

1. Halla el dominio de definición y recorrido de las funciones
 - a) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
 - b) $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$
2. Calcula los límites:
 - a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$
 - b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 6x^2 + 12}{x^3 + 8x - 2}$
3. Sea f la función dada por $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ para $|x| \neq 1$, determina sus asíntotas.
4. Halla el valor de los parámetros m y n para que la función f sea continua en todo \mathbb{R} .

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ mx + n, & 1 < x < 3 \\ 4, & x \geq 3 \end{cases}$$
5. Calcula los siguientes límites:
 - a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 4} - \sqrt{n^2 - 3n})$
 - b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n-2}$
6. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ en el punto $P(-1, 2)$. ¿Cuál es la ecuación de la recta normal? El valor de la pendiente lo hallarás aplicando la definición de la derivada.
7. Halla las derivadas de las siguientes funciones:
 - a) $f(x) = x \cdot \sqrt{2x^3 + 1}$
 - b) $g(x) = \frac{x^4}{x-1}$
8. Halla las derivadas de las siguientes funciones:
 - a) $f(x) = (5x^2 \operatorname{sen} x) + (x \cdot \operatorname{cos} x)$
 - b) $g(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$
9. Si la función $f(x) = x^3 + ax + b$ tiene un mínimo en el punto $(1, 5)$, determina los valores de a y b . ¿Tiene algún otro máximo o mínimo esta función?
10. El área de un rectángulo es de 100 cm^2 . Si queremos que tenga el menor perímetro posible, ¿cuáles son sus dimensiones?

Solución del examen

1. Halla el dominio de definición y recorrido de las funciones

a) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ b) $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

Solución:

Hallamos los dominios:

a) La expresión $\sqrt{9 - x^2}$ está definida cuando el radicando sea mayor o igual que cero, ya que la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real. Hallamos los valores tales que:
 $9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 9 \geq x^2 \Rightarrow |x| \geq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$
 $D(f) = [-3, +3]$.

b) La expresión $\frac{1}{x^2 - 4}$ está definida cuando el denominador no se anule.
 $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

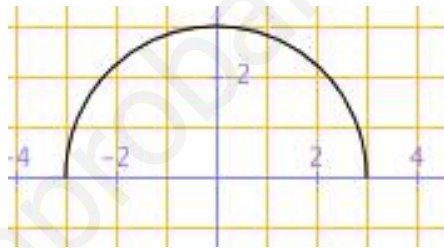
Por lo tanto:

$$D(f) = \mathbf{R} - \{-2, 2\} \text{ ó } (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$$

Hallamos los recorridos a partir de las funciones inversas:

a) $y = \sqrt{9 - x^2} \Rightarrow x = \sqrt{9 - y^2} \Rightarrow x^2 = 9 - y^2 \Rightarrow y^2 = 9 - x^2$
 $y = f^{-1}(x) = +\sqrt{9 - x^2}$

Función únicamente válida en $[0, 3]$ que es por lo tanto el recorrido de $f(x)$.



b) $y = \frac{1}{x^2 - 4} \Rightarrow x = \frac{1}{y^2 - 4} \Rightarrow y^2 - 4 = \frac{1}{x} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{x} + 4$

Función válida en $\mathbf{R} - \{0\}$ que es el recorrido de $g(x)$.

2. Calcula los límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 6x^2 + 12}{x^3 + 8x - 2}$

Solución:

a) Es una indeterminación del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$, resolvemos el límite descomponiendo en factores numerador y denominador con la regla de Ruffini y simplificando el resultado obtenido:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 16}{x^3 + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}{(x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 + 4)(x - 2)}{(x^2 - 2x + 4)} = \frac{8 \cdot (-4)}{12} = -\frac{8}{3}$$

b) Es una indeterminación del tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, como el grado del numerador es igual que el grado del denominador sustituimos los polinomios por su monomio de mayor grado y simplificamos el resultado obtenido:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 6x^2 + 12}{x^3 + 8x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{x^3} = \mathbf{3}$$

3. Sea f la función dada por $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ para $|x| \neq 1$, determina sus asíntotas.

Solución:

El dominio de definición es $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$.

- Asíntotas verticales: Son rectas verticales en las que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$. Como es un cociente buscamos los valores que anulan el denominador:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

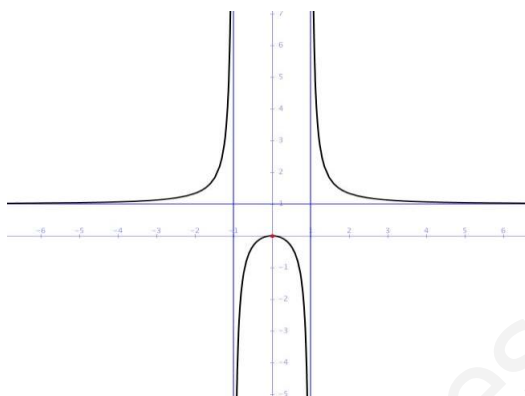
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty$$

La asíntotas verticales son: $x = -1$ y $x = 1$.

- Asíntotas horizontales: Son rectas de ecuación $y = b$, tales que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

La asíntota horizontal es $y = 1$ a izquierda y derecha. Se acerca a ella por arriba a izquierda y derecha.



- Asíntotas oblicuas:

No tiene asíntotas oblicuas.

La gráfica es la de la figura adjunta

4. **Halla el valor de los parámetros m y n para que la función f sea continua en todo \mathbb{R} .**

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ mx + n, & 1 < x < 3 \\ 4, & x \geq 3 \end{cases}$$

Solución:

Como es una función definida a trozos en \mathbb{R} y las ramas son constantes o polinómicas, será una función continua salvo en los puntos de solapamiento.

- En $x = 1$, debemos igualar los límites laterales en dicho punto:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (mx + n) = m+n$$

Igualando valores obtenemos:

$$m+n = 2.$$

- En $x = 3$, debemos igualar los límites laterales en dicho punto:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (mx + n) = 3m+n$$

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4$$

Igualando valores obtenemos:

$$3m+n = 4$$

Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} m + n = 2 \\ 3m + n = 4 \end{cases}$$

que resolvemos por reducción restando a la 2ª ecuación la 1ª:

$$2m = 2 \Rightarrow m = 1$$

sustituyendo en 1ª ecuación:

$$1+n = 2 \Rightarrow n = 1$$

5. **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 4} - \sqrt{n^2 - 3n})$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n-2}$

Solución:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 4} - \sqrt{n^2 - 3n}) = \infty - \infty$

Es una indeterminación del tipo $(\infty - \infty)$, que resolvemos multiplicando y dividiendo por la conjugada de la expresión dada, sustituyendo el polinomio por el monomio de mayor grado y

simplificando el resultado obtenido:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 4} - \sqrt{n^2 - 3n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 4} - \sqrt{n^2 - 3n}) \cdot (\sqrt{n^2 - 4} + \sqrt{n^2 - 3n})}{\sqrt{n^2 - 4} + \sqrt{n^2 - 3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 4 - n^2 + 3n}{\sqrt{n^2 - 4} + \sqrt{n^2 - 3n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 4}{\sqrt{n^2 - 4} + \sqrt{n^2 - 3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2 + n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

b) Es una indeterminación del tipo (1^∞) que resolvemos aplicando la fórmula $L = e^\lambda$ con:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - 1] \cdot g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+3} - 1\right) \cdot (n - 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n-2} = e^1 = e$$

6. **Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ en el punto $P(-1, 2)$. ¿Cuál es la ecuación de la recta normal? El valor de la pendiente lo hallarás aplicando la definición de la derivada.**

Solución:

- Utilizando la definición de derivada calculamos el límite $x_0 = -1$:

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-1+h)^2 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 - 4h + 2 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 - 4h}{h} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Indeterminación que resolvemos descomponiendo factorialmente y eliminando factores obtenemos la derivada:

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2h - 4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2h - 4) = -4$$

- Hallamos el valor de la función en el punto $x_0 = -1$:
 $f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 = 2$
- Sustituimos valores en la ecuación de la recta tangente:
 $y - 2 = -4(x - 1) \Rightarrow y = -4x + 2$
- La ecuación de la recta normal será:
 $y - 2 = \frac{1}{4}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$

7. **Halla las derivadas de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = x \cdot \sqrt{2x^3 + 1}$ b) $g(x) = \frac{x^4}{x-1}$

Solución:

a) Aplicamos las reglas de derivación de las raíces cuadradas, potenciales y los productos:

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x^3 + 1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x^3 + 1}} \cdot 6x^2 = \sqrt{2x^3 + 1} + \frac{3x^3}{\sqrt{2x^3 + 1}} = \frac{2x^3 + 1}{\sqrt{2x^3 + 1}} + \frac{3x^3}{\sqrt{2x^3 + 1}} = \frac{5x^3 + 1}{\sqrt{2x^3 + 1}}$$

Racionalizando la función obtenida:

$$f'(x) = \frac{(5x^3 + 1) \cdot \sqrt{2x^3 + 1}}{2x^3 + 1}$$

b) Hallamos la derivada aplicando las reglas de derivación de las funciones potenciales y del cociente de dos funciones y simplificamos la función obtenida:

$$g'(x) = \frac{4x^3 \cdot (x-1) - x^4 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{4x^4 - 4x^3 - x^4}{(x-1)^2} = \frac{3x^4 - 4x^3}{(x-1)^2}$$

8. **Halla las derivadas de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = (5x^2 \sin x) + (x \cdot \cos x)$ b) $g(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

Solución:

a) Hallamos la derivada aplicando las reglas de derivación de las funciones trigonométricas y potenciales y sacamos factor común de la función obtenida:

$$f'(x) = (5 \cdot 2x \cdot \operatorname{sen}x + 5x^2 \cdot \operatorname{cos}x) + (1 \cdot \operatorname{cos}x + x \cdot (-\operatorname{sen}x)) = \\ = 10x \operatorname{sen}x + 5x^2 \cdot \operatorname{cos}x + \operatorname{cos}x - x \operatorname{sen}x = 9x \operatorname{sen}x + (5x^2 - 1) \operatorname{cos}x$$

b) Aplicamos las reglas de derivación de logaritmos, cocientes y la regla de la cadena:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2}$$

Hallamos el común denominador y sumamos las fracciones obtenidas:

$$g'(x) = \frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

9. Si la función $f(x) = x^3 + ax + b$ tiene un mínimo en el punto (1, 5), determina los valores de a y b. ¿Tiene algún otro máximo o mínimo esta función?

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 + a \text{ Si la función tiene un mínimo en } x = 1:$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

Como el punto (1, 5) pertenece a la gráfica de la función $f(x)$, se verifica que:

$$f(1) = 5$$

Al ser $f(x) = x^3 - 3x + b$, se tiene que:

$$1 - 3 + b = 5 \Rightarrow b = 7$$

Por lo tanto, la expresión de la función es:

$$f(x) = x^3 - 3x + 7$$

hallemos si tiene algún otro máximo o mínimo:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(-1) = -6 < 0$$

En $x = -1$ tiene un máximo.

10. El área de un rectángulo es de 100 cm^2 . Si queremos que tenga el menor perímetro posible, ¿cuáles son sus dimensiones?

Solución:

Si tomamos las dimensiones del rectángulo como x e y , de la expresión del área despejamos:

$$x \cdot y = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{x}$$

El perímetro será:

$$P(x, y) = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \frac{100}{x} \Rightarrow P(x) = 2x + \frac{200}{x}$$

Derivamos y calculamos el valor en que se anula dicha derivada:

$$P'(x) = 2 - \frac{200}{x^2}$$

$$2 - \frac{200}{x^2} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{200}{x^2} \Rightarrow 2x^2 = 200 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10$$

El valor $x = -10$ no tiene sentido. Calculemos la segunda derivada y veamos su valor para $x = 10$:

$$P''(x) = \frac{400}{x^3}$$

$f''(10) > 0 \Rightarrow$ En $x = 10$ tiene un mínimo.

Las dimensiones del rectángulo son $x = 10 \text{ cm}$, $y = 10 \text{ cm}$. Es un cuadrado de 10 cm de lado.