

23 EJERCICIOS de DERIVADAS

Derivada de una función en un punto [f'(a)]:

Fórmulas:
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1)$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (2)$$

1. Para cada una de las funciones que figuran a continuación, hallar el valor de su derivada en el punto indicado, utilizando la fórmula que se señala:

a) $f(x)=x^2$ en $x=2$ mediante (1)

b) $f(x)=2x-5$ en $x=1$ mediante (2)

c) $f(x)=x^3$ en $x=2$ mediante (1)

d) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x=4$ mediante (2)

e) $f(x)=1/x$ en $x=-1$ mediante (1)

f) $f(x)=x^2+x+1$ en $x=0$ mediante (2)

(Soluc: a) 4; b) 2; c) 12; d) 1/4; e) -1; f) 1)

2. Volver a hacer el ejercicio anterior por la fórmula alternativa en cada caso, y comprobar que se obtiene idéntico resultado.

3. Hallar la derivada de $f(x)=x^2-x$ en $x=1$. Dibujar la función y trazar la recta tangente en dicho punto. Hallar el ángulo que dicha tangente forma con OX^+ e interpretar el resultado.

Función derivada f'(x):

Fórmula:
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3)$$

4. Hallar la derivada de las funciones del ejercicio 1 y sustituir el punto indicado en cada caso, para comprobar que se obtiene el mismo resultado.

5. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones, y a partir de ella obtener $f'(2)$, $f'(-1)$ y $f'(0)$:

a) $f(x)=3x-2$

b) $f(x)=x^2-5x+6$

c) $f(x)=x^3+1$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

e) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

6. Hallar la derivada de $f(x)=x^2-3x$ en $x=1$ mediante la definición de derivada (es decir, mediante un límite)
(Sol: -1)

Reglas de derivación. Tabla de derivadas:

7. Utilizando la derivada de la función potencial, $y=x^n \Rightarrow y'=n \cdot x^{n-1} (\forall n \in \mathbb{R})$, hallar la derivada, **simplificada**, de las siguientes funciones:

a) $y=x^2$

b) $y=x^3$

c) $y=3x^4$

d) $y=-2x^5$

e) $y = \frac{3}{2} x^4$

$$\begin{array}{lllll} \text{f)} y = \frac{x^2}{4} & \text{g)} y = \sqrt{x} & \text{h)} y = \sqrt{x^3} & \text{i)} y = \sqrt[3]{x^2} & \text{j)} y = 2\sqrt[4]{x^3} \\ \text{k)} y = \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{l)} y = x^2\sqrt{x} & \text{m)} y = \frac{\sqrt{x}}{x^2} & \text{n)} y = -2x^6 & \text{o)} y = \frac{x^8}{4} \\ \text{p)} y = 2\sqrt{x} & \text{q)} y = 3\sqrt[5]{x^3} & \text{r)} y = \frac{\sqrt{x}}{x} & & \end{array}$$

$$\left(\text{Soluc: a)} y' = 2x; \text{ b)} y' = 3x^2; \text{ c)} y' = 12x^3; \text{ d)} y' = -10x^4; \text{ e)} y' = 6x^3; \text{ f)} y' = x/2; \text{ g)} y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \text{ h)} y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}; \text{ i)} y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}; \right.$$

$$\left. \text{ j)} y' = \frac{3}{2\sqrt[4]{x}}; \text{ k)} y' = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}; \text{ l)} y' = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}; \text{ m)} y' = \frac{-3\sqrt{x}}{2x^3}; \text{ n)} y' = -12x^5; \text{ o)} y' = 2x^7; \text{ p)} y' = \frac{1}{\sqrt{x}}; \right.$$

$$\left. \text{ q)} y' = \frac{9}{5\sqrt[5]{x^2}}; \text{ r)} y' = \frac{-\sqrt{x}}{2x^2} \right)$$

8. Utilizando la fórmula de la derivada de la suma de funciones, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones:

$$\text{a)} y = x^2 + x + 1 \quad \text{b)} y = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 3 \quad \text{c)} y = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{5} + 1 \quad \text{d)} y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt{x}$$

$$\left(\text{Soluc: a)} y' = 2x + 1; \text{ b)} y' = 6x^2 - 6x + 5; \text{ c)} y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}; \text{ d)} y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

9. Utilizando en cada caso la fórmula más apropiada de la tabla de derivadas, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones compuestas:

$$\begin{array}{lllll} \text{a)} y = \frac{1}{x^2} & \text{b)} y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3} & \text{c)} y = \sqrt{x^2 + 1} & \text{d)} y = (x^2 - 3)^2 & \text{e)} y = \frac{2}{x^3} \\ \text{f)} y = (x^2 + x + 1)^3 & \text{g)} y = \sqrt[3]{2x^3 - 3} & \text{h)} y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} & \text{i)} y = 3(x^2 + 1)^{10} & \text{j)} y = 2(3x^2 - 1)^4 \\ \text{k)} y = \frac{2}{(x^2 + 1)^3} & & & & \end{array}$$

$$\left(\text{Sol: a)} y' = \frac{-2}{x^3}; \text{ b)} y' = -\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}; \text{ c)} y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}; \text{ d)} y' = 4x^3 - 12x; \text{ e)} y' = \frac{-6}{x^4}; \text{ f)} y' = 3(2x+1)(x^2+x+1)^2; \right.$$

$$\left. \text{ g)} y' = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{2x^3-3}}; \text{ h)} y' = \frac{-x}{\sqrt{x^2+4}}; \text{ i)} y' = 60x(x^2+1)^9; \text{ j)} y' = 48x(3x^2-1)^3; \text{ k)} y' = \frac{-12x}{(x^2+1)^4} \right)$$

10. Ídem:

$$\text{a)} y = x\sqrt{x^3} \quad \text{b)} y = (2x - 3)(x^2 - 5) \quad \text{c)} y = x^2\sqrt[3]{x} \quad \text{d)} y = (2x - 3)\sqrt[4]{x^3} \quad \text{e)} y = (2x + 1)(x^2 - 3)^2$$

$$\text{f)} y = \sqrt{x} \left(\frac{1}{x+1} \right)^2$$

$$\left(\text{Soluc: a)} y' = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}; \text{ b)} y' = 6x^2 - 6x - 10; \text{ c)} y' = \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}; \text{ d)} y' = \frac{14x-9}{4\sqrt[4]{x}}; \text{ e)} y' = 10x^4 + 4x^3 - 36x^2 - 12x + 18; \right.$$

$$\left. \text{ f)} y' = \frac{-3x+1}{2(x+1)^3\sqrt{x}} \right)$$

11. Utilizando la fórmula para el cociente de funciones, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x^2 - 5}{x + 2}$

b) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2}$

c) $y = \frac{x + 2}{x^2 - 5}$

d) $y = \frac{3x}{(2x^2 + 1)^2}$

e) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$

(Sol: a) $y' = \frac{x^2 + 4x + 5}{(x + 2)^2}$; b) $y' = -\frac{3}{2}\sqrt{x}$; c) $y' = -\frac{x^2 + 4x + 5}{(x^2 - 5)^2}$; d) $y' = \frac{3 - 18x^2}{(2x^2 + 1)^3}$; e) $y' = \frac{3x^2 + 4x}{2(x + 1)\sqrt{x + 1}}$)

12. Derivar las siguientes funciones, utilizando en cada caso el procedimiento más apropiado, y **simplificar**:

a) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2}$

b) $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$

c) $y = \frac{x + 1}{1 - x}$

13. Hallar la fórmula para la derivada de $y = \frac{u}{v \cdot w}$ e $y = \frac{u \cdot v}{w}$, siendo u, v y w funciones.

Ecuación de la recta tangente:

14. Hallar la ecuación de la recta tangente a las curvas en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 3x^2 + 8$ en $x = 1$

(Sol: $6x - y + 5 = 0$)

b) $y = 2x^5 + 4$ en $x = -1$

(Sol: $10x - y + 12 = 0$)

c) $f(x) = x^4 - 1$ en $x = 0$

(Sol: $y = -1$)

d) $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 - 3}$ en $x = 2$

(Sol: $y = -12x + 30$)

15. ¿En qué punto de la gráfica de la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 8$ la tangente es paralela al eje de abscisas? ¿Qué nombre recibe ese punto? ¿Cuál es la ecuación de la tangente? Dibujar la situación.
(Soluc: $y = -1$; vértice $(3, -1)$)

16. ¿En qué punto de la gráfica de la función anterior la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Dibujar la situación. (Soluc: $(7/2, -3/4)$)

17. (S) Determinar los puntos de la curva $y = x^3 + 9x^2 - 9x + 15$ en los cuales la tangente es paralela a la recta $y = 12x + 5$ (Soluc: $(1, 16)$ y $(-7, 176)$)

Intervalos de crecimiento. M y m. Representación de funciones:

18. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los M y m de las siguientes funciones. Representarlas gráficamente.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^4 - 2x^2$

c) $y = x^3 - 3x^2 + 1$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

e) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 6$

f) $f(x) = x^3$

g) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 10$

h) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

i) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$

j) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 3$

k) $y=2x^3-9x^2$

l) $f(x)=x^3-6x^2+9x$

m) $y=x^3-12x$

(Soluc: a) $\varnothing (0,\infty) \cup (-\infty,0)$; b) $\varnothing (-1,0) \cup (1,\infty) \cup (-\infty,-1) \cup (0,1)$; c) $\varnothing (-\infty,0) \cup (2,\infty) \cup (0,2)$; d) $\varnothing (-\infty,1) \cup (3,\infty) \cup (1,3)$; e) $\varnothing \forall x \in \mathbb{R}$; f) $\varnothing \forall x \in \mathbb{R}$; g) $\varnothing (-\infty,0) \cup (0,\infty)$; h) $\varnothing (-\infty,-1) \cup (3,\infty) \cup (-1,3)$; i) $\varnothing (-\infty,3) \cup (3,\infty)$)

19. Dada $f(x)=2x^3-3x^2$ se pide: i) Dom (f) ii) Posible Simetría. iii) Posibles cortes con los ejes. iv) Intervalos de crecimiento a partir de $f'(x)$, y posibles M y m que se deducen. v) Ecuación de las asíntotas, en caso de existir. vi) Con la información anterior, representarla gráficamente.

20. Ídem para:

a) $f(x)=x^3-3x$

b) $y = \frac{x+2}{x-1}$

c) $y=x^4-2x^2$

d) $y = \frac{2x}{x^2+1}$

e) $f(x)=x^3-3x^2$

f) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

g) $y=-x^3+12x$

h) $f(x)=\frac{9}{x^2-9}$

i) $f(x)=\frac{16-8x}{x^2}$

j) $y=\frac{x}{x^2+x+1}$

k) $y=\frac{x}{x^2-x+1}$

l) $y=\frac{4x}{x-1}^2$

m) $y=\sqrt{-x^2+4x+5}$

21. Hallar los máximos y mínimos de las siguientes funciones , y a partir de ellos los intervalos de monotonía y su representación gráfica:

a) $y=\frac{x^2}{x+2}$

b) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

c) $f(x)=\frac{1}{x^4+3}$

d) $y=\frac{1}{x^3+x}$

e) $f(x)=|x|$

(Soluc: a) M(-4,-8) m(0,0); b) M(0,1); c) M(0,1/3); d) no tiene; e) m(0,0))

22. Hallar los M y m y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+3}$$

(Soluc: m(-1, $\sqrt[3]{2}$); $\cup (-\infty,-1) \cup (-1,\infty)$)

23. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x)=\frac{4x+5}{2x-3}$$

(Solución: decreciente $\forall x \in \text{Dom}(f)$)