

## FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1. Es posible medir la concentración de alcohol en la sangre de una persona. Investigaciones médicas recientes sugieren que el riesgo  $R$  (dado como porcentaje) de tener un accidente automovilístico puede ser modelado mediante la ecuación:

$$R(x) = 6 \cdot e^{kx}$$

donde  $x$  es la concentración de alcohol en la sangre y  $k$  una constante.

- Calcular la constante  $k$  (con dos cifras decimales), sabiendo que al suponer una concentración de 0,04 de alcohol en la sangre produce un riesgo del 10% ( $R = 10$ ) de sufrir un accidente.
  - Si la ley establece que las personas con un riesgo del 20% o mayor de sufrir un accidente no deben conducir vehículos ¿con cuál concentración de alcohol en la sangre debe un conductor ser arrestado y multado?
  - Representa gráficamente la función anterior. (Indicación: fíjate en su dominio, y elige una escala adecuada)
2. Un problema importante de oceanografía consiste en determinar la cantidad de luz que puede penetrar a varias profundidades oceánicas. La Ley de Beer – Lambert establece que se debe utilizar una función exponencial  $I(x)$ , tal que  $I = I_0 \cdot a^x$ , para modelar este fenómeno. Suponiendo que

$$I(x) = 10 \cdot 0,4^x$$

es la energía lumínica equivalente (en  $\text{cal} \cdot \frac{\text{s}}{\text{cm}^2}$ ) que llega a una profundidad de  $x$  metros.

- ¿Qué energía se tiene a una profundidad de 2 m?
  - Dibujar la gráfica de  $I(x)$ , desde  $x = 0$  a  $x = 5$ .
  - ¿Qué profundidad corresponde a una energía lumínica de  $1,048576 \cdot 10^{-3} \text{ cal} \cdot \frac{\text{s}}{\text{cm}^2}$ ?
3. El trazador (o marcador) radiactivo  $^{51}\text{Cr}$  (isótopo 51 del cromo) se usa para localizar la posición de la placenta de una mujer embarazada. A menudo se debe pedir esta sustancia a un laboratorio médico. Si se envían  $A_0$  unidades (en microcuries), entonces, debido al decrecimiento radiactivo, el número de unidades  $A(t)$  que quedan después de  $t$  días está dado por

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-0,0249 \cdot t}$$

- Si se envían 35 unidades del trazador y este tarda 2 días en llegar, ¿de cuántas unidades se dispone para el análisis?
- Si se necesitan 49 unidades para la prueba, ¿cuántas unidades se deben enviar?

4. Los químicos usan un número denotado por  $pH$  para describir cuantitativamente la acidez de ciertas soluciones. Por definición,  $pH = -\log_{10} [H_3O^+]$  donde  $[H_3O^+]$  es la concentración de iones hidrógenos (hidrogeniones) en moles por litros. Aproxima el  $pH$  de las siguientes soluciones dados sus correspondientes  $[H_3O^+]$ :

a) Vinagre:  $[H_3O^+] = 6,3 \cdot 10^{-3}$

b) Zanahoria:  $[H_3O^+] = 1,0 \cdot 10^{-5}$

c) Agua de mar:  $[H_3O^+] = 5,0 \cdot 10^{-9}$

Aproximar la concentración de iones hidrógenos  $[H_3O^+]$  en cada una de las siguientes sustancias:

a) Manzana:  $pH = 3,0$

b) Cerveza:  $pH = 4,2$

c) Leche:  $pH = 6,6$

**5.** La energía  $E$  (en ergios) liberada durante un terremoto de magnitud  $R$  está dada por la fórmula

$$\log_{10} E = 1,4 + 1,5 \cdot R$$

a) Despejar  $E$  en función de  $R$ .

b) Calcular la energía liberada durante el terremoto de Japón de 2011, que tuvo una magnitud de 8,9 en la escala Richter.

c) Representa gráficamente la función del apartado a).

**Indicación general:** Para la resolución de los problemas puedes usar cualquier programa que represente funciones, como Graph, Wiris, Derive, Excel... escogiendo adecuadamente la escala, el dominio, el recorrido...

# SOLUCIONES

## Ejercicio 1.

$$R(x) = 6 \cdot e^{kx}$$

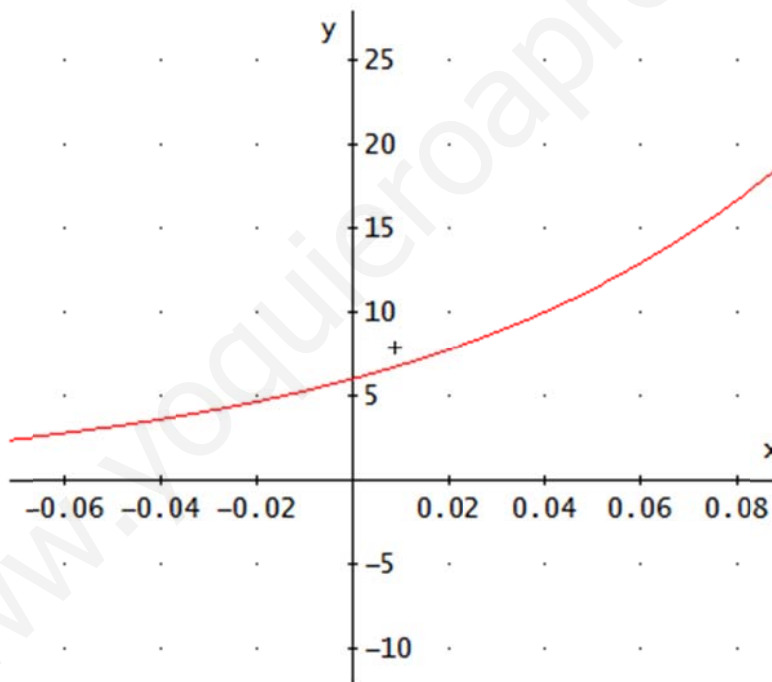
$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} R = 10 \\ x = 0,04 \end{array} \right\} 10 = 6 \cdot e^{0,04 \cdot k} \rightarrow \frac{10}{6} = e^{0,04 \cdot k} \rightarrow \log_e \frac{10}{6} = \log_e e^{0,04 \cdot k} \rightarrow \log_e \frac{10}{6} = 0,04 \cdot k \cdot \log_e e \rightarrow$$

$$\rightarrow k = \frac{\log_e \frac{10}{6}}{\log_e 0,04} = 12,77 \rightarrow \boxed{k = 12,77}$$

$$\text{b) } R \geq 20 \rightarrow 20 = 6 \cdot e^{12,77 \cdot x} \rightarrow \frac{20}{6} = e^{12,77 \cdot x} \rightarrow \log_e \frac{20}{6} = \log_e e^{12,77 \cdot x} \rightarrow \log_e \frac{20}{6} = 12,77 \cdot x \cdot \log_e e$$

$$\rightarrow x = \frac{\log_e \frac{20}{6}}{12,77} = 0,09 \rightarrow \boxed{x \geq 0,09}. \text{ Por tanto, si la concentración de alcohol en la sangre es mayor o igual a } 0,09 \text{ el conductor debe ser arrestado y multado.}$$

c) Gráfica



## Ejercicio 2.

$$I(x) = 10 \cdot 0,4^x$$

$$\text{a) } x = 2 \text{ m} \rightarrow I(2) = 10 \cdot 0,4^2 = 1,6 \rightarrow \boxed{I(2) = 1,6 \text{ cal} \cdot \frac{\text{s}}{\text{cm}^2}}$$

b) Gráfica

c) Teniendo en cuenta el dato del problema:

$$1,048576 \cdot 10^{-3} = 10 \cdot 0,4^x \rightarrow \frac{1,048576 \cdot 10^{-3}}{10} = 0,4^x \rightarrow x = \frac{\log_e \frac{1,048576 \cdot 10^{-3}}{10}}{\log_e 0,4} = 10 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{x = 10 \text{ m}}$$

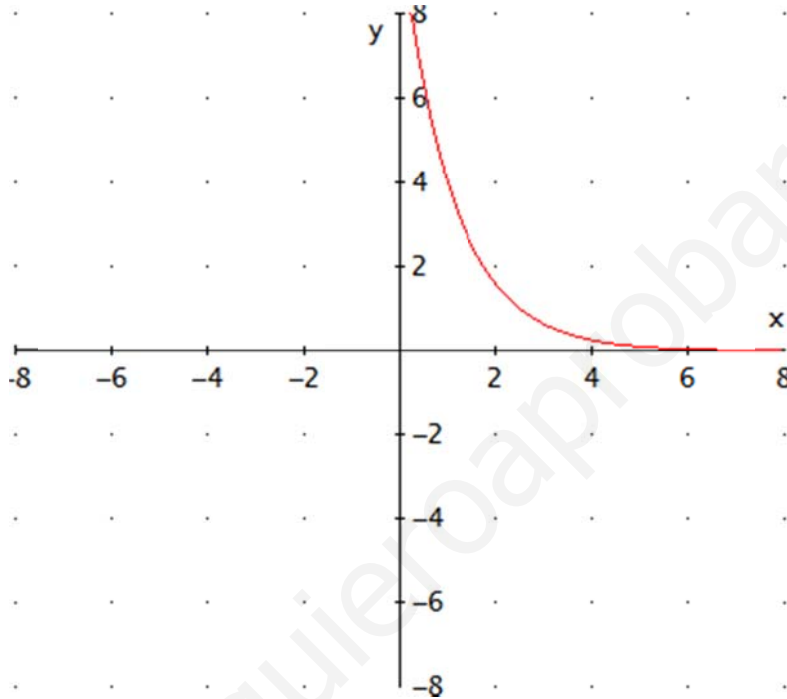
### Ejercicio 3.

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-0,0249 \cdot t}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_0 = 35 \\ a) \quad t = 2 \text{ días} \end{array} \right\} \rightarrow A(2) = 35 \cdot e^{-0,0249 \cdot 2} = 33,30 \approx 33$$

Así, al cabo de dos días quedan  $\boxed{33 \text{ unidades}}$ .

b) Gráfica:



$$c) \quad \left. \begin{array}{l} A(t) = 49 \\ t = 2 \text{ días} \end{array} \right\} \rightarrow 49 = A_0 \cdot e^{-0,0249 \cdot 2} \rightarrow A_0 = \frac{49}{e^{-0,0249 \cdot 2}} = 51,5$$

Habrá que pedir  $\boxed{52 \text{ unidades}}$ .

### Ejercicio 4.

a) Vinagre:  $[H_3O^+] = 6,3 \cdot 10^{-3} \rightarrow pH = -\log_{10} 6,3 \cdot 10^{-3} = 2,2 \rightarrow \boxed{pH = 2,2}$

b) Zanahoria:  $[H_3O^+] = 1,0 \cdot 10^{-5} \rightarrow pH = -\log_{10} 1,0 \cdot 10^{-5} = 5 \rightarrow \boxed{pH = 5}$

c) Agua de mar:  $[H_3O^+] = 5,0 \cdot 10^{-9} \rightarrow pH = -\log_{10} 5,0 \cdot 10^{-9} = 8,3 \rightarrow \boxed{pH = 8,3}$

d) Manzana:  $pH = 3,0 \rightarrow -\log_{10} [H_3O^+] = 3,0 \rightarrow \log_{10} [H_3O^+] = -3,0 \rightarrow \boxed{[H_3O^+] = 10^{-3}}$

e) Cerveza:  $pH = 4,2 \rightarrow -\log_{10} [H_3O^+] = 4,2 \rightarrow \log_{10} [H_3O^+] = -4,2 \rightarrow [H_3O^+] = 10^{-4,2}$

$$\boxed{[H_3O^+] = 6,31 \cdot 10^{-5}}$$

f) Leche:  $pH = 6,6 \rightarrow -\log_{10} [H_3O^+] = 6,6 \rightarrow \log_{10} [H_3O^+] = -6,6 \rightarrow [H_3O^+] = 10^{-6,6}$

$$\boxed{[H_3O^+] = 2,51 \cdot 10^{-7}}$$

### Ejercicio 5.

a)  $\log_{10} E = 1,4 + 1,5 \cdot R \rightarrow E = 10^{1,4+1,5 \cdot R}$

b)  $R = 8,9 \rightarrow E = 10^{1,4+1,5 \cdot 8,9} = 5,62 \cdot 10^{14} \rightarrow E = 5,62 \cdot 10^{14}$  ergios

c) Representación gráfica:

