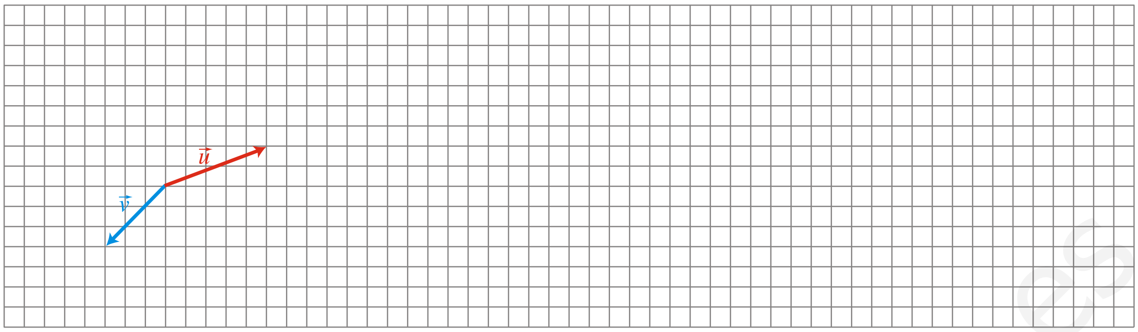
VECTORES

Ejercicio nº 1.-

a) Dibuja los vectores $\vec{u}-\vec{v}$, $-\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$ y $2\vec{u}+3\vec{v}$, siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los que muestra la figura:

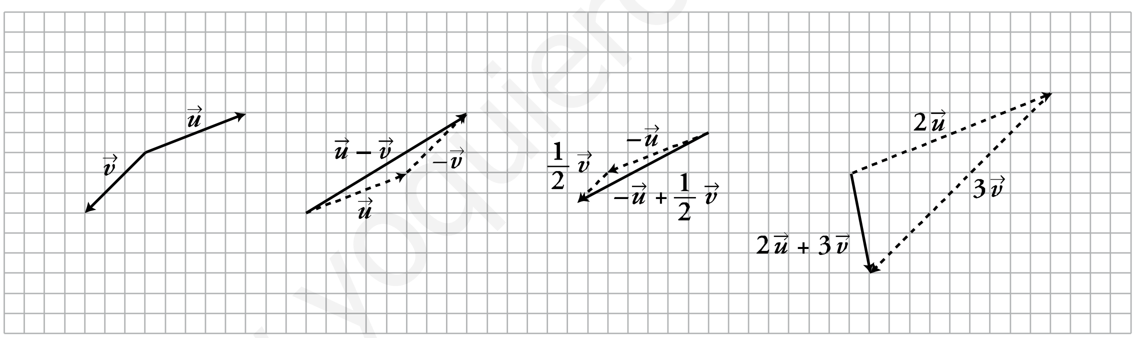


b) Dados los vectores $\vec{a}\left(\frac{2}{3},\ -1\right)$ y $\vec{b}\,(3,-2)$, obtén las coordenadas de:

$$-3\vec{a}+2\vec{b};\quad 2\vec{a}-\vec{b};\quad \vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$$

Solución:

a)



b) $-3\vec{a}+2\vec{b}=-3\left(\frac{2}{3},\ -1\right)+2(3,\ -2)=(-2,\ 3)+(6,\ -4)=(4,\ -1)$

$2\vec{a}-\vec{b}=2\left(\frac{2}{3},\ -1\right)-(3,\ -2)=\left(\frac{4}{3},\ -2\right)-(3,\ -2)=\left(\frac{-5}{3},\ 0\right)$

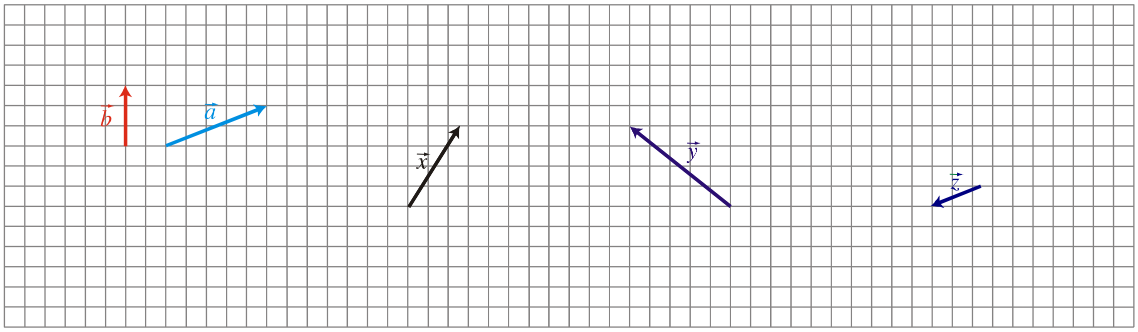
$\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}=\left(\frac{2}{3},\ -1\right)-\frac{1}{3}(3,\ -2)=\left(\frac{2}{3},\ -1\right)-\left(1,\ \frac{-2}{3}\right)=\left(\frac{-1}{3},\ \frac{-1}{3}\right)$

Ejercicio nº 2.-

a) Halla las coordenadas del vector $\vec{u}\,(-2,-3)$ con respecto a la base formada por los vectores $\vec{v}\left(2,-\frac{1}{3}\right)$ y $\vec{w}\,(1,-1)$

b) Expresa los vectores $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

www.yoquieroaprobar.es



Solución:

a) Hemos de hallar dos números, m y n, tales que:

$$\vec{u} = m \cdot \vec{v} + n \cdot \vec{w}, \text{ es decir:}$$

$$(-2,\ -3) = m \cdot \left(2,\ -\frac{1}{3}\right) + n \cdot (1,\ -1)$$

$$(-2,\ -3) = \left(2m,\ -\frac{m}{3}\right) + (n,\ -n)$$

$$(-2,\ -3) = \left(2m + n,\ -\frac{m}{3} - n\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} -2 = 2m + n \\ -3 = \dfrac{-m}{3} - n \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -2 = 2m + n \\ -9 = -m - 3n \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -2 - 2m = n \\ -9 = -m - 3(-2 - 2m) \end{array}\right\}$$

$$-9 = -m + 6 + 6m \quad \rightarrow \quad -9 - 6 = -m + 6m \quad \rightarrow \quad -15 = 5m \quad \rightarrow \quad m = -3$$

$$n = -2 - 2m = -2 + 6 = 4$$

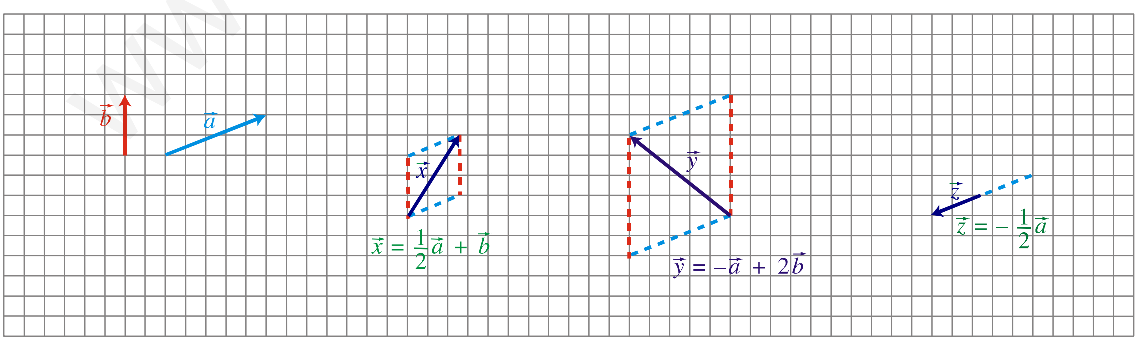
Por tanto:

$$\vec{u} = -3\vec{v} + 4\vec{w}, \text{ es decir:}$$

$$(-2,\ -3) = -3\left(2,\ -\frac{1}{3}\right) + 4(1,\ -1)$$

Las coordenadas de $\vec{u}$ con respecto a la base formada por $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son $(-3,\ 4)$.

b)



Ejercicio nº 3.-

a) Calcula m de modo que el producto escalar de $\vec{a}(3, -2)$ y $\vec{b}(m, 5)$ sea igual a 5.

b) Calcula la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{c}$, siendo $\vec{c}(1, -3)$.

www.yoquieroaprobar.es

Solución:

a) $\vec{a}\bullet\vec{b}=5 \;\rightarrow\; (3,-2)\bullet(m,5)=5 \;\rightarrow\; 3m+(-2)\cdot 5=5 \;\rightarrow\; 3m-10=5 \;\rightarrow\; 3m=15 \;\rightarrow\; m=5$

b) $proy_{\vec{c}}\left(\vec{a}\right)=\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{c}}{|\vec{c}|}=\dfrac{(3,-2)\bullet(1,-3)}{\sqrt{1+9}}=\dfrac{3\cdot 1+(-2)(-3)}{\sqrt{10}}=\dfrac{3+6}{\sqrt{10}}=\dfrac{9}{\sqrt{10}}=\dfrac{9\sqrt{10}}{10}$

Ejercicio nº 4.-

Si $\vec{a}\left(\dfrac{1}{4},-3\right|$ y $\vec{\ }(4,2)$, calcula:

a) Un vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{b}$.

b) El ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{\ }$.

Solución:

a) Hallamos el módulo de $\vec{b}$:

$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{4\;\;+2^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$

El vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{b}$ será:

$\left(\dfrac{4}{\sqrt{20}},\dfrac{2}{\sqrt{20}}\right)=\left(\dfrac{4}{2\sqrt{5}},\dfrac{2}{2\sqrt{5}}\right)\quad\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

b) $cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{\ }\right|}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{4},-3\;\;\bullet(4,2)\right.}{\sqrt{\dfrac{1}{16}+9}\cdot\sqrt{20}}=\dfrac{1-6}{\sqrt{\dfrac{145}{16}}\cdot\sqrt{20}}=\dfrac{-5}{\dfrac{\sqrt{145}}{4}\cdot 2\sqrt{5}}=\dfrac{-5}{\dfrac{\sqrt{5^2\cdot 29}}{2}}=$

$=\dfrac{-5}{\dfrac{5\sqrt{29}}{2}}=\dfrac{\quad}{\sqrt{29}}\approx -0{,}371 \;\rightarrow\; \left(\vec{a},\vec{b}\right)\approx 111{,}8^\circ$

Ejercicio nº 5.-

Dados los vectores $\vec{a}(1,x)$ y $\vec{b}\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{-}{\quad}\right.$:

a) Calcula x para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares.

b) Halla un vector unitario perpendicular a $\vec{b}$.

Solución:

a) Para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero:

$\vec{a}\bullet\vec{b}=0 \;\rightarrow\; (1,x)\bullet\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{-4}{5}\right.\;=0 \;\rightarrow\; \dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}x=0 \;\rightarrow\; 3-4x=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{3}{4}$

b) Un vector perpendicular a $\vec{b}$ es $\vec{c}(4,3)$ cuyo módulo es $|\vec{c}|=\sqrt{4^2+3\;\;}=\sqrt{25}=5$.

El vector $\left(\dfrac{4}{5},-\right.$ es un vector unitario perpendicular a $\vec{b}$.

www.yoquieroaprobar.es

<u>Ejercicio nº 6.-</u>

Dado el vector $\vec{a}(2,5)$ referido a una base ortonormal, ¿cómo son los vectores $\vec{\ }(5,-2)$, $2\vec{b}, 3\vec{b},...$ respecto de $\vec{a}$?
Busca otro vector $\vec{c}$ que cumpla la misma característica.

Solución:

$\vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a}$ ya que $\vec{a}\bullet\vec{b}=(2,5)\bullet(5,-2)=10-10=0.$
Del mismo modo, $2\vec{b}$, $3\vec{b}$,... son vectores perpendiculares a $\vec{a}$.
Un vector $\vec{c}$ que cumple la misma característica es $\vec{c}=5\vec{b}=(25,-10)$:
$\vec{a}\bullet\vec{c}=(2,5)\bullet(25,-10)=50-50=0$

Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|$ 6 y el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es de 60°. Halla $|\vec{a}+\vec{b}|$ y $|\vec{a}-\vec{b}|$.

Solución:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\bullet\vec{a}+2\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{b}=|\vec{a}|^2+\ \ \vec{a}\bullet\vec{b}+|\vec{b}|$$

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\,60°=2\cdot 6\cdot\frac{1}{2}=6$$

Luego:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=2\ \ +2\cdot 6+6^2=4+12+36=52\ \rightarrow\ |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{52}$$

Análogamente:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\bullet\vec{a}+2\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{b}=|\vec{a}|^2-\ \ \vec{a}\bullet\vec{b}+|\vec{b}|\ \ =$$

$$=2\ \ -2\cdot 6+6^2=4-12+36=28\ \rightarrow\ |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$$

www.yoquieroaprobar.es