DEPARTAMENTO DE FUNDAMENTOS DE ECONOMÍA E HISTORIA ECONÓMICA
Análisis Matemático I EXAMEN FINAL
APELLIDOS: ____

NOMBRE: ________________________ D.N.I.___________________

CUESTIONARIO DE RESPUESTA MÚLTIPLE (50%)
(Cada respuesta incorrecta resta 0,2 puntos)

- La función $f(x) = 2x + \sin(2x)$ cumple:

a) Tiene una asíntota oblicua.
b) Corta infinitas veces al eje *OX*.
c) Nunca es decreciente.

- La función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 3ax - 6}{x-3}, & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, donde $a \in \mathbf{R}$, es continua en $x = 3$ cuando:

a) $a = \dfrac{4}{3}$.
b) $a = -\dfrac{4}{3}$ o $a = 0$.
c) Es discontinua siempre, para cualquier valor de *a*.

- La recta $y = 2x - 2$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x + k}$ si:

a) $k > 2$.
b) $k = 1$.
c) Ninguna de las anteriores.

- El valor de $\int_1^a \dfrac{8}{x^3} dx = 3$:

a) Si $a = 2$.
b) Si $a = -2$
c) Para ambos valores de *a*; esto es, si $a = \pm 2$

- El valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{px + \cos x - e^{px}}{x^2} = -1$:

a) Si $p = 0$.
b) Si $p = -1$
c) Para cualquier valor de *p*.

- La función $f(x) = \dfrac{px}{x^2 + 1}$ cumple:

a) Corta 2 veces al eje *OX* si $p < 0$.
b) Tiene un máximo y un mínimo para cualquier valor de $p \neq 0$.
c) Ninguna de las anteriores.

- Dada la función $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$ y las rectas $r_1 : y = x + 2$ y $r_2 : y = 7x - 2$, entonces:

a) La primera de ellas, $r_1 : y = x + 2$, es tangente a la curva $y = f(x)$ en algún punto.
b) La segunda de ellas, $r_2 : y = 7x - 2$, es tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (1, 5).
c) Ninguna de las anteriores.

- La función $f(x) = x^3 + 2x - p$:

a) Corta al eje *OX* una, dos o tres veces, dependiendo del valor de *p*.
b) Solamente corta una vez al eje *OX*, sea cual sea el valor de *p*.
c) Ninguna de las anteriores.

- El valor de *x* que verifica el teorema del valor medio para $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en el intervalo (4, 8), es:

a) 6 b) $4\sqrt{2}$
c) Ninguna de las anteriores.

- La integral impropia $\int_0^4 \dfrac{1}{\sqrt{x}} dx$:

a) Converge a $2\sqrt{2}$
b) Converge a 4
c) Es divergente

PROBLEMAS:

1. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$.

a) Estudia el dominio de definición y calcula sus asíntotas. (0,6 puntos)
b) Determina los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad. (0,6 puntos)
c) Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión. (0,4 puntos)
d) Esboza la gráfica de la función. (0,4 puntos)

2. (1 punto) Para la función $f(x)=\ln(2x-1)$, halla el polinomio de Taylor de grado 3 en el punto $x = 1$. Demuestra que si se calcula $f(1{,}1)$ mediante ese polinomio, el error de estimación será menor que 0,0004.

3. Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$ (0,7 puntos) b) $\displaystyle\int x^2 \cdot e^{3x}\,dx$ (0,7 puntos)

c) $\displaystyle\int \frac{5x}{3+3x^2}\,dx$ (0,3 puntos) d) $\displaystyle\int \left(\sin 2x-\cos\frac{x}{3}\right)dx$ (0,3 puntos)

1. La función $f(x) = 2x + \sin(2x)$ cumple:

a) Tiene una asíntota oblicua.
b) Corta infinitas veces al eje *OX*.
c) Nunca es decreciente.

Solución:
Para determinar si tiene asíntota oblicua (la recta $y = mx + n$), se calcula:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sin 2x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(2 + \frac{\sin 2x}{x}\right) = 2 \quad \text{y}$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}(2x + \sin 2x - 2x) = \lim_{x\to\infty} \sin 2x \text{, que no existe.}$$

Luego, no tiene asíntota oblicua.

Derivando se tiene:

$$f(x) = 2x + \sin(2x) \Rightarrow f'(x) = 2 + 2\cos(2x) \geq 0, \text{ para todo } x.$$

En consecuencia, la función nunca es decreciente.
En particular, puede estudiarse lo que sucede en el intervalo $[0, \pi]$, ya que $\cos(2x)$ es periódica de período π.

$$2 + 2\cos(2x) = 0 \Rightarrow \cos(2x) = -1 \Rightarrow 2x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

- Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Por tanto, la función no tiene máximos ni mínimos. Siempre es creciente.

2. La función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 3ax - 6}{x-3}, & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, donde $a \in \mathbf{R}$, es continua en $x = 3$ cuando:

a) $a = \frac{4}{3}$**.**

b) $a = -\frac{4}{3}$ o $a = 0$.

c) Es discontinua siempre, para cualquier valor de *a*.

Solución:
La función está definida a trozos mediante otras dos funciones. La primera es continua en todos los puntos de su dominio, que es $x < 3$, aunque cuando $x \to 3^-$ presenta serias dificultades. La segunda es continua siempre.

Para asegurar la continuidad en el punto $x = 3$ hay que exigir que los límites laterales existan y que sean iguales. Esto es:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

Como $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}\left(x^2-1\right) = 8$, debe cumplirse que

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\frac{2x^2-3ax-6}{x-3} = 8$$

En consecuencia, el límite anterior debe ser, inicialmente, indeterminado en $x = 3$. Esto es:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x^2-3ax-6}{x-3} = \left[\frac{2\cdot 3^2-3a\cdot 3-6}{3-3} = \frac{12-9a}{0^-}\right]$$

La única indeterminación posible es la del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$; y, para ello, $12-9a=0 \Rightarrow a=\frac{4}{3}$.

Falta por ver que en este caso el límite vale 8.

En efecto, para $a=\frac{4}{3}$:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\frac{2x^2-4x-6}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{2(x-3)(x+1)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\left(2(x+1)\right) = 8$$

<u>Nota</u>:
También se puede hacer aplicando L¨Hôpital:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x^2-3ax-6}{x-3} = \left[\frac{0}{0}\right] = (\text{L¨H}) = \lim_{x\to 3^-}\frac{4x-3a}{1} = 12-3a$$

Como el límite debe valer 8, se deduce que:

$$12-3a=8 \Rightarrow a=\frac{4}{3}$$

3. La recta $y=2x-2$ es una asíntota oblicua de la función $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x+k}$ si:

a) $k > 2$.
b) $k = 1$.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:
La recta $y = mx+n$ es asíntota oblicua de la curva $f(x)$ cuando se cumple que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = m,\ m\neq 0 \text{ y } \infty$$
$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right),\ n\neq\infty$$

En este caso: $m = 2$ y $n = -2$. Por tanto debe cumplirse que:

- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x(x+k)} = 2$ → Este límite vale 2 para cualquier valor de k.

Basta ver que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x(x+k)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2+xk} = 2$

- $\underset{x\to\infty}{lím}(f(x)-mx)=\underset{x\to\infty}{lím}\left(\frac{2x^2+1}{x+k}-2x\right)=\underset{x\to\infty}{lím}\frac{1-2kx}{x+k}=-2$ → Para que este límite valga –2, el valor de k debe ser 1. En efecto, por L'Hôpital,

$$\underset{x\to\infty}{lím}\frac{1-2kx}{x+k}=\underset{x\leftrightarrow\infty}{lím}\frac{-2k}{1}-2\Rightarrow k=1.$$

Por tanto, la respuesta es b).

4. El valor de $\int_1^a \frac{8}{x^3}dx=3$:

a) **Si a = 2.**
b) Si a = –2
c) Para ambos valores de a; esto es, si a = ±2

Solución:
Una primitiva del integrando es inmediata. Basta con escribir:

$$\int\frac{8}{x^3}dx=\int 8x^{-3}dx\ =\ 8\cdot\frac{x^{-2}}{-2}=\frac{-4}{x^2}$$

Por tanto;

$$\int_1^a\frac{8}{x^3}dx=3\Leftrightarrow\ \left.\left(\frac{-4}{x^2}\right)\right|_1^a=-\frac{4}{a^2}-\left(-\frac{4}{1}\right)=3\Rightarrow-\frac{4}{a^2}+4=3\Rightarrow a=2.$$

Otra solución puede ser a = –2, aunque hay que descartarla, ya que la función $f(x)=\frac{8}{x^3}$ no es continua en el intervalo [–2, 1]. (Resultaría una integral impropia.)

5. El valor de $\lim_{x\to 0}\frac{px+\cos x-e^{px}}{x^2}=-1$:

a) Si p = 0.
b) Si p = –1
c) Para cualquier valor de p.

Solución:

- $\lim_{x\to 0}\frac{px+\cos x-e^{px}}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]$. Se aplica la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{px+\cos x-e^{px}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{p-\sin x-pe^{px}}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-p^2e^x}{2}=\frac{-1-p^2}{2}=-1$$

$\Rightarrow p=\pm1$. Luego, vale la respuesta b).

6. La función $f(x)=\frac{px}{x^2+1}$ cumple:

a) Corta 2 veces al eje OX si p <0.
b) Tiene un máximo y un mínimo para cualquier valor de $p\neq 0$.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:
Si $p < 0$, la función es negativa cuando $x > 0$, y positiva cuando $x < 0$. Por tanto, sólo corta una vez al eje: cuando $x = 0$.

Derivando: $f'(x) = \dfrac{p(x^2+1) - 2px^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{p - px^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{p(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

Los puntos singulares se dan en las soluciones de $f'(x) = 0$, que son $x = -1$ y $x = 1$, independientemente del valor de p.

Si $p > 0$, en $x = -1$ hay un mínimo, pues $f'(-1^-) < 0$ y $f'(-1^+) > 0$. De manera análoga, por $f'(1^-) > 0$ y $f'(1^+) < 0$, en $x = 1$ hay un máximo.
Si $p < 0$, en $x = -1$ hay un máximo y en $x = 1$ un mínimo. (El razonamiento es el mismo.)

- También puede hacerse la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{-px(x^2+1)^2 - 2(p - px^2)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{2px(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

Como $f''(-1) = \dfrac{p}{2}$ y $f''(1) = -\dfrac{p}{2}$, si $p > 0$, se tiene mínimo y máximo, respectivamente. Y si $p < 0$, sucede al revés.

7. Dada la función $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$ y las rectas $r_1 : y = x + 2$ y $r_2 : y = 7x - 2$, entonces:
a) La primera de ellas, $r_1 : y = x + 2$, es tangente a la curva $y = f(x)$ en algún punto.
b) La segunda de ellas, $r_2 : y = 7x - 2$, es tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (1, 5).
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:
a) La pendiente de la recta tangente a una curva, $y = f(x)$, en el punto (a, $f(a)$) viene dada por el valor de $f'(a)$. Por tanto, su ecuación será: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

En este caso, la pendiente de las rectas dadas vale 1 y 7, respectivamente. Luego, esas rectas serán tangente a $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$ si la derivada, $f'(x) = 6x^2 - 2x + 3$, toma alguno de esos valores.

- El valor 1 no puede tomarlo: $6x^2 - 2x + 3 = 1$ no tiene solución.
- La tangente a la curva dada en el punto de abscisa $x = 1$ es:
  $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

Como $f(1) = 5$ y $f'(1) = 7$, la ecuación queda: $y - 5 = 7(x - 1) \Leftrightarrow r_2 : y = 7x - 2$

8. La función $f(x) = x^3 + 2x - p$:
a) Corta al eje *OX* una, dos o tres veces, dependiendo del valor de *p*.
b) Solamente corta una vez al eje *OX*, sea cual sea el valor de *p*.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:
La función corta al menos una vez al eje *OX*. Para valores suficientemente grandes y negativos, $f(x) < 0$; y para valores grandes y positivos, $f(x) > 0$. Por tanto, por el teorema de Bolzano, corta al menos una vez al eje *OX*.
Como $f´(x) = 3x^2 + 2 > 0$ para todo x, la función es creciente siempre. Luego, sólo corta una vez, independientemente del valor que tome p.

9. El valor de x que verifica el teorema del valor medio para $f(x) = \frac{1}{x}$, en el intervalo (4, 8), es:
a) 6 **b)** $4\sqrt{2}$
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:
El teorema dice: Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f´(c)$$

La función es continua y derivable en el intervalo dado, luego se cumple que:

$$\frac{f(8) - f(4)}{8 - 4} = f´(c) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{4}}{4} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{-1}{32} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$$

10. La integral impropia $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$:
a) Converge a $2\sqrt{2}$ **b)** Converge a 4 c) Es divergente

Solución:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \to 0^+} \left(2\sqrt{x}\right)\Big|_c^4 = \lim_{c \to 0^+} \left(4 - 2\sqrt{c}\right) = 4$$

Problemas

1. Se considera la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

a) Estudia el dominio de definición y calcula sus asíntotas. (0,6 puntos)
b) Determina los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad. (0,6 puntos)
c) Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión. (0,4 puntos)
d) Esboza la gráfica de la función. (0,4 puntos)

Solución:
a) El dominio de la función es $\mathbf{R} - \{0\}$.

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical ya que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

Igualmente, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal pues

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x^2} = 0$$

Se ve fácilmente que $\lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x^2} = 0^-$ y que $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x^2} = 0^+$

b) Como $f'(x) = \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$, que vale 0 en $x = 2$, se tendrá:

- Si $x < 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $0 < x < 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $x > 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

En consecuencia, en $x = 2$ hay un máximo.

La derivada segunda es: $f''(x) = \frac{-x^3 - 3x^2(2-x)}{x^6} = \frac{2x-6}{x^4}$, que se anula en $x = 3$.

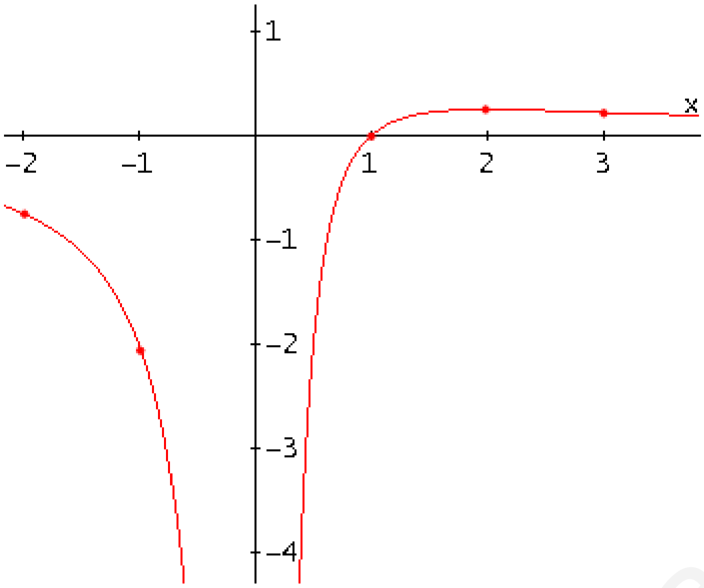
Luego:

- para $x < 0$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa ($\cap$).
- para $0 < x < 3$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa ($\cap$).
- para $x > 3$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava ($\cup$).

En consecuencia, la función tiene un punto de inflexión en $x = 3$.

c) Se tiene un máximo en $x = 2$; punto (2, 1/4).
Se tiene un punto de inflexión en $x = 3$; punto (3, 2/9).

c) Conociendo la posición de la curva respecto a las asíntotas, su máximo y punto de inflexión, y algunos otros puntos, por ejemplo: (–2, –3/4); (–1, –2); (1, 0)…, puede trazarse la siguiente curva.



2. (1 punto) Para la función $f(x)=\ln(2x-1)$, halla el polinomio de Taylor de grado 3 en el punto x = 1. Demuestra que si se calcula $f(1{,}1)$ mediante ese polinomio, el error de estimación será menor que 0,0004.

Sol.

$f(x)=\ln(2x-1)\Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{2x-1}\rightarrow f''(x)=\frac{-4}{(2x-1)^2}\rightarrow f'''(x)=\frac{16}{(2x-1)^3}\rightarrow f^{(4}(x)=\frac{-96}{(2x-1)^4}$$

$$\Rightarrow f(1)=0\rightarrow f'(1)=2\rightarrow f''(1)=-4\rightarrow f'''(1)=16\rightarrow f^{(4}(x_0)=\frac{-96}{(2x_0-1)^4}$$

Luego, $P(x)=2(x-1)-\frac{4}{2!}(x-1)^2+\frac{16}{3!}(x-1)^3$ $\rightarrow$ (hasta aquí, 0,6 puntos)

(Desarrollando se obtiene: $P(x)=\frac{8}{3}x^3-10x^2+14x-\frac{20}{3}$)

Por tanto: $f(x)=\ln(2x-1)=2(x-1)-\frac{4}{2!}(x-1)^2+\frac{16}{3!}(x-1)^3-\frac{96}{(2x_0-1)^3\cdot 4!}(x-1)^4$,

donde $\frac{-96}{(2x_0-1)^4}(x-1)^4$ es el resto (el error), con $x_0\in(1,x)$.

Para $f(1{,}1)=\ln 1{,}2$, el resto es $\frac{-96}{(2x_0-1)^4\cdot 4!}(1{,}1-1)^4$, con $x_0\in(1,\ 1{,}1)\Rightarrow$

$$\left|\frac{-96}{(2x_0-1)^4\cdot 24}(1{,}1-1)^4\right|<\left|\frac{-4}{1^4}\cdot 0{,}1^4\right|=0{,}0004$$

3. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{x^2-1}$ (0,7 puntos) b) $\int x^2 \cdot e^{3x} dx$ (0,7 puntos)

c) $\int \frac{5x}{3+3x^2} dx$ (0,3 puntos) d) $\int \left(\sin 2x - \cos \frac{x}{3} \right) dx$ (0,3 puntos)

Solución:

a) Hay que descomponer la función dada en fracciones simples.

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$

Luego:

$$1 = A(x+1) + B(x-1) \Rightarrow 1 = (A+B)x + A - B$$

Identificando coeficientes:

$$\begin{cases} 0 = A+B \\ 1 = A-B \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2};\ B = -\frac{1}{2}$$

Con esto:

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \frac{1/2}{x-1} dx - \int \frac{1/2}{x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x+1) + c$$

b) La integral $\int x^2 \cdot e^{3x} dx$ puede hacerse por partes.

Tomando: $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$

$dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x}$

Se tiene: $\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$

La segunda integral, $\int x e^{3x} dx$, también se hace por partes.

Tomando: $u' = x \Rightarrow du' = dx$

$dv' = e^{3x} dx \Rightarrow v' = \frac{1}{3} e^{3x}$

Se tiene: $\int x e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}$

Por tanto:

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} \right) + c =$$

$$= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + c$$

c) $\int \frac{5x}{3+3x^2} dx = \frac{5}{6} \int \frac{6x}{3+3x^2} dx = \frac{5}{6} \ln\left(3+3x^2\right) + c$

d) $\int \left(\sin 2x - \cos \frac{x}{3} \right) dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin 2x dx - 3 \int \frac{1}{3} \cos \frac{x}{3} dx = -\frac{1}{2} \cos 2x - 3 \sin \frac{x}{3} + c$