NÚMEROS COMPLEJOS

0.- INTRODUCCIÓN

Representaremos por $\mathbb{R}^2$ el conjunto de todos los pares ordenados (x,y) de números reales:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Dicho conjunto se denomina plano cartesiano.

Recuerda que sabemos sumar pares ordenados de números reales y multiplicar un número real por un par ordenado:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$k(x,y) = (kx, ky) \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

1.- CONSTRUCCIÓN[1]

A los pares de números reales $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ los llamaremos <u>números complejos</u>, cuando en $\mathbb{R}^2$ estemos considerando las siguientes operaciones:

- suma: $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$
- producto: $(x,y)(x',y') = (xx' - yy', xy' + yx')$

(proceso de construcción de Hamilton).

Suele decirse que el número complejo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ está escrito en <u>forma cartesiana</u>.

Los números reales x e y, como partes del número complejo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, reciben los siguientes nombres:

$x =$ parte real
$y =$ parte imaginaria

El <u>conjunto de los números complejos</u> se representa por $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^2, +, \cdot)\}$$

y tiene estructura de cuerpo conmutativo (igual que el conjunto de los números reales).

<u>Propiedad</u>: Todo número real es un número complejo (de parte imaginaria cero), es decir,

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

---

[1] Generalmente se comienza definiendo $i = \sqrt{-1}$, y después los números complejos. Esto tiene un "pequeño" problema:

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

¿Dónde está el error?

Por tanto, haremos la siguiente identificación: $(x,0)=x$ (es decir, los números reales son los complejos de parte imaginaria cero).

Existe un número complejo especialmente importante que representaremos por i, que se denomina <u>unidad imaginaria</u>:

$$i=(0,1)$$

y que verifica: $i^2=(-1,0)=-1$.

Como consecuencia de lo anterior, todo número complejo se puede escribir en la forma

$$(x,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)=x+iy$$

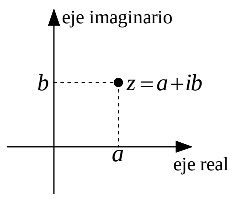
y que se denomina <u>forma binómica</u> del número complejo (x,y).

<u>Igualdad</u>:

$$\left.\begin{array}{l} z_1=x_1+iy_1 \\ z_2=x_2+iy_2 \end{array}\right\} z_1=z_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{array}\right.$$

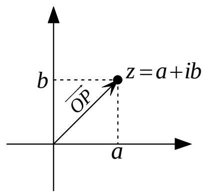
<u>Representación cartesiana o gráfica (diagrama de Argand[2])</u>:
A cada número complejo $z=a+ib$ le asociamos un (único) punto del plano cartesiano, que se denomina afijo de z.

$$z=a+ib \leftrightarrow P(a,b)$$



<u>Representación vectorial</u>:
Uniendo el origen *O* con el punto *P*, afijo del número complejo $z=a+ib$, obtenemos el vector $\overrightarrow{OP}$ asociado al número complejo z.

$$z=a+ib \leftrightarrow \overrightarrow{OP}$$



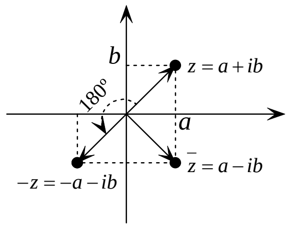
<u>Conjugado</u>: $z=x+iy \Rightarrow \overline{z}=x-iy$

<u>Opuesto</u>: $z=x+iy \Rightarrow \overline{z}=-(x+iy)=-x-iy$

<u>Interpretaciones geométricas</u>

z y $\overline{z}$ son simétricos respecto del eje real
z y $-z$ están relacionados por un giro de 180º

[2] En realidad fue Hamilton el primero que representó los números complejos como puntos del plano.

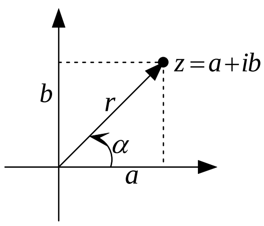


2.- EXPRESIONES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Forma cartesiana: $z = (a, b)$

Forma binómica: $z = a + ib$

Forma polar: $\left.\begin{array}{l} r = \left|\overrightarrow{OP}\right| \\ \alpha = \angle\left\{\overrightarrow{OX^+}, \overrightarrow{OP}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow z = r_\alpha$

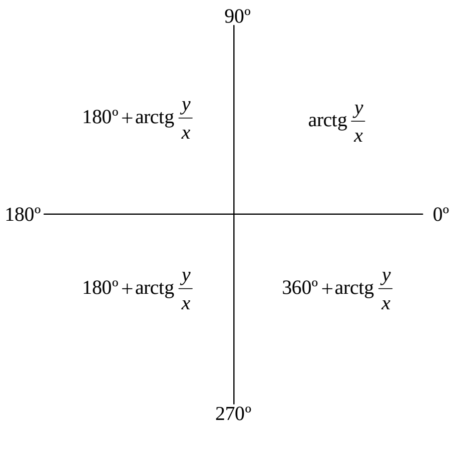


Forma trigonométrica: $z = r\left(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha\right)$

Paso de una a otra forma:

- De binómica a polar

$$z = x + iy \Rightarrow z = r_\alpha \text{ donde } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = \beta + \text{arctg}\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$$



- De polar a binómica

$$z = r_\alpha \Rightarrow z = x + iy \text{ con } \begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r \text{ sen}\alpha \end{cases}$$

<u>Igualdad</u> en forma polar:

$$r_\alpha = s_\beta \Leftrightarrow \begin{cases} r = s \\ \beta = \alpha + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3.- OPERACIONES EN FORMA BINÓMICA

<u>Suma</u>: $\left.\begin{matrix} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

<u>Propiedades de la suma:</u>

(1) Asociativa: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

(2) Conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

(3) Existencia de elemento neutro: $0 = 0 + i \cdot 0$

(4) Existencia de elemento opuesto:

$z = x + iy \Rightarrow -z = -x - iy$

$z + (-z) = 0$

<u>Resta</u>: $\left.\begin{matrix} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z_1 - z_2 = (x_1 - .x_2) + i(y_1 - y_2)$

<u>Multiplicación</u>: $\left.\begin{matrix} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$

<u>Propiedades de la multiplicación:</u>

(5) Asociativa: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

(6) Conmutativa: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

(7) Existencia de elemento neutro: $1 = 1 + i \cdot 0 \Rightarrow z \cdot 1 = z$

(8) Existencia de elemento inverso:

$$z = x + iy \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

(9) Distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Por cumplir las propiedades anteriores se dice que $\mathbb{C}$ es un cuerpo conmutativo:

$$\boxed{(\mathbb{C}, +, \cdot) = \text{ cuerpo conmutativo de los números complejos}}$$

División: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{{x_2}^2 - {y_2}^2}$$

Potenciación: Igual que siempre.

$$\begin{cases} z^n = \underbrace{z\cdot z\cdot \ldots \cdot z}_{n-\text{veces}} \quad \text{con } n\in\mathbb{N} \\ z^0 = 1 \quad \text{siempre que } z\neq 0 \\ z^{-n} = \dfrac{1}{z^n} \quad \text{siempre que } z\neq 0 \end{cases}$$

Se usa la fórmula del binomio de Newton:

$$(x+iy)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} x^{m-k}(iy)^k$$

donde $\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$ ý $0! = 1$.

4.- OPERACIONES EN FORMA POLAR

Multiplicación: $\left.\begin{matrix} z = r_\alpha \\ w = s_\beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow z\cdot w = (r\cdot s)_{\alpha+\beta}$

División: $\left.\begin{matrix} z = r_\alpha \\ w = s_\beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{z}{w} = \left(\dfrac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta}$

Potenciación: $z = r_\alpha \Rightarrow z^n = (r_\alpha)^n = {r^n}_{n\cdot\alpha} \quad \forall n\in\mathbb{Z}$

Fórmula de De Moivre: $(r_\alpha)^n = r^n\left[\cos(n\alpha) + i\,\mathrm{sen}(n\alpha)\right]$

Radicación: Se llama raíz *n* – ésima, $n\in\mathbb{N}$, del número complejo z , y la representamos por $\sqrt[n]{z}$, a cualquier número complejo w tal que $w^n = z$:

$$\sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow w^n = z$$

En forma polar tenemos:

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_\beta \text{ donde } \beta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \quad k = 0,1,\ldots n-1$$

Todos los números complejos tienen exactamente *n* raíces distintas, cuyos afijos forman un *n* – ágono regular.

Una propiedad[3] sobre los radicales complejos:

$$\sqrt[n]{r_\alpha}\cdot\sqrt[n]{s_\beta}=\sqrt[n]{r_\alpha\cdot s_\beta}\Leftrightarrow -\pi<\alpha+\beta\le\pi$$

Raíces cuadradas de – 1:

$$\sqrt{-1}=\sqrt{1_{180^\circ}}=\begin{cases}1_{\frac{180^\circ+0\cdot360^\circ}{2}}=1_{90^\circ}=i\\ 1_{\frac{180^\circ+1\cdot360^\circ}{2}}=1_{270^\circ}=-i\end{cases}$$

Como consecuencia, ya podemos trabajar de forma rigurosa con expresiones de la forma $\sqrt{-x}$ con $x\in\mathbb{R}$:

$$\sqrt{-x}=\sqrt{x\cdot(-1)}=\sqrt{x}\sqrt{-1}=\sqrt{x}\cdot i$$

Potencia de exponente fraccionario:

Definición: $z^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$

Propiedad: $z^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{z}\right)^m=\sqrt[n]{z^m}$

5.- OPERACIONES EN FORMA TRIGONOMÉTRICA

Multiplicación:

$$\left.\begin{array}{l}z=r(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)\\ w=s(\cos\beta+i\operatorname{sen}\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow z\cdot w=(r\cdot s)\left[\cos(\alpha+\beta)+i\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\right]$$

División:

$$\left.\begin{array}{l}z=r(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)\\ w=s(\cos\beta+i\operatorname{sen}\beta)\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{z}{w}=\frac{r}{s}\left[\cos(\alpha-\beta)+i\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

Potenciación:

Fórmula de De Moivre: $\left[r(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)\right]^n=r^n\left[\cos(n\alpha)+i\operatorname{sen}(n\alpha)\right]$

6.- FORMA EXPONENCIAL Y OPERACIONES

Si $z=x+iy$ definimos e^z por

[3] Con la que ya puedes ver dónde está el error del principio de la unidad. Hay que tener cuidado con esta propiedad, ya que en ella se ha hecho una elección distinta del argumento de un número complejo de la dada anteriormente.

$$e^z = e^x \left(\cos y + i \,\text{sen}\, y\right)$$

Propiedad: $e^{z+w} = e^z e^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

Fórmula de Euler: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$

Como consecuencia de lo anterior, podemos escribir un número complejo $z = r_\alpha$ como sigue

$$z = re^{i\alpha}$$

y que se denomina forma exponencial del número complejo z.

Operaciones en forma exponencial:

Producto:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = r_1 e^{i\alpha_1} \\ z_2 = r_2 e^{i\alpha_2} \end{array}\right\} z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}$$

División:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = r_1 e^{i\alpha_1} \\ z_2 = r_2 e^{i\alpha_2} \neq 0 \end{array}\right\} \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha_1-\alpha_2)}$$

Potenciación:

$$z = re^{i\alpha} \longrightarrow z^n = r^n e^{in\alpha}$$

Usando la forma exponencial la fórmula de De Moivre se escribe:

$$\left(e^{i\alpha}\right)^n = e^{in\alpha}$$

7.- TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Propiedad de conjugación: Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Si $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de $p(x)$, entonces $\overline{z} \in \mathbb{C}$ también es raíz.

Teorema Fundamental del Álgebra: Todo polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$, con coeficientes reales o complejos, tiene n raíces.

8.- GEOMETRÍA CON NÚMEROS COMPLEJOS

8.1.- La suma de complejos traslada figuras

Dado un complejo $w = a + bi$, la suma de cualquier otro complejo $z = x + iy$ con w es un complejo $z' = (x+a) + i(y+b)$ cuyo afijo es el trasladado de z por la traslación definida por w.

8.2.- El producto por complejos de módulo unidad gira figuras

Si multiplicamos un complejo cualquiera $z = r_\alpha$ por otro $w = 1_\beta$ de módulo unidad, obtenemos un complejo $z' = wz = (1 \cdot r)_{\beta+\alpha} = r_{\beta+\alpha}$ con el mismo módulo y girado un ángulo β.

8.3.- El producto por números reales positivos dilata o contrae figuras

Si multiplicamos un complejo cualquiera $z = r_\alpha$ por un número real $k > 0$, obtenemos un complejo $w = kz = (kr)\alpha$ con el mismo argumento del dado y más alejado o más cercano al origen según sea $k > 1$ o $k < 1$.

8.4.- El producto de complejos gira y dilata figuras

Dado un número complejo $w = r_\beta$, el producto de un complejo cualquiera $z = s_\beta$ con w es un complejo $z' = wz = (rs)_{\beta+\alpha}$ cuyo afijo es el girado del afijo de w un ángulo α y, a la vez, dilatado según el valor del módulo del complejo z.