LÍMITES DE FUNCIONES, CONTINUIDAD Y RAMAS FINITAS

Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I, de primero de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira.

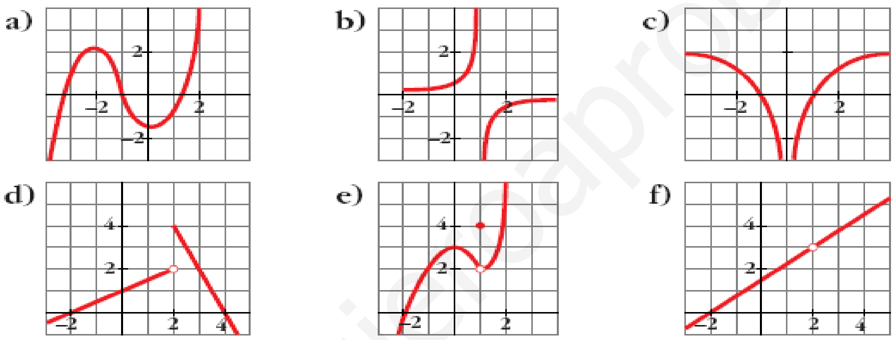
Página 179

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **a) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función continua?**

b) Señala, en cada una de las otras cinco, la razón de su discontinuidad.



a) Solo la a).

b) b) Rama infinita en $x = 1$ (asíntota vertical).

c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).

d) Salto en $x = 2$.

e) Punto desplazado en $x = 1$; $f(1) = 4$; $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

f) No está definida en $x = 2$.

2 **Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{3}{x^2 + x}$ **b)** $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$ **d)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e) $y = \dfrac{2}{5x - x^2}$ **f)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 2}$

a) 0 y -1 b) 2

c) $-\dfrac{1}{2}$ d) Continua

e) 0 y 5 f) $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$

www.yoquieroaprobar.es

3 **Comprueba si las siguientes funciones son continuas en $x = 0$ y en $x = -2$:**

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **b)** $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ **d)** $y = \sqrt{7 - 2x}$

a) No es continua ni en $x = 0$ ni en $x = -2$.

b) Sí es continua en $x = 0$, no en $x = -2$.

c) No es continua en $x = 0$, sí en $x = -2$.

d) Continua en $x = 0$ y en $x = -2$.

4 **Indica para qué valores de $\mathbb{R}$ son continuas las siguientes funciones:**

a) $y = 5 - \dfrac{x}{2}$ **b)** $y = \sqrt{x - 3}$

c) $y = \sqrt{-3x}$ **d)** $y = \sqrt{5 - 2x}$

a) $\mathbb{R}$ b) $[3, +\infty)$

c) $(-\infty, 0]$ d) $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$

5 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(5 - \dfrac{x}{2}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - x)$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1 - x}{x - 2}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0,5} 2^x$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{10 + x - x^2}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 4} \log_2 x$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$ **h)** $\lim\limits_{x \to 2} e^x$

a) 5 b) 0

c) –2 d) $\sqrt{2}$

e) 4 f) 2

g) 1 h) e^2

6 **Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de cada una de las siguientes funciones. Representa el resultado que obtengas.**

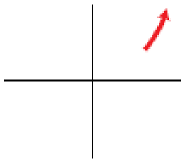
a) $f(x) = x^3 - 10x$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{3 - x}{2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{-3}$

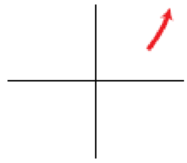
www.yoquieroaprobar.es

☛ *Dale a x "valores grandes" y saca conclusiones.*

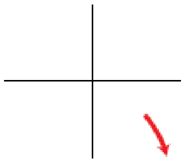
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



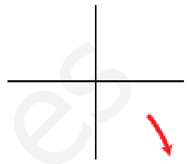
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

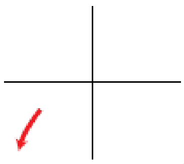


d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

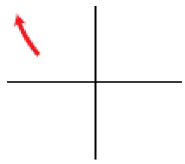


7 **Calcula el límite de las funciones del ejercicio anterior cuando $x \to -\infty$ y representa la información que obtengas.**

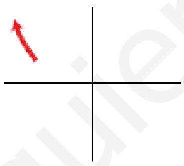
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



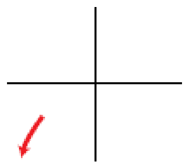
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



8 **Comprueba, dando valores grandes a x, que las siguientes funciones tienden a 0 cuando $x \to +\infty$.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 10}$

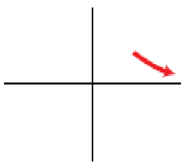
b) $f(x) = \dfrac{100}{3x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{-7}{\sqrt{x}}$

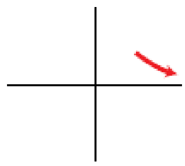
d) $f(x) = \dfrac{2}{10x^2 - x^3}$

Representa gráficamente su posición sobre el eje OX o bajo el eje OX.

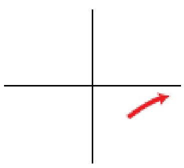
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$



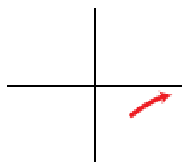
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$



c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$



d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$



www.yoquieroaprobar.es

9 **Calcula los siguientes límites y representa la información que obtengas:**

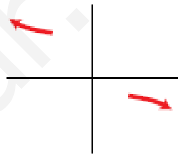
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 + x - x^3)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 10x - 32}{5}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{x^4}{3} + \dfrac{x}{2} - 17\right)$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 - x)^2$

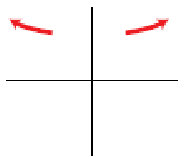
10 **Calcula el límite de las funciones del ejercicio anterior cuando $x \to -\infty$ y representa la información que obtengas.**

Resolución de los ejercicios 9 y 10:

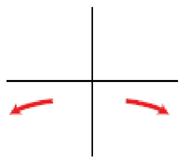
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 + x - x^3) = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} (7 + x - x^3) = +\infty$



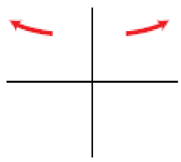
b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 10x - 32}{5} = +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{-x^4}{3} + \dfrac{x}{2} - 17\right) = -\infty$



d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (7 - x)^2 = +\infty$



Página 180

11 **Calcula los siguientes límites y representa las ramas que obtengas:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3 - x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2 - 1}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(2 - x)^3}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{x + 2}$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 5}{1 - x}$

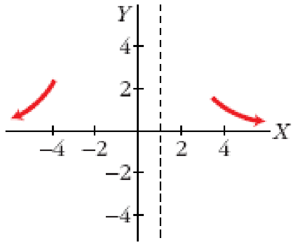
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - 3x}{x + 3}$ h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 - 2x}{5 - 2x}$

12 **Calcula el límite de todas las funciones del ejercicio anterior cuando $x \to -\infty$.**

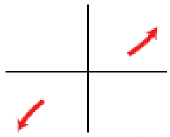
Resolución de los ejercicios 11 y 12:

www.yoquieroaprobar.es

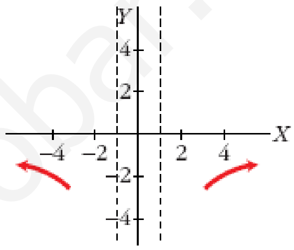
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0$



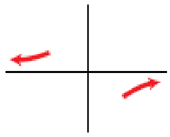
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x} = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x} = -\infty$



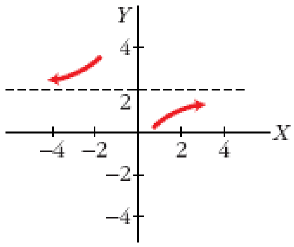
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2-1} = 0;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{x^2-1} = 0$



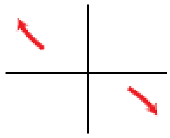
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3} = 0;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3} = 0$



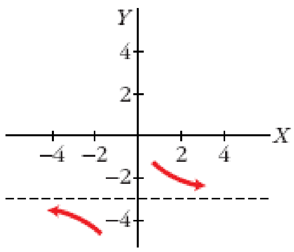
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2$



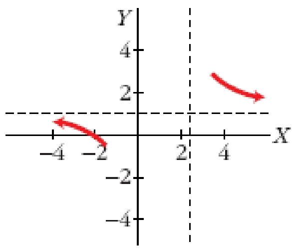
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x} = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x} = +\infty$



g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+3} = -3;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2-3x}{x+3} = -3$



h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x} = 1;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x} = 1$



www.yoquieroaprobar.es

13 Dada la función $y = \dfrac{2x}{1-x}$, halla:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x}{1-x}$ b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x}{1-x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{1-x}$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{1-x}$

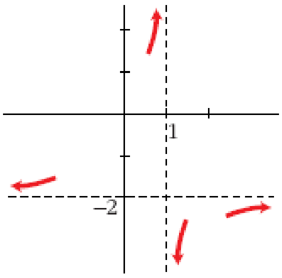
Representa gráficamente los resultados obtenidos.

a) $+\infty$

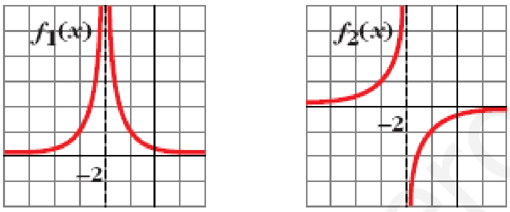
b) $-\infty$

c) -2

d) -2



14



Estas son, respectivamente, las gráficas de las funciones:

$$f_1(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \frac{-1}{x+2}$$

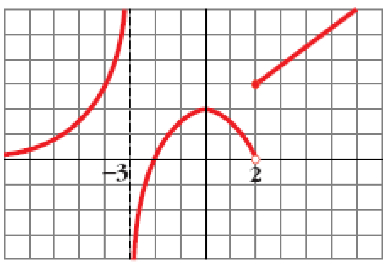
¿Cuál es el límite de cada una de estas funciones cuando $x \to -2$?

☛ *Observa la función cuando $x \to -2$ por la izquierda y por la derecha.*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f_1(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f_1(x) = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -2} f_1(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f_2(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f_2(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{No existe } \lim\limits_{x \to -2} f_2(x)$$

15



Sobre la gráfica de la función $f(x)$, halla:

a) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

www.yoquieroaprobar.es

e) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

a) $+\infty$

b) $-\infty$

c) 2

d) 0

e) 0

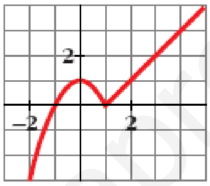
f) 3

g) $+\infty$

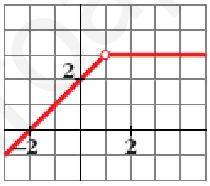
h) 0

16 **Comprueba que las gráficas de estas funciones corresponden a la expresión analítica y di si son continuas o discontinuas en $x = 1$.**

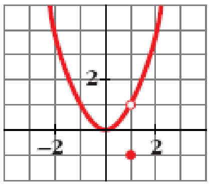
a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \ne 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



a) Continua

b) Discontinua

c) Discontinua

17 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$, **halla:**

a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

☛ ***Para que exista límite en el punto de ruptura, tienen que ser iguales los límites laterales.***

a) 5

b) 4

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

www.yoquieroaprobar.es

18 **Comprueba si la función** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ **es continua en** $x = 0$.

☛ ***Recuerda que para que*** f ***sea continua en*** $x = 0$, ***debe verificarse que*** $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = -1 = f(0)$$

Es continua en $x = 0$.

Página 181

19 **Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:**

a) $f(x) = \begin{cases} (3 - x)/2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ **en** $x = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ (x/2) - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **en** $x = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **en** $x = 1$

a) No, pues no existe $f(-1)$.

b) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = -2$. Sí es continua en $x = 2$.

c) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$. No es continua en $x = 1$.

PARA RESOLVER

20 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{4x}{x^2 - 2x}$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{2x^2 + 3x}{x}$

c) $\lim_{h \to 0} \dfrac{3h^3 - 2h^2}{h}$

d) $\lim_{h \to 0} \dfrac{h^2 - 7h}{4h}$

☛ ***Saca factor común y simplifica cada fracción.***

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{4x}{x(x - 2)} = -2$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x(2x + 3)}{x} = 3$

c) $\lim_{h \to 0} \dfrac{h^2(3h - 2)}{h} = 0$

d) $\lim_{h \to 0} \dfrac{h(h - 7)}{4h} = -\dfrac{7}{4}$

www.yoquieroaprobar.es

21 **Resuelve los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

e) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x + 1)\,(x - 1)}{(x - 1)} = 2$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x + 1)\,(x^2 - x + 1)}{x(x + 1)} = \dfrac{3}{-1} = -3$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x + 2)}{(x + 2)\,(x - 2)} = -\dfrac{1}{4}$ d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x + 1)\,(x - 2)}{(x - 2)} = 3$

e) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x + 3)}{(x + 3)\,(x + 1)} = -\dfrac{1}{2}$ f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)\,(x^3 + x^2 + x + 1)}{(x - 1)\,(x + 1)} = 2$

22 **Resuelve los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{(x - 1)^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - (x - 2)^2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - x}{(2x + 1)^2}$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 1}{5x}$

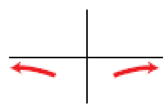
a) 3 b) $-\infty$ c) 0 d) $+\infty$

23 **Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones y representa las ramas que obtengas:**

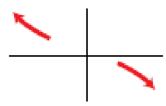
a) $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ **b)** $f(x) = 10x - x^3$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1 - 12x^2}{3x^2}$

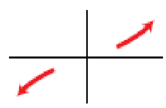
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$



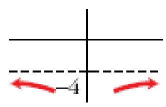
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -4$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$



www.yoquieroaprobar.es

24 **Calcula el límite de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x}$ en $x = 3$, $x = 0$ y $x = -1$.**

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{3}{4}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

25 **Calcula los límites de las siguientes funciones en los puntos que anulan su denominador:**

a) $f(x) = \dfrac{3x}{2x + 4}$ $\qquad$ **b)** $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ $\qquad$ **d)** $f(t) = \dfrac{t^3 - 2t^2}{t^2}$

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

b) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

c) $f(x) = \dfrac{x(x - 2)}{(x - 2)\,(x + 2)}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$; $\quad \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

d) $f(t) = \dfrac{t^2(t - 2)}{t^2}$; $\quad \lim\limits_{t \to 0} f(t) = -2$

26 **Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva con respecto a ellas:**

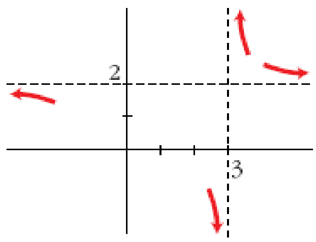
a) $f(x) = \dfrac{2x}{x - 3}$ $\qquad$ **b)** $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 3}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ $\qquad$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 9}$

e) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 1}$ $\qquad$ **f)** $f(x) = \dfrac{-1}{(x + 2)^2}$

a) Asíntota vertical: $x = 3$

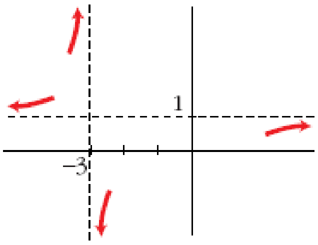
Asíntota horizontal: $y = 2$



www.yoquieroaprobar.es

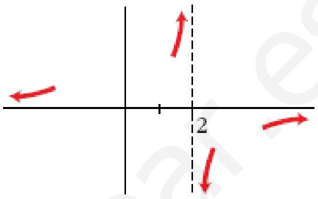
b) Asíntota vertical: $x = -3$

Asíntota horizontal: $y = 1$



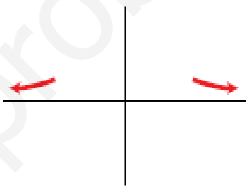
c) Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 0$



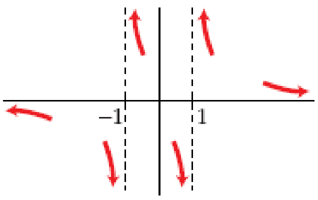
d) Asíntota vertical: $y = 0$

No tiene más asíntotas.



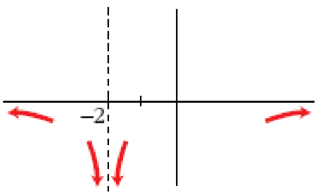
e) Asíntota vertical: $x = 1$, $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 0$



f) Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota horizontal: $y = 0$



www.yoquieroaprobar.es

27 **Cada una de las siguientes funciones tiene una asíntota oblicua. Hállala y estudia la posición de la curva respecto a ella:**

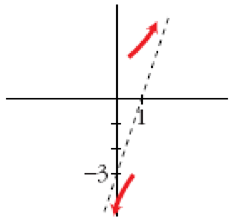
a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{3 + x - x^2}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 3}{2x}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 3}$

e) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3}{x^2 - 2}$ f) $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 3}{2x - 2}$

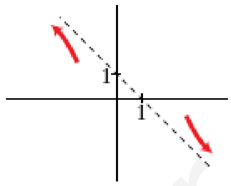
a) $\dfrac{3x^2}{x+1} = 3x - 3 + \dfrac{3}{x+1}$

Asíntota oblicua: $y = 3x - 3$



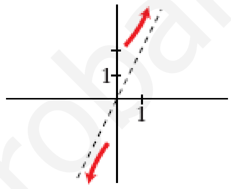
b) $\dfrac{3 + x - x^2}{x} = -x + 1 + \dfrac{3}{x}$

Asíntota oblicua: $y = -x + 1$



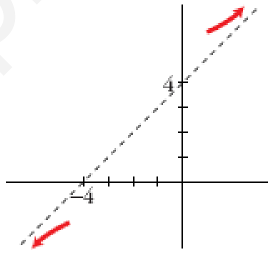
c) $\dfrac{4x^2 - 3}{2x} = 2x - \dfrac{3}{2x}$

Asíntota oblicua: $y = 2x$



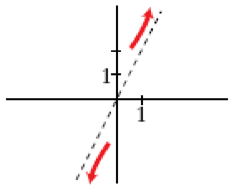
d) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x - 3} = x + 4 + \dfrac{10}{x - 3}$

Asíntota oblicua: $y = x + 4$



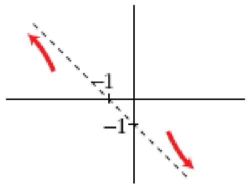
e) $\dfrac{2x^3 - 3}{x^2 - 2} = 2x + \dfrac{4x - 3}{x^2 - 2}$

Asíntota oblicua: $y = 2x$



f) $\dfrac{-2x^2 + 3}{2x - 2} = -x - 1 + \dfrac{1}{2x - 2}$

Asíntota oblicua: $y = -x - 1$



28 **Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:**

a) $y = \dfrac{3 - x}{2x - 7}$

b) $y = \dfrac{5x - 2}{2x - 7}$

c) $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + x + 1}$

e) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

f) $y = \dfrac{3x^2}{x + 2}$

www.yoquieroaprobar.es

29 **Halla las ramas infinitas de estas funciones. Cuando tengan asíntotas, sitú la curva:**

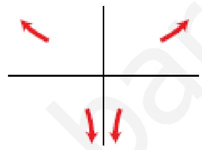
a) $y = \dfrac{x^4 - 1}{x^2}$ **b)** $y = \dfrac{(x + 3)^2}{x - 2}$

c) $y = \dfrac{1}{9 - x^2}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$

e) $y = \dfrac{2x^2}{x + 3}$ **f)** $y = \dfrac{x^3}{2x - 5}$

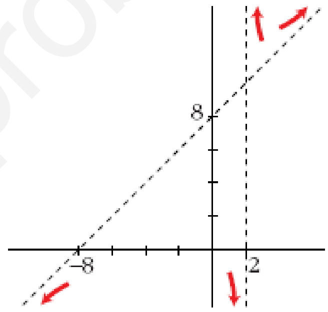
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota vertical: $x = 0$



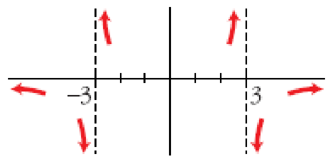
b) Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota oblicua: $y = x + 8$

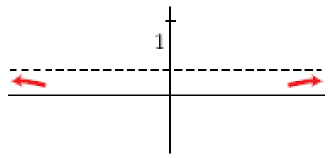


c) Asíntotas verticales: $x = 3, \; x = -3$

Asíntota horizontal: $y = 0$

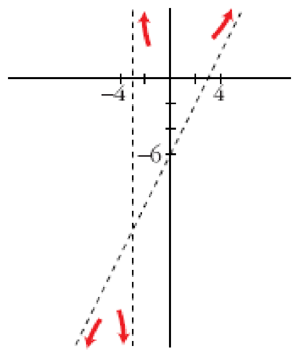


d) Asíntota horizontal: $y = \dfrac{1}{2}$



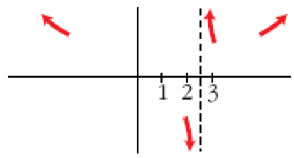
e) Asíntota vertical: $x = -3$

Asíntota oblicua: $y = 2x - 6$



f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota vertical: $x = \dfrac{5}{2}$



www.yoquieroaprobar.es

Página 182

30 **Prueba que la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$ solo tiene una asíntota vertical y otra horizontal.**

☛ *Al hallar $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ verás que no es ∞.*

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

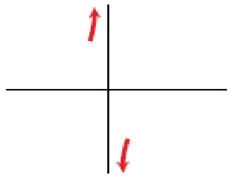
Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota horizontal: $y = 1$

31 **Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados que obtengas:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 1}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}$

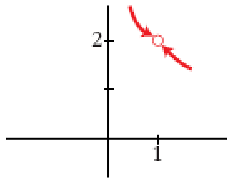
a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 1}{x}$



$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

No tiene límite en $x = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x + 1)(x - 1)}{x(x - 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 1}{x} = 2$



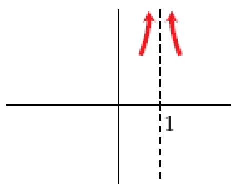
La función no es continua en $x = 1$, pero tiene límite en ese punto.

32 **Estudia el comportamiento de estas funciones en los puntos en los que no están definidas:**

a) $y = \dfrac{1}{(1 - x)^2}$ **b)** $y = \dfrac{x}{x - 5}$

c) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x}$ **d)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

a) $y = \dfrac{1}{(1 - x)^2}$



No definida en $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

www.yoquieroaprobar.es

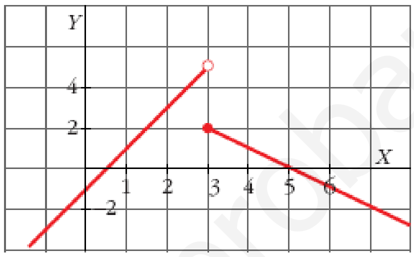
34 **Representa las siguientes funciones y explica si son discontinuas en alguno de sus puntos:**

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

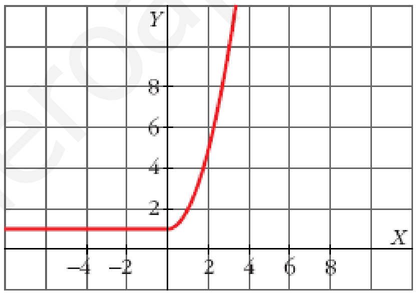
b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

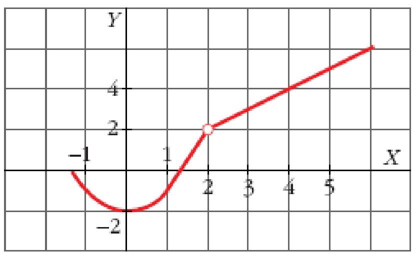
a) Discontinua en $x = 3$.



b) Función continua.



c) Discontinua en $x = 2$.



35 **a) Calcula el límite de las funciones del ejercicio anterior en $x = -3$ y $x = 5$.**

b) Halla, en cada una de ellas, el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

a) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -7$; $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 26$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 7$; $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 5$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

www.yoquieroaprobar.es

36 **Calcula los límites cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = 2^{x-1}$ **b)** $f(x) = 0{,}75^x$

c) $f(x) = 1 + e^x$ **d)** $f(x) = 1/e^x$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

37 **Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones exponenciales:**

a) $y = 2^{x+3}$ **b)** $y = 1{,}5^x - 1$

c) $y = 2 + e^x$ **d)** $y = e^{-x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$: $y = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

Asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$: $y = -1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

Asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$: $y = 2$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$: $y = 0$

38 **Calcula, en cada caso, el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \ne 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

www.yoquieroaprobar.es

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3 + k \end{array}\right\} 5 = 3 + k \;\rightarrow\; k = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{array}\right\} 5 = 4 + 2k \;\rightarrow\; k = 1/2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x+1)}{x} = 1 \;\rightarrow\; k = 1$

39 **Estudia la continuidad de estas funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -1 \geq x \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1 \;\rightarrow$ Continua en $x = 1$

$x \neq 1 \;\rightarrow$ Continua

Es continua en $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \;\rightarrow$ Continua en $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0 \;\rightarrow$ Continua en $x = 1$

$x \neq 1$ y $x \neq -1 \;\rightarrow$ Continua

Es continua en $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2 \;\rightarrow$ Discontinua en $x = 0$

Si $x \neq 0$, es continua.

www.yoquieroaprobar.es

40 **Calcula a para que las siguientes funciones sean continuas en $x = 1$:**

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ 4 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{si } x \ne 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 = f(1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - a \end{array}\right\} 2 = 4 - a \to a = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2 \\ f(1) = a \end{array}\right\} a = 2$

41 **En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función $M(t) = \dfrac{30t}{t + 4}$ (t en días).**

a) ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Y el décimo?

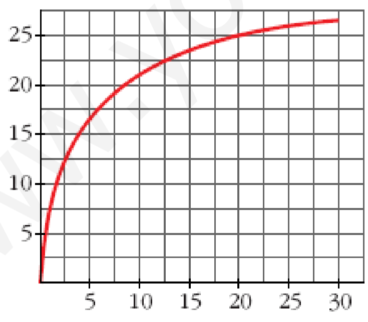
b) Representa la función sabiendo que el periodo de entrenamiento es de un mes.

c) ¿Qué ocurriría con el número de montajes si nunca acabara el entrenamiento?

a) $M(1) = 6$ montajes el primer día.

$M(10) = 21{,}43 \to 21$ montajes el décimo día.

b)



c) Se aproxima a 30 $\left(\text{pues } \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{30t}{t + 4} = 30\right)$.

Página 183

42 **El gasto mensual en alimentación de una familia depende de su renta, x. Así:**

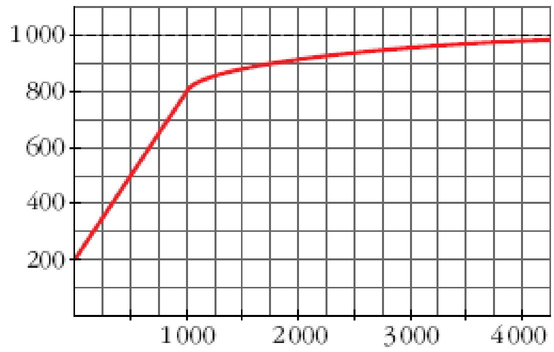
$$g(x) = \begin{cases} 0{,}6x + 200 & \text{si } 0 \le x \le 1\,000 \\ 1\,000x/(x + 250) & \text{si } x > 1\,000 \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es

donde los ingresos y los gastos vienen expresados en euros.

a) Representa $g(x)$ y di si es función continua.

b) Calcula el límite de $g(x)$ cuando $x \to +\infty$ y explica su significado.

a) 

Es continua.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1000.$

Como máximo gastan 1000 € al mes en alimentación.

www.yoquieroaprobar.es