DEPARTAMENTO DE FUNDAMENTOS DE ECONOMÍA E HISTORIA ECONÓMICA
Análisis Matemático I EXAMEN FINAL

APELLIDOS: ____

NOMBRE: ____________________ D.N.I.________________ GRUPO: A B C

CUESTIONARIO DE RESPUESTA MÚLTIPLE (50%)

- El área de la región plana limitada por la curva $y = \text{sen}^2 x \cos x$ y el eje OX en el intervalo $[0, \pi/2]$ vale:
  a) 1/3
  b) $1 - \pi/4$
  c) Ninguna de las anteriores

- La recta tangente a la curva $y = e^{px}$, en el punto de abscisa x = 1 pasa por el origen de coordenadas si:
  a) Si p > 0
  b) Sólo si p = 1
  c) Ninguna de las anteriores

- La función $f(x) = e^{-x} + px - 1$ tiene:
  a) Un mínimo si p > 1
  b) Un punto de inflexión si p = –1
  c) Ninguna de las anteriores

- El $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{sen(x-1)}{x^2 - 3x + 2}$ vale:
  a) 1 b) –1
  c) Ninguna de las anteriores

- La integral impropia $\int_0^{\pi/2} tagx dx$ es:
  a) Convergente
  b) Divergente
  c) Ninguna de las anteriores

- La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + p$ toma el valor $\sqrt{2}$ en algún punto del intervalo [1, 2]:
  a) Cualquiera que sea el valor de p.
  b) Si p = 5
  c) Ninguna de las anteriores

- La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 7x - 8}$ es discontinua en x = 1. Tal discontinuidad puede evitarse definiendo:
  a) $f(1) = 2/9$
  b) $f(1) = 1$
  c) Ninguna de las anteriores

- La función $g(x) = \begin{cases} ax(x+1) & \text{si } x \le 0 \\ x(x-1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es derivable en todo **R** si:
  a) $a = 1$
  b) $a = -1$
  c) Dicha función puede ser continua, pero nunca puede ser derivable en x = 0.

- La función $f(x) = \dfrac{\ln x^2}{x}$ tiene:
  a) Una asíntota vertical y otra horizontal
  b) Dos máximos
  c) Ninguna de las anteriores

- La función $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.
  a) Corta dos veces al eje OX
  b) Tiene un máximo en x = 1
  c) Tiene un punto de inflexión en x = 1

PROBLEMAS:

1 (20 p) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$, determinando sus intervalos de crecimiento, máximos, mínimos y asíntotas.

2. (10 p) Dada la función $f(x) = x + \ln(1+x)$:
  a) Hallar su polinomio de Taylor de tercer grado en x = 0.
  b) ¿Podría asegurase que el error máximo que se comete cuando se calcula $f(0,5)$ utilizando el polinomio anterior es inferior a 1/64?. Justifica la respuesta.

3. (20 p) Calcular las integrales:
  a) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x} dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$
  c) $\displaystyle\int \left(3x - e^{-x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ DE HENARES
DEPARTAMENTO DE FUNDAMENTOS DE ECONOMÍA E HISTORIA ECONÓMICA
EXAMEN DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I **Enero–03**

1. El área de la región plana limitada por la curva $y = \text{sen}^2 x \cos x$ y el eje OX en el intervalo $[0, \pi/2]$ vale:
   a) 1/3
   b) $1 - \pi/4$
   c) Ninguna de las anteriores

Solución:
Observamos que la función es positiva en el intervalo de estudio; entonces:

$$A = \int_0^{\pi/2} sen^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} sen^3 x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$

2. La recta tangente a la curva $y = e^{px}$, en el punto de abscisa x = 1 pasa por el origen de coordenadas si:
   a) Si p >0
   b) Sólo si p = 1
   c) Ninguna de las anteriores

Solución:
$y = e^{px} \rightarrow y' = pe^{px}$
En x = 1: $y(1) = e^p \rightarrow y'(1) = pe^p$
La tangente en ese punto es: $y - e^p = pe^p(x-1)$
Para que pase por (0, 0): $0 - e^P = pe^P(0-1) \Rightarrow (p-1)e^p = 0 \Rightarrow p = 1.$

3. La función $f(x) = e^{-x} + px - 1$ tiene:
   a) Un mínimo si p > 1
   b) Un punto de inflexión si p = –1
   c) Ninguna de las anteriores

Solución:
$f'(x) = -e^{-x} + p = 0 \Rightarrow e^{-x} = p \Rightarrow$ x = – ln p (posible máximo o mínimo)
$f''(x) = e^{-x} \rightarrow f''(-\ln p) = p$, que es > 0 si p > 1 $\Rightarrow$ Hay mínimo.

4. El $\lim\limits_{x\to 1} \frac{sen(x-1)}{x^2 - 3x + 2}$ vale:
   a) 1
   b) –1
   c) Ninguna de las anteriores

Solución:
Aplicando la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\cos(x-1)}{2x-3} = \frac{1}{-1} = -1$$

5. La integral impropia $\int_0^{\pi/2} tagx dx$ es:
   a) Convergente
   b) Divergente
   c) Ninguna de las anteriores

Solución:

$$\int_0^{\pi/2} tagxdx = \lim_{c\to(\pi/2)^-} \int_0^c tagxdx = \lim_{c\to(\pi/2)^-} \int_0^c \frac{senx}{\cos x} dx =$$

$$= \lim_{c\to\pi/2^-} (-\ln(\cos x))\Big|_{-8}^{c} = \lim_{c\to\pi/2^-} (-\ln\cos c + \ln\cos 0) = +\infty$$

6. La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + p$ toma el valor $\sqrt{2}$ en algún punto del intervalo [1, 2]:

a) Cualquiera que sea el valor de p.
b) Si p = 5
c) Ninguna de las anteriores

Solución:

Esta función es continua siempre; en particular en el intervalo [1, 2]; además:

$$f(1) = -2 + p \quad \text{y} \quad f(2) = -4 + p$$

Por el teorema de los valores intermedios, la función toma todos los valores comprendidos entre –2 + p y –4 + p.

Para que $-4 + p \le \sqrt{2} \le -2 + p$ debe cumplirse que $2 + \sqrt{2} \le p \le 4 + \sqrt{2}$.

El valor p = 5 está entre esos valores.

7. La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 7x - 8}$ es discontinua en x = 1. Tal discontinuidad puede evitarse definiendo:

a) $f(1) = 2/9$
b) $f(1) = 1$
c) Ninguna de las anteriores

Solución:

En x = 1 la discontinuidad es evitable, pues existe el límite:

$$\text{lím}_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 7x - 8} = \left[\frac{0}{0}\right] = \text{lím}_{x\to 1} \frac{2x}{2x + 7} = \frac{2}{9}$$

8. La función $g(x) = \begin{cases} ax(x+1) & \text{si } x \le 0 \\ x(x-1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es derivable en todo **R** si:

a) $a = 1$
b) $a = -1$
c) Dicha función puede ser continua, pero nunca puede ser derivable en x = 0.

Solución:

Es continua en x = 0, pues:

si $x \to 0^-$, $g(x) \to 0$; si $x \to 0^+$, $g(x) \to 0$

Para que sea derivable:

$$g'(x) = \begin{cases} 2ax + a & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 - 4x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

si $x \to 0^-$, $g'(x) \to a$ si $x \to 0^+$, $g'(x) \to 1 \Rightarrow a = 1$

9. La función $f(x) = \dfrac{\ln x^2}{x}$ tiene:

a) Una asíntota vertical y otra horizontal
b) Dos máximos
c) Ninguna de las anteriores

Solución:

$\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln x^2}{x} = \infty \to$ x = 0 es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2/x}{1} = 0$$ $\to$ y = 0 es una asíntota horizontal.

10. La función $f(x) = x - \ln(x^2+1)$.
   a) Corta dos veces al eje OX
   b) Tiene un máximo en x = 1
   c) Tiene un punto de inflexión en x = 1

Solución:

i) $f(x) = x - \ln(x^2+1) \to f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1} \to f''(x) = \dfrac{2x^2-2}{x^2+1}$

Se tiene que $f'(1) = 0$ y $f''(1) = 0$. En x = 1 hay un punto de inflexión. (Para cerciorarse puede verse que la derivada segunda toma signos distintos a izquierda y derecha de x = 1).

PROBLEMAS

1. Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$, determinando sus intervalos de crecimiento, máximos, mínimos y asíntotas.

Solución:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1} = x - 3 + \frac{4}{x+1}$$

Luego:

x = –1 es una asíntota vertical.

y = x – 3 es una asíntota oblicua.

Nota: También se puede hacer con detalle, mediante límites.

(5 puntos)

Derivada: $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0$ en x = –3 y en x = 1

Si x < –3, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.

Si –3 < x < –1, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

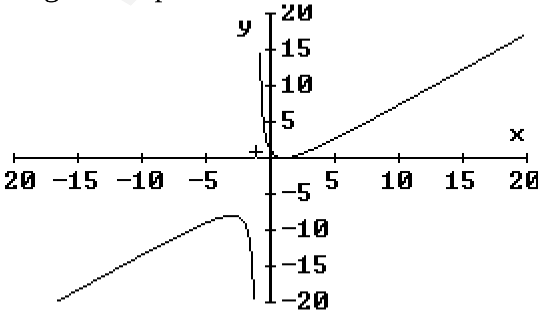
Si –1 < x < 1, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

Si x > 1, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.

Es obvio que en x = –3 hay un máximo y en x = 1 un mínimo. Puntos (–3, –8) y (1, 0).

(10 puntos)

La gráfica aproximada de la función es la dada a continuación.



(5 puntos)

2. Dada la función $f(x) = x + \ln(1+x)$:

a) Hallar su polinomio de Taylor de tercer grado en x = 0.

b) ¿Podría asegurase que el error máximo que se comete cuando se calcula *f*(0,5) utilizando el polinomio anterior es inferior a 1/64?. Justifica la respuesta.

Solución:

a) $f(x) = x + \ln(1+x) \to f'(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x} \to f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} \to f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$

f(0) = 0, $\quad f'(0) = 2,\quad f''(0) = -1,\quad f'''(0) = 2$

$$P(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 \Rightarrow P(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

b) $f^{(4}(x) = \dfrac{-6}{(1+x)^4} \to$ Cota de error < $\left|\dfrac{1}{4!}\cdot\dfrac{-6}{(1+h)^4}x^4\right|$, con 0 < h < x.

Para x = 0,5, $\left|\dfrac{1}{4!}\cdot\dfrac{-6}{(1+h)^4}x^4\right| = \dfrac{1}{4(1+h)^4}\dfrac{1}{2^4} < \dfrac{1}{64}$

3. Calcula las integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}dx$ $\qquad$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x-2}dx$ $\qquad$ c) $\displaystyle\int \left(3x - e^{-x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$

Solución:

a) La integral $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}dx = \int xe^{-x}dx$ se hace por partes.

Tomando: $\quad$ u = x $\Rightarrow$ du = dx

e^{-x} dx = dv $\Rightarrow$ v = $-e^{-x}$

Se tiene: $\displaystyle\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$

(7 puntos)

b) La integral $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x-2}dx$ se hace por descomposición en fracciones simples.

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

Luego: $1 = A(x+2) + B(x-1)$

si x = 1: $\quad$ 1 = 3A $\Rightarrow$ A = 2/3

si x = –2: $\quad$ 1 = –3B $\Rightarrow$ B = –1/3

Con esto:

$$\int \frac{1}{x^2+x-2}dx = \int \frac{2/3}{x-1}dx - \int \frac{1/3}{x+2}dx = \frac{2}{3}L(x-1) - \frac{1}{3}L(x+2) + c$$

(8 puntos)

c) $\displaystyle\int \left(3x - e^{-x} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{3x^2}{2} + e^{-x} - \frac{1}{x} + c$

(5 puntos)