, c)  $5\pi/4$  rad, d)  $2\pi/3$  rad

$$a) \frac{11\pi}{6} \text{ rad} = \frac{11\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 330^\circ$$

$$b) \frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 45^\circ$$

$$c) \frac{5\pi}{4} \text{ rad} = \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 225^\circ$$

$$d) \frac{2\pi}{3} \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 120^\circ$$

# Trigonometría

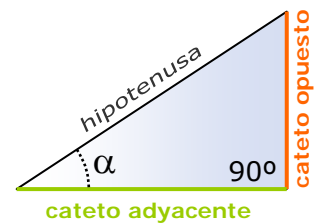
## 2. Razones trigonométricas

En los triángulos semejantes los ángulos son iguales y los lados homólogos son proporcionales. La razón entre los lados de un triángulo determina su forma.

Dado un triángulo rectángulo, las razones trigonométricas del ángulo agudo  $\alpha$  se definen:

- ✓ El **seno** es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.
- ✓ El **coseno** es el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa.
- ✓ La **tangente** es el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

Estas razones no dependen del tamaño del triángulo sino del ángulo.



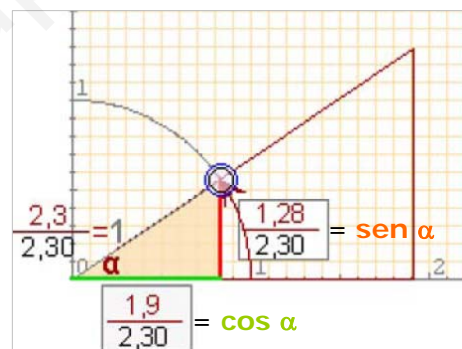
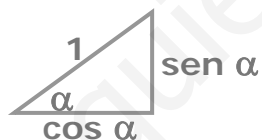
$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \\ \text{cos } \alpha &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \\ \text{tg } \alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \end{aligned}$$

### Senos y cosenos en la circunferencia

En la figura se ha representado el ángulo  $\alpha$  en la circunferencia goniométrica o de radio unidad.

En el triángulo rectángulo que se forma como la hipotenusa es 1, el cateto opuesto es el **sen  $\alpha$**  y el adyacente el **cos  $\alpha$** .

Es importante recordar el siguiente triángulo:



Observa que (**cos  $\alpha$** , **sen  $\alpha$** ) son las **coordenadas** del punto final del ángulo  $\alpha$  en la circunferencia de radio unidad.

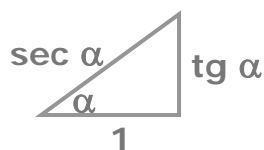
### Tangente en la circunferencia

En la figura se comprende por qué al cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente se le llama tangente, su valor queda definido sobre la recta tangente a la circunferencia en el punto (1,0).

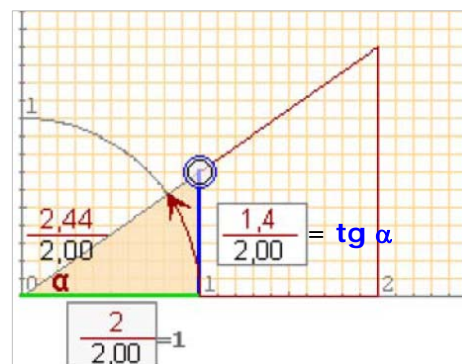
Observa que cuando el cateto adyacente vale 1, la hipotenusa es igual a la inversa del cos  $\alpha$ .

Al cociente:

$$\frac{1}{\text{cos } \alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$



se le llama secante de  $\alpha$  y se abrevia con **sec  $\alpha$** .



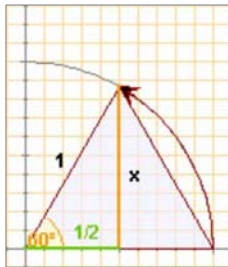


## Razones de 30°, 45° y 60°

Los ángulos de 30°, 45° y 60° aparecen con bastante frecuencia, fíjate cómo se calculan sus razones a partir de la definición si buscamos los triángulos adecuados.

En un triángulo equilátero los ángulos miden 60°. Con el Teorema de Pitágoras se calcula la altura

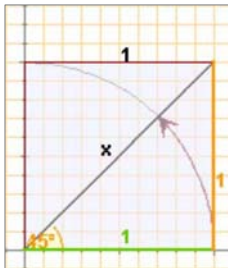
$$x = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Tomamos un cuadrado de lado 1

Con el Teorema de Pitágoras se calcula la diagonal

$$\text{diag} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



	sen	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Memorizar esta tabla es fácil si observas el orden que guardan. Una vez aprendidos los senos con las raíces consecutivas, los cosenos salen en orden inverso.

### Con la calculadora

- Dado un ángulo  $\alpha$  obtener sus razones trigonométricas.

Por ejemplo el  $\text{sen } 28^\circ 30'$

Pon la calculadora en modo **DEG**

Teclea 28  $^{\circ}$  30  $'$  **sin**

Obtenemos: 0,477158760

En algunas calculadoras hay que pulsar la tecla **sin** antes de introducir el ángulo, comprueba cómo funciona la tuya.

Si queremos obtener el  $\text{cos } \alpha$  ó la  $\text{tg } \alpha$  procederemos de la misma forma pero pulsando las teclas **cos** y **tan** respectivamente.

- Dada una razón obtener el ángulo  $\alpha$  correspondiente.

Con el mismo valor que tienes en la pantalla : 0,477158760

Comprueba que la calculadora sigue en modo **DEG**

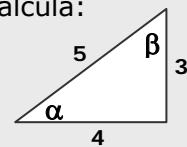
Teclea **SHIFT sin**

Obtenemos : 28,5 en grados, si queremos grados, minutos y segundos, pulsamos **SHIFT**  $^{\circ}$  obteniendo 28° 30"

### EJERCICIOS resueltos

5. En el triángulo de la figura calcula:

- a)  $\text{sen } \alpha$       d)  $\text{sen } \beta$   
 b)  $\text{cos } \alpha$       e)  $\text{cos } \beta$   
 c)  $\text{tg } \alpha$         f)  $\text{tg } \beta$



a)  $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$       d)  $\text{sen } \beta = \frac{4}{5} = 0,8$

b)  $\text{cos } \alpha = \frac{4}{5} = 0,8$       e)  $\text{cos } \beta = \frac{3}{5} = 0,6$

c)  $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4} = 0,75$       f)  $\text{tg } \beta = \frac{4}{3} = 1,3\bar{3}$

6. Obtén con la calculadora:

- a)  $\text{sen } 30^\circ = 0,5$   
 b)  $\text{cos } 60^\circ = 0,5$   
 c)  $\text{tg } 45^\circ = 1$

7. Obtén con la calculadora los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  del ejercicio 5.

$\alpha$ : Tecleamos 0  $\cdot$  6 **SHIFT sin**  $\rightarrow 36,87^\circ$

$\beta$ : Tecleamos 0  $\cdot$  8 **SHIFT sin**  $\rightarrow 53,13^\circ$

Observa que en efecto suman  $90^\circ$ .

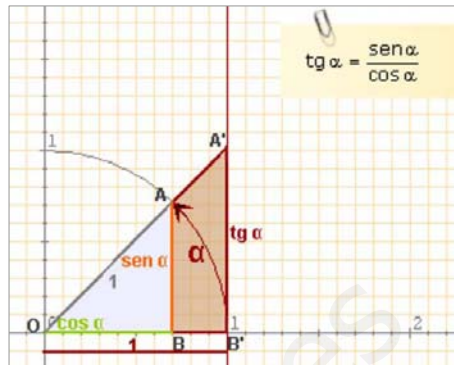
# Trigonometría

## 3. Relaciones fundamentales

Si se aplican la semejanza y el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos "básicos", es decir, con hipotenusa=1 o con cateto adyacente=1, se obtienen las relaciones fundamentales de la trigonometría:

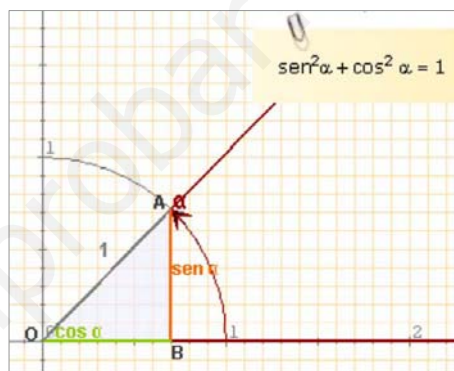
Los triángulos OBA y OB'A' son semejantes:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\text{tg } \alpha}{1} \quad \text{luego} \quad \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$



Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo OBA de la figura obtenemos:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

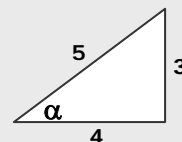


### EJERCICIOS resueltos

8. Comprueba en el ángulo  $\alpha$  del triángulo de la figura que se cumplen las relaciones fundamentales.

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} = \text{tg } \alpha$$



9. Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo  $\alpha$  tal que  $\text{sen } \alpha = 0,3$

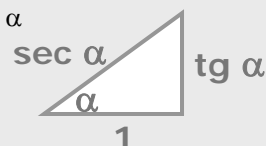
$$\text{cos}^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha \Rightarrow \text{cos}^2 \alpha = 1 - 0,3^2 = 1 - 0,09 = 0,81 \Rightarrow \text{cos } \alpha = \sqrt{0,81} = 0,9$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{1}{3}$$

10. Comprueba que se cumple la relación:  $1 + \text{tg}^2 \alpha = \text{sec}^2 \alpha$

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} = \frac{\text{cos}^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} = \text{sec}^2 \alpha$$

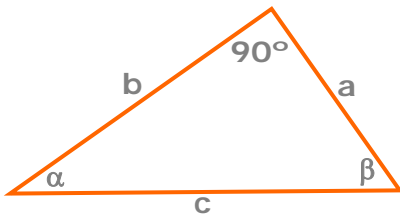
Recuerda el triángulo:



## 4. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo es calcular los datos desconocidos, lados o ángulos, a partir de los conocidos.

Veamos los casos que se pueden presentar.



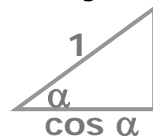
Calcular la altura del monte.



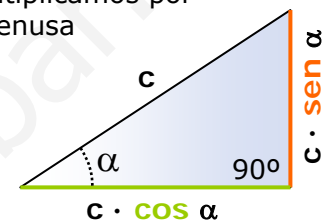
$$x = 650 \cdot \text{sen } 30^\circ = 650 \cdot 0,5 = 325$$

### a) Conocidos un ángulo y la hipotenusa

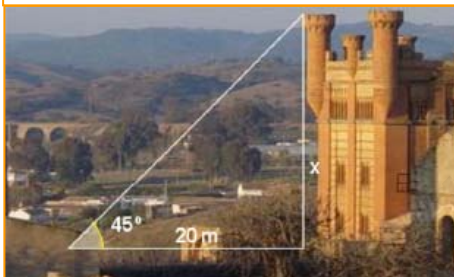
Para hallar los catetos de un triángulo rectángulo del que se conocen las medidas de la **hipotenusa** y de un ángulo agudo, pensaremos en el triángulo:



que multiplicamos por la hipotenusa



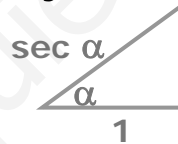
Calcular la altura de la torre.



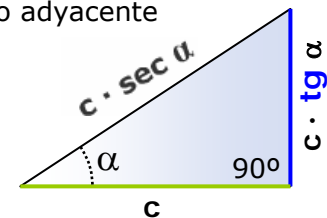
$$x = 20 \cdot \text{tg } 45^\circ = 20 \cdot 1 = 20\text{m}$$

### b) Conocidos un ángulo y un cateto

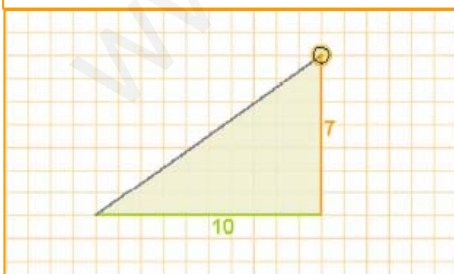
Para hallar los lados de un triángulo rectángulo del que se conocen las medidas un **cateto** y de un ángulo no recto, pensaremos en el triángulo:



que multiplicamos por el cateto adyacente



Resolver el triángulo.



$$\text{hipotenusa} = \sqrt{7^2 + 10^2} = \sqrt{149}$$

Con la calculadora:  $\text{atan}(0,7) = 35^\circ$   
Y el otro ángulo:  $90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

### c) Conocidos dos lados

Para hallar el otro lado del triángulo se aplicará el teorema de Pitágoras, el ángulo se determinará como

el arco cuya tangente es  $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

o bien como el arco cuyo seno es  $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

dependiendo de los datos iniciales.

Para calcular el otro ángulo basta restar de  $90^\circ$ .

# Trigonometría

## 5. Razones de cualquier ángulo

Recuerda que ( $\cos \alpha$ ,  $\text{sen } \alpha$ ) eran las **coordenadas** del punto final del ángulo  $\alpha$  en la circunferencia de radio unidad. Esto que vimos para los ángulos agudos podemos hacerlo extensible a ángulos cualesquiera.

### El seno

El seno de un ángulo es la coordenada **vertical** del punto final del recorrido del ángulo sobre la circunferencia goniométrica.

Observa que su valor está comprendido entre -1 y 1.

### El coseno

De la misma manera que el seno de un ángulo es la ordenada, el coseno es la **abscisa** del punto final del recorrido que marca el ángulo en la circunferencia.

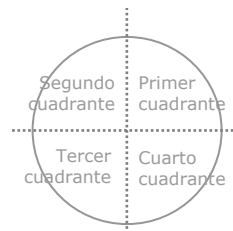
Su valor también está comprendido entre -1 y 1.

### La tangente

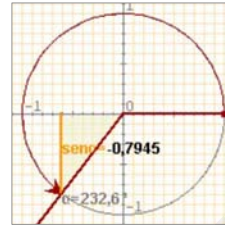
Con la relación fundamental  $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$  se amplía la definición de tangente en ángulos agudos a un ángulo cualquiera.

La tangente se representa en la recta tangente a la circunferencia goniométrica en el punto (1,0).

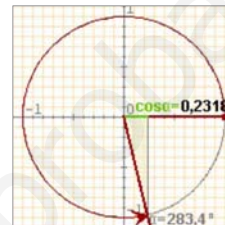
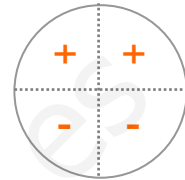
Para los ángulos de  $90^\circ$  y  $270^\circ$ , el coseno es 0 por lo que no está definida la tangente; cuanto más se acerca un ángulo a  $90^\circ$  o a  $270^\circ$ , mas grande se hace en valor absoluto la tangente, diremos que es infinito



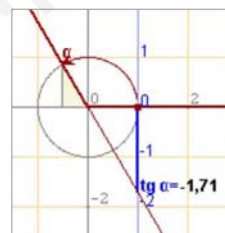
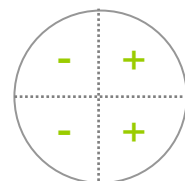
La circunferencia goniométrica es una circunferencia de radio unidad y centro el origen de coordenadas.



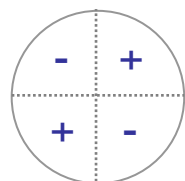
SIGNO DEL SENO



SIGNO DEL COSENO



SIGNO DE LA TANGENTE



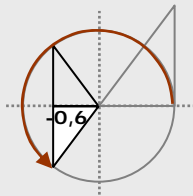
### EJERCICIOS resueltos

11. Dibuja un ángulo del tercer cuadrante cuyo cos sea -0,6 y calcula el seno y la tangente.

$$\text{sen}^2 \alpha = 1 - \text{cos}^2 \alpha = 1 - 0,36 = 0,64$$

$\text{sen } \alpha = \pm \sqrt{0,64} = \pm 0,8$  Como está en el tercer cuadrante será -0,8

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{-0,8}{-0,6} = \frac{4}{3}$$



12. Calcula  $\text{cos } \alpha$  siendo  $\text{tg } \alpha = -2$  y  $\alpha$  del cuarto cuadrante.

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \text{cos}^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$\text{cos } \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$  y elegimos el positivo ya que  $\alpha$  está en el 4º cuadrante.

### Observa

#### Ángulos suplementarios

$$\begin{aligned} \text{sen}(180^\circ - \alpha) &= \text{sen } \alpha \\ \text{cos}(180^\circ - \alpha) &= -\text{cos } \alpha \\ \text{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\text{tg } \alpha \end{aligned}$$

#### Ángulos que suman $360^\circ$

$$\begin{aligned} \text{sen}(360^\circ - \alpha) &= -\text{sen } \alpha \\ \text{cos}(360^\circ - \alpha) &= \text{cos } \alpha \\ \text{tg}(360^\circ - \alpha) &= -\text{tg } \alpha \end{aligned}$$



## 6. Resolver problemas métricos

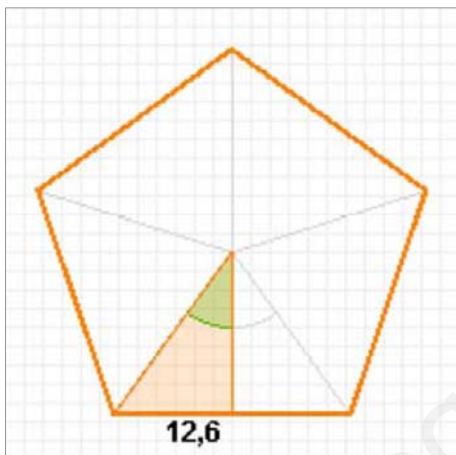


La trigonometría es útil para resolver problemas geométricos y calcular longitudes en la realidad.

Con un teodolito como el de la fotografía, se pueden medir ángulos, tanto en el plano vertical como en el horizontal, que nos permiten, aplicando las razones trigonométricas, hallar distancias o calcular alturas de puntos inaccesibles.

En estos casos aunque el triángulo de partida no sea rectángulo, trazando su altura podemos obtener dos triángulos rectángulos a resolver con los datos que tenemos.

Veamos algunos ejemplos.



### Calcular áreas de polígonos regulares

Calcular el área de un pentágono regular de 25,2 cm de lado.

- ✓ El área de un polígono regular:  $\text{perímetro} \cdot \text{apotema} / 2$   
Como se trata de un pentágono el ángulo central mide:  
 $360^\circ / 5 = 72^\circ$
- ✓ Nos fijamos en el triángulo rectángulo de la figura en el que un cateto es la apotema y otro la mitad del lado. En este triángulo:

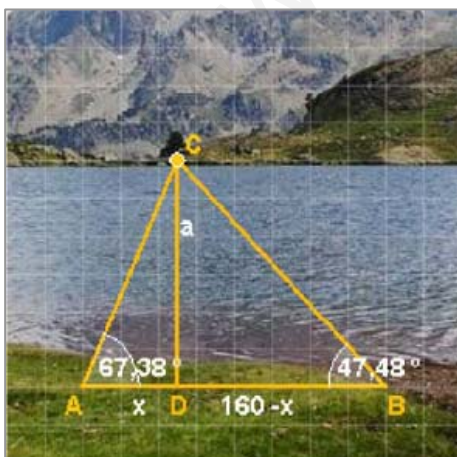
$$\text{tg}36^\circ = \frac{12,6}{a} \Rightarrow a = \frac{12,6}{\text{tg}36^\circ} = \frac{12,6}{0,72} = 17,34$$

Luego el área del pentágono es:

$$\text{Área} = \frac{25,2 \cdot 17,34}{2} = 1092,57 \text{ cm}^2$$

### Calcular medidas topográficas

Para medir la anchura de un río se han medido los ángulos de la figura desde dos puntos de una orilla distantes 160 m. ¿Qué anchura tiene el río?.



- ✓ La anchura del río es la altura del triángulo ACB que no es rectángulo, pero si lo son los triángulos ADC y BDC.

$$\text{En el triángulo ADC: } \text{tg}67,38^\circ = \frac{a}{x} \Rightarrow a = x \cdot \text{tg}67,38^\circ$$

$$\text{En el BDC: } \text{tg}47,48^\circ = \frac{a}{160 - x} \Rightarrow a = (160 - x)\text{tg}47,48^\circ$$

- ✓ Tenemos un sistema de dos ecuaciones que resolvemos por igualación:

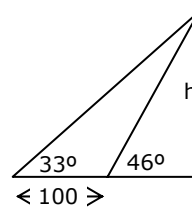
$$\left. \begin{array}{l} a = 2,40x \\ a = 1,09(160 - x) \end{array} \right\} \Rightarrow 2,40x = 1,09(160 - x) \Rightarrow 3,49x = 174,40$$

$$x = \frac{174,40}{3,49} = 50 \Rightarrow a = 2,40 \cdot 50 = 120 \text{ m}$$

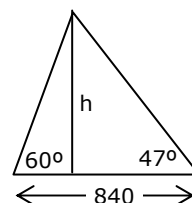


## Para practicar

- Expresa en radianes:
  - $15^\circ$
  - $120^\circ$
  - $240^\circ$
  - $345^\circ$
- Expresa en grados:
  - $\frac{\pi}{15}$
  - $\frac{3\pi}{10}$
  - $\frac{7\pi}{12}$
  - $\frac{11\pi}{6}$
- Halla con la calculadora las siguientes razones redondeando a centésimas:
  - $\sin 25^\circ$
  - $\cos 67^\circ$
  - $\operatorname{tg} 225^\circ$
  - $\operatorname{tg} 150^\circ$
- Un ángulo de un triángulo rectángulo mide  $47^\circ$  y el cateto opuesto 8 cm, halla la hipotenusa.
- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 cm y un ángulo  $66^\circ$ . Calcula los catetos.
- Un ángulo de un triángulo rectángulo mide  $44^\circ$  y el cateto adyacente 16 cm, calcula el otro cateto.
- En un triángulo rectángulo los catetos miden 15 y 8 cm, halla los ángulos agudos.
- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 45 cm y un cateto 27 cm, calcula los ángulos agudos.
- En un triángulo isósceles los ángulos iguales miden  $78^\circ$  y la altura 28 cm, halla el lado desigual.
- Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 41 cm y los ángulos iguales  $72^\circ$ , calcula el otro lado.
- El cos de un ángulo del primer cuadrante es  $\frac{3}{4}$ , calcula el seno del ángulo.
- La tangente de un ángulo del primer cuadrante es  $\frac{12}{5}$  calcula el seno.
- El  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  y  $\alpha$  es un ángulo del segundo cuadrante, calcula la  $\operatorname{tg} \alpha$ .
- El  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  y  $\alpha$  es un ángulo del cuarto cuadrante, calcula la  $\operatorname{tg} \alpha$ .
- La  $\operatorname{tg} \alpha = 3$  y  $\alpha$  es un ángulo del tercer cuadrante, calcula el  $\cos \alpha$ .
- La apotema de un polígono regular de 9 lados mide 15 cm, calcula el lado.
- El lado de un exágono regular mide 30 cm, calcula la apotema.
- La apotema de un octógono regular mide 8 cm, calcula el área del polígono.
- La longitud del radio de un pentágono regular es 15 cm. Calcula el área.
- La sombra de un árbol cuando los rayos del sol forman con la horizontal un ángulo de  $36^\circ$ , mide 11m. ¿Cuál es la altura del árbol?.
- El hilo de una cometa mide 50 m de largo y forma con la horizontal un ángulo de  $37^\circ$ , ¿a qué altura vuela la cometa?.
- Para medir la altura de un edificio se miden los ángulos de elevación desde dos puntos distantes 100m. ¿cuál es la altura si los ángulos son  $33^\circ$  y  $46^\circ$ ?.



- Dos personas distantes entre sí 840 m, ven simultáneamente un avión con ángulos de elevación respectivos de  $60^\circ$  y  $47^\circ$ , ¿a qué altura vuela el avión?.



- Para medir la altura de una montaña se miden los ángulos de elevación desde dos puntos distantes 480m y situados a 1200 m sobre el nivel del mar. ¿Cuál es la altura si los ángulos son  $45^\circ$  y  $76^\circ$ ?.



### ¿Qué inclinación de la carretera indica esta señal?

Si has investigado un poco habrás visto que unos dicen que ese 10% es la pendiente matemática y otros la definen como pendiente de tráfico. Sea una u otra, la diferencia no es grande, el ángulo indicado será en el primer caso  $\text{atan}(10/100)=5.71^\circ$  y  $\text{asen}(10/100)=5.74^\circ$  en el segundo, y los problemas de nuestro coche para abordar esa pendiente serán similares en ambos casos.

La diferencia entre la pendiente matemática o la de tráfico será más significativa si una señal indicara a un alpinista que la inclinación de la montaña a subir es del 75%.

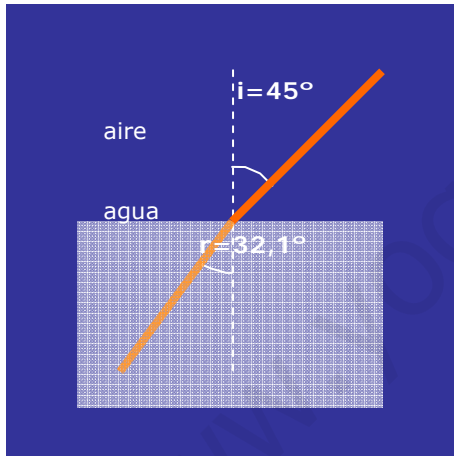
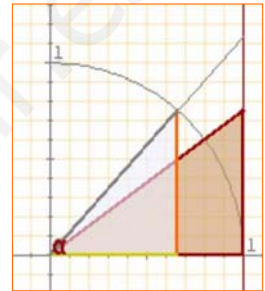
- ✓ La pendiente matemática del 75% corresponde al ángulo:

$$\text{atan}(75/100)=36.86^\circ$$

- ✓ La pendiente de tráfico del 75% corresponde al ángulo:

$$\text{asen}(75/100)=48.59^\circ$$

En la figura, la hipotenusa del triángulo marrón muestra la pendiente al interpretar el % como tangente y en el triángulo azul, se interpreta el % como seno.



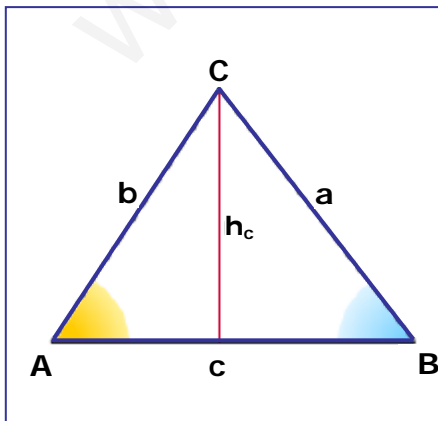
### La refracción de la luz

Es el fenómeno que se produce cuando la luz pasa de un medio material a otro en el que la velocidad de propagación es distinta. De ahí que una varilla introducida en agua la veamos "quebrada".

La relación entre el ángulo de incidencia "i" y el de refracción "r", viene dada por la siguiente relación, conocida como Ley de Snell.

$$n_1 \cdot \text{sen } i = n_2 \cdot \text{sen } r$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  son, respectivamente, los índices de refracción del medio 1 y del medio 2, a su vez el cociente entre la velocidad de la luz en el medio y la velocidad de la luz en el vacío.



### Teorema del seno

En este tema has podido resolver triángulos que no eran rectángulos considerando la altura.

El resultado conocido como Teorema del seno, nos permite resolver triángulos cualesquiera si conocemos un lado y dos ángulos.

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

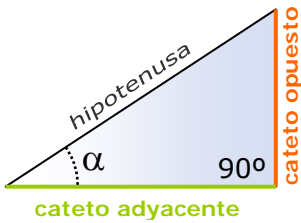
# Trigonometría



## Recuerda lo más importante

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes} \quad \begin{matrix} \text{grados} & \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} & \text{radianes} \end{matrix}$$

$$\text{radianes} \xrightarrow{\times \frac{180}{\pi}} \text{grados} \quad 1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$



- ✓ El **seno** es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.
- ✓ El **coseno** es el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa.
- ✓ La **tangente** es el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \quad \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

## Los ángulos y su medida

Para medir ángulos empleamos grados o radianes.

Un **radián** es el ángulo cuyo recorrido es igual al radio con que ha sido trazado.

## Razones trigonométricas

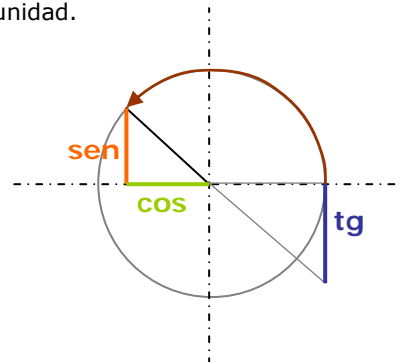
$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \\ \text{cos } \alpha &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \\ \text{tg } \alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \end{aligned}$$

## Relaciones fundamentales

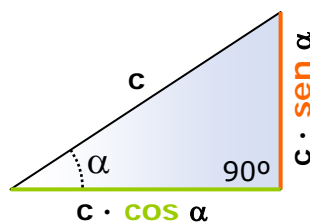
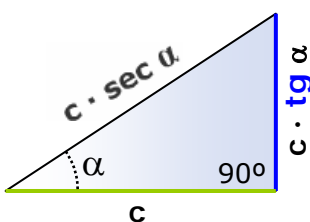


## Razones de ángulos cualesquiera

$(\text{cos } \alpha, \text{sen } \alpha)$  son las **coordenadas** del punto final del ángulo  $\alpha$  en la circunferencia goniométrica o de radio unidad.

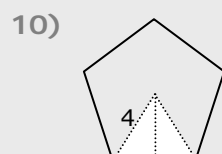
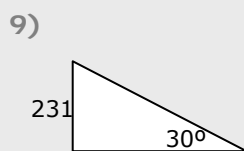
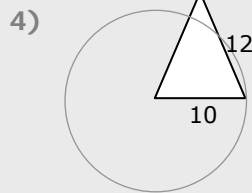
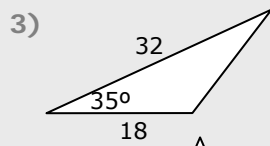
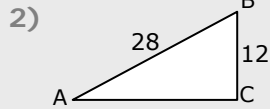


## SIGNO DE LAS RAZONES



**Resolver** un triángulo rectángulo consiste en hallar las medidas de sus seis elementos: tres lados y dos ángulos (el tercero es  $90^\circ$ ), conocidos un lado y un ángulo o dos lados.





1. Expresa en radianes el ángulo de  $150^\circ$ .
2. Calcula el valor de  $\operatorname{tg} A$  en el triángulo ABC de la figura.
3. Calcula el área del triángulo de la figura.
4. Con un compás de 12 cm de longitud hemos trazado una circunferencia de 10 cm de radio, ¿qué ángulo, en radianes, forman las ramas del compás?
5. Si  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$ , y  $\alpha$  es un ángulo agudo, calcula la  $\operatorname{tg} \alpha$ .
6. Si  $\operatorname{tg} \alpha = 1.25$  y  $\alpha$  está en el tercer cuadrante, calcula el  $\operatorname{cos} \alpha$ .
7. A partir de las razones del ángulo de  $30^\circ$ , calcula la  $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ .
8. Si  $\operatorname{cos} \alpha = \frac{3}{5}$ , y  $\alpha$  es un ángulo agudo, calcula el  $\operatorname{cos}(180^\circ - \alpha)$ .
9. La altura de Torre España es de 231 m, ¿cuánto mide su sombra cuando la inclinación de los rayos del sol es de  $30^\circ$ ?
10. Calcula el área de un pentágono regular de radio 4 cm.

## Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a)  $\frac{\pi}{12}$  b)  $\frac{2\pi}{3}$  c)  $\frac{4\pi}{3}$  d)  $\frac{23\pi}{12}$
2. a)  $12^\circ$  b)  $54^\circ$  c)  $105^\circ$  d)  $330^\circ$
3. a) 0,42 b) 0,39 c) 1 d) -0,58
4. 10,93 cm
5. 23,75 cm, 10,57 cm
6. 15,45 cm
7.  $28^\circ 4' 20''$      $61^\circ 55' 40''$
8.  $36^\circ 52' 11''$      $53^\circ 7' 49''$
9. 11,9 cm
10. 25,33 cm
11.  $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$
12.  $\text{sen } \alpha = 12/13$
13.  $\text{tg } \alpha = -3/4$
14.  $\text{tg } \alpha = -4/3$
15.  $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$
16. 10,91 cm
17. 25,98 cm
18. lado=6,63 cm    área=212,08 cm<sup>2</sup>
19. lado=17,63 cm    apot=12,14 cm  
área=534,97 cm<sup>2</sup>
20. 7,99 m
21. 30 m
22. 57,41 m
23. 638,11 m
24.  $639,42+1200=1839,42$  m

### Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1.  $\frac{5\pi}{6}$
2. 0,47
3. 165,19 u<sup>2</sup>
4. 0,85 rad (truncamiento)
5.  $\text{tg } \alpha = 4/3$
6.  $\cos \alpha = -0,62$
7.  $\text{tg } \frac{-5\pi}{6} = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
8.  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -3/5$
9. 400,10 m
10. 38,04 m<sup>2</sup>

No olvides enviar las actividades al tutor ►

## ACTIVIDADES DE ESO

Nombre y apellidos del alumno:	Curso: <b>4º</b>
Quincena nº: <b>7</b>	Asignatura: <b>Matemáticas B</b>
Fecha:	Profesor de la asignatura:

1. Pasa a radianes o a grados, en cada caso, los siguientes ángulos:

a)  $45^\circ$

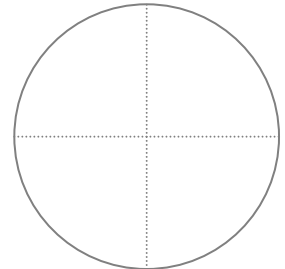
b)  $\frac{2\pi}{3}$  rad

c)  $240^\circ$

d)  $\frac{7\pi}{4}$  rad

2. Calcula el seno y el coseno de un ángulo agudo sabiendo que su tangente vale 2.

3. Representa en la circunferencia goniométrica el ángulo  $\alpha = -135^\circ$



4. La sombra de un árbol cuando los rayos del sol forman un ángulo de  $50^\circ$  con la horizontal mide 8 m, ¿cuál es la altura del árbol?.