**Problema 1:**

Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real λ e incógnitas x, y, z

$$\begin{cases} (\lambda+2)x - y + z = 0 \\ 3x + (\lambda+6)y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + (\lambda-2)z = 0 \end{cases}$$

se pide:
a) Calcular para qué valores de λ el sistema sólo admite la solución (x, y, x) = (0, 0, 0)
b) Para cada valor de λ que hace indeterminado el sistema, obtener todas sus soluciones.
c) Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando λ = – 3

**Problema 2:**

Contesta a las siguientes cuestiones:
a) Obtén la derivada de la función f(x) = ax + b + sen x. Calcula **a** y **b** si O(0, 0) es un punto de la curva y = ax + b + sen x, cuya recta tangente en O(0, 0) es el eje X
b) Justifica que la función $g(x) = -\frac{2}{\pi}x + \operatorname{sen} x$ se anula en dos puntos del intervalo [0, π]

**Problema 3:**

Dada la siguiente matriz A

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula $A^{183}$

**Problema 4:**

En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:
- Alimento Migato: 600 g de carne, 300 g de pescado y 100 g de verdura.
- Alimento Catomeal: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura.
- Alimento Comecat: 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura.

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?

**Problema 5:**

Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x) = (x+1)e^{-x}$ en el punto de corte de f(x) con el eje X

**Problema 6:**

Estudia si la función $f(x)=\begin{cases} x & (x \le -1) \\ 1-x^2 & (-1 < x \le 2) \\ -3 & (2 < x) \end{cases}$ es continua en los puntos x = – 1 y x = 2. Representa gráficamente dicha función.

**Problema 7:**

Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde **m** es un número real. Encuentra los valores de **m** para los que A•B tiene inversa.

**Problema 8:**

Estudia (dominio, crecimiento, máximos y mínimos, asíntotas) y representa gráficamente la función $y=\dfrac{2x-1}{x-x^2}$

**Problema 9:**

A un compañero le piden que clasifique y resuelva el sistema $\begin{cases} 3x-ky = 3 \\ y+3z=6 \\ x+kz=5 \end{cases}$ para el valor del parámetro k $\in$ R que él desee. Obtiene, correctamente para dicho valor, que el sistema es compatible indeterminado, y que una expresión de sus soluciones en forma paramétrica es x = 1 + 2t, y = …, z = … Determina para qué valor del parámetro **k** ha clasificado y resuelto el sistema, y calcula las expresiones de las incógnitas **y** y **z**que le faltan.

**Problema 10:**

Calcula

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

**Problema 11:**

Demuestra que toda matriz cuadrada de dimensión 3 se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

**Problema 12:**

Da un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que sea compatible indeterminado. Interprétalo geométricamente.

**Problema 13:**

Sea f: R → R la función definida por f(x) = $x^2$ – |x|; estudia la derivabilidad de **f**

**Problema 14:**

Calcula $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

**Problema 15:**

Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) $|-3A|$ y $|A^{-1}|$ b) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$

**Problema 16:**

Calcula, para $f(x) = (x+1)e^{-x}$: intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, puntos de inflexión, concavidad y convexidad.

**Problema 17:**

La terna (0, 0, 0) es siempre solución del sistema

$$\begin{cases} x + 2y - az = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ 2ax + y - z = 0 \end{cases}$$

Independientemente del valor del parámetro **a**

a) Indica para qué valores del parámetro la citada terna es la única solución del sistema.

*b)* Indica algún valor del parámetro, si existe, para el cual el sistema tenga algunas soluciones distintas de la nula y mostrar estas soluciones. *(Nota: Si se encuentran varios valores del parámetro cumpliendo la condición pedida, para responder a esta cuestión basta tomar uno solo de ellos)*.

**Problema 18:**

Calcula el valor de $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}$

**Problema 19:**

Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$5A - 2B = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}$$

**Problema 20:**

a) Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + y - 3z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

b) Halla la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

**Problema 21:**

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Determínense **a, b, c,** y **d** para que la recta $y + 1 = 0$ sea tangente a la gráfica de **f** en el punto A(0, – 1), y la recta $x - y - 2 = 0$ sea tangente a la gráfica de **f** en el punto B(1, – 1)

**Problema 22:**

Se considera la función definida por $f(x) = \frac{9x - 3}{x^2 - 2x}$ para $x \neq 0$ y $x \neq 2$

a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f(x)

b) Estudia la posición de la gráfica de f(x) respecto de sus asíntotas.

**Problema 23:**

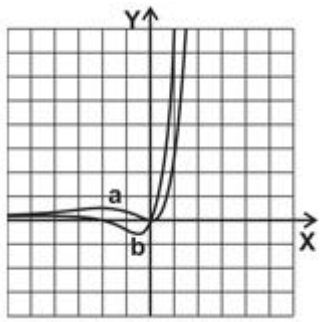
Halla los valores de **k** para que la matriz $\begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$

a) no tenga inversa.

b) tenga rango 3

**Problema 24:**

Se sabe que las dos gráficas del dibujo corresponden a la función f: R → R definida por f(x) = $x^2e^x$ y a su función derivada f'. Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f'




**Problema 25:**

Resuelve los siguientes apartados.
a) Discute e interpreta geométricamente, según los diferentes valores del parámetro **m,** el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + z = m \\ mx - y + z = 0 \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, para los casos m = 0 y m = 2

**Problema 26:**

Dada la función $f(x) = \ln \frac{x^2}{x-1}$ donde ln significa *logaritmo neperiano*, definida para x > 1, halla un punto (a, f(a)) tal que la recta tangente a la gráfica de f(x) en ese punto sea paralela al eje X

**Problema 27:**

Si A y B son dos matrices cuadradas cualesquiera, es cierto que:
$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$

**Problema 28:**

Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y - x = z \\ x - z = y \\ y + z = x \end{array}\right\}$$

**Problema 29:**

Determina los valores de **a** y **b** $\in$ R para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 - 6x + b$ pase por el origen de coordenadas y su recta tangente en x = 1 tenga pendiente 3

**Problema 30:**

La función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ no está definida para x = 0. Definir f(0) para que la función sea continua en ese punto.

**Problema 31:**

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene A inversa? En caso afirmativo, calcúlala.
b) Determina la matriz X que cumple que $A \cdot X + C \cdot B^t = B \cdot B^t$, siendo $B^t$ la matriz traspuesta de B

**Problema 32:**

¿Cuál es el dominio de la función $y = x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ ?

**Problema 33:**

Estudia, según los valores del parámetro **a,** el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} ax + ay \quad\ = a \\ x - \ y + az = a \\ x + 2y + 3z = a \end{array}\right\}$$

**Problema 34:**

De la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en x = – 1, que su gráfica corta al eje X en el punto de abscisa x = – 2 y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa x = 0. Calcula **a**, **b**, **c** y **d** sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de **f** en el punto de abscisa x = 2 tiene pendiente 9

**Problema 35:**

Sean A, B y C tres matrices tales que el producto A • B • C es una matriz 3 x 2 y el producto $A \cdot C^t$ es una matriz cuadrada, siendo $C^t$ la traspuesta de C. Calcula, razonando la respuesta, las dimensiones de A, B y C

**Problema 36:**

A, B y C son tres ciudades que forman un triángulo de manera que entre cada dos de ellas hay una carretera recta que las une. Se sabe que si se va de a A a B dando la vuelta por C se hace un recorrido tres veces mayor que si se va directamente de a A a B. Asimismo si para ir de A a C se da la vuelta por B el recorrido es el doble que si se va directamente de a A a C. Calcula las distancias entre las tres ciudades sabiendo que la suma de las tres distancias es igual a 120 kilómetros.

**Problema 37:**

Resuelve las siguientes cuestiones:
a) Calcula el valor de **a** y **b** para que la función

$$f(x)=\begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2+2a\cos x & \text{si} \quad 0\le x<\pi \\ ax^2+b & \text{si} \quad x\ge \pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de **x**
b) Estudia la derivabilidad de f(x) para los valores de **a** y **b** obtenidos en el apartado anterior.

**Problema 38:**

Calcula

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n-8}{2^n}\right)$

**Problema 39:**

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
a) Comprobar que el $\det(A^2) = (\det(A))^2$ y que $\det(A + I) = \det(A) + \det(I)$
b) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple que $\det(M^2) = (\det(M))^2$? Razona la respuesta.
c) Encuentra todas las matrices cuadradas M, de orden 2, tales que $\det(M + I) = \det(M) + \det(I)$

**Problema 40:**

Para la función $f(x) = (x + 2)e^x$, se pide:
a) Estudia su dominio y continuidad.
b) Determina sus puntos de corte con los ejes.
c) Obtén las coordenadas de los máximos y mínimos relativos.
d) Determina las coordenadas de los puntos de inflexión.
(Recuerda que $e^x \neq 0$, $\forall\ x \in R$)

**Problema 41:**

Discute el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (1+b)y - bz = 2b \\ x + by + (1+b)z = 1 \end{cases}$$

Según los valores de **b**

**Problema 42:**

¿Existen máximo y mínimo absolutos de la función f(x) = cos (x) + 1 en el intervalo [0, π]? Justifica la respuesta y calcúlalos.

**Problema 43:**

Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula A • B; A • C, $A^t$ • $B^t$ y $C^t$ • $A^t$, siendo $A^t$, $B^t$ y $C^t$ las matrices traspuestas de A, B y C, respectivamente.

**Problema 44:**

La liga de fútbol de un cierto país la juegan 21 equipos a doble vuelta. Este año, los partidos ganados valían 3 puntos, los empatados 1 punto y los perdidos 0 puntos. En estas condiciones, el equipo campeón de liga obtuvo 70 puntos. Hasta el año pasado los partidos ganados valían 2 puntos y el resto igual. Con el sistema antiguo, el actual campeón hubiera obtenido 50 puntos. ¿Cuántos partidos ganó, empató y perdió el equipo campeón?

**Problema 45:**

Resuelve las siguientes cuestiones:
i) Calcula la recta tangente a la curva f(x) = ln $x^2$ en el punto x = 2
ii) Calcula el punto de corte de dicha recta con el eje **Y**

**Problema 46:**

Halla el valor de la constante **k** sabiendo que la curva de ecuación $y = \dfrac{x^3 + kx^2 + 1}{x^2 + 1}$ posee una asíntota que pasa por el punto (1, 3)

**Problema 47:**

Despeja la matriz X en función de A e I en la ecuación
$(X + A)^2 = X^2 + XA + I$
siendo X y A matrices cuadradas de orden dos, e I la matriz identidad de orden dos.

**Problema 48:**

Dada la función $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$, determina razonadamente:
a) El dominio.
b) Los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
c) Las ecuaciones de sus asíntotas, si es que las tiene.
d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos.
e) Su representación gráfica.

**Problema 49:**

Resuelve

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Problema 50:**

Descomponer el número 8 en dos sumandos positivos de manera que la suma del cubo del primer sumando más el cuadrado del segundo sea mínima.

# Ejercicios 1 y 3 de selectividad.

---

**Ejercicio 1.-** Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 + ax + b \qquad \text{y} \qquad g(x) = c\,e^{-(x+1)}$$

Se sabe que las gráficas de $f$ y $g$ se cortan en el punto $(-1, 2)$ y tienen en ese punto la misma recta tangente.

(a) [**2 puntos**] Calcula los valores de $a$, $b$ y $c$.

(b) [**0'5 puntos**] Halla la ecuación de dicha recta tangente.

---

**Ejercicio 3.-** Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rl} x + \lambda y - z & = 0 \\ 2x + y + \lambda z & = 0 \\ x + 5y - \lambda z & = \lambda + 1 \end{array}\right\}$$

(a) [**1'5 puntos**] Clasifícalo según los valores del parámetro $\lambda$.

(b) [**1 punto**] Resuélvelo para $\lambda = -1$.

---

**Ejercicio 3.-** [**2'5 puntos**] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz $P$ que verifica $AP - B = C^T$ ($C^T$ es la matriz traspuesta de $C$).

---

**Ejercicio 1.-** Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

(a) [**1'5 puntos**] Halla $a$ y $b$ sabiendo que $f$ es derivable en $\mathbb{R}$.

(b) [**1 punto**] Determina la recta tangente y la recta normal a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 3$.

---

**Ejercicio 3.-** Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rl} x+y+z & =a-1 \\ 2x+y+az & =a \\ x+ay+z & =1 \end{array}\right\}$$

(a) [**1'5 puntos**] Discútelo según los valores del parámetro $a$.

(b) [**1 punto**] Resuélvelo en el caso $a=2$.

---

**Ejercicio 3.-** Sabemos que el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} 2x-y+3z & =1 \\ x+2y-z & =2 \end{array}\right\}$$

tiene las mismas soluciones que el que resulta al añadirle la ecuación $ax+y+7z=7$

(a) [**1'25 puntos**] Determina el valor de $a$.

(b) [**1'25 puntos**] Calcula la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad.

---

**Ejercicio 3.-** Un cajero automático contiene sólo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe de 3000 euros.

(a) [**1'25 puntos**] ¿Es posible que en el cajero haya el triple número de billetes de 10 que de 50?

(b) [**1'25 puntos**] Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcula cuantos billetes hay de cada tipo.

---

**Ejercicio 1.-** [**2'5 puntos**] De entre todos los rectángulos de perímetro 8 cm, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.

---

**Ejercicio 3.-** Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$.

(a) [**1 punto**] Halla los valores del parámetro $m$ para los que el rango de $A$ es menor que 3.

(b) [**1'5 puntos**] Estudia si el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de $m$ obtenidos en el apartado anterior.

---

**Ejercicio 1.-** [**2'5 puntos**] Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$, determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en su punto de inflexión.

---

**Ejercicio 3.-** Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rl} x + y & = 1 \\ ky + z & = 0 \\ x + (k+1)y + kz & = k+1 \end{array}\right\}$$

(a) [**1'25 puntos**] Determina el valor del parámetro $k$ para que sea incompatible.

(b) [**1'25 puntos**] Halla el valor del parámetro $k$ para que la solución del sistema tenga $z = 2$.

---

**Ejercicio 1.-** Sea la función $f : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ cx + 1 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

(a) [**2 puntos**] Determina $a$, $b$ y $c$ sabiendo que $f$ es continua en el intervalo cerrado $[0, 4]$, derivable en el intervalo abierto $(0, 4)$ y que $f(0) = f(4)$.

(b) [**0'5 puntos**] ¿En qué punto del intervalo se anula la derivada de la función?

---

**Ejercicio 3.-** [**2'5 puntos**] Halla los valores del parámetro $m$ que hacen compatible el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} -x + 2y - 2z & = 2 \\ 2x + y + z & = m \\ x + 3y - z & = m^2 \end{array}\right\}$$

---

**Problema 1** *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3x}{x-1} & \text{si} \quad x<0 \\ a & \text{si} \quad x=0 \\ e^{-1/x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de $a$ para que $f$ sea continua en $x=0$.

b) (1 punto). Para ese valor de $a$, estudiar la derivabilidad de $f$ en $x=0$.

c) (1 punto). Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y=f(x)$.

---

**Ejercicio 3.-** Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ll} x+y+z & =a-1 \\ 2x+y+az & =a \\ x+ay+z & =1 \end{array}\right\}$$

(a) [**1'5 puntos**] Discútelo según los valores del parámetro $a$.

(b) [**1 punto**] Resuélvelo en el caso $a=2$.

---

Ejercicio 1.- [**2'5 puntos**]
Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

---

Ejercicio 4. Dada la función $f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x - 1$, determina las ecuaciones de la recta normal, y tangente en el punto $x = -1$.

---

**Ejercicio 3.-** Sabemos que el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll} 2x-y+3z & =1 \\ x+2y-z & =2 \end{array}\right\}$$

tiene las mismas soluciones que el que resulta al añadirle la ecuación $ax+y+7z=7$

(a) [**1'25 puntos**] Determina el valor de $a$.

(b) [**1'25 puntos**] Calcula la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad.

---

**Ejercicio 1.-** [**2'5 puntos**] De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto $(1,2)$, encuentra aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Halla el área de dicho triángulo.

---