DEPARTAMENTO DE FUNDAMENTOS DE ECONOMÍA E HISTORIA ECONÓMICA
Análisis Matemático I EXAMEN FINAL

APELLIDOS: ____

NOMBRE: ________________________ D.N.I.___________________ GRUPO: A B C

CUESTIONARIO DE RESPUESTA MÚLTIPLE (50%)

- La función $y = 2\sqrt{\frac{2}{x} - 1}$:
  a) Tiene una asíntota horizontal.
  b) Es decreciente en todo su dominio.
  c) Ninguna de las anteriores.

- La función $f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$ tiene:
  a) Una asíntota vertical y una discontinuidad evitable.
  b) Dos asíntotas verticales.
  c) Ninguna de las anteriores.

- La función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ es derivable en x = 2 si:
  a) $b = -2a$
  b) Sólo si $a = -2$ y $b = 4$
  c) Ninguna de las anteriores.

- La función $f(x) = \frac{senx}{2 - \cos x}$ tiene:
  a) Un mínimo en x = $\pi/3$.
  b) Un máximo en x = $\pi/2$.
  c) Ninguna de las anteriores.

- La función $f(x) = ax^2 + \frac{1}{x}$ tiene un punto de inflexión en x = 2 si:
  a) $a = -1/8$. b) $a = -8$
  c) Nunca tiene puntos de inflexión.

- La integral $\int_1^\infty e^{-x}dx$:
  a) Converge a e^1
  b) Converge a e^{-1}
  c) Es divergente

- La función $f(x) = e^x + 2x$ corta al eje OX:
  a) Sólo una vez.
  b) Dos veces.
  c) No corta al eje OX.

- La serie $8 + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \ldots$:
  a) Es divergente.
  b) Su suma es $\frac{64}{7}$.
  c) Ninguna de las anteriores.

- La ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3 + 3x^2$ en su punto de inflexión es:
  a) y = 3x + 1
  b) y = –3x – 1
  c) Ninguna de las anteriores

- Los infinitésimos en x = 3, $f(x) = x^2 - p^2$ y $g(x) = x^2 + (1-p)x - p$, son del mismo orden:
  a) Si p = –3
  b) Si p = 1
  c) Ninguna de las anteriores.

PROBLEMAS:

1. Se considera la función $f(x) = xe^x$. Se pide:
  a) Sus asíntotas. (0,5 p)
  b) Sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento; máximos, mínimos y puntos de inflexión. (0,75 p)
  c) Representar su gráfica. (0,5 p)
  d) El área encerrada entre la curva de la función y el eje OX, en el intervalo [–2, 0]. (1 p)

2. (1 p) Hallar el polinomio de Taylor de grado 4, en el origen, de la función $f(x) = \cos x$. Utilizar dicho polinomio para calcular cos0,1. ¿Puede asegurarse que el error cometido es menor que 10^{-6}?

3. Calcular las integrales:
  a) $\int \frac{x-4}{(x+1)(x-2)}dx$ (0,75 puntos)
  b) $\int \sqrt{x}(x^2+1)dx$ (0,5 puntos)

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ DE HENARES
DEPARTAMENTO DE FUNDAMENTOS DE ECONOMÍA E HISTORIA ECONÓMICA
EXAMEN DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I **febrero-04**

1. La función $y = 2\sqrt{\frac{2}{x} - 1}$:

a) Tiene una asíntota horizontal
b) **Es decreciente en todo su dominio.**
c) Ninguna de las anteriores

1. Dominio de definición: intervalo (0, 2].

- Crecimiento y decrecimiento.

$$y = 2\sqrt{\frac{2}{x} - 1} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x} - 1}}$$

Como la derivada es siempre negativa, la función es decreciente en todo su dominio

2. La función $f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$ tiene:

a) **Una asíntota vertical y una discontinuidad evitable.**
b) Dos asíntotas verticales.
c) Ninguna de las anteriores.

2. a) La función es discontinua cuando $1 - x^6 = 0 \Rightarrow$ x = –1 o x = 1.
La discontinuidad puede evitarse si existe límite.

En x = –1, como $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0}\right] = \infty$, la función tiene una asíntota vertical: x = –1.

En x = 1, como

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{(L'H)}{=} \lim_{x \to 1} \frac{5x^4 - 8x^7}{-6x^5} = \frac{5 - 8}{-6} = \frac{1}{2}$$

la discontinuidad puede evitarse, definiendo $f(1) = \frac{1}{2}$

3. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ es derivable en x = 2 si:

a) $b = -2a$
b) Sólo si $a = -2$ y $b = 4$
c) Ninguna de las anteriores.

3. Continuidad.

Si x $\to 2^-$, $f(x) \to 4 + 2a + b$
Si x $\to 2^+$, $f(x) \to 4$ $\quad \Rightarrow 4 + 2a + b = 4 \Rightarrow 2a + b = 0$

Derivabilidad.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Si x $\to 2^-$, $f'(x) \to 4 + a$
Si x $\to 2^+$, $f'(x) \to 2$ $\qquad \Rightarrow 4 + a = 2 \Rightarrow a = -2 \qquad \Rightarrow b = 4$

4. La función $f(x) = \dfrac{senx}{2-\cos x}$ tiene:

a) Un mínimo en x = π/3.
b) Un máximo en x = π/2.
c) Ninguna de las anteriores.

4. Hacemos su derivada: $f'(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{(2-\cos x)^2}$

Se anula en x = π/3 y en x = 5π/3.

Derivada segunda: $f''(x) = \dfrac{-2senx(1+\cos x)}{(2-\cos x)^3}$

Como $f''(\pi/3) < 0$, en x = π/3 se da un máximo.

Como $f''(5\pi/3) > 0$, en x = 5π/3 se da un mínimo.

5. La función $f(x) = ax^2 + \dfrac{1}{x}$ tiene un punto de inflexión en x = 2 si:

a) $a = -1/8$.
b) $a = -8$
c) Nunca tiene puntos de inflexión.

5. $f(x) = ax^2 + \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 2ax - \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = 2a + \dfrac{2}{x^3}$

Para que se tenga un punto de inflexión en x = 2 debe cumplirse que $f''(2) = 2a + \dfrac{1}{4} = 0 \Rightarrow$

$a = -\dfrac{1}{8}$

La función será $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{x}$

6. La integral $\int_1^{\infty} e^{-x}dx$:

a) Converge a e^1
b) Converge a e^{-1}
c) Es divergente

6. $\int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(-e^{-t} - (-e^{-1})\right) = e^{-1}$

7. La función $f(x) = e^x + 2x$ corta al eje OX:

a) Sólo una vez.
b) Dos veces.

c) No corta al eje OX.

7. $f(x) = e^x + 2x \;\Rightarrow\; f'(x) = e^x + 2 > 0$, luego es siempre creciente.
Como $f(-1) = e^{-1} - 2 < 0$ y $f(0) = 1$, la función corta una sola vez.

8. La serie $8 + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \ldots$:

a) Es divergente.

b) Su suma es $\frac{64}{7}$.

c) Ninguna de las anteriores.

8. Es una serie geométrica de razón 1/8, luego: $8 + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \ldots = \dfrac{8}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{64}{7}$

9. La ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3 + 3x^2$ en su punto de inflexión es:

a) y = 3x + 1

b) y = –3x – 1

c) Ninguna de las anteriores

9. $f(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x \;\Rightarrow\; f''(x) = 6x + 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = -1$
La tangente es: y – f(–1) = f´(–1)(x – 1) $\Rightarrow$ y – 2 = –3(x + 1) = –3x – 1

10. Los infinitésimos en x = 3, $f(x) = x^2 - p^2$ y $g(x) = x^2 + (1-p)x - p$, son del mismo orden:

a) Si p = –3

b) Si p = 1

c) Ninguna de las anteriores.

10. f(x) y g(x) son infinitésimos en x = 3 si f(x) $\to$ 0 y g(x) $\to$ 0 cuando x $\to$ 3 $\Rightarrow$

$9 - p^2 = 0 \;\Rightarrow\; p = -3$ o $p = 3$

$9 + (1 - p)3 - p = 0 \;\Rightarrow\; p = 3$

Por tanto, p = 3

Problema 1.

Se considera la función $f(x) = xe^x$. Se pide:

a) Sus asíntotas. (0,5 p)
b) Sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento; máximos, mínimos y puntos de inflexión. (0,75 p)
c) Representar su gráfica. (0,5 p)
d) El área encerrada entre la curva de la función y el eje OX, en el intervalo [–2, 0]. (1 p)

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [(-\infty)\cdot 0] \to$ Lo haremos por L´Hôpital.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right] = (L´H) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \left[\frac{1}{-\infty}\right] = 0$$

$\Rightarrow$ y = 0 es una asíntota horizontal (hacia menos infinito)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^x = [\infty\cdot\infty] = \infty$$

b) $f(x) = xe^x \;\Rightarrow\; f´(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x \;\Rightarrow\; f´(x) = e^x + e^x + xe^x = (2+x)e^x$

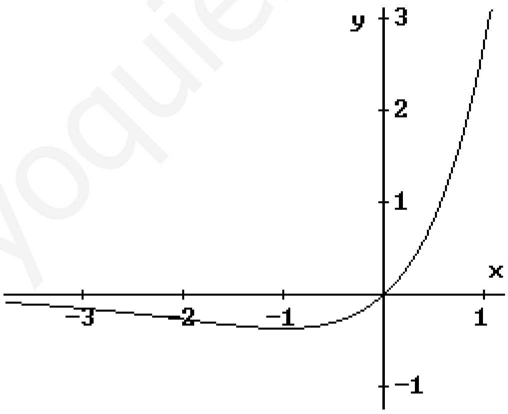
La derivada se anula en x = –1.

- Si x < –1, $f´$(x) < 0 $\Rightarrow$ f(x) decrece.
- Si x > –1, $f´$(x) > 0 $\Rightarrow$ f(x) crece.

La función decrece desde –∞ hasta –1; es creciente desde –1 hasta +∞. En x = –1 hay un mínimo.

La derivada segunda se anula en x = 2 → P.I.

c) Su gráfica aproximada es la siguiente.



d) $A = -\int_{-2}^{0} xe^x dx$

La integral $\int xe^x dx$ la haremos por partes.

Tomando: u = x $\Rightarrow$ du = dx
e^x dx = dv $\Rightarrow$ v = e^x

Se tiene: $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$

Luego: $A = -\int_{-2}^{0} xe^x dx = -\left[xe^x - e^x\right]_{-2}^{0} = 1 - 3e^{-2}$

Problema 2 (1 punto)
Hallar el polinomio de Taylor de grado 4, en el origen, de la función $f(x) = \cos x$. Utilizar dicho polinomio para calcular cos 0,1. ¿Puede asegurarse que el error cometido es menor que 10^{-6}?

Solución:
f(x) = cos x;   f´(x) = –sen x;   f´´(x) = –cos x;   f´´´(x) = sen x; $f^{(4}(x)$ = cos x; $f^{(5}(x)$ = –sen x

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \qquad\qquad R(x) = \frac{1}{5!} f^{(5}(c)x^5$$

$$P(0{,}1) = 1 - \frac{0{,}1^2}{2} + \frac{0{,}1^4}{4!} = 0{,}9950041667\,; \qquad R(x) = \frac{1}{5!}10^{-5} f^{(5}(c) < 10^{-6}$$

Problema 3
Calcular:
a) $\int \frac{x-4}{(x+1)(x-2)}dx$ (0,75 puntos)
b) $\int \sqrt{x}(x^2+1)dx$ (0,5 puntos)

Solución:
a) $\frac{x-4}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)} \Rightarrow$

x – 4 = A(x – 2) + B(x + 1) $\to$ si x = 2: –2 = 3B $\Rightarrow$ B = –2/3
$\to$ si x = –1: –5 = –3A $\Rightarrow$ A = 5/3

$$\int \frac{x-4}{(x+1)(x-2)}dx = \int \frac{5/3}{x+1}dx - \int \frac{2/3}{x-2}dx = \frac{5}{3}\ln(x+1) - \frac{2}{3}\ln(x-2) + c$$

b) $\int \sqrt{x}(x^2+1)dx = \int (x^{5/2} + x^{1/2})dx = \frac{2}{7}x^{7/2} + \frac{3}{2}x^{3/2} + c$