

Nombre:

1. En cada cuestión, responde diciendo a qué intervalo pertenece x si:

a) $|-x+2| < 0$

b) $-3 \leq 3x-6 < 5$

c) $|2x+5| \geq 1$

d) $\left|x + \frac{1}{3}\right| \leq \frac{1}{3}$

a) No existe ningún x que cumpla la condición pues el valor absoluto no puede ser negativo.

b) $-3+6 \leq 3x < 5+6 \Rightarrow \frac{3}{3} \leq x < \frac{11}{3} \Rightarrow x \in \left[1, \frac{11}{3}\right)$

c) $|2x+5| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x+5 \geq 1 \Rightarrow x \geq -2 \\ \text{ó} \\ 2x+5 \leq -1 \Rightarrow x \leq -3 \end{cases} \Rightarrow x \in \mathbb{R} - (-3, -2)$

d) $\left|x + \frac{1}{3}\right| \leq \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq x + \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}, 0\right]$

2. Utilizando la definición de logaritmo, averigua:

a) $\log_3 1$

b) $\log_5 0,04$

c) $\log_9 3$

d) $\log_2(\log_2 4)$

a) $\log_3 1 = 0$ ya que $3^0 = 1$

b) $\log_5 0,004 = \log_5 \frac{4}{100} = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$

c) $\log_9 3 = \log_9 \sqrt{9} = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

d) $\log_2(\log_2 4) = \log_2(\log_2 2^2) = \log_2 2 = 1$

3. Averigua el valor de x en cada una de las siguientes cuestiones:

a) $13^x = \frac{1}{169}$

b) $\log_5 x = 3$

c) $\log_x 3 = \frac{1}{3}$

d) $\log_3 x = 1 + \log_9 81$

a) $13^x = \frac{1}{169} = \frac{1}{13^2} = 13^{-2} \Rightarrow x = -2$

b) $\log_5 x = 3 \Rightarrow x = 5^3 \Rightarrow x = 125$

c) $\log_x 3 = \frac{1}{3} \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow (x^{\frac{1}{3}})^3 = 3^3 \Rightarrow x = 27$

d) $\log_3 x = 1 + \log_9 81 = 1 + \log_9 9^2 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow x = 3^3 \Rightarrow x = 27$

4. Simplifica:

a) $\frac{2^5 \cdot 6^{-3} \cdot (-3)^8}{18^{-2} \cdot (-12)^3}$

b) $\sqrt[8]{81}$

c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{10}}}$

d) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$

a) $\frac{2^5 \cdot 6^{-3} \cdot (-3)^8}{18^{-2} \cdot (-12)^3} = \frac{2^5 \cdot (2 \cdot 3)^{-3} \cdot 3^8}{(2 \cdot 3^2)^{-2} \cdot [-(2^2 \cdot 3)]^3} = -\frac{2^5 \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 3^8}{2^{-2} \cdot 3^{-4} \cdot 2^6 \cdot 3^3} = -\frac{2^2 \cdot 3^5}{2^4 \cdot 3^{-1}} = -\frac{3^6}{2^2}$

b) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = 3^{\frac{4}{8}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{10}}} = \sqrt[5]{2^{\frac{10}{3}}} = \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[5]{4}$

d) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt[3]{5 \cdot 5^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{5^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{5^2 \cdot 5} = \sqrt[3]{5^2 \cdot 5} = \sqrt[3]{5^3} = \sqrt{5}$

5. Haz las siguientes operaciones con radicales y simplificalas todo lo que puedas:

a) $\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$

b) $\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt[4]{2500}$

c) $\sqrt{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^{-2}}$

d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$

a) $\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8} = \sqrt{3^3} - \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^3} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = \boxed{5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt[4]{2500} = \sqrt{2^3} + \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt[4]{2^2 \cdot 5^4} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt[4]{2^2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = \boxed{10\sqrt{2}}$

c) $\sqrt{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^{-2}} = a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{4}} = a^{-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4}} = a^{-\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}}$

d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) = (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} \cdot (2\sqrt{3}) + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3}) = 2 - 2\sqrt{6} + \sqrt{6} - 3 \cdot 2 = \boxed{-4 - \sqrt{6}}$

6. Racionaliza y simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{2\sqrt{7}}{5\sqrt{2}}$

b) $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{3}}$

c) $\frac{11}{2\sqrt{5} + 3}$

d) $\frac{5\sqrt{2} + \sqrt{5}}{5\sqrt{2} - \sqrt{5}}$

a) $\frac{2\sqrt{7}}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{14}}{5 \cdot 2} = \boxed{\frac{\sqrt{14}}{5}}$

b) $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{3}} = \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2}}{2\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2}} = \frac{3\sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3^4}}{2 \cdot \sqrt[3]{3^3}} = \frac{3 \cdot \sqrt[6]{3^7}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt[6]{3^7}}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt[3]{3}}{2}}$

c) $\frac{11}{2\sqrt{5} + 3} = \frac{11 \cdot (2\sqrt{5} - 3)}{(2\sqrt{5} + 3) \cdot (2\sqrt{5} - 3)} = \frac{22\sqrt{5} - 33}{(2\sqrt{5})^2 - 3^2} = \frac{22\sqrt{5} - 33}{20 - 9} = \frac{22\sqrt{5} - 33}{11} = \boxed{\frac{2\sqrt{5} - 3}{1}}$

d) $\frac{5\sqrt{2} + \sqrt{5}}{5\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{(5\sqrt{2} + \sqrt{5}) \cdot (5\sqrt{2} + \sqrt{5})}{(5\sqrt{2} - \sqrt{5}) \cdot (5\sqrt{2} + \sqrt{5})} = \frac{(5\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2 + 2(5\sqrt{2})(\sqrt{5})}{(5\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{50 + 5 + 10\sqrt{10}}{50 - 5} = \frac{55 + 10\sqrt{10}}{45} = \boxed{\frac{11 + 2\sqrt{10}}{9}}$

7. Escribe las siguientes expresiones como un solo logaritmo:

a) $\log 3 + 3 \cdot \log 2 - 2 \cdot (1 - \log 6)$

b) $\frac{1}{3} \cdot \ln 5 + \frac{2}{3} \cdot \ln 3 - (2 + 3 \cdot \ln 15)$

$\log 3 + 3 \cdot \log 2 - 2 \cdot (1 - \log 6) = \log(3 \cdot 2^3) - 2 \cdot (\log 10 - \log 6) = \log(3 \cdot 2^3) - \log\left(\frac{10}{6}\right)^2$

a) $= \log \frac{3 \cdot 2^3}{\left(\frac{10}{6}\right)^2} = \boxed{\log \frac{3^3 \cdot 2^3}{5^2}}$

b) $\frac{1}{3} \cdot \ln 5 + \frac{2}{3} \ln 3 - (2 + 3 \cdot \ln 15) = \ln \sqrt[3]{5} + \ln \sqrt[3]{3^2} - \ln e^2 - \ln 15^3 = \ln \frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{3^2}}{e^2 \cdot 15^3} = \boxed{\ln \frac{\sqrt[3]{45}}{e^2 \cdot 15^3}}$

8. Al medir una calle se obtuvo un valor de 1.540 m. Se midió también la altura de una habitación que resulto ser de 2,80 m.

a) ¿Cuál es la cota de error absoluto de cada medición?

b) ¿Cuál de las dos medidas crees que se hizo con mayor precisión? Explícalo.

a) 1540 m está aproximada a decenas luego la cota de error es media decena, es decir, 5 unidades; 2,80 está aproximada a centésima, luego la cota de error es media centésima, es decir 5 milésimas: 0,005.

b) Para comparar la precisión debemos comparar las cotas de error relativo.

En el primer caso es: $\frac{5}{1540} \approx 0,0032$, mientras que en segundo es: $\frac{0,005}{2,80} \approx 0,00179$.

Por tanto la segunda medida es más precisa que la primera ya que su cota de error relativo es menor.

9. Un antiguo babilonio ha viajado en el tiempo hasta el siglo XXI y la administración lo ha matriculado en 1º de Bachillerato Científico. Se ha traído su calculadora científica, que como sabemos funciona en base sexagesimal (y que por ello calcula logaritmos en base 60). ¿Cómo calculará $\log 5$ y $\ln 7$ con esa calculadora?

Deberá hacer un cambio de base a su base de logaritmos que es 60, luego aplicando la fórmula general del cambio de base, el babilonio calcularía de la siguiente manera:

$$\log 5 = \frac{\log_{60} 5}{\log_{60} 10} \quad \text{y} \quad \ln 7 = \frac{\log_{60} 7}{\log_{60} e}$$

10. Normalmente el Dr. House le encargaría estas cuentas al Dr. Taub o a "Trece" pero los ha despedido y está sin equipo, así que te ha pillado a ti por los pasillos del hospital y te ha tocado ser su ayudante:

Dr. House: Tengo una paciente a la que el cielo le ha caído sobre su cabeza (es un decir, ya que lo que en realidad le ha caído es toda su oficina). El caso es que padece de síndrome de aplastamiento, que entre sus efectos, produce un aumento de la mioglobulina en sangre que es fatal para la función renal.

Tu: ¡Ah!

Dr. House: El caso es que necesito saber cuántos gr. de mioglobulina hay en su sangre para tratarle. El análisis detecta 1,75 mgr/ml de sangre. El peso de la paciente es de 62 kg y sabemos que hay 0,065 ml de sangre por cada gramo de peso corporal. El tratamiento puede reducir la concentración de mioglobulina en un 25% de la que hay en sangre cada 6 horas. ¿Cuánta mioglobulina tiene en su sangre? ¿Cuánto le costará volver a los niveles normales? (0,25 mgr/ml) ¡Vamos, calcula!

Tu: (en plan quejita) ¡Es que son números muy pequeños!

Dr. House: ¡Hazlo en notación científica y usa logaritmos! ¡Para eso tienes la calculadora!

Primero tenemos que calcular el número de mililitros de sangre que tiene el enfermo: de 62 kg:

$$(62\,000\text{ g}) \cdot (0,065\text{ ml/g}) = (6,2 \cdot 10^4\text{ g}) \cdot (6,5 \cdot 10^{-2}\text{ ml/g}) = 4,03 \cdot 10^3\text{ ml de sangre.}$$

La cantidad de mioglobulina será:

$$(1,75\text{ mg/ml}) \cdot (4,03 \cdot 10^3\text{ ml}) = 1,75 \cdot 10^3\text{ g/ml} \cdot (4,03 \cdot 10^3\text{ ml}) = \underline{7,0525\text{ g}}$$

Cada 6 horas se reduce en un 25% la cantidad de mioglobulina, por lo que queda un 75% de la que había. Para saber la que quedará después de 6 horas multiplicamos por 0,75, dentro de 12 horas por 0,75² y así sucesivamente. Queremos saber cuantos periodos de 6 horas deben transcurrir para pasar de 1,75 mg/ml a 0,25 mg/ml. Es decir debemos resolver esta ecuación:

$$1,75 \cdot 0,75^n = 0,25$$

Para despejar usamos logaritmos:

$$\log(1,75 \cdot 0,75^n) = \log 0,25 \Rightarrow \log 1,75 + n \cdot \log 0,75 = \log 0,25$$

Despejamos n y resulta:

$$n = \frac{\log 0,25 - \log 1,75}{\log 0,75} = 6,76$$

luego deben transcurrir "casi" 7 periodos de 6 horas, unas 40,6 horas.