Matemáticas I.
Bachillerato Internacional
Curso 2015-2016. Exámenes

1. Logaritmos y combinatoria (grupo W)

Ejercicio 1. *Calcular:*

(a) $\sqrt[3]{13+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt[3]{13-2\sqrt{11}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

Solución:

(a) $\sqrt[3]{13+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt[3]{13-2\sqrt{11}}=\sqrt[3]{169-44}=\sqrt[3]{125}=5$

(b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})-\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{15}-3-5-\sqrt{15}}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4$

Ejercicio 2. *Resolver la ecuación:*

$$3^x+\frac{1}{3^{x-1}}=4$$

Solución:

$$3^x+\frac{1}{3^{x-1}}=4$$

$$3^x+\frac{3}{3^x}=4$$

$$3^{2x}+3=4\cdot 3^x$$

$$3^{2x}-4\cdot 3^x+3=0$$

resolviendo esta ecuación de segundo grado en 3^x resulta:

$$3^x=1 \implies x=\log_3 1=0$$

$$3^x=3 \implies x=\log_3 3=1$$

Ejercicio 3. *Resolver el sistema:*

$$\begin{cases}2x-9y=1100\\ \log x-\log y=1\end{cases}$$

Solución:

La segunda ecuación equivale a:

$$\log x-\log y=1$$

$$\log\frac{x}{y}=1$$

$$\frac{x}{y}=10$$

Tenemos entonces el sistema:

$$\begin{cases}2x-9y=1100\\ \frac{x}{y}=10\end{cases}$$

Resolviendo este sistema resulta $x = 100$, $y = 1000$.

Ejercicio 4. *Con las cifras* 3, 4, 5, 8 *y* 9*:*

(a) *¿Cuántos números de* 3 *cifras diferentes pueden formarse?*

(b) *¿Cuántos son mayores de* 500*?*

Solución:

(a) $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

(b) Son mayores que 500 los que empiezan por 5, por 8 o por 9. Hay 12 que empiezan por 5, 12 que empiezan por 8 y 12 que empiezan por 9. En total hay 36 números que son mayores que 500.

Ejercicio 5.

(a) *¿De cuántas maneras pueden sentarse 10 estudiantes en una fila?*

(b) *¿De cuántas si tres de ellos A, B y C deben sentarse juntos?*

Solución:

(a) $10! = 3628800$

(b) Hay 8 posiciones en que pueden estar juntos los tres estudiantes. En cada una de estas posiciones se pueden sentar de $3! = 6$ maneras. Los otros 7 estudiantes se pueden sentar de $7!$ maneras. En total, aplicando la regla del producto, tenemos que:

$$8 \cdot 6 \cdot 7! = 241920$$

Ejercicio 6. *Con las 27 letras del alfabeto:*

(a) *¿Cuántas palabras de 4 letras distintas se pueden formar?*

(b) *¿Cuántas empiezan y terminan con vocal?*

Solución:

(a) $V_{27,4} = 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 = 421200$

(b) Las dos letras de comienzo y fin de la palabra se pueden seleccionar de $V_{5,2}$ maneras (dos de cinco vocales). Las dos letras restantes se pueden elegir de $V_{25,2}$ maneras. En total, aplicando la regla del producto:

$$V_{5,2} \cdot V_{25,2} = 5 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 24 = 12000$$

Ejercicio 7. *Con las letras de la palabra MARTES, cuántas palabras de 4 letras pueden formarse si:*

(*a*) *Debe contener al menos una vocal.*

(*b*) *Debe contener las dos vocales en posiciones separadas.*

Solución:

(*a*) En total se pueden formar $V_{6,4}$ palabras. Las que no contienen vocales son $V_{4,4}$ de ellas. Las palabras que contienen alguna vocal son:

$$V_{6,4} - V_{4,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 4! = 360 - 24 = 336$$

(*b*) Hay tres posiciones para las vocales separadas (primera y tercera, primera y cuarta y segunda y cuarta). Para cada una de ellas, las dos vocales pueden estar de dos maneras diferentes. Para las dos posiciones restantes, las consonantes pueden situarse de $V_{4,2} = 12$ maneras. En total

$$3 \cdot 2 \cdot 12 = 72$$

Ejercicio 8. *En un juego se reparten simultáneamente* 5 *cartas (de una baraja de* 40*) a un jugador:*

(*a*) *¿De cuántas maneras pueden repartirse las cartas?*

(*b*) *¿De cuántas si sabemos que* 2 *son de oros y* 3 *de copas?*

Solución:

(*a*) $C_{40,5} = 658008$

(*b*) Las dos de oros pueden elegirse de $C_{10,2} = 45$ maneras y las tres de copas de $C_{10,3} = 120$ maneras. En total:

$$45 \cdot 120 = 5400$$

Ejercicio 9. *Calcular el coeficiente de x^3 en el desarrollo*

$$\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^{12}$$

Solución:

Un término genérico del desarrollo tiene la forma:

$$\binom{12}{n} \left(x^2\right)^n \left(-\frac{1}{2x}\right)^{12-n}$$

Si el exponente de x es 3:

$$2n - (12 - n) = 3 \quad \Longrightarrow \quad n = 5$$

El término correspondiente a $n = 5$ es

$$\binom{12}{5} \left(x^2\right)^5 \left(-\frac{1}{2x}\right)^7 = -\binom{12}{5} x^{10} \, \frac{1}{2^7 x^7} = -\binom{12}{5} \frac{1}{2^7} \, x^3$$

El coeficiente que nos piden es:

$$-\binom{12}{5} \frac{1}{2^7} = -\frac{792}{128} = -\frac{99}{16}$$

Ejercicio 10. *Calcular el coeficiente de x^5 en*

$$(2x+3)(x-2)^6$$

Solución:

El término que buscamos es:

$$2x\cdot\binom{6}{4}x^4(-2)^2+3\cdot\binom{6}{5}x^5(-2)^1=2\cdot 15\cdot 4\,x^5-3\cdot 6\cdot 2\cdot x^5=84x^5$$

El coeficiente es 84.

---

2. Logaritmos y combinatoria (grupo Z)

Ejercicio 1. *Calcular:*

(a) $4\sqrt{\dfrac{2}{3}}+3\sqrt{\dfrac{3}{2}}+2\sqrt{6}-\sqrt{150}$ $\qquad$ (b) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}4\sqrt{\frac{2}{3}}+3\sqrt{\frac{3}{2}}+2\sqrt{6}-\sqrt{150}&=4\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+2\sqrt{6}-5\sqrt{6}\\&=4\frac{\sqrt{6}}{3}+3\frac{\sqrt{6}}{2}-3\sqrt{6}\\&=\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-3\right)\sqrt{6}\\&=-\frac{1}{6}\sqrt{6}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}&=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{2-1}\\&=2+2\sqrt{2}+1-(2-2\sqrt{2}+1)\\&=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

Ejercicio 2. *Resolver la ecuación:*

$$2^{x-1}+\frac{1}{2^{x-3}}=5$$

Solución:

La ecuación puede escribirse:

$$\frac{2^x}{2}+\frac{8}{2^x}=5$$

Quitando denominadores resulta:

$$2^{2x} + 16 = 10 \cdot 2^x \quad \Longrightarrow \quad 2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$$

Es una ecuación de segundo grado en la incógnita 2^x. Las soluciones son:

$$2^x = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

$$2^x = 8 \quad \Longrightarrow \quad x = 3$$

Ejercicio 3. *Resolver el sistema:*

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$$

Solución:

La segunda ecuación es equivalente a:

$$\log(xy) = \log 10 \quad \Longrightarrow \quad xy = 10$$

El sistema puede escribirse:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ xy = 10 \end{cases}$$

Resolviendo por sustitución obtenemos las soluciones $(5, 2)$ y $(-2, -5)$. La segunda no es válida pues no existen logaritmos de números negativos.

Ejercicio 4. *En un juego se reparten simultáneamente* 5 *cartas (de una baraja de* 40*) a un jugador:*

(*a*) *¿De cuántas maneras pueden repartirse las cartas?*

(*b*) *¿De cuántas si sabemos que exactamente* 2 *son de oros?*

Solución:

(*a*) $C_{40,5} = 658008$

(*b*) Las dos cartas de oros pueden elegirse de $C_{10,2}$ y las tres que no son de oros de $C_{30,3}$ maneras. Aplicando la regla del producto:

$$C_{10,2} \cdot C_{30,3} = 182700$$

Ejercicio 5. *Con las cifras* 3, 4, 5, 8 *y* 9*:*

(*a*) *¿Cuántos números de* 4 *cifras diferentes pueden formarse?*

(*b*) *¿Cuántos son menores de* 4000*?*

Solución:

(*a*) $V_{5,4} = 120$

(*b*) Son menores que 4000 los que empiezan por 3, o sea $V_{4,3} = 24$.

Ejercicio 6.

(*a*) *¿De cuántas maneras pueden sentarse 10 estudiantes en una fila?*

(*b*) *¿De cuántas si dos de ellos A y B deben sentarse juntos?*

Solución:

(*a*) $10! = 3628800$

(*b*) Hay 9 posiciones en que pueden estar juntos los dos estudiantes. En cada una de estas posiciones se pueden sentar de 2 maneras. Los otros 8 estudiantes se pueden sentar de 8! maneras. En total, aplicando la regla del producto, tenemos que:

$$9 \cdot 2 \cdot 8! = 725760$$

Ejercicio 7. *Con las 27 letras del alfabeto:*

(*a*) *¿Cuántas palabras de 4 letras distintas se pueden formar?*

(*b*) *¿Cuántas empiezan y terminan con consonante?*

Solución:

(*a*) $V_{27,4} = 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 = 421200$

(*b*) Las dos letras de comienzo y fin de la palabra se pueden seleccionar de $V_{22,2}$ maneras (2 de 22 consonantes). Las dos letras restantes se pueden elegir de $V_{25,2}$ maneras. En total, aplicando la regla del producto:

$$V_{22,2} \cdot V_{25,2} = 22 \cdot 21 \cdot 25 \cdot 24 = 277200$$

Ejercicio 8. *Con las letras de la palabra TEMBLOR, cuántas palabras de 4 letras pueden formarse si:*

(*a*) *Debe contener al menos una vocal.*

(*b*) *Debe contener las dos vocales en posiciones separadas.*

Solución:

(*a*) El número total de palabras es $V_{7,4}$. De ellas hay $V_{5,4}$ que no contienen vocales. Las que contienen alguna vocal son:

$$V_{7,4} - V_{5,4} = 840 - 120 = 720$$

(*b*) Hay tres posiciones para las vocales separadas (primera y tercera, primera y cuarta y segunda y cuarta). Para cada una de ellas, las dos vocales pueden estar de dos maneras diferentes. Para las dos posiciones restantes, las consonantes pueden situarse de $V_{5,2} = 20$ maneras. En total

$$3 \cdot 2 \cdot 20 = 120$$

Ejercicio 9. *Calcular el coeficiente de x^4 en el desarrollo*

$$\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^{11}$$

Solución:

Un término genérico del desarrollo tiene la forma:

$$\binom{11}{n}\left(x^2\right)^n\left(-\frac{1}{2x}\right)^{11-n}$$

Si el exponente de x es 4:

$$2n-(11-n)=4 \quad\Longrightarrow\quad n=5$$

El término correspondiente a $n=5$ es

$$\binom{11}{5}\left(x^2\right)^5\left(-\frac{1}{2x}\right)^{6} = \binom{11}{5}x^{10}\,\frac{1}{2^6x^6} = \binom{11}{5}\frac{1}{2^6}\,x^4$$

El coeficiente que nos piden es:

$$\binom{11}{5}\frac{1}{2^6} = \frac{462}{64} = \frac{231}{32}$$

Ejercicio 10. *Calcular el coeficiente de x^4 en*

$$(2x+3)(x-2)^6$$

Solución:

El término que buscamos es:

$$2x\cdot\binom{6}{3}x^3(-2)^3 + 3\cdot\binom{6}{4}x^4(-2)^2 = 2\cdot 20\cdot(-8)\,x^4 + 3\cdot 15\cdot 4x^4 = -140x^4$$

El coeficiente es -140.

---

3. Combinatoria. Inducción. Ecuaciones. (Grupo Z).

Ejercicio 1. *Demostrar que* $4^n + 2$ *es múltiplo de* 3 *para* $n \geq 0$.

Solución:

- ⋄ La propiedad se cumple para $n = 0$ puesto que $4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$ es múltiplo de 3.
- ⋄ Demostraremos que si se cumple para un valor h, es decir, si se cumple:

  $$4^h + 2 = \dot{3}$$

  entonces, también se cumple para $h + 1$, es decir demostraremos que

  $$4^{h+1} + 2 = \dot{3}$$

  En efecto:

  $$4^{h+1} + 2 = 4 \cdot 4^h + 2 = 4 \cdot (\dot{3} - 2) + 2 = \dot{3} - 8 + 2 = \dot{3} - 6 = \dot{3}$$

- ⋄ Como consecuencia de los apartados anteriores, la propiedad se cumple para $n \geq 0$.

Ejercicio 2. *Demostrar que si* n *es un entero positivo:*

$$\sum_{r=1}^{n} 3r(r+4) = \frac{n(n+1)(2n+13)}{2}$$

Solución:

Sea $S_n = \sum_{r=1}^{n} 3r(r+4)$.

- ⋄ Demostremos que la propiedad se cumple para $n = 1$. El primer miembro es igual a:

  $$3 \cdot 1(1+4) = 3 \cdot 5 = 15$$

  Y el segundo miembro:

  $$\frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 13)}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

- ⋄ Ahora demostraremos que si se cumple para un valor cualquiera h, es decir, si

  $$S_h = \frac{h(h+1)(2h+13)}{2}$$

  también se cumple para el valor siguiente $h + 1$, es decir, demostraremos que:

  $$S_{h+1} = \frac{(h+1)(h+1+1)(2h+2+13)}{2} = \frac{(h+1)(h+2)(2h+15)}{2}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
S_{h+1} &= S_h + 3(h+1)(h+1+4) \\
&= S_h + 3(h+1)(h+5) \\
&= \frac{h(h+1)(2h+13)}{2} + 3(h+1)(h+5) \\
&= \frac{h(h+1)(2h+13)+6(h+1)(h+5)}{2} && \text{sacando factor común } (h+1) \\
&= \frac{(h+1)[h(2h+13)+6(h+5)]}{2} \\
&= \frac{(h+1)(2h^2+19h+30)}{2} && \text{factorizando} \\
&= \frac{(h+1)(h+2)(2h+15)}{2}
\end{aligned}$$

◇ Como consecuencia de los apartados anteriores, la propiedad se cumple para $n \geq 1$.

Ejercicio 3. *Calcular los posibles valores de a si el coeficiente de x^3 en el desarrollo*

$$\left(2x + \frac{1}{ax^2}\right)^9$$

es 288.

Solución:

Un término cualquiera del desarrollo de la potencia es:

$$\binom{9}{n}(2x)^n\left(\frac{1}{ax^2}\right)^{9-n}$$

Si el exponente de x debe ser 3:

$$n - 2(9-n) = 3 \quad \Longrightarrow \quad n = 7$$

El coeficiente de x^3 es entonces:

$$\binom{9}{7}2^7\left(\frac{1}{a}\right)^2 = \binom{9}{7}2^7\left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{9\cdot 8}{2}\cdot\frac{2^7}{a^2} = \frac{9\cdot 2^9}{a^2}$$

Si este coeficiente es igual a 288:

$$\frac{9\cdot 2^9}{a^2} = 288 \quad \Longrightarrow \quad a^2 = \frac{9\cdot 2^9}{288} = 16$$

Por tanto hay dos soluciones $a = -4$ y $a = 4$.

Ejercicio 4. *Un examen consta de 9 preguntas de las que se deben contestar 5. ¿De cuántas maneras pueden escogerse las preguntas? ¿De cuántas si la primera pregunta es obligatoria?*

Solución:

Si se deben escoger 5 preguntas de 9:

$$C_{9,5} = 126$$

Si la primera pregunta es obligatoria, se deben escoger 4 preguntas de las ocho restantes:

$$C_{8,4} = 70$$

Ejercicio 5. *Resolver la siguiente ecuación :*

$$6x^3 - 13x^2 + 4 = 0$$

Solución:

Primero factorizamos el polinomio. Buscamos una raíz entera entre los divisores de 4. Para $x = 2$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & -13 & 0 & 4 \\ 2 & & 12 & -2 & -4 \\ \hline & 6 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Obtenemos la factorización:

$$(x-2)(6x^2 - x - 2) = 0$$

Calculamos las raíces del polinomio de segundo grado que resultan ser $x = \frac{2}{3}$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Las soluciones de la ecuación son $x = 2$, $x = \frac{2}{3}$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Ejercicio 6. *Las raíces de la ecuación cuadrática* $2x^2 + 4x - 1 = 0$ *son* α *y* β. *Sin resolver la ecuación calcular* $\alpha^2 + \beta^2$.

Solución:

Por las relaciones de Cardano tenemos que $\alpha + \beta = -2$ y $\alpha\beta = -\frac{1}{2}$. Entonces:

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$$

Sustituyendo:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (-2)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + 1 = 5$$

Ejercicio 7. *Se debe elegir un comité de* 5 *personas entre* 10 *hombres y* 6 *mujeres. ¿De cuántas maneras puede elegirse si debe estar formado por* 3 *hombres y* 2 *mujeres? ¿De cuántas si debe haber al menos un hombre y una mujer?*

Solución:

En el primer caso, si se eligen tres hombres y dos mujeres, las posibilidades son:

$$C_{10,3}C_{6,2} = 1800$$

El número de posibles comités es:

$$C_{16,5} = 4368$$

Si restamos a este número los que están formados exclusivamente por hombres o mujeres obtenemos

$$C_{16,5} - C_{10,5} - C_{6,5} = 4110$$

Este es el número de comités que están compuestos por al menos un hombre y una mujer.

Ejercicio 8. *Resolver la ecuación* $8^{x-1} = 6^{3x}$*. Expresar la respuesta en función de* $\ln 2$ *y* $\ln 3$*.*

Solución:

Aplicando logaritmos neperianos:

$$\ln 8^{x-1} = \ln 6^{3x}$$

$$(x-1)\ln 8 = 3x\ln 6$$

$$(x-1)\ln 2^3 = 3x\ln(2\cdot 3)$$

$$3(x-1)\ln 2 = 3x(\ln 2 + \ln 3)$$

$$(x-1)\ln 2 = x(\ln 2 + \ln 3)$$

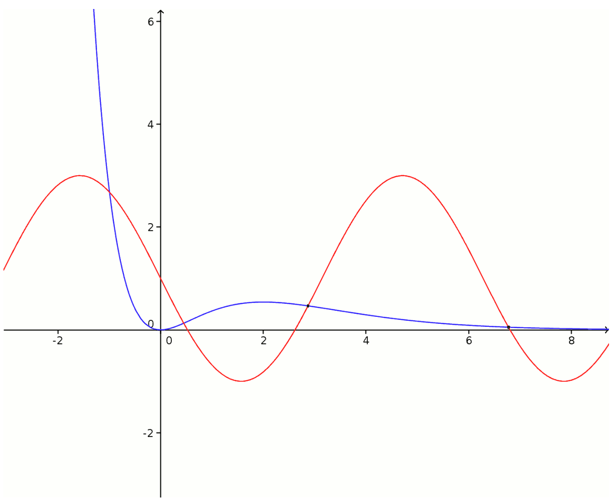
$$-\ln 2 = x\ln 3$$

$$x = \frac{-\ln 2}{\ln 3}$$

Ejercicio 9. *Calcular las soluciones de la ecuación* $x^2e^{-x} = 1 - 2\operatorname{sen} x$*, comprendidas entre* 2 *y* 7*.*

Solución:

Representamos con la calculadora las funciones $f(x) = x^2e^{-x}$ y $g(x) = 1 - 2\operatorname{sen} x$:



Las soluciones de la ecuación son las abscisas de los puntos de corte. Con tres cifras significativas estas soluciones son:

$$x_1 = 2{,}87, \qquad x_2 = 6{,}78$$

Ejercicio 10. *Resolver la inecuación:*

$$\frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 4} < 0$$

Solución:

Las raíces del numerador son -1 y 7. Las del denominador son -2 y 2.

El signo de la fracción según los valores de x aparece reflejado en la siguiente figura:

$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
	-2		-1		2		7	

La solución de la inecuación es $x \in (-2, -1) \cup (2, 7)$

4. Combinatoria. Inducción. Ecuaciones. (Grupo W).

Ejercicio 1. *Demostrar que* $6^n - 1$ *es múltiplo de* 5 *para* $n \geq 0$.

Solución:

- ⋄ La propiedad se cumple para $n = 0$ puesto que $6^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ es múltiplo de 5.
- ⋄ Demostraremos que si se cumple para un valor h, es decir, si se cumple:

  $$6^h - 1 = \dot{5}$$

  entonces, también se cumple para $h + 1$, es decir demostraremos que

  $$6^{h+1} - 1 = \dot{5}$$

  En efecto:

  $$6^{h+1} - 1 = 6 \cdot 6^h - 1 = 6 \cdot (\dot{5} + 1) - 1 = \dot{5} + 6 - 1 = \dot{5} + 5 = \dot{5}$$

- ⋄ Como consecuencia de los apartados anteriores, la propiedad se cumple para $n \geq 0$.

Ejercicio 2. *Demostrar por inducción que si* n *es un número entero positivo:*

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(3r-1)(3r+2)} = \frac{n}{6n+4}$$

Solución:

Sea $S_n = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(3r-1)(3r+2)}$.

- ⋄ Demostremos que la propiedad se cumple para $n = 1$. El primer miembro es igual a:

  $$\frac{1}{(3-1)(3+2)} = \frac{1}{10}$$

  Y el segundo miembro:

  $$\frac{1}{6+4} = \frac{1}{10}$$

- ⋄ Ahora demostraremos que si se cumple para un valor cualquiera h, es decir, si

  $$S_h = \frac{h}{6h+4}$$

  también se cumple para el valor siguiente $h + 1$, es decir, demostraremos que:

  $$S_{h+1} = \frac{h+1}{6(h+1)+4} = \frac{h+1}{6h+10}$$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
S_{h+1} &= S_h + \frac{1}{[3(h+1)-1][3(h+1)+2]} \\
&= S_h + \frac{1}{(3h+2)(3h+5)} \\
&= \frac{h}{6h+4} + \frac{1}{(3h+2)(3h+5)} \\
&= \frac{h(3h+5)+2}{(6h+4)(3h+5)} \\
&= \frac{3h^2+5h+2}{(6h+4)(3h+5)} && \text{factorizando} \\
&= \frac{(h+1)(3h+2)}{2(3h+2)(3h+5)} && \text{simplificando} \\
&= \frac{h+1}{2(3h+5)} \\
&= \frac{h+1}{6h+10}
\end{aligned}
$$

◇ Como consecuencia de los apartados anteriores, la propiedad se cumple para $n \geq 1$.

Ejercicio 3. *Factorizar el polinomio*

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x - 18$$

Solución:

Buscamos raíces enteras entre los divisores de 18. Para $x = 2$:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 2 & -2 & -3 & -18 \\
2 & & 2 & 8 & 12 & 18 \\
\hline
 & 1 & 4 & 6 & 9 & 0
\end{array}
$$

Con lo que tenemos una primera factorización:

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x - 18 = (x-2)(x^3 + 4x^2 + 6x + 9)$$

Buscamos una raíz entera del polinomio de tercer grado entre los divisores de 9. Para $x = -3$:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 4 & 6 & 9 \\
-3 & & -3 & -3 & -9 \\
\hline
 & 1 & 1 & 3 & 0
\end{array}
$$

con lo que:

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x - 18 = (x-2)(x+3)(x^2 + x + 3)$$

El polinomio de segundo grado tiene discriminante menor que cero. Entonces, es irreducible y la factorización está terminada.

Ejercicio 4. *Resolver la inecuación:*

$$\frac{x^2 - 2x - 15}{1 - x^2} > 0$$

Solución:

Las raíces del numerador son -3 y 5. Las del denominador son -1 y 1.

El signo de la fracción según los valores de x aparece reflejado en la siguiente figura:

	0		$\nexists$		$\nexists$		0	
$-$		$+$		$-$		$+$		$-$
	-3		-1		1		5	

La solución de la inecuación es $x \in (-3, -1) \cup (1, 5)$

Ejercicio 5. *Las raíces de la ecuación cuadrática* $2x^2 + 6x - 3 = 0$ *son* α *y* β*. Sin resolver la ecuación calcular* $\alpha^2 + \beta^2$.

Solución:

Por las relaciones de Cardano tenemos que $\alpha + \beta = -3$ y $\alpha\beta = -\frac{3}{2}$. Entonces:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

Sustituyendo:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (-3)^2 - 2\left(-\frac{3}{2}\right) = 9 + 3 = 12$$

Ejercicio 6. *Calcular el término independiente del desarrollo:*

$$\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$$

Solución:

Un término cualquiera del desarrollo tiene la forma:

$$\binom{6}{n} \left(2x^2\right)^n \left(-\frac{1}{x}\right)^{6-n}$$

El término independiente cumple que:

$$2n - (6 - n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad n = 2$$

Por tanto, este término es:

$$\binom{6}{2} 2^2 (-1)^4 = 60$$

Ejercicio 7. *Con las letras de la palabra FUERZA, ¿cuántas palabras de 6 letras pueden formarse?, ¿cuántas tienen las vocales separadas?*

Solución:

Pueden formarse $6! = 720$ palabras.

Si queremos que las vocales y las consonantes queden separadas, hay cuatro posibilidades de colocar las vocales separadas VCVCVC, CVCVCV, VCVCCV O VCCVCV. Para cada una de estas dos posibilidades hay 3! maneras de ordenar las vocales y otras tantas para las consonantes. En total:

$$4 \cdot 6 \cdot 6 = 144$$

Ejercicio 8. *Un examen consta de 9 preguntas de las que se deben contestar 5. ¿De cuántas maneras pueden escogerse las preguntas? ¿De cuántas si las dos primeras son obligatorias?*

Solución:

Si se deben escoger 5 preguntas de 9:

$$C_{9,5} = 126$$

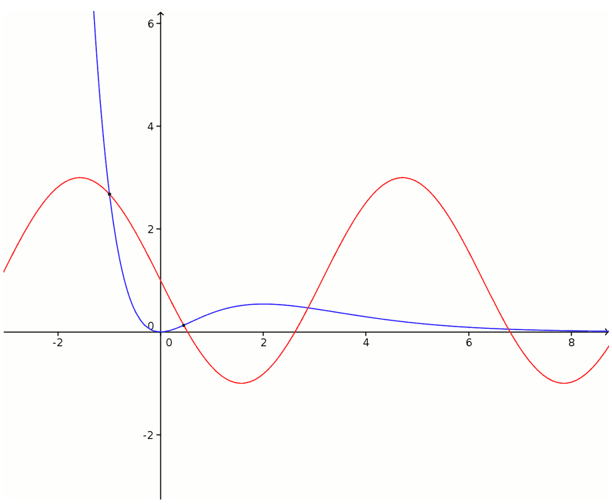
Si las dos primeras preguntas son obligatorias, se deben escoger 3 preguntas de las 7 restantes:

$$C_{7,3} = 35$$

Ejercicio 9. *Calcular las soluciones de la ecuación $x^2e^{-x} = 1 - 2\operatorname{sen} x$, comprendidas entre -2 y 2.*

Solución:

Representamos con la calculadora las funciones $f(x) = x^2e^{-x}$ y $g(x) = 1 - 2\operatorname{sen} x$:



Las soluciones de la ecuación son las abscisas de los puntos de corte. Con tres cifras significativas estas soluciones son:

$$x_1 = -0{,}995, \qquad x_2 = 0{,}450$$

Ejercicio 10. *Resolver la ecuación* $8^{x-1} = 6^{3x}$. *Expresar la respuesta en función de* $\ln 2$ *y* $\ln 3$.

Solución: Aplicando logaritmos neperianos:

$$\ln 8^{x-1} = \ln 6^{3x}$$
$$(x-1)\ln 8 = 3x \ln 6$$
$$(x-1)\ln 2^3 = 3x \ln(2 \cdot 3)$$
$$3(x-1)\ln 2 = 3x(\ln 2 + \ln 3)$$
$$(x-1)\ln 2 = x(\ln 2 + \ln 3)$$
$$-\ln 2 = x \ln 3$$
$$x = \frac{-\ln 2}{\ln 3}$$

---

5. Trigonometría (grupo W)

Ejercicio 1. *Seno del ángulo inscrito. Teorema del seno: enunciado y demostración.*

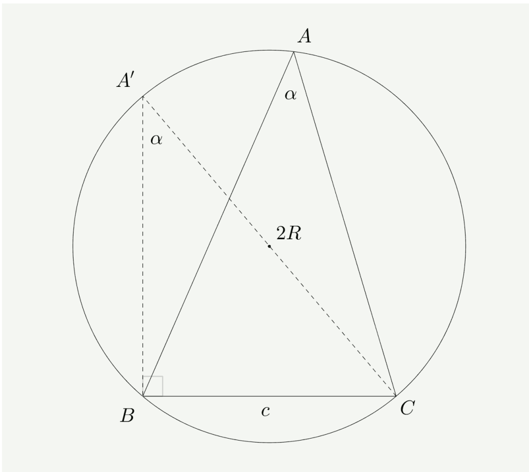
Solución:

Teorema 1 (Teorema del seno)**.** *En un triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

La constante de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Demostración. Puede demostrarse el teorema del seno a partir de la propiedad de los ángulos inscritos en una circunferencia:



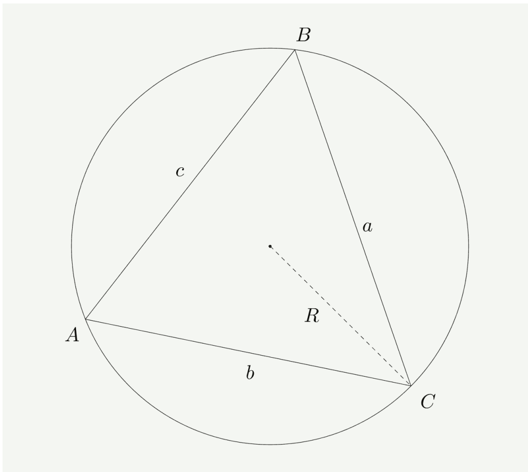


Figura 1: Angulos inscritos y teorema del seno

Sea el ángulo α inscrito en una circunferencia que abarca un arco con una cuerda c (ver figura 2). Construimos otro ángulo sobre el mismo arco en el que uno de sus lados es un diámetro de la circunferencia. Este ángulo también valdrá α puesto que está inscrito en el mismo arco que el anterior. Pero, dado que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto, el triángulo $A'BC$ es rectángulo y

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{c}{2R}$$

es decir, el seno de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual al cociente de la cuerda y el diámetro.

A partir del resultado anterior deducimos (figura 2 derecha):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} A &= \frac{a}{2R} \\ \operatorname{sen} B &= \frac{b}{2R} \\ \operatorname{sen} C &= \frac{c}{2R} \end{aligned}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad 2R = \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

es decir, los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos y la razón de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo. □

Ejercicio 2. *Calcular el perímetro de un triángulo rectángulo que tiene un cateto* $b = 36$ cm *y el ángulo opuesto mide* $B = 57^o$.

Solución:

El otro cateto es:

$$c = b \operatorname{cotg} B = \frac{b}{\operatorname{tg} B} = \frac{36}{\operatorname{tg} 57^{\text{o}}}$$

y la hipotenusa:

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{36}{\operatorname{sen} 57^{\text{o}}}$$

Entonces, el perímetro es:

$$p = 36 + \frac{36}{\operatorname{tg} 57^{\text{o}}} + \frac{36}{\operatorname{sen} 57^{\text{o}}} \approx 102 \text{ cm}$$

Ejercicio 3. *Calcular el área de un triángulo de lados* $a = 25$ cm, $b = 34$ cm *y* $c = 13$ cm.

Solución:

Calculamos un ángulo, por ejemplo A:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{34^2 + 13^2 - 25^2}{2 \cdot 34 \cdot 13}$$

Y el área es igual a:

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A \approx 135 \text{ cm}^2$$

También podría calcularse el área por la fórmula de Herón:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde p es el semiperímetro:

$$p = \frac{25 + 34 + 13}{2} = 36 \ ; \qquad S = \sqrt{36 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 23} \approx 135 \text{ cm}^2$$

Ejercicio 4. *En un triángulo se conoce* $a = 45$ cm, $A = 37^o$, $B = 63^o$. *Calcular la altura correspondiente al vértice* B.

Solución:

El ángulo C mide

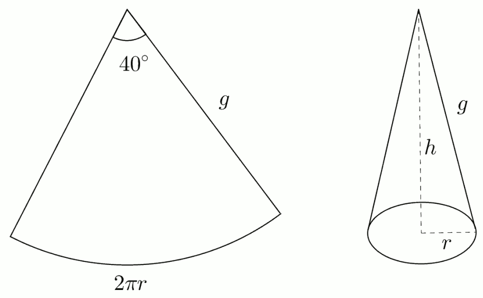
$$C = 180^{\text{o}} - 37^{\text{o}} - 63^{\text{o}} = 80^{\text{o}}$$

Entonces, es fácil ver que

$$h_B = a \operatorname{sen} C = 45 \operatorname{sen} 80^{\text{o}} \approx 44{,}3 \text{ cm}$$

Ejercicio 5. *Para hacer un gorro cónico se recorta en una cartulina un sector de* 40^o *y* 90 cm *de radio. Calcular la altura del gorro.*

Solución:



La longitud del arco es el radio por el ángulo en radianes. Entonces:

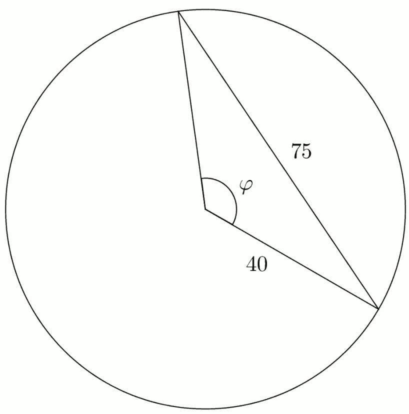
$$2\pi r = 90 \cdot \frac{40\pi}{180} \qquad \Longrightarrow \qquad r = 10 \text{ cm}$$

Poe el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{90^2 - 10^2} = \sqrt{8000} \approx 89{,}4 \text{ cm}$$

Ejercicio 6. *Calcular el área de un segmento circular encerrado por una cuerda de* 75 cm *y un arco de una circunferencia de* 40 cm *de radio.*

Solución:



Calculamos φ:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} = \frac{75}{2 \cdot 40} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = 2 \operatorname{arsen}\frac{75}{80}$$

El área del segmento es:

$$S = \frac{1}{2} r^2 (\varphi - \operatorname{sen}\varphi) = \frac{1}{2}\, 40^2\, (\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \approx 1420 \text{ cm}^2$$

Ejercicio 7. *Sabiendo que* $\operatorname{tg}\alpha = -2$ *y que* α *es un ángulo del cuarto cuadrante, calcular* $\operatorname{sen}\alpha$ *y* $\cos\alpha$*.*

Solución:

Puesto que es del cuarto cuadrante, el coseno es positivo:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

y el seno:

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha\operatorname{tg}\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

Ejercicio 8. *Calcular los ángulos* x *comprendidos entre* 0^o *y* 360^o *que cumplen:*

(a) $\cos x = \frac{1}{2}$ (b) $\operatorname{tg} x = -3$

Solución:

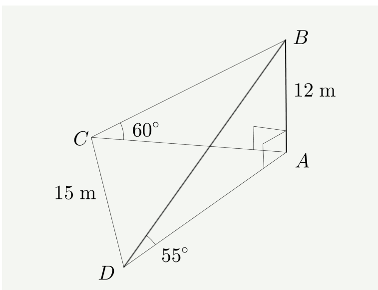
(a) Puesto que el coseno es positivo el ángulo puede estar en el primero o en el cuarto cuadrante. La solución en el primero es 60^o. Entonces

$$x = 60^o, \qquad x = 360^o - 60^o = 300^o$$

(b) Como la tangente es negativa, las soluciones estarán en el segundo o en el cuarto cuadrante. Las soluciones son:

$$x = 180^o - \operatorname{artg} 3 = 108^o26', \qquad x = 360^o - \operatorname{artg} 3 = 288^o26'$$

Ejercicio 9. *La figura muestra un mástil* AB *de longitud igual a* 12 m*. Los puntos* C *y* D *están sobre el suelo de tal forma que el ángulo de elevación de* C *a* B *es de* 60^o *y el ángulo de elevación de* D *a* B *es de* 55^o*. Sabiendo que la distancia entre* C *y* D *es de* 15 m*, calcular el ángulo* CAD *y el área del triángulo* CAD*.*



Solución:

Calculamos los lados AC y AD:

$$AC = \frac{12}{\operatorname{tg} 60^o}$$

$$AD = \frac{12}{\operatorname{tg} 55^o}$$

Entonces, el ángulo A lo obtenemos por el teorema del coseno:

$$\cos A = \frac{AC^2 + AD^2 - 15^2}{2 \cdot AC \cdot AD} \qquad \Longrightarrow \qquad A = 156^{\text{o}}3'$$

Y el área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2}\, AC \cdot AD \operatorname{sen} A \approx 11{,}8\ \text{m}^2$$

---

6. Trigonometría (grupo Z)

Ejercicio 1. *Seno del ángulo inscrito. Teorema del seno: enunciado y demostración.*

Solución:

Teorema 2 (Teorema del seno)**.** *En un triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

La constante de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Demostración. Puede demostrarse el teorema del seno a partir de la propiedad de los ángulos inscritos en una circunferencia:

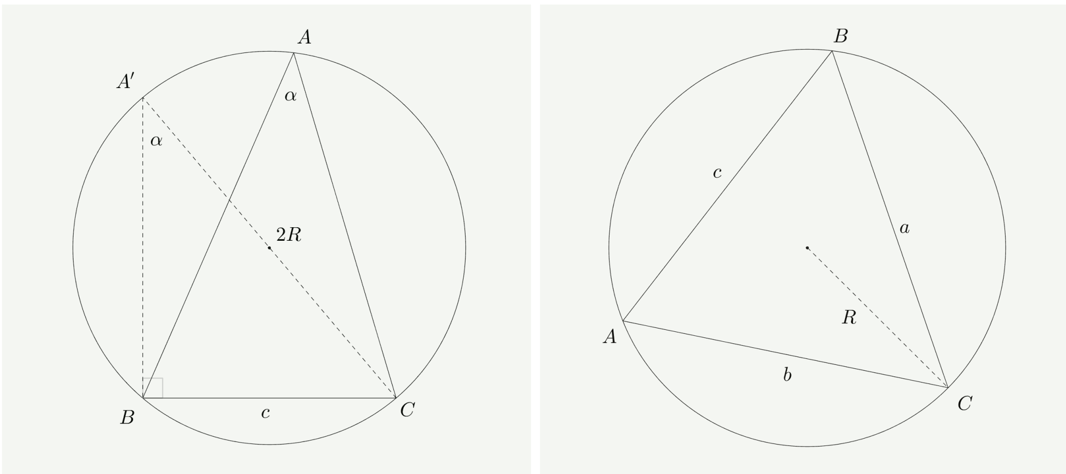


Figura 2: Angulos inscritos y teorema del seno

Sea el ángulo α inscrito en una circunferencia que abarca un arco con una cuerda c (ver figura 2). Construimos otro ángulo sobre el mismo arco en el que uno de sus lados es un diámetro de la circunferencia. Este ángulo también valdrá α puesto que está inscrito en el mismo arco que el anterior. Pero, dado que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto, el triángulo $A'BC$ es rectángulo y

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{c}{2R}$$

es decir, el seno de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual al cociente de la cuerda y el diámetro.

A partir del resultado anterior deducimos (figura 2 derecha):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} A &= \frac{a}{2R} \\ \operatorname{sen} B &= \frac{b}{2R} \\ \operatorname{sen} C &= \frac{c}{2R} \end{aligned}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad 2R = \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

es decir, los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos y la razón de proporcionalidad es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo. □

Ejercicio 2. *Calcular el perímetro de un triángulo rectángulo que tiene un cateto* $b = 46$ cm *y el ángulo* $C = 57^o$.

Solución:

Calculamos el otro cateto y la hipotenusa:

$$c = b \operatorname{tg} C = 46 \operatorname{tg} 57^{\text{o}}$$

$$a = \frac{b}{\cos C} = \frac{46}{\cos 57^{\text{o}}}$$

Y el perímetro:

$$p = 46 + 46 \operatorname{tg} 57^{\text{o}} + \frac{46}{\cos 57^{\text{o}}} \approx 201 \text{ cm}$$

Ejercicio 3. *Calcular el área de un triángulo de lados* $a = 35$ cm, $b = 27$ cm *y* $c = 14$ cm.

Solución:

Calculamos un ángulo, por ejemplo A:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{27^2 + 14^2 - 35^2}{2 \cdot 27 \cdot 14}$$

Y el área es igual a:

$$S = \frac{1}{2}\, bc \operatorname{sen} A \approx 173 \text{ cm}^2$$

También podría calcularse el área por la fórmula de Herón:

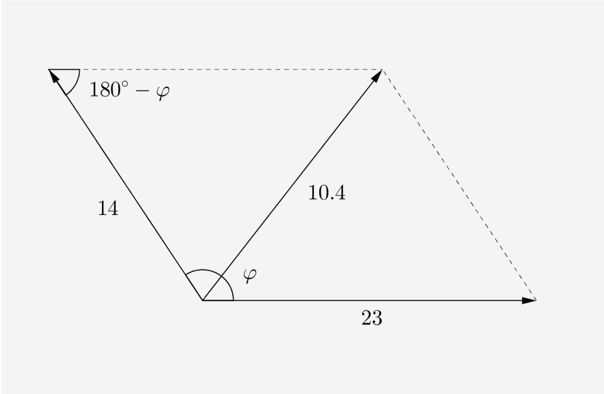
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde p es el semiperímetro:

$$p = \frac{35 + 27 + 14}{2} = 38 \; ; \qquad S = \sqrt{38 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 24} \approx 173 \text{ cm}^2$$

Ejercicio 4. *Dos fuerzas de* 14 *y* 23 *newtons dan una resultante de* 10,4 *newtons. ¿Qué ángulo forman entre sí las dos fuerzas?*

Solución:



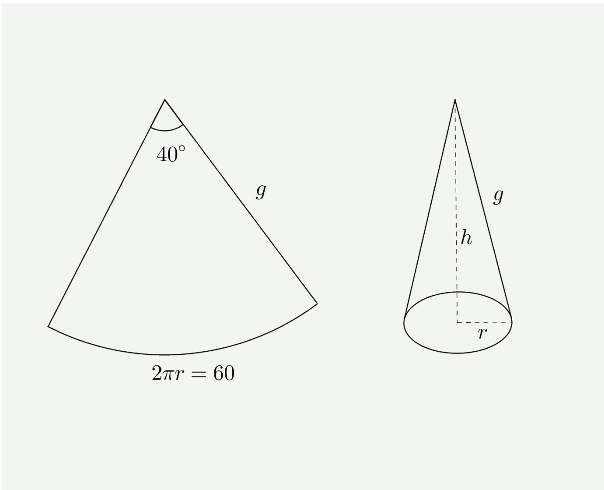
Por el teorema del coseno:

$$\cos(180^{\rm o}-\varphi)=\frac{14^2+23^2-10{,}4^2}{2\cdot 14\cdot 23}\quad\Longrightarrow\quad 180^{\rm o}-\varphi\approx 16^{\rm o}42'$$

y de aquí $\varphi\approx 163^{\rm o}18'$.

Ejercicio 5. *Para hacer un gorro cónico se recorta en una cartulina un sector de* 40^o *y* 60 cm *de arco. Calcular la altura del gorro.*

Solución:



Puesto que la longitud de un arco es igual al radio por el ángulo en radianes:

$$60=g\cdot\frac{40\pi}{180}\quad\Longrightarrow\quad g=\frac{60\cdot 180}{40\pi}$$

y el radio de cono:

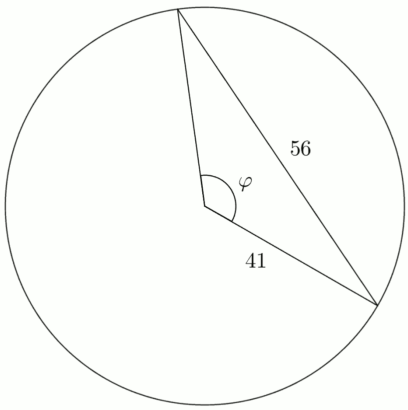
$$r=\frac{60}{2\pi}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos la altura del cono:

$$h=\sqrt{g^2-r^2}\approx 85{,}4\text{ cm}$$

Ejercicio 6. *Calcular el área de un segmento circular encerrado por una cuerda de* 56 cm *y un arco de una circunferencia de* 41 cm *de radio.*

Solución:



Calculamos el ángulo φ:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=\frac{28}{41}\quad\Longrightarrow\quad\varphi=2\operatorname{arsen}\frac{28}{41}$$

El área del segmento está dada por la fórmula

$$S=\frac{1}{2}\,r^2\,(\varphi-\operatorname{sen}\varphi)$$

donde φ es el ángulo en radianes. Sustituyendo se obtiene $S=425\text{ cm}^2$.

Ejercicio 7. *Sabiendo que* $\cos\alpha=-0{,}8$ *y que* α *es un ángulo del tercer cuadrante, calcular* $\operatorname{sen}\alpha$ *y* $\operatorname{tg}\alpha$.

Solución:

En el tercer cuadrante el seno es negativo y la tangente positiva:

$$\operatorname{sen}\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}64}=-\sqrt{0{,}36}=-0{,}6$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-0{,}6}{-0{,}8}=\frac{3}{4}=0{,}75$$

Ejercicio 8. *Calcular los ángulos* x *comprendidos entre* 0^o *y* 360^o *que cumplen:*

(a) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ (b) $\operatorname{tg}x=2$

Solución:

(a) El coseno es negativo luego el ángulo está en el segundo o en el tercer cuadrante. El ángulo del primer cuadrante que tiene el coseno igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ es 30º. Entonces, las soluciones son:

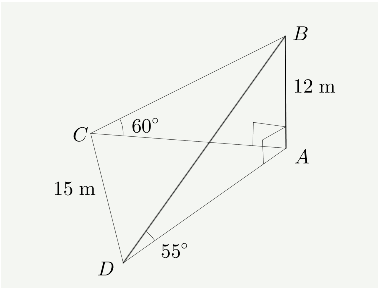
$$x=180^{\circ}-30^{\circ}=150^{\circ}$$

$$x=180^{\circ}+30^{\circ}=210^{\circ}$$

(b) Si la tangente es positiva el ángulo está en el primer o en el tercer cuadrante. El ángulo del primer cuadrante que tiene tangente igual a 2 es aproximadamente $63^{\circ}26'$. Las soluciones son:

$$x = 63^{\circ}26'$$
$$x = 180^{\circ} + 63^{\circ}26' = 243^{\circ}26'$$

Ejercicio 9. *La figura muestra un mástil AB de longitud igual a* 12 m*. Los puntos C y D están sobre el suelo de tal forma que el ángulo de elevación de C a B es de 60^o y el ángulo de elevación de D a B es de 55^o. Sabiendo que la distancia entre C y D es de* 15 m*, calcular el ángulo CAD y el área del triángulo CAD.*



Solución:

Calculamos los lados AC y AD:

$$AC = \frac{12}{\operatorname{tg} 60^{\circ}}$$
$$AD = \frac{12}{\operatorname{tg} 55^{\circ}}$$

Entonces, el ángulo A lo obtenemos por el teorema del coseno:

$$\cos A = \frac{AC^2 + AD^2 - 15^2}{2 \cdot AC \cdot AD} \quad \Longrightarrow \quad A = 156^{\circ}3'$$

Y el área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AD \operatorname{sen} A \approx 11{,}8 \text{ m}^2$$

---

7. Más trigonometría (grupo W)

Ejercicio 1. *En un triángulo dos de sus lados miden $a =$ 56 m, $b =$ 45 m y el ángulo comprendido $C = 110^o$. Calcular el ángulo A.*

Solución:

Calculamos el lado c por el teorema del coseno:

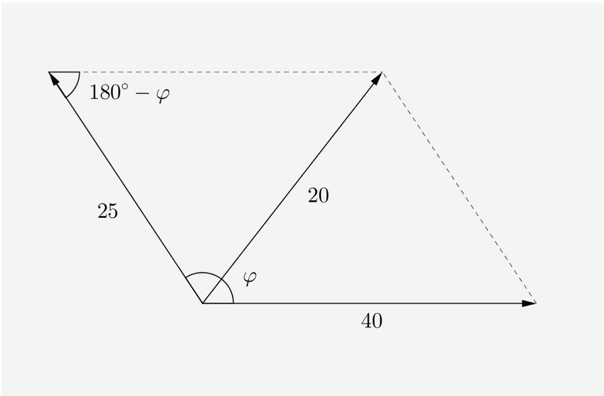
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 56^2 + 45^2 - 2 \cdot 56 \cdot 45 \cdot \cos 110^{\circ} \quad \Longrightarrow \quad c \simeq 83{,}0 \text{ m}$$

Ahora calculamos el ángulo A:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \Longrightarrow \qquad A = 39^o 22'$$

Ejercicio 2. *Dos fuerzas de 25 y 40 newtons producen una resultante de 20 newtons. Calcular el ángulo que forman.*

Solución:



Por el teorema del coseno:

$$\cos(180^o - \varphi) = \frac{40^2 + 25^2 - 20^2}{2 \cdot 40 \cdot 25} \qquad \Longrightarrow \qquad 180 - \varphi \simeq 24^o 9' \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = 155^o 51'$$

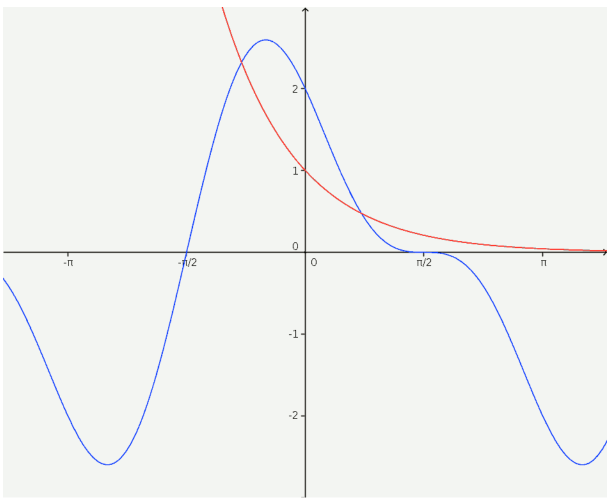
Ejercicio 3. *Resolver la ecuación:*

$$2\cos x - \operatorname{sen} 2x = e^{-x}$$

en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Solución:

Con la calculadora gráfica representamos las funciones $f(x) = 2\cos x - \operatorname{sen} 2x$ y $g(x) = e^{-x}$. Obtenemos



Hay dos puntos de corte $x_1 \simeq -0{,}843$ y $x_2 \simeq 0{,}744$.

Ejercicio 4. *Resolver en el intervalo* $[0, 2\pi]$ *la ecuación:*

$$\cos 2x + 5 \operatorname{sen} x = 0$$

Solución:

Sustituyendo el coseno del ángulo doble:

$$\begin{aligned}
&\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 5 \operatorname{sen} x = 0\\
&1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 5 \operatorname{sen} x = 0\\
&2 \operatorname{sen}^2 x - 5 \operatorname{sen} x - 1 = 0
\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado en $\operatorname{sen} x$ obtenemos:

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{33}}{4} \text{ (no välida) ;} \qquad x_2 = \frac{5 - \sqrt{33}}{4}$$

Para este valor del seno tenemos una solución en el tercer cuadrante $x_1 = 190^{\text{o}}44'$ y una en el cuarto $x_2 = 349^{\text{o}}16'$.

Ejercicio 5. *Demostrar que:*

$$\frac{\cos\alpha}{1 - \operatorname{sen}\alpha} = \sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\alpha}{1 - \operatorname{sen}\alpha} &= \frac{\cos\alpha(1 + \operatorname{sen}\alpha)}{(1 - \operatorname{sen}\alpha)(1 + \operatorname{sen}\alpha)}\\
&= \frac{\cos\alpha(1 + \operatorname{sen}\alpha)}{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}\\
&= \frac{\cos\alpha(1 + \operatorname{sen}\alpha)}{\cos^2\alpha}\\
&= \frac{1 + \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\\
&= \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\\
&= \sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha
\end{aligned}$$

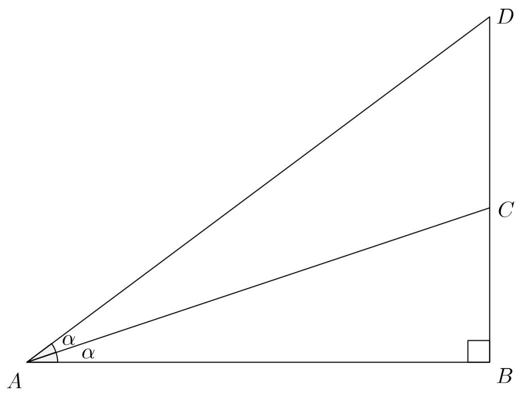
Ejercicio 6. *Demostrar la identidad*

$$\operatorname{cosec} 2\alpha = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg} 2\alpha$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}2\alpha &= \operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha+\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}\\
&=\frac{2\operatorname{tg}^2\alpha+1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}\\
&=\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\frac{2\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha}\\
&=\frac{1}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\operatorname{sen}2\alpha}=\operatorname{cosec}2\alpha
\end{aligned}$$

Ejercicio 7. *En la figura adjunta* $AB=3$ m *y* $BD=4$ m. *Calcular la longitud de* BC.



Solución:

De la figura se deduce que:

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{4}{3}$$

De aquí:

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{4}{3}\quad\Longrightarrow\quad 6\operatorname{tg}\alpha=4-4\operatorname{tg}^2\alpha\quad\Longrightarrow\quad 2\operatorname{tg}^2\alpha+3\operatorname{tg}\alpha-2=0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado en $\operatorname{tg}\alpha$ y teniendo en cuenta que la solución negativa no es válida poarque α es un ángulo agudo:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$$

Y por tanto:

$$BC=3\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}=1{,}5\text{ m}$$

Ejercicio 8. *Un péndulo oscila con un período de* 20 *segundos. La altura del péndulo está dada por una función del tipo*

$$h(t)=h_0+A\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)$$

Sabiendo que la altura máxima es de 20 m *la tomó cuando* $t = 6$ *segundos y la altura mínima es* 6 m*, calcular* h_0*,* A*,* ω *y* φ*.*

Solución:

El valor medio h_0 es el promedio de los valores máximo y mínimo:

$$h_0 = \frac{20+6}{2} = 13 \text{ m}$$

La amplitud es la mitad de la diferencia entre el valor máximo y mínimo:

$$A = \frac{20-6}{2} = 7 \text{ m}$$

La frecuencia angular es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10} \text{ s}^{-1}$$

Para calcular φ tenemos en cuenta que el valor máximo de la función se da cuando $t = 6$. En ese momento el ángulo tiene que valer $\frac{\pi}{2}$ o sea que:

$$\frac{6\pi}{10} + \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{5} = -\frac{\pi}{10}$$

La función que da la altura es:

$$h(t) = 7 \operatorname{sen} \frac{\pi t - 1}{10}$$

8. Más trigonometría (grupo Z)

Ejercicio 1. *En un triángulo dos de sus lados miden* $a = 56$ m*,* $b = 45$ m *y el ángulo* $A = 110^o$*. Calcular el área del triángulo.*

Solución:

Calculamos $\operatorname{sen} B$ mediante el teorema del seno:

$$\frac{56}{\operatorname{sen} 110^o} = \frac{45}{\operatorname{sen} B} \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} B = \frac{45 \operatorname{sen} 110^o}{56}$$

De aquí obtenemos que $B = 49^o 2'$ y $130^o 58'$. Esta último solución no es válida puesto que el ángulo A es obtuso y un triángulo no puede tener más de un ángulo obtuso.

Calculado B obtenemos $C = 180^o - A - B = 20^o 58'$, y el área:

$$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C = \frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 45 \operatorname{sen} C \simeq 451 \text{ m}^2$$

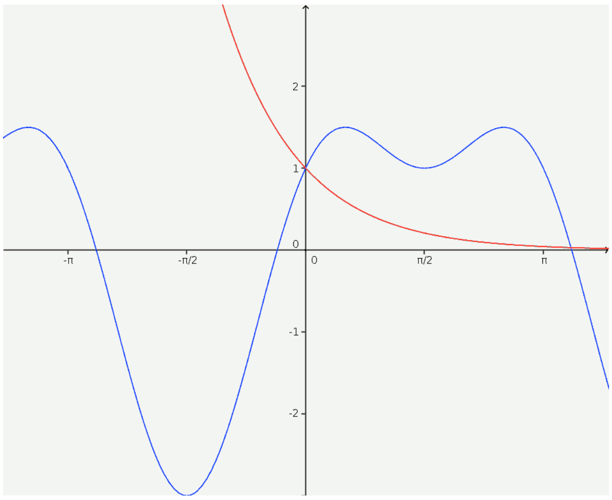
Ejercicio 2. *Resolver la ecuación:*

$$2 \operatorname{sen} x + \cos 2x = e^{-x}$$

en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Solución:

Representamos con la calculadora gráfica las funciones $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$ y $g(x) = e^{-x}$. Obtenemos:



Vemos que en el intervalo $[-\pi, \pi]$ se cortan solamente en $x = 0$.

Ejercicio 3. *Sin usar la calculadora gráfica resolver en el intervalo* $[0, 2\pi]$ *la ecuación:*

$$2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \sec^2 x = 7$$

Solución:

Escribimos la secante en función de la tangente y resulta:

$$
\begin{aligned}
&2\operatorname{tg}^2 x + 3\sec^2 x = 7\\
&2\operatorname{tg}^2 x + 3(1+\operatorname{tg}^2 x) = 7\\
&5\operatorname{tg}^2 x + 3 = 7\\
&5\operatorname{tg}^2 x = 4\\
&\operatorname{tg} x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

Y a partir de la tangente obtenemos las soluciones $x_1 = 41^{\circ}49'$, $x_2 = 221^{\circ}49'$, $x_3 = 138^{\circ}11'$ y $x_4 = 318^{\circ}11'$.

Ejercicio 4. *Demostrar que:*

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = 2\operatorname{cosec}\alpha$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} &= \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha + (1+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha(1+\cos\alpha)}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + 1 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha(1+\cos\alpha)}\\
&= \frac{2+2\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha(1+\cos\alpha)}\\
&= \frac{2(1+\cos\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha(1+\cos\alpha)}\\
&= \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}\\
&= 2\operatorname{cosec}\alpha
\end{aligned}
$$

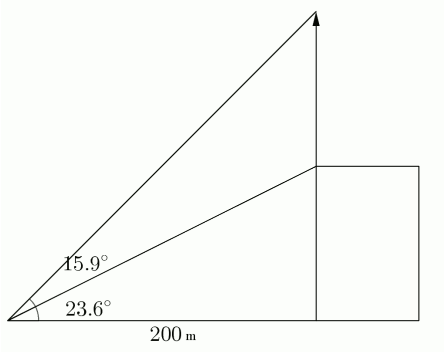
Ejercicio 5. *Demostrar*

$$\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

Solución:

$$\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

Ejercicio 6. *Sobre un edificio se ha construido una torre de telecomunicaciones como se muestra en la figura. Calcular la altura de la torre.*



Solución:

La altura del edificio con la torre es:

$$200\,\mathrm{tg}(15{,}9^{\mathrm{o}}+23{,}6^{\mathrm{o}})=200\,\mathrm{tg}\,39{,}5^{\mathrm{o}}$$

La altura del edificio es:

$$200\,\mathrm{tg}\,23{,}6^{\mathrm{o}}$$

de modo que la altura de la torre es:

$$200\,\mathrm{tg}\,39{,}5^{\mathrm{o}}200\,\mathrm{tg}\,23{,}6^{\mathrm{o}}\simeq 77{,}5\text{ m}$$

Ejercicio 7. *Calcular el valor exacto de* $\mathrm{tg}\,\alpha$ *si* $\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{21}{20}$ *y* α *es obtuso.*

Solución:

Sabemos que:

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$$

Entonces:

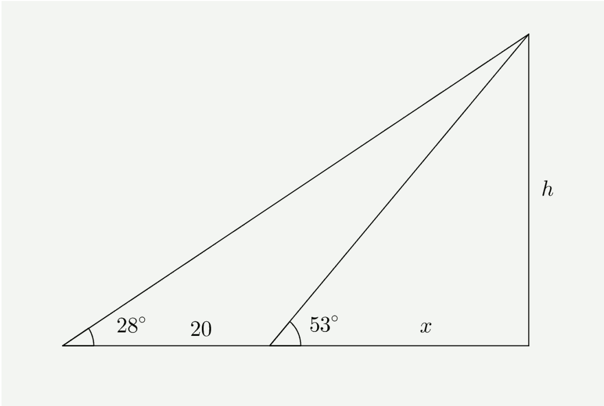
$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}=\frac{21}{20}\quad\Longrightarrow\quad 40\,\mathrm{tg}\,\alpha=21-21\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\quad\Longrightarrow\quad 21\,\mathrm{tg}^2\,\alpha+40\,\mathrm{tg}\,\alpha-21=0$$

Resolvemos esta ecuación y obtenemos $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{3}{7}$ y $\mathrm{tg}\,\alpha=-\frac{7}{3}$. Puesto que el ángulo es obtuso, la solución válida es

$$\mathrm{tg}\,\alpha=-\frac{7}{3}$$

Ejercicio 8. *Desde un cierto punto se ve el extremo de un mástil con un ángulo de* 53^o *con la horizontal y, si nos alejamos* 20 m*, el ángulo pasa a ser de* 28^o*. ¿Cuál es la altura del mástil?*

Solución:



De la figura se deduce que:

$$\begin{cases} h = x \operatorname{tg} 53^{\text{o}} \\ h = (20 + x) \operatorname{tg} 28^{\text{o}} \end{cases}$$

Despejando x en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda se obtiene:

$$h = \frac{20 \operatorname{tg} 53^{\text{o}} \operatorname{tg} 28^{\text{o}}}{\operatorname{tg} 53^{\text{o}} - \operatorname{tg} 28^{\text{o}}} \simeq 17{,}7 \text{ m}$$

9. Números complejos

Ejercicio 1. *Calcular*

$$\frac{2(1-3i)+6i}{-3+2i}$$

Solución:

$$\frac{2(1-3i)+6i}{-3+2i}=\frac{2-6i+6i}{-3+2i}=\frac{2\cdot(-3-2i)}{9+4}=-\frac{6}{13}-\frac{4}{13}i$$

Ejercicio 1. *Calcular el número real k de forma que*

$$\frac{(3-2i)^2}{1+ki}$$

sea:

(a) *Un número real.*

(b) *Un número imaginario puro.*

Solución:

Calculamos el cociente:

$$\frac{(3-2i)^2}{1+ki}=\frac{9-4-12i}{1+ki}=\frac{(5-12i)(1-ki)}{1+k^2}=\frac{5-12k+i(-5k-12)}{1+k^2}=\frac{5-12k}{1+k^2}+\frac{-5k-12}{1+k^2}i$$

(a) Si es un número real, la parte imaginaria debe ser cero:

$$\frac{-5k-12}{1+k^2}=0 \quad\Longrightarrow\quad k=-\frac{12}{5}$$

(b) Si es un número imaginario puro, la parte real sebe ser cero:

$$\frac{5-12k}{1+k^2}=0 \quad\Longrightarrow\quad k=\frac{5}{12}$$

Ejercicio 3. *Calcular las raíces cuadradas del número complejo $-45-28i$.*

Solución:

Llamando $x+yi$ a la raíz debe cumplirse que $(x+yi)^2=-45-28i$. Igualando partes reales e imaginarias resulta el sistema:

$$\begin{cases} x^2-y^2=-45 \\ 2xy=28 \end{cases}$$

Despejando y en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$y=\frac{-14}{x};\qquad x^2-\frac{196}{x^2}=-45;\qquad x^4+45x^2-196=0$$

Despejando x^2:

$$x^2=\frac{-45\pm\sqrt{45^5+4\cdot 196}}{2}=\frac{-45+53}{2}=4 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$$

Para $x = -2$, $y = 7$, y para $x = 2$, $y = -7$. Las dos raíces son, por tanto, $-2+7i$ y $2-7i$.

Ejercicio 4. *Escribe los siguientes números complejos en forma polar:*

(*a*) -4
(*b*) $2i$
(*c*) $-\frac{3}{4}i$
(*d*) $-2+2\sqrt{3}i$

Solución:

Para los tres primeros números la solución es inmediata:

(*a*) $-4 = 4_\pi$

(*b*) $2i = 2_{\pi/2}$

(*c*) $-\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{3\pi/2}$

(*d*) El cuarto complejo tiene como módulo y argumento:

$$r = \sqrt{4+12} = 4; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \overset{\varphi\in II}{\Longrightarrow} \varphi = 120^{\text{o}}$$

Por consiguiente $-2+2\sqrt{3}i = 4_{2\pi/3}$.

Ejercicio 5. *Escribe en la forma binómica los siguientes números complejos:*

(*a*) $1_{\pi/2}$
(*b*) $5_{270^{\text{o}}}$
(*c*) $1_{150^{\text{o}}}$
(*d*) $4_{300^{\text{o}}}$

Solución:

(*a*) $1_{\pi/2} = i$

(*b*) $5_{270^{\text{o}}} = -5i$

(*c*) $1_{150^{\text{o}}} = 1\cdot(\cos 150^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 150^{\text{o}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

(*d*) $4_{300^{\text{o}}} = 4\cdot \cos 300^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 300^{\text{o}}) = 4\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 - 2\sqrt{3}i$

Ejercicio 6. *Calcular en forma polar las raíces quintas de $1-i$.*

Solución:

El módulo y argumento de $1-i$ son:

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{1} = -1 \overset{\varphi\in IV}{\Longrightarrow} \varphi = 315^{\text{o}}$$

Así que $1 - i = (\sqrt{2})_{315^o}$. La primera raíz la obtenemos haciendo la raíz del módulo y dividiendo por 5 el argumento:

$$z_1 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{63^o}$$

Las restantes raíces las calculamos sumando $\frac{360^o}{5} = 72^o$ a la anterior:

$$z_2 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{135^o}; \quad z_3 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{207^o}; \quad z_4 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{279^o}; \quad z_5 = \left(\sqrt[10]{2}\right)_{351^o}$$

Ejercicio 7. *Calcular en forma binómica las raíces sextas de* -1.

Solución:

El número -1 en forma polar es 1_{180^o}. Como en el caso anterior, la primera raíz sexta se obtiene haciendo la raíz sexta del módulo y dividiendo por 6 el argumento. Las restantes raíces se calculan sumando $\frac{360^o}{6} = 60^o$ al argumento se la raíz anterior:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \cos 30^o + i \operatorname{sen} 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
z_2 &= \cos 90^o + i \operatorname{sen} 90^o = i \\
z_3 &= \cos 150^o + i \operatorname{sen} 150^o = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
z_4 &= \cos 210^o + i \operatorname{sen} 210^o = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\
z_5 &= \cos 270^o + i \operatorname{sen} 270^o = -i \\
z_6 &= \cos 330^o + i \operatorname{sen} 330^o = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

Ejercicio 8. *Calcula en forma binómica* $(-1 - i\sqrt{3})^6$.

Solución:

En primer lugar escribimos el complejo en forma polar:

$$r = \sqrt{1+3} = 2: \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \overset{\varphi \in III}{\Longrightarrow} \varphi = 240^o$$

Por consiguiente:

$$(-1 - i\sqrt{3})^6 = \left[(2)_{240^o}\right]^6 = 64_{1440^o}$$

Dividiendo el argumento por 360^o encontramos el argumento equivalente 0^o. Tenemos, por tanto:

$$64_{1440^o} = 64_{0^o} = 64$$

Ejercicio 9. *Calcula una expresión de* $\cos 3\varphi$ *a partir de la fórmula de Moivre.*

Solución:

Para el ángulo triple, la fórmula de Moivre tiene la forma:

$$\cos 3\varphi + i \operatorname{sen} \varphi = (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^3$$

Para calcular $\cos 3\varphi$ debemos calcular la parte real del segundo miembro. La parte real es la que contiene las potencias 0 y 2 de la unidad imaginaria:

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi + 3i^2\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi + i^3 \operatorname{sen}^3\varphi$$

La parte real es

$$\cos^3\varphi + 3i^2\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi$$

de modo que:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi$$

Ejercicio 10. *El punto $A_1(3,5)$ es un vértice de un triángulo equilátero centrado en el origen. Calcular las coordenadas de los otros dos vértices A_2 y A_3.*

Solución:

Los otros dos vértices los obtendremos girando A_1 ángulos de 120º y 240º alrededor del origen:

$$\begin{aligned}
(3+5i)(\cos 120^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 120^{\text{o}}) &= (3+5i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&= -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i - \frac{5}{2}i - \frac{5\sqrt{3}}{2}\\
&= -\frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\right)i\\
(3+5i)(\cos 240^{\text{o}} + i \operatorname{sen} 240^{\text{o}}) &= (3+5i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&= -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i - \frac{5}{2}i + \frac{5\sqrt{3}}{2}\\
&= -\frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\right)i
\end{aligned}$$

Los puntos son:

$$A_2\left(-\frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\right); \qquad A_3\left(-\frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\right)$$

---

10. Números complejos

Ejercicio 1. *Calcular:*

$$\frac{(2-i)^2(1+3i)}{3+2i}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{(2-i)^2(1+3i)}{3+2i} &= \frac{(4-1-4i)(1+3i)}{3+2i}\\ &= \frac{(3-4i)(1+3i)}{3+2i}\\ &= \frac{15+5i}{3+2i}\\ &= \frac{(15+5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}\\ &= \frac{55-15i}{13}\\ &= \frac{55}{13}-\frac{15}{13}i\end{aligned}$$

Ejercicio 2. *Calcular las raíces cuadradas de* $24+10i$.

Solución:

Sea $x+yi$ la raíz cuadrada, entonces:

$$(x+yi)^2 = 24+10i \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x^2-y^2=24 \\ 2xy=10 \end{cases}$$

Resolvemos con la sustitución:

$$y=\frac{10}{2x}=\frac{5}{x} \quad\Longrightarrow\quad x^2-\frac{25}{x^2}=24 \quad\Longrightarrow\quad x^4-24x^2-25=0$$

Resolvemos la ecuación bicuadrada:

$$x^2=\frac{24\pm\sqrt{24^2+4\cdot 25}}{2}=\frac{24\pm 26}{2}$$

Las soluciones son $x^2=25$ y $x^2=-1$ (no válida). Por tanto $x_1=-5$ y $x_2=5$. Los valores correspondientes de y son $y_1=-1$ e $y_2=1$. Las raíces cuadradas son $-5-i$ y $5+i$.

Ejercicio 3. *Aplicar la fórmula de Newton para calcular* $(2-3i)^4$.

Solución:

$$\begin{aligned}(2-3i)^4 &= 2^4-4\cdot 2^3\cdot 3i+6\cdot 2^2\cdot(3i)^2-4\cdot 2\cdot(3i)^3+(3i)^4\\ &= 16-96i+216i^2-216i^3+81i^4\\ &= 16-96i-216+216i+81\\ &= -119+120i\end{aligned}$$

Ejercicio 4. *Calcular en forma polar las raíces quintas de $-i$.*

Solución:

Puesto que $-i = 1_{270^o}$, las raíces tienen de módulo 1 y de argumento $\frac{270^o+360^o k}{5}$ $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Así obtenemos que las raíces son:

$$1_{54^o},\ 1_{126^o},\ 1_{198^o},\ 1_{270},\ 1_{342^o}$$

Ejercicio 5. *Calcular el área del triángulo que tiene como vértices los afijos de las raíces cúbicas de $3+4i$.*

Solución:

El módulo de este complejo es 5. Las raíces cúbicas tienen entonces como módulo $\sqrt[3]{5}$. Este es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo. El área es:

$$S = 3 \cdot \frac{1}{2} \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5} \operatorname{sen} 120^o = \frac{3\sqrt[3]{25}\sqrt{3}}{4}$$

Ejercicio 6. *Calcular las raíces cuartas de -16 y expresar el resultado en forma binómica.*

Solución:

Puesto que $-16 = 16_{180^o}$, sus raíces cuartas son 2_{45^o}, 2_{135^o}, 2_{225^o} y 2_{315^o}. En forma binómica:

$$z_1 = 2\left(\cos 45^o + i \operatorname{sen} 45^o\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$z_2 = 2\left(\cos 135^o + i \operatorname{sen} 135^o\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$z_3 = 2\left(\cos 225^o + i \operatorname{sen} 225^o\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$z_4 = 2\left(\cos 315^o + i \operatorname{sen} 315^o\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

Ejercicio 7. *Expresar en forma polar:*

(a) $\sqrt{3} - i$ $\qquad$ (b) $-2 + 2i$

Solución:

(a) Calculamos el módulo y el argumento:

$$r = \sqrt{3+1} = 2\ ; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}}\ ; \varphi \in IV$$

Por tanto:

$$\sqrt{3} - i = 2_{330^o}$$

(*b*) De la misma forma:

$$r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}\,; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{-2} = -1\,; \varphi \in II$$

y entonces:

$$-2+2i = (2\sqrt{2})_{135^o}$$

Ejercicio 8. *Expresar en forma binómica:*

(*a*) 5_{240^o} (*b*) 3_{315^o}

Solución:

$$5_{240^o} = 5(\cos 240^o + i \operatorname{sen} 240^o) = 5\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

$$3_{315^o} = 3\left(\cos 315^o + i \operatorname{sen} 315^o\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

Ejercicio 9. *Obtener a partir de la fórmula de Moivre una expresión para* $\operatorname{sen} 3\varphi$.

Solución:

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi &= (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^3 \\ &= \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi\, i \operatorname{sen}\varphi + 3\cos\varphi\, i^2 \operatorname{sen}^2\varphi + i^3 \operatorname{sen}^3\varphi \\ &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi + (3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi)i\end{aligned}$$

Separando las partes reales e imaginarias:

$$\cos 3\varphi = \cos^2\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi\,; \qquad \operatorname{sen} 3\varphi = 3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi$$

Ejercicio 10. *Calcular el punto que se obtiene al girar* $P(1,2)$ *en torno al punto* $C(-1,3)$ *un ángulo de* 150^o.

Solución:

Aplicamos la fórmula del giro:

$$z' = c + (z-c)e^{i\varphi}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}z' &= -1+3i+(1+2i+1-3i)(\cos 150^o + i \operatorname{sen} 150^o) \\ &= -1+3i+(2-i)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= -1+3i-\sqrt{3}+i+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2} \\ &= \frac{-1-2\sqrt{3}}{2} + \frac{8+\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

El punto es $P'\left(\dfrac{-1-2\sqrt{3}}{2}, \dfrac{8+\sqrt{3}}{2}\right)$.

---

11. Geometría

Ejercicio 1. *Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $2y - x = 0$ que pasa por el punto $P(1, -3)$.*

Solución:

La recta dada tiene pendiente $\frac{1}{2}$ de modo que la perpendicular tendrá pendiente -2. La ecuación será:

$$y + 3 = -2(x - 1)$$

Ejercicio 2. *Los vértices de un triángulo son $A(3, -1)$, $B(7, 3)$ y $C(1, 5)$. Calcular la longitud de la altura correspondiente al vértice A.*

Solución:

La pendiente de la recta BC es

$$m = \frac{5-3}{1-7} = -\frac{1}{3}$$

La ecuación de BC es entonces:

$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 7)$$

$$3y - 9 = -x + 7$$

$$x + 3y - 16 = 0$$

La longitud de la altura es la distancia desde A a esta recta:

$$h_A = \frac{|3 - 3 - 16|}{\sqrt{1+9}} = \frac{16}{\sqrt{10}}$$

Ejercicio 3. *Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(-3, 5)$ y forman un ángulo de 45^o con la recta $6x - 5y = 17$.*

Solución:

La recta que nos dan tiene pendiente $\frac{6}{5}$. La pendiente de la que forma un ángulo de 45° cumple que:

$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = 1 = \left|\frac{m - \frac{6}{5}}{1 + \frac{6m}{5}}\right| = \left|\frac{5m-6}{5+6m}\right|$$

Esta escuación tiene dos soluciones:

$$\frac{5m-6}{5+6m} = 1 \quad\Longrightarrow\quad 5m - 6 = 5 + 6m \quad\Longrightarrow\quad m = -11$$

$$\frac{5m+6}{5+6m} = -1 \quad\Longrightarrow\quad 5m - 6 = -5 - 6m \quad\Longrightarrow\quad m = \frac{1}{11}$$

de forma que las dos rectas son:

$$y - 5 = -11(x+3) \qquad \text{y} \qquad y - 5 = \frac{1}{11}(x+3)$$

Ejercicio 4. *Determinar el punto A' simétrico del $A(-3,-2)$ respecto a la recta $4x + y = 3$.*

Solución:

La recta que nos dan tiene pendiente -4. La perpendicular por el punto A es:

$$y + 2 = \frac{1}{4}(x+3)$$
$$4y + 8 = x + 3$$
$$x - 4y - 5 = 0$$

La intersección de la recta dada con la perpendicular:

$$\begin{cases} x - 4y - 5 = 0 \\ 4x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

sistema que tiene como solución el punto $P(1,-1)$. Éste, es punto medio entre A y su simétrico. Por consiguiente:

$$1 = \frac{x-3}{2} \implies x = 5$$
$$-1 = \frac{y-2}{2} \implies y = 0$$

El simétrico es el punto $A'(5,0)$.

Ejercicio 5. *Examinar si las rectas $3x+4y+3=0$ y $6x+8y+11=0$ son paralelas y, en caso afirmativo, calcular la distancia entre ambas.*

Solución:

Las rectas son paralelas puesto que los coeficientes de las incógnitas son proporcionales. Las escribimos con los mismos coeficientes:

$$3x + 4y + 3 = 0$$
$$3x + 4y + \frac{11}{2} = 0$$

Su distancia es:

$$d = \frac{|\frac{11}{2} - 3|}{\sqrt{9+16}} = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 6. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P(6,6)$ y es tangente a la recta $5x + 7y + 2 = 0$ en el punto $Q(1,-1)$.

Solución:

El centro de la circunferencia se encuentra en la mediatriz de los dos puntos y en la perpendicular a la tangente trazada por el punto de tangencia.

La ecuación de la mediatriz es:

$$\begin{aligned}&(x-6)^2+(y-6)^2=(x-1)^2+(y+1)^2\\&-12x+36-12y+36=-2x+1+2y+1\\&5x+7y-35=0\end{aligned}$$

La pendiente de la tangente es $-\frac{5}{7}$. La ecuación de la perpendicular es:

$$\begin{aligned}&y+1=\frac{7}{5}(x-1)\\&5y+5=7x-7\\&7x-5y-12=0\end{aligned}$$

El centro de la circunferencia es la solución del sistema:

$$\begin{cases}5x+7y-35=0\\7x-5y-12=0\end{cases}$$

Resolviendo se obtiene el punto $C\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$. Calculando la distancia a los puntos o a la tangente se obtiene $r^2=\frac{37}{2}$.

La ecuación de la circunferencia es:

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{37}{2}$$

Ejercicio 7. *Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene por diámetro el segmento de la recta $x+2y-4=0$, comprendido entre los ejes de coordenadas.*

Solución:

Los puntos de corte de la recta con los ejes son $A(4,0)$ y $B(0,2)$. El punto medio de este segmento $C(2,1)$ es el centro de la circunferencia. El radio es la distancia del centro a uno cualquiera de los puntos:

$$r^2=(2-4)^2+(1-0)^2=5$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=5$$

Ejercicio 8. *Una circunferencia de centro $C(6,5)$ es tangente a la recta $4x-3y+5=0$. Hallar la ecuación de la circunferencia.*

Solución:

El radio es la distancia desde el centro a la tangente:

$$r=\frac{|4\cdot 6-3\cdot 5+5|}{\sqrt{16+9}}=\frac{14}{5}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x-6)^2 + (y-5)^2 = \frac{196}{25}$$

Ejercicio 9. *Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos* $A(-3,0)$ *y* $B(2,-5)$ *y tiene su centro en la recta* $2x+3y+21=0$.

Solución:

El centro se encuentra en el punto de intersección de la recta dada y la mediatriz de los dos puntos. La ecuación de la mediatriz es:

$$(x+3)^2 + y^2 = (x-2)^2 + (y+5)^2$$
$$6x + 9 = -4x + 4 + 10y + 25$$
$$10x - 10y - 20 = 0$$
$$x - y - 2 = 0$$

El centro de la circunferencia es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 2x + 3y + 21 = 0 \end{cases} \implies C(-3,-5)$$

El radio se calcula como distancia del centro a uno cualquiera de los puntos:

$$r^2 = (-3+3)^2 + (-5-0)^2 = 25$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x+3)^2 + (y+5)^2 = 25$$

Ejercicio 10. *Hallar las coordenadas de los puntos situados, en la recta* $x+2y-3=0$ *y que disten 2 unidades de la* $4x-3y+9=0$.

Solución:

Calculamos las ecuaciones de las paralelas que disten 2 unidades. Estas paralelas tienen la forma $4x - 3y + C = 0$. Calculamos C:

$$\frac{|C-9|}{\sqrt{16+9}} = 2 \implies C - 9 = \pm 10$$

y obtenemos las rectas $4x-3y-1=0$ $4x-3y+19=0$.

Los puntos que nos piden son las intersecciones de $x+2y-3=0$ con estas rectas:

$$\begin{cases} 4x - 3y - 1 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y + 19 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo estos sistemas obtenemos los puntos $P(1,1)$ y $Q\left(-\frac{29}{11}, \frac{31}{11}\right)$.

Ejercicio 11. *Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto* $P(5,-1)$ *y es perpendicular a la recta* $3x+6y-1=0$.

Solución:

La recta dada tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ de modo que la perpendicular tendrá pendiente 2. La ecuación será:

$$y+1=2(x-5)$$

Ejercicio 12. *Los vértices de un triángulo son* $A(1,5)$, $B(7,3)$ *y* $C(3,-1)$. *Calcular la longitud de la altura correspondiente al vértice* A.

Solución:

La pendiente de la recta BC es

$$m=\frac{-1-3}{3-7}=1$$

La ecuación de BC es entonces:

$$y-7=1(x-3)$$
$$x-y+4=0$$

La longitud de la altura es la distancia desde A a esta recta:

$$h_A=\frac{|1-5-4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

Ejercicio 13. *Hallar las ecuaciones de las rectas que pasando por el punto* $P(-3,5)$ *forman un ángulo de* 45° *con la recta* $3x-2y=17$.

Solución:

La recta que nos dan tiene pendiente $\frac{3}{2}$. La pendiente de la que forma un ángulo de 45° cumple que:

$$\operatorname{tg}45^{\mathrm{o}}=1=\left|\frac{m-\frac{3}{2}}{1+\frac{3m}{2}}\right|=\left|\frac{2m-3}{2+3m}\right|$$

Esta ecuación tiene dos soluciones:

$$\frac{2m-3}{2+3m}=1 \quad\Longrightarrow\quad m=-5$$
$$\frac{2m-3}{2+3m}=-1 \quad\Longrightarrow\quad m=\frac{1}{5}$$

de forma que las dos rectas son:

$$y-5=-5(x+3) \qquad \text{y} \qquad y-5=\frac{1}{5}(x+3)$$

Ejercicio 14. *Determinar el punto A' simétrico del $A(-4,0)$ respecto a la recta $2x+3y=5$.*

Solución:

La recta que nos dan tiene pendiente $-\frac{2}{3}$. La perpendicular por el punto A es:

$$y=\frac{3}{2}(x+4)$$
$$2y=3x+12$$
$$3x-2y+12=0$$

La intersección de la recta dada con la perpendicular:

$$\begin{cases}3x-2y+12=0\\2x+3y-5=0\end{cases}$$

sistema que tiene como solución el punto $P(-2,3)$. Éste, es punto medio entre A y su simétrico. Por consiguiente:

$$-2=\frac{-4+x'}{2}\quad\Longrightarrow\quad x'=0$$
$$3=\frac{y'}{2}\quad\Longrightarrow\quad y'=6$$

El simétrico es el punto $A'(0,6)$.

Ejercicio 15. *Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene por diámetro el segmento de la recta $3x+2y-12=0$ comprendido entre los ejes coordenados.*

Solución:

Los puntos de corte de la recta con los ejes son $A(4,0)$ y $B(0,6)$. El punto medio de este segmento $C(2,3)$ es el centro de la circunferencia. El radio es la distancia del centro a uno cualquiera de los puntos:

$$r^2=(2-4)^2+(3-0)^2=13$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=13$$

Ejercicio 16. *Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-1,0)$ y $B(3,-2)$ y tiene su centro en la recta $x+y-3=0$.*

Solución:

El centro se encuentra en el punto de intersección de la recta dada y la mediatriz de los dos puntos. La ecuación de la mediatriz es:

$$(x+1)^2+y^2=(x-3)^2+(y+2)^2$$
$$2x+1=-6x+9+4y+4$$
$$8x-4y-12=0$$
$$2x-y-3=0$$

El centro de la circunferencia es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \implies C(2,1)$$

El radio se calcula como distancia del centro a uno cualquiera de los puntos:

$$r^2 = (2+1)^2 + (1-0)^2 = 10$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$$

Ejercicio 17. *Hallar la ecuación de cada una de las paralelas a la $4x - 3y + 4 = 0$ y que distan de ella una unidad.*

Solución:

Puesto que son paralelas, estas rectas tienen una ecuación de la forma $4x - 3y + C = 0$. Como su distancia a la recta dada es igual a 1, se cumple que:

$$\frac{|4-C|}{5} = 1 \implies 4 - C = \pm 5 \implies C = -1 \quad \text{o} \quad C = 9$$

Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} &4x - 3y - 1 = 0 \\ &4x - 3y + 9 = 0 \end{aligned}$$

---

12. Segundo examen de geometría. Grupo Z

Ejercicio 1. *Dadas las rectas $2x + y - 1 = 0$, $x - y - 2 = 0$, hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de ambas y es perpendicular a la $3x + 6y - 1 = 0$.*

Solución:

La pendiente de $3x + 6y - 1 = 0$ es $-\frac{1}{2}$. La perpendicular tendrá entonces pendiente 2.

Además debe pasar el punto intersección de las rectas:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

La solución de este sistema es el punto $(1, -1)$. Así pues, la ecuación de la perpendicular es:

$$y + 1 = 2(x - 1)$$

Ejercicio 2. *Calcular los coeficientes a y b de las ecuaciones $ax-2y=0$; $bx+6y=5$, sabiendo que las rectas que representan son perpendiculares y que la primera pasa por el punto $(2,3)$.*

Solución:

Si la primera recta pasa por el punto $(2,3)$ se cumple que:

$$2a-6=0 \quad\Longrightarrow\quad a=3$$

Si además son perpendiculares:

$$\begin{aligned}&ab-2\cdot 6=0\\&3b-12=0\end{aligned}$$

o sea que $b=4$.

Ejercicio 3. *Los vértices de un triángulo son $A(2,0)$, $B(3,2)$ y $C(4,-3)$. Hallar la longitud de la altura correspondiente al vértice B.*

Solución:

la ecuación del lado AC es:

$$y-0=\frac{-3}{2}(x-2) \qquad \text{o bien} \qquad 3x+2y-6=0$$

La altura que nos piden es la distancia desde el punto $B(3,2)$ a esta recta:

$$h=\frac{|3\cdot 3+2\cdot 2-6|}{\sqrt{9+4}}=\frac{7}{\sqrt{13}}$$

Ejercicio 4. *Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(2,1)$ y distan 3 unidades de $A(2,-4)$.*

Solución:

Las rectas que pasan por $P(2,1)$ tienen como ecuación:

$$\begin{aligned}&y-1=m(x-2)\\&mx-y+1-2m=0\end{aligned}$$

Puesto que la distancia de esta recta a $A(2,-4)$ debe ser 3:

$$\frac{|2m+4+1-2m|}{\sqrt{m^2+1}}=3 \qquad\qquad \text{elevando al cuadrado}$$

$$\frac{25}{m^2+1}=9$$

$$m^2+1=\frac{25}{9}$$

$$m^2=\frac{16}{9} \quad\Longrightarrow\quad m=\pm\frac{4}{3}$$

Las rectas que nos piden son:

$$y-1=\frac{4}{3}(x-2) \qquad \text{y} \qquad y-1=-\frac{4}{3}(x-2)$$

Ejercicio 5. *¿En qué punto de la recta $3x + 4y = 30$ tendrá qué reflejarse un rayo luminoso que parte del punto $F(5, 10)$ para que después de la reflexión pase por el punto $A(13, 4)$?*

Solución:

En primer lugar calcularemos el punto simétrico de $F(5, 10)$ respecto de la recta $3x + 4y = 30$:

– Ecuación de la perpendicular por el punto a la recta:

$$y - 10 = \frac{4}{3}(x - 5) \qquad \Longrightarrow \qquad 4x - 3y + 10 = 0$$

– Intersección del eje de simetría con la perpendicular:

$$\begin{cases} 4x - 3y + 10 = 0 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad P(2, 6)$$

– Punto simétrico:

$$2 = \frac{5 + x'}{2}$$
$$6 = \frac{10 + y'}{2}$$

De forma que el punto simétrico es $F'(-1, 2)$.

Ahora calculamos la recta $F'A$:

$$y - 2 = \frac{2}{14}(x + 1) \qquad \text{o bien} \qquad x - 7y + 15 = 0$$

El punto de intersección de esta recta con la recta que nos dan es el punto que nos piden:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 30 \\ x - 7y + 15 = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es el punto $(6, 3)$.

Ejercicio 6. *Calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0, 5)$, $B(0, 1)$ y $C(2, 3)$.*

Solución:

La mediatriz de AB es $y = 3$.

La mediatriz de BC es:

$$\begin{aligned} &x^2 + (y - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \\ &-2y + 1 = -4x + 4 - 6y + 9 \\ &4x + 4y - 12 = 0 \\ &x + y - 3 = 0 \end{aligned}$$

El centro de la circunferencia es el punto de intersección de las dos mediatrices, es decir, la solución del sistema:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad P(0, 3)$$

El radio es la distancia desde P a uno cualquiera de los puntos:

$$r^2 = (0 - 0)^2 + (3 - 5)^2 = 4$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + (y-3)^2 = 4$$

Ejercicio 7. *Hallar la ecuación de la tangente trazada en su punto* $(2,1)$ *a la circunferencia* $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$.

Solución:

El centro de la circunferencia es $C(3,1)$. La pendiente del radio en el punto dado es $m = \frac{0}{1} = 0$. Puesto que el radio está sobre una recta horizontal (de pendiente cero), la tangente que es perpendicular al radio será una recta vertical. Como ha de pasar por $(2,1)$ su ecuación será $x = 2$.

Ejercicio 8. *En la circunferencia* $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$*, determinar el punto más lejano y el más cercano al origen de coordenadas.*

El centro de la circunferencia es el punto $C(-1,-2)$. La ecuación de la recta que pasa por el origen y por el centro es:

$$y = 2x$$

Los puntos que nos piden son las intersecciones de la circunferencia con esta recta:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0 \\ y = 2x \end{cases}$$

Resolvemos:

$$x^2 + 4x^2 + 2x + 8x - 5 = 0$$

$$5x^2 + 10x - 5 = 0$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Los puntos son:

$$A\left(-1+\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2}\right) \qquad \text{y} \qquad B\left(-1-\sqrt{2}, -2-2\sqrt{2}\right)$$

---

13. Segundo examen de geometría. Grupo W.

Ejercicio 1. *Dada la recta $ax + by = 1$, determinar a y b, sabiendo que es perpendicular a $2x + 4y = 11$ y pasa por el punto $P(1, 3/2)$.*

Solución:

Puesto que el punto $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ pertenece a la primera recta, se cumple que:

$$1 \cdot a + \frac{3}{2}b = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2a + 3b = 2$$

Además para que las dos rectas sean perpendiculares debe cumplirse que:

$$2a + 4b = 0 \quad \Longrightarrow \quad a + 2b = 0$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 2 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$$

y obtenemos $a = 4$, $b = -2$.

Ejercicio 2. *Hallar el área del triángulo de vértices $A(2, 1)$, $B(6, 3)$, $C(-1, 4)$.*

Solución:

La base es la longitud de uno de los lados, por ejemplo, BC:

$$BC = \sqrt{(-1-6)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Para calcular la altura debemos obtener previamente la ecuación del lado BC:

$$\begin{aligned} &y - 4 = \frac{1}{-7}(x + 1) \\ &-7y + 28 = x + 1 \\ &x + 7y - 27 = 0 \end{aligned}$$

Ahora calculamos la distancia desde A a la recta BC:

$$h = \frac{|2 + 7 - 27|}{\sqrt{50}} = \frac{18}{5\sqrt{2}}$$

Finalmente, el área es:

$$S = \frac{1}{2}\, 5\sqrt{2}\, \frac{18}{5\sqrt{2}} = 9$$

Ejercicio 3. *Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(-3, 0)$ y forman con la $3x - 5y + 9 = 0$ un ángulo cuya tangente es $1/3$.*

Solución:

La pendiente de esas rectas cumple que:

$$\left|\frac{m - \frac{3}{5}}{1 + \frac{3m}{5}}\right| = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{5m-3}{5+3m} = \pm\frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad 15m - 9 = \pm(5 + 3m)$$

Resolviendo las ecuaciones obtenemos $m = \frac{7}{6}$ y $m = \frac{2}{9}$. Las ecuaciones de las rectas son:

$$y = \frac{7}{6}(x+3)$$
$$y = \frac{2}{9}(x+3)$$

Ejercicio 4. *Un triángulo isósceles tiene por base el segmento que une los puntos $A(1,-2)$ y $B(6,3)$ y el otro vértice está situado en la recta $3x - y + 8 = 0$. Hallar las coordenadas del tercer vértice.*

Solución:

Puesto que el triángulo es isósceles, el tercer vértice debe estar en la mediatriz de A y B:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = (x-6)^2 + (y-3)^2$$
$$-2x + 1 + 4y + 4 = -12x + 36 - 6y + 9$$
$$10x + 10y - 40 = 0$$
$$x + y - 4 = 0$$

El tercer vértice es el punto de intersección de la recta dada y la mediatriz:

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 3x - y + 8 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos el punto $C(-1,5)$

Ejercicio 5. *Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(1,1)$ y distan dos unidades del $C(2,3)$.*

Solución:

Las rectas que pasan por $P(1,1)$ tienen por ecuación:

$$y - 1 = m(x-1) \quad \Longrightarrow \quad mx - y - m + 1 = 0$$

Si la distancia de este punto a $C(2,3)$ vale 2:

$$\frac{|2m - 3 - m + 1|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|m-2|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$$

o, elevando al cuadrado:

$$m^2 - 4m + 4 = 4(m^2+1)$$
$$3m^2 + 4m = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = 0,\ m = -\frac{4}{3}$$

Las ecuaciones de las rectas son:

$$y - 1 = 0, \qquad x - 1 = -\frac{4}{3}(x-1)$$

Ejercicio 6. *Se considera la recta $3x+4y+1=0$ y, sobre ella, un punto de abscisa igual a 1. Calcular los puntos de esa recta que distan 5 unidades del punto dado.*

Solución:

La ordenada del punto la obtenemos sustituyendo $x=1$ en la ecuación de la recta:

$$3+4y+1=0 \quad \Longrightarrow \quad y=-1$$

Los puntos que nos piden son las intersecciones de la recta dada con la circunferencia de centro $(1,-1)$ y radio 5:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2=25 \\ 3x+4y+1=0 \end{cases}$$

Despejamos y en la ecuación de la recta:

$$y=\frac{-3x-1}{4}$$

y sustituimos en la ecuación de la circunferencia:

$$(x-1)^2+\left(\frac{-3x-1}{4}+1\right)^2=25$$

$$(x-1)^2+\left(\frac{-3x-3}{4}\right)^2=25$$

$$(x-1)^2+\frac{9(x-1)^2}{16}=25$$

$$16(x-1)^2+9(x-1)^2=25\cdot 16$$

$$25(x-1)^2=25\cdot 16$$

$$(x-1)^2=16$$

$$x-1=\pm 4$$

y de aquí $x=5$ o $x=-3$. Los puntos que nos piden son $(5.-4)$ y $(-3,2)$.

Ejercicio 7. *Determinar los valores de c a fin de que la recta $3x+4y+c=0$ sea tangente a la circunferencia $x^2+y^2-2x-24=0$.*

Solución:

El centro de la circunferencia es el punto $C(1,0)$. La ecuación puede escribirse:

$$(x-1)^2+y^2=25$$

de modo que el radio es igual a 5.

La distancia de la tangente al centro debe ser igual al radio:

$$\frac{|3+c|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5 \quad \Longrightarrow \quad 3+c=\pm 25$$

O sea que $c=22$ o $c=-28$.

Ejercicio 8. *Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto* $(3, 0)$ *y es tangente a la circunferencia* $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 = 0$ *en el punto* $(3, 3)$.

Solución:

El centro de la circunferencia que nos piden debe encontrarse en la mediatriz de los puntos $(3, 0)$ y $(3, 3)$ que es la recta $y = \frac{3}{2}$.

También debe encontrarse en la recta que une el centro de la circunferencia dada $C(1, -2)$ con el punto de tangencia $(3, 3)$. La ecuación de esta recta es:

$$y + 2 = \frac{5}{2}(x - 1)$$
$$2y + 4 = 5x - 5$$
$$5x - 2y - 9 = 0$$

El centro es entonces la solución de sistema:

$$\begin{cases} 5x - 2y - 9 = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Operando resulta $C\left(\frac{12}{5}, \frac{3}{2}\right)$

El radio es la distancia desde C a cualquiera de los puntos de la circunferencia:

$$r^2 = \left(\frac{12}{5} - 3\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 0\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{9}{4} = \frac{261}{100}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$\left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{261}{100}$$

---

14. Probabilidad. Grupo Z

Ejercicio 1. *Los sucesos A y B son tales que* $\mathrm{p}(A) = \frac{2}{5}$, $\mathrm{p}(B) = \frac{11}{20}$ *y* $\mathrm{p}(A|B) = \frac{2}{11}$.

(a) *Calcular* $\mathrm{p}(A \cap B)$ *y* $\mathrm{p}(A \cup B)$.

(b) *Decidir si los sucesos A y B son independientes.*

Solución:

(a) Por la definición de probabilidadcondicionada:

$$\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(B)\,\mathrm{p}(A \mid B) = \frac{11}{20} \cdot \frac{2}{11} = \frac{1}{10}$$

Y por la regla de la suma:

$$\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{11}{20} - \frac{1}{10} = \frac{17}{20}$$

(b)

$$\mathrm{p}(A)\,\mathrm{p}(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{11}{20} = \frac{11}{50} \neq \mathrm{p}(A \cap B)$$

Los sucesos son dependientes.

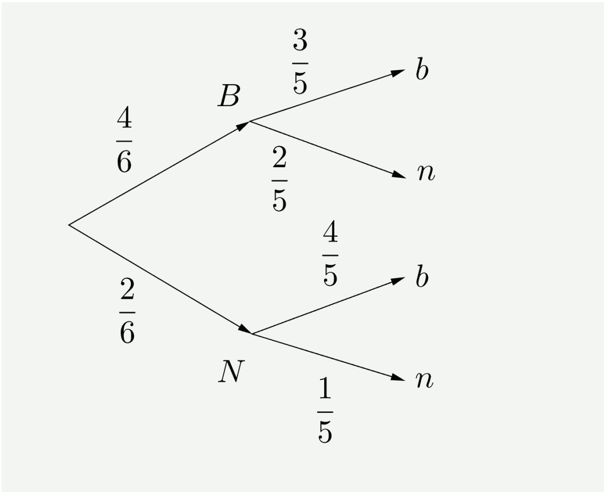
También se ve que son dependientes porque $\mathrm{p}(A \mid B) \neq \mathrm{p}(A)$.

Ejercicio 2. *De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas.*

(*a*) *¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas?*

(*b*) *Si la segunda bola es negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo sea?*

Solución:



(*a*) $$\mathrm{p}\,(B \cap b) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

(*b*) $$\mathrm{p}\,(N \mid n) = \frac{\mathrm{p}\,(n \cap N)}{\mathrm{p}\,(n)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

Ejercicio 3. *Sean A y B dos sucesos tales que* $p(A) = 0{,}7$, $p(B) = 0{,}6$ *y* $p(A \cup B) = 0{,}9$.

(*a*) *Justifica si A y B son independientes.*

(*b*) *Calcula* $\mathrm{p}\,(A \mid \bar{B})$ *y* $\mathrm{p}\,(B \mid \bar{A})$.

Solución:

(*a*) Calculamos $\mathrm{p}\,(A \cap B)$:

$$\mathrm{p}\,(A \cap B) = \mathrm{p}\,(A) + \mathrm{p}\,(B) - \mathrm{p}\,(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}9 = 0{,}4$$

Puesto que $\mathrm{p}\,(A \cap B) \neq \mathrm{p}\,(A)\,\mathrm{p}\,(B)$, los sucesos no son independientes.

(*b*) $$\mathrm{p}\,(A \mid \bar{B}) = \frac{\mathrm{p}\,(A \cap \bar{B})}{\mathrm{p}\,(\bar{B})} = \frac{\mathrm{p}\,(A - B)}{\mathrm{p}\,(\bar{B})} = \frac{0{,}7 - 0{,}4}{0{,}4} = \frac{3}{4}$$

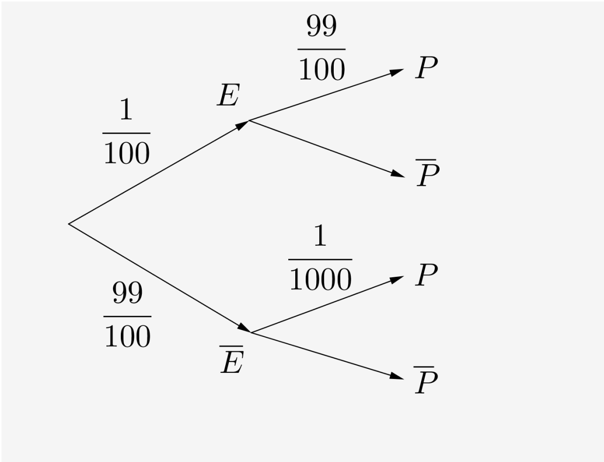
$$\mathrm{p}\,(B \mid \bar{A}) = \frac{\mathrm{p}\,(B \cap \bar{A})}{\mathrm{p}\,(\bar{A})} = \frac{\mathrm{p}\,(B - A)}{\mathrm{p}\,(\bar{A})} = \frac{0{,}6 - 0{,}4}{0{,}3} = \frac{2}{3}$$

Ejercicio 4. *En una empresa se producen dos tipos de bombillas, halógenas y de bajo consumo en una proporción de 3 a 4 respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es de* 0,02*, y las de que lo sea una de bajo consumo es de* 0,09*. Se escoge una bombilla al azar:*

(*a*) *Calcular la probabilidad de que no sea defectuosa.*

(*b*) *Si la bombilla escogida resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?*

Solución:



(*a*) $$\mathrm{p}\,(\bar{D}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{98}{100} + \frac{4}{7} \cdot \frac{91}{100} = \frac{94}{100}$$

(*b*) $$\mathrm{p}\,(H \mid \bar{D}) = \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{98}{100}}{\frac{94}{100}} = \frac{21}{47}$$

Ejercicio 5. *Se lanza un dado dos veces consecutivas. Calcula la probabilidad de que en el primer lanzamiento haya salido un 1 sabiendo que la suma de las dos puntuaciones es 4.*

Solución:

Se puede obtener suma cuatro de tres maneras diferentes 13, 31 y 22. Por tanto, la probabilidad de obtener suma cuatro al lanzar los dos dados es $\frac{3}{36}$. Por otra parte, la probabilidad de sacar 1 en el primer lanzamiento y además suma cuatro es $\frac{1}{36}$ ya que solamente hay un resultado favorable 13. Entonces:

$$\mathrm{p}\,(1 \mid \textsc{suma cuatro}) = \frac{\mathrm{p}\,(1 \cap \textsc{suma cuatro})}{\mathrm{p}\,(\textsc{suma cuatro})} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 6. *Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar y sin reemplazamiento cuatro huevos. Calcula la probabilidad de extraer:*

(*a*) *Los cuatro huevos en buen estado.*

(*b*) *De entre los cuatro huevos, exactamente uno roto.*

Solución:

(*a*) $$\mathrm{p} = \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{14}{33}$$

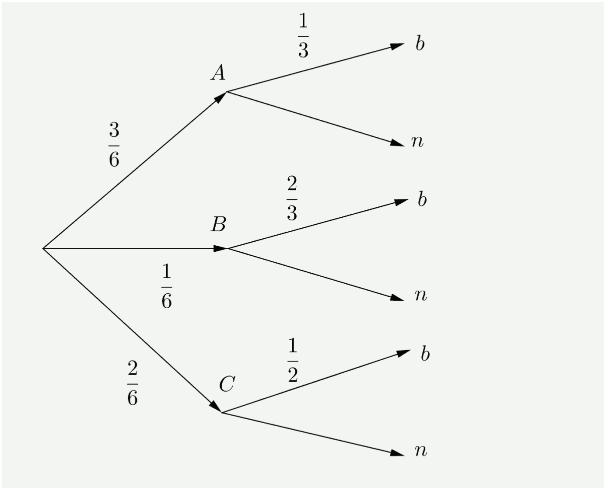
(*b*) $$\mathrm{p} = 4 \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{33}$$

Ejercicio 7. *Se dispone de tres urnas A, B y C. La urna A contiene una bola blanca y 2 bolas negras, la urna B contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra y la urna C contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Se lanza un dado equilibrado y si sale 1, 2 o 3 se escoge la urna A, si sale el 4 se escoge la urna B y si sale 5 o 6 se escoge la urna C. A continuación se extrae una bola de la urna elegida.*

(*a*) *¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?*

(*b*) *Si se sabe que la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola haya sido extraída de la urna C?*

Solución:



(*a*)
$$\mathrm{p}\,(b) = \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{9}$$

(*b*)
$$\mathrm{p}\,(C \mid b) = \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{8}$$

Ejercicio 8. *Una clase tiene 24 alumnos y todos ellos cursan inglés y matemáticas. La mitad aprueban inglés, 16 aprueban matemáticas y 4 suspenden inglés y matemáticas.*

(*a*) *Calcula la probabilidad de que, al elegir un alumno de esta clase al azar, resulte que aprueba matemáticas y suspende inglés.*

(*b*) *En esta clase, ¿son independientes los sucesos* "aprobar inglés" *y* "aprobar matemáticas"*?*

Solución:

(*a*) Sea I el suceso *el alumno aprueba inglés* y M el suceso *el alumno aprueba matemáticas.* Entonces tenemos que:

$$\frac{4}{24} = \mathrm{p}\,(\bar{I} \cap \bar{M}) = \mathrm{p}\,(\overline{I \cup M}) \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{p}\,(I \cup M) = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

Entonces:

$$\mathrm{p}\,(I \cap M) = \mathrm{p}\,(I) + \mathrm{p}\,(M) - \mathrm{p}\,(I \cup M) = \frac{12}{24} + \frac{16}{24} - \frac{20}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

y de aquí:

$$\mathrm{p}\,(M \cap \bar{I}) = \mathrm{p}\,(M - I) = \frac{16}{24} - \frac{8}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

(b)
$$\mathrm{p}\,(I)\,\mathrm{p}\,(M) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$\mathrm{p}\,(I\cap M) = \frac{1}{3}$$

Luego los sucesos son independientes.

---

15. Probabilidad. Grupo W.

Ejercicio 1. *Sean A y B dos sucesos con $\mathrm{p}\,(A) = 0{,}5$, $\mathrm{p}\,(B) = 0{,}3$ y $\mathrm{p}\,(A\cap B) = 0{,}1$. Calcular las siguientes probabilidades:*

(a) $\mathrm{p}\,(A\cup B)$ (b) $\mathrm{p}\,(A\mid B)$ (c) $\mathrm{p}\,(A\mid A\cap B)$ (d) $\mathrm{p}\,(A\mid A\cup B)$

Solución:

(a)
$$\mathrm{p}\,(A\cup B) = \mathrm{p}\,(A) + \mathrm{p}\,(b) - \mathrm{p}\,(A\cap B) = 0{,}5 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}7$$

(b)
$$\mathrm{p}\,(A\mid B) = \frac{\mathrm{p}\,(A\cap B)}{\mathrm{p}\,(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3}$$

(c)
$$\mathrm{p}\,(A\mid A\cap B) = 1$$

(d)
$$\mathrm{p}\,(A\mid A\cup B) = \frac{\mathrm{p}\,(A)}{\mathrm{p}\,(A\cup B)} = \frac{0{,}5}{0{,}7} = \frac{5}{7}$$

Ejercicio 2. *El 60 % de los alumnos de un centro aprobaron Filosofía y el 70 % aprobaron Matemáticas. Además, el porcentaje de alumnos que aprobaron Filosofía habiendo aprobado Matemáticas es del 80 %. Si un alumno sabe que ha aprobado Filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también Matemáticas?*

Solución:

Los datos son $\mathrm{p}\,(F) = 0{,}60$, $\mathrm{p}\,(M) = 0{,}7$ y $\mathrm{p}\,(F\mid M) = 0{,}8$. Nos piden $\mathrm{p}\,(M\mid F)$.

Tenemos que:
$$\mathrm{p}\,(F\cap M) = \mathrm{p}\,(M)\cdot\mathrm{p}\,(F\mid M) = 0{,}7\cdot 0{,}8 = 0{,}56$$

Entonces:
$$\mathrm{p}\,(M\mid F) = \frac{\mathrm{p}\,(F\cap M)}{\mathrm{p}\,(F)} = \frac{0{,}56}{0{,}60} = \frac{14}{15}$$

Ejercicio 3. *En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados se pide calcular la probabilidad de obtener:*

(*a*) *Al menos un dos.*

(*b*) *Tres números distintos.*

Solución:

(*a*)
$$\mathrm{p}\,(\text{'al menos un dos'}) = 1 - \mathrm{p}\,(\text{'ningún dos'}) = 1 - \frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6} = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

(*b*) La probabilidad de obtener en el segundo lanzamiento un número diferente que en el primero es $\frac{5}{6}$ y la probabilidad de obtener en el tercer lanzamiento un número diferente que en los dos primeros es $\frac{4}{6}$. Entonces:
$$p = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Ejercicio 4. *A y B son dos sucesos tales que* $\mathrm{p}\,(A) = 0{,}25$, $\mathrm{p}\,(B) = 0{,}6$ *y* $\mathrm{p}\,(A \cup B) = 0{,}7$.

(*a*) *Halle* $\mathrm{p}\,(A \cap B)$.

(*b*) *Determine si los sucesos A y B son independientes.*

Solución:

(*a*)
$$\mathrm{p}\,(A \cap B) = \mathrm{p}\,(A) + \mathrm{p}\,(B) - \mathrm{p}\,(A \cup B) = 0{,}25 + 0{,}6 - 0{,}7 = 0{,}15$$

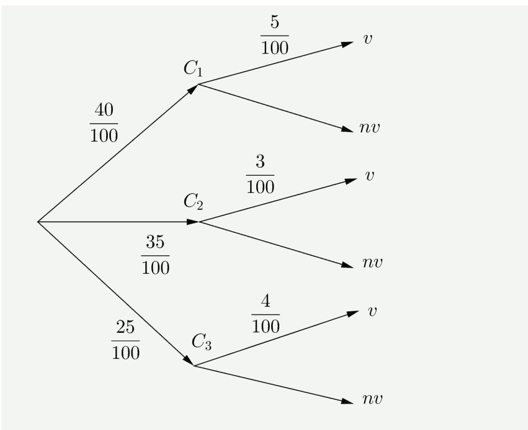
(*b*) Puesto que $\mathrm{p}\,(A) \cdot \mathrm{p}\,(B) = 0{,}25 \cdot 0{,}6 = 0{,}15 = \mathrm{p}\,(A \cap B)$ los sucesos son independientes.

Ejercicio 5. *Los pianistas de la isla Sordina se forman en tres conservatorios C_1, C_2 y C_3 que forman al 40 %, 35 % y 25 % de los pianistas respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5 %, 3 % y 4 % respectivamente. Se selecciona un pianista al azar:*

(*a*) *Calcular la probabilidad de que sea virtuoso.*

(*b*) *El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se haya formado en el primer conservatorio C_1.*

Solución:



(a) $$\mathrm{p}(v) = \frac{40}{100}\cdot\frac{5}{100} + \frac{35}{100}\cdot\frac{3}{100} + \frac{25}{100}\cdot\frac{4}{100} = \frac{405}{10000} = \frac{81}{2000}$$

(b) $$\mathrm{p}(C_1 \mid v) = \frac{\frac{40}{100}\cdot\frac{5}{100}}{\frac{405}{10000}} = \frac{200}{405} = \frac{40}{81}$$

Ejercicio 6. *El 45 % del censo de una cierta ciudad vota al candidato A; el 35 % al candidato B y el resto se abstiene. Se eligen al azar tres personas del censo. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:*

(a) *Dos personas votan al candidato A y otra al B.*

(b) *Al menos una de las tres personas se abstienen.*

Solución:

(a)

$$p = 3\cdot\frac{45}{100}\cdot\frac{45}{100}\cdot\frac{35}{100} = \frac{1701}{8000}$$

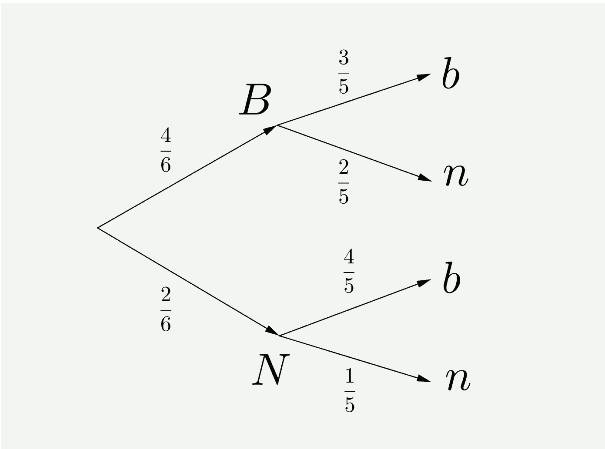
(b) $$p = 1 - \left(\frac{80}{100}\right)^3 = 1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125}$$

Ejercicio 7. *De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas.*

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas?*

(b) *Si la segunda bola es negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo sea?*

Solución:



(a) $$\mathrm{p}(B \cap b) = \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

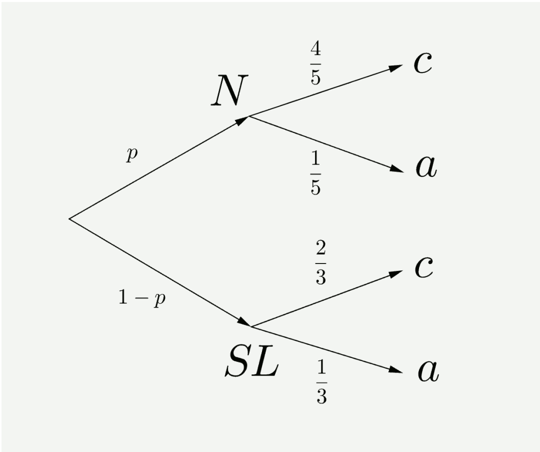
(b) $$\mathrm{p}(N \mid n) = \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Ejercicio 8. *Natasha vive en Chicago y tiene familia en Nashville y St. Louis. Cada vez que quiere visitar a su familia, o bien va en avión o bien va en coche.*
Cuando va a Nashville, la probabilidad de que vaya en coche es $\frac{4}{5}$*, y cuando va a St. Louis la probabilidad de que vaya en avión es* $\frac{1}{3}$*.*
Sabiendo que cuando va a visitar a su familia la probabilidad de que vaya en coche es $\frac{13}{18}$*, Halle la probabilidad de que para un viaje en particular,*

(*a*) *Vaya a Nashville.*

(*b*) *Esté camino de Nashville, sabiendo que está yendo en avión.*

Solución:



(*a*) Si llamamos $p = \mathrm{p}\,(N)$ entonces:

$$\frac{13}{18} = p \cdot \frac{4}{5} + (1-p) \cdot \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{5}{12}$$

(*b*)
$$\mathrm{p}\,(N \mid A) = \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{5} + \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3}{10}$$

---

16. Variable aleatoria. Probabilidad. Grupo W.

Ejercicio 1. *Los sucesos A y B son tales que* $\mathrm{p}\,(A) = 0{,}3$ *y* $\mathrm{p}\,(B) = 0{,}4$.

(*a*) *Calcular el valor de* $\mathrm{p}\,(A \cup B)$ *cuando:*

- (I) *A y B son incompatibles;*
- (II) *A y B son independientes.*

(*b*) *Suponiendo* $\mathrm{p}\,(A \cup B) = 0{,}6$ *calcular* $\mathrm{p}\,(A \mid B)$.

Solución:

(*a*) (I) En este caso $\mathrm{p}\,(A \cap B) = 0$ y

$$\mathrm{p}\,(A \cup B) = \mathrm{p}\,(A) + \mathrm{p}\,(B) = 0{,}7$$

(II) Si son independientes $\mathrm{p}\,(A \cap B) = \mathrm{p}\,(A)\mathrm{p}\,(B) = 0{,}12$. Entonces:

$$\mathrm{p}\,(A \cup B) = \mathrm{p}\,(A) + \mathrm{p}\,(B) - \mathrm{p}\,(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}12 = 0{,}58$$

(b) En este caso:

$$\mathrm{p}\,(A \cap B) = \mathrm{p}\,(A) + \mathrm{p}\,(B) - \mathrm{p}\,(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}6 = 0{,}1$$

y entonces:

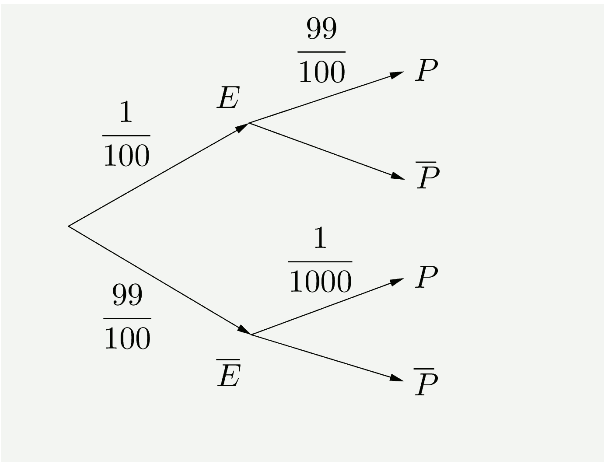
$$\mathrm{p}\,(A \mid B) = \frac{\mathrm{p}\,(A \cap B)}{\mathrm{p}\,(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 2. *En una población de conejos se sabe que un* $1\,\%$ *padecen una determinada enfermedad. Se ha desarrollado un test que para los conejos que tienen la enfermedad da un resultado positivo en el* $99\,\%$ *de los casos cases. También se sabe que el test da asímismo un resultado positivo en un* $0{,}1\,\%$ *de los casos cuando el conejo no padece la enfermedad. Se elige aleatoriamente un conejo de la población:*

(a) *Calcular la probabilidad de que el test dé un resultado positivo.*

(b) *Supuesto que el test ha dado un resultado positivo, comprobar que la probabilidad de que el conejo no padezca la enfermedad es menor del* $10\,\%$*.*

Solución:



(a) $$\mathrm{p}\,(P) = \frac{1}{100} \cdot \frac{99}{100} + \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1089}{100000}$$

(b) $$\mathrm{p}\,(E \mid P) = \frac{\mathrm{p}\,(E \cap P)}{\mathrm{p}\,(P)} = \frac{99/100000}{1089/100000} = \frac{99}{1089} < \frac{10}{100}$$

Ejercicio 3. *La variable aleatoria* X *tiene una distribución* $\mathrm{Po}(m)$*. Sabiendo que*

$$\mathrm{p}\,(X = 5) = \mathrm{p}\,(X = 3) + \mathrm{p}\,(X = 4),$$

halle:

(a) *El valor de* m

(b) $\mathrm{p}\,(X > 2)$.

Solución:

(*a*) Sustituyendo las probabilidades:

$$\frac{m^5e^{-m}}{5!} = \frac{m^3e^{-m}}{3!} + \frac{m^4e^{-m}}{4!}$$

Simplificamos dividiendo por e^{-m} y multiplicando por 3!:

$$\frac{m^5}{20} = m^3 + \frac{m^4}{4} \quad \Longrightarrow \quad m^5 - 5m^4 - 20m^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad m^3\left(m^2 - 5m - 20\right) = 0$$

Desestimando el caso $m = 0$ obtenemos:

$$m^2 - 5m - 20 = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{5 + \sqrt{105}}{2} \simeq 7{,}62$$

(*b*) Para esta distribución:

$$\mathrm{p}\,(X > 2) = 1 - \mathrm{p}\,(X \leq 2) \simeq 0{,}982$$

Ejercicio 4. *Seis clientes hacen cola en un supermercado. Cada cliente puede elegir si paga en efectivo o con tarjeta de crédito. Suponga que el que un cliente pague o no con tarjeta de crédito es independiente del método de pago elegido por otros clientes. Se sabe que el* 60 % *de los clientes eligen pagar con tarjeta de crédito.*

(*a*) *Halle la probabilidad de que:*

(I) *Los tres primeros clientes paguen con tarjeta de crédito y los siguientes tres paguen en efectivo.*

(II) *De los seis clientes, exactamente tres paguen con tarjeta de crédito.*

(*b*) *Hay n clientes en otra cola en el mismo supermercado. La probabilidad de que al menos un cliente pague en efectivo es mayor que* 0,995. *Halle el mínimo valor de n.*

Solución:

(*a*) (I) $p = 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^3 \simeq 0{,}0138$

(II) Sea X la variable aleatoria que representa el número de clientes que paga con tarjeta de crédito. X sigue una distribución binomial $\mathrm{B}(6; 0{,}6)$ y

$$\mathrm{p}\,(X = 3) \simeq 0{,}276$$

(*b*) Consideremos la distribución binomial $\mathrm{B}(n; 0{,}4)$ donde n representa el número de clientes y el éxito es que el cliente pague en efectivo. Debemos encontrar el menor n que cumple:

$$\mathrm{p}\,(X \geq 1) > 0{,}995 \quad \Longrightarrow \quad 1 - \mathrm{p}\,(X = 0) > 0{,}995 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\,(X = 0) < 0{,}005$$

Con la calculadora vemos ue el número más pequeño que cumple la condición es $n = 11$.

Ejercicio 5. *En un puesto del mercado se venden manzanas, peras y ciruelas.*

(*a*) *Los pesos de las manzanas siguen una distribución normal de media* 200 *gramos y con una desviación típica de* 25 *gramos.*

(I) *Sabiendo que en el puesto hay* 450 *manzanas, ¿cuál es el número esperado de manzanas con un peso superior a* 225 *gramos?*

(II) *Sabiendo que el* 70 % *de las manzanas pesa menos de m gramos, halle el valor de m.*

(*b*) *Los pesos de las peras siguen una distribución normal de media* μ *gramos y con una desviación típica de* σ *gramos. Sabiendo que el* 8 % *de estas peras tiene un peso superior a* 270 *gramos y que el* 15 % *tiene un peso inferior a* 250 *gramos, halle* μ *y* σ.

(*c*) *Los pesos de las ciruelas siguen una distribución normal de media* 80 *gramos y con una desviación típica de* 4 *gramos. Se cogen* 5 *ciruelas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente* 3 *de ellas pesen más de* 82 *gramos?*

Solución:

(*a*) (I) Calculamos la probabilidad de que una manzana pese más de 225 g

$$p = \mathrm{p}\,(X > 225) \simeq 0{,}159$$

Sea X la variable aleatoria número de manzanas de peso mayor que 225 g- En la binomial $\mathrm{B}(450, p)$ el valor esperado es

$$\mathrm{E}(X) = 450 \cdot p \simeq 71{,}4$$

(II) Sabiendo ahora que

$$\mathrm{p}\,(X < m) = 0{,}70$$

con la función inversa de la función de distribución que encontramos en la calculadora encontramos $m \simeq 213$.

(*b*) Sea $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Conocemos las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} &\mathrm{p}\,(X > 270) = 0{,}08 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\,(X < 270) = 0{,}92 \\ &\mathrm{p}\,(X < 250) = 0{,}15 \end{aligned}$$

Tipificamos la variable y obtenemos

$$\begin{aligned} &\mathrm{p}\left(Z < \frac{270-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}92 \quad \Longrightarrow \quad \frac{270-\mu}{\sigma} \simeq -1{,}04 \\ &\mathrm{p}\left(Z < \frac{250-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}15 \quad \Longrightarrow \quad \frac{250-\mu}{\sigma} \simeq 1{,}41 \end{aligned}$$

Obteniendo los valores con la calculadora y resolviendo el sistema resulta $\mu \simeq 258$, $\sigma \simeq 8{,}19$.

(*c*) Sea $X \sim \mathrm{N}(80, 4)$. Con esta distribución:

$$p = \mathrm{p}\,(X > 82) \simeq 0{,}309$$

El número de ciruelas que pesan más de 82 g sigue en este caso una binomial $\mathrm{B}(5, p)$ con la probabilidad p calculada anteriormente. La probabilidad que nos piden es:

$$\mathrm{p}\,(X = 3) \simeq 0{,}140$$

---

17. Variable aleatoria. Probabilidad. Grupo Z,

Ejercicio 1. *Los sucesos A y B son tales que* $\mathrm{p}\,(A) = \frac{2}{5}$, $\mathrm{p}\,(B) = \frac{11}{20}$ *y* $\mathrm{p}\,(A \mid B) = \frac{2}{11}$.

(*a*) *Halle* $\mathrm{p}\,(A \cap B)$.

(*b*) *Halle* $\mathrm{p}\,(A \cup B)$.

(c) *Indique, dando una razón, si los sucesos A y B son independientes.*

Solución:

(a) $\mathrm{p}\,(A \cap B)) = \mathrm{p}\,(B)\mathrm{p}\,(A \mid B) = \dfrac{11}{20} \cdot \dfrac{2}{11} = \dfrac{1}{10}$

(b) $\mathrm{p}\,(A \cup B) = \mathrm{p}\,(A) + \mathrm{p}\,(B) - \mathrm{p}\,(A \cap B) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{11}{20} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{17}{20}$

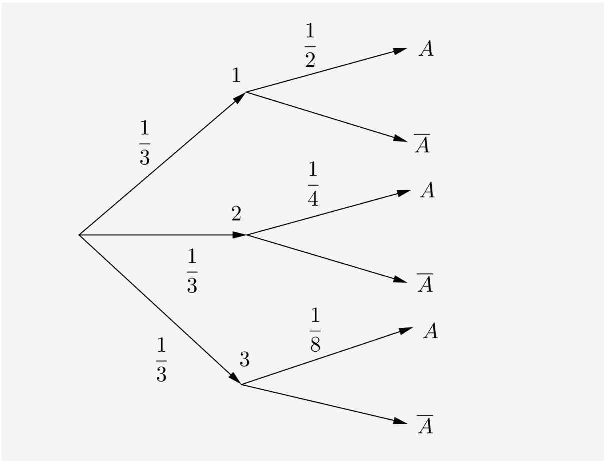
(c) $\mathrm{p}\,(A) \cdot \mathrm{p}\,(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{11}{20} = \frac{11}{50} \neq \mathrm{p}\,(A \cap B)$. No son independientes.

Ejercicio 2. *Una bolsa contiene tres bolas numeradas con los números 1, 2 y 3 respectivamente. Bill elige una de estas bolas al azar y toma nota del número que aparece en la bola seleccionada. A continuación lanza al aire ese número de monedas equilibradas.*

(a) *Calcule la probabilidad de que no salga ninguna cara.*

(b) *Sabiendo que no ha salido ninguna cara, halle la probabilidad de que el número de monedas lanzadas haya sido igual a dos.*

Solución:



Sea A el suceso consistente en no sacar ninguna cara al lanzar las monedas.

(a) $\mathrm{p}\,(A) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{24}$

(b) $\mathrm{p}\,(2 \mid A) = \dfrac{\mathrm{p}\,(2 \cap A)}{\mathrm{p}\,(A)} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{7}{24}} = \dfrac{2}{7}$

Ejercicio 3. *La variable aleatoria X tiene una distribución $B(30, p)$. Sabiendo que $E(X) = 10$, halle:*

(a) *el valor de p;*

(b) $\mathrm{p}\,(X = 10)$;

(c) $\mathrm{p}\,(X \geq 15)$.

Solución:

(a) Puesto que $30p = 10$ resulta $p = 1/3$.

(*b*) En la distribución binomial $\mathrm{B}\left(30, \frac{1}{3}\right)$:

$$\mathrm{p}\,(X = 10) \simeq 0{,}153$$

(*c*) Con la misma distribución:

$$\mathrm{p}\,(X \geq 15) = 1 - \mathrm{p}\,(X \leq 14) \simeq 0{,}0435$$

Ejercicio 4. *Un estudiante llega a un centro escolar X minutos después de lasr 08:00, donde X se supone que se distribuye normalmente. En un día particular se observa que el 40 % de los estudiantes llegan antes de las 08:30 y un 90 % llegan antes de las 08:55.*

(*a*) *Calcule la media y la desviación típica de X.*

(*b*) *El centro cuenta con 1200 estudiantes y las clases empiezan a las 09:00. Estimar el número de estudiantes que llegarán tarde ese día.*

(*c*) *Maelis no ha llegado a las 08:30. Calcule la probabilidad de que llegue tarde.*

(*d*) *A las 15:00 se acaban las clases y se supone que la salida de los estudiantes del centro sigue una distribución de Poisson. Una media de 24 estudiantes sale del centro escolar cada minuto. Calcule la probabilidad de que al menos 700 estudiantes hayan salido antes de las 15:30.*

(*e*) *En un año hay 200 días lectivos. Si Y representa el número de días del año escolar en que al menos 700 estudiantes salen antes de las 15:30, calcule*

(I) $\mathrm{E}(Y)$;

(II) $\mathrm{p}\,(Y > 150)$.

Solución:

(*a*) Sea $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Para determinar los parámetros de la distribución tenemos las siguientes probabilidades:

$$\mathrm{p}\,(X < 30) = 0{,}40 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\left(Z < \frac{30-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}40$$

$$\mathrm{p}\,(X < 55) = 0{,}90 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}\left(Z < \frac{55-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}90$$

Con ayuda de la calculadora obtenemos aproximadamente:

$$\frac{30-\mu}{\sigma} = -0{,}253$$

$$\frac{55-\mu}{\sigma} = 1{,}28$$

Resolviendo el sistema se obtiene y $\mu \simeq 34{,}1$ y $\sigma \simeq 16{,}3$.

(*b*) La probabilidad de llegar tarde es:

$$p = \mathrm{p}\,(X > 60) \simeq 0{,}0561$$

y el número esperado de los que llegarán tarde:

$$1200 * p \simeq 67{,}3$$

(*c*) La probabilidad que nos piden es

$$\mathrm{p}\,(X > 60 \mid X > 30) = \frac{\mathrm{p}\,(X > 60)}{\mathrm{p}\,(X > 30)} \simeq 0{,}0935$$

(d) La media en media hora de la distribución de Poisson es $24 \cdot 30 = 720$. Tenemos una distribución Po(720).

$$\mathrm{p}\left(X \geq 700\right) = 1 - \mathrm{p}\left(X \leq 699\right) \simeq 0{,}777$$

(e) Ahora tenemos una distribución binomial $\mathrm{B}(200, p)$ donde p es la probabilidad calculada en el apartado anterior.

(I) $\mathrm{E}(Y) = 200p \simeq 155$

(II) $\mathrm{p}\left(Y > 150\right) = 1 - \mathrm{p}\left(Y \leq 150\right) \simeq 0{,}797$

Ejercicio 5. *Un ferry transporta coches para atravesar un río. Hay un tiempo fijo de T minutos entre las travesías. La llegada de coches al embarcadero sigue una distribución de Poisson con una media de un coche cada cuatro minutos. Sea X el número de coches que llegan en T minutos.*

(a) *Calcular T aproximando a los minutos si* $\mathrm{p}\left(X \leq 3\right) = 0{,}6$

(b) *Se decide que el tiempo entre travesías T va a ser de* 10 *minutos. El ferry puede transportar un máximo de* 3 *coches en cada viaje. Un día, todos los coches que esperan a las 13:00 entran en el ferry. Calcular la probabilidad de que todos los coches que lleguen en los próximos* 20 *entren bien en el ferry de las 13:10 o bien en el de las 13:20.*

Solución:

(a) Si la media de llegada de coches es una cada cuatro minutos, en T minutos la media será $T/4$. La variable X sigue entonces una distribución $\mathrm{Po}\left(\frac{T}{4}\right)$. Entonces

$$e^{-\frac{T}{4}}\left(1 + \frac{T}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{T}{4}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{T}{4}\right)^3\right) = 0{,}6$$

Resolviendo la ecuación se obtiene $T \simeq 12{,}8$.

(b) Para que todos los coches entren en los dos ferrys deben llegar seis o menos. En 20 minutos la media de coches que llegan es 5. Entonces $X \sim \mathrm{Po}(5)$ y

$$\mathrm{p}\left(X \leq 6\right) \simeq 0{,}762$$

Pero esta condición no es suficiente. Si llegan 4, 5 o 6 coches en los segundos 10 minutos no podrán subir en el ferry. Sea X_1 el número de coches que llegan en los primeros 10 minutos y X_2 el número de coches que llegan en las siguientes 10 minutos. Habrá que restar a la probabilidad calculada:

$$\mathrm{p}\left(X_1 \leq 2\right) \cdot \mathrm{p}\left(X_2 = 4\right)$$
$$\mathrm{p}\left(X_1 \leq 1\right) \cdot \mathrm{p}\left(X_2 = 5\right)$$
$$\mathrm{p}\left(X_1 = 0\right) \cdot \mathrm{p}\left(X_2 = 6\right)$$

Estas probabilidades se calculan por una Poisson Po(2,5) puesto que la media de llegada de coches en 10 minutos es 2,5. La suma de esta probabilidades es:

$$p = \mathrm{p}\left(X_1 \leq 2\right) \cdot \mathrm{p}\left(X_2 = 4\right) + \mathrm{p}\left(X_1 \leq 1\right) \cdot \mathrm{p}\left(X_2 = 5\right)\mathrm{p}\left(X_1 = 0\right) \cdot \mathrm{p}\left(X_2 = 6\right) \simeq 0{,}0941$$

La probabilidad que se pide se obtiene restando las dos probabilidades calculadas. El resultado con tres cifras significativas es 0,668.

five-fingers.es quiere dar las gracias a Daniel Molpeceres por su colaboración en la resolución de este problema.
