

1. Halla la derivada de la función  $f(x) = \frac{2}{x+1}$  en el punto  $x = 3$ , aplicando la definición de derivada.

$$\begin{aligned}
 1^\circ f(a) &\Rightarrow f(3) = \frac{2}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\
 2^\circ f(a+h) &\Rightarrow f(3+h) = \frac{2}{3+h+1} = \frac{2}{4+h} \\
 3^\circ f(a+h) - f(a) &\Rightarrow f(3+h) - f(3) = \frac{2}{4+h} - \frac{1}{2} = \frac{4-1 \cdot (4+h)}{2(4+h)} = \frac{-h}{2(4+h)} \\
 4^\circ f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &\Rightarrow f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{2(4+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{2h(4+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(4+h)} = \frac{-1}{8}
 \end{aligned}$$

2. Calcula la derivada de las siguientes funciones :

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x) &= \text{sen } x^2 & f(x) &= \text{sen } x^2 \rightarrow f = x^2 \rightarrow f' = 2x & \Rightarrow f'(x) &= 2x \cos x^2 \quad (\text{seno}) \\
 \text{b) } f(x) &= \text{sen}^2 x & f(x) &= (\text{sen } x)^2 \rightarrow f = \text{sen } x \rightarrow f' = \cos x & \Rightarrow f'(x) &= 2 \text{sen } x \cdot \cos x \quad (\text{potencial}) \\
 \text{c) } f(x) &= (3x^2 - 2)^5 & f(x) &= (3x^2 - 2)^5 \rightarrow f = 3x^2 - 2 \rightarrow f' = 6x & \Rightarrow f'(x) &= 30x (3x^2 - 2)^4 \\
 \text{d) } f(x) &= \sqrt[3]{x^2 - 3} & f(x) &= \sqrt[3]{x^2 - 3} \rightarrow f = x^2 - 3 \rightarrow f' = 2x & \Rightarrow f'(x) &= \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(x^2 - 3)^2}} \\
 \text{e) } f(x) &= e^{3x+2} & f(x) &= e^{3x+2} \rightarrow f = 3x+2 \rightarrow f' = 3 & \Rightarrow f'(x) &= 3 \cdot e^{3x+2} \\
 \text{f) } f(x) &= \log_3(4x+1) & f(x) &= \log_3(4x+1) \rightarrow f = 4x+1 \rightarrow f' = 4 & \Rightarrow f'(x) &= \frac{4}{(4x+1) \cdot \ln 3} \\
 \text{g) } f(x) &= \sqrt{x^2 - 3x} & f(x) &= \sqrt{x^2 - 3x} \rightarrow f = x^2 - 3x \rightarrow f' = 2x - 3 & \Rightarrow f'(x) &= \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}}
 \end{aligned}$$

$$\text{h) } f(x) = \text{sen}^2(2x^3 + 2x) \quad f(x) = \left[ \underbrace{\text{sen}(2x^3 + 2x)}_f \right]^2$$

1. potencial  $\rightarrow f'(x) = 2 \cdot [\text{sen}(2x^3 + 2x)] \cdot f' \dots \dots f'(x) = 2 \cdot [\text{sen}(2x^3 + 2x)] \cdot \cos(2x^3 + 2x) \cdot (6x^2 + 2)$
2. seno  $\rightarrow f'(x) = \cos(2x^3 + 2x) \cdot f' \dots \dots \dots f'(x) = \cos(2x^3 + 2x) \cdot (6x^2 + 2)$  esto es  $f'$  de 1.
3. suma  $\rightarrow f'(x) = 6x^2 + 2$  esto es  $f'$  de 2. Completamos.

3. Halla las funciones derivadas de las siguientes funciones :

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{7x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot (7x+1) - 1 \cdot 7}{(7x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{7}{(7x+1)^2}$$

$$\text{b) } f(x) = x^{2/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} x^{2/3-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\text{c) } f(x) = x^2 \cdot x^{1/3} \quad f(x) = x^{7/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{7}{3} x^{7/3-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{7}{3} x^{4/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{7\sqrt[3]{x^4}}{3}$$

$$\text{d) } f(x) = (x - \sqrt{1-x^2})^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x - \sqrt{1-x^2}) \left( 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right) \Rightarrow f'(x) = 2(x - \sqrt{1-x^2}) \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2 \cdot e^{2x}) \cdot x^2 - (e^{2x} \cdot 2x)}{x^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot e^{2x} \cdot (x-1)}{x^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot e^{2x} \cdot (x-1)}{x^3}$$

$$\text{f) } f(x) = x \cos 2x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \cos 2x + x(-\operatorname{sen} 2x) \cdot 2 \Rightarrow f'(x) = \cos 2x - 2x \operatorname{sen} 2x$$

$$\text{g) } f(x) = \ln \cos x \Rightarrow f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\text{h) } f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow 1. f'(x) = \frac{\frac{-2}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

Derivamos:  $\frac{1-x}{1+x} = \frac{-1(1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} \Rightarrow \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$  lo colocamos en f' de 1.

$$\text{i) } f(x) = e^{x^2} \cdot \operatorname{tg} x \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} \cdot \operatorname{tg} x + e^{x^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = e^{x^2} \left( 2x \cdot \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) \Rightarrow f'(x) = e^{x^2} (2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 + \operatorname{tg}^2 x)$$

## Ejercicios propuestos

1.  $f(x) = (1 + 3x^4)^5$
2.  $f(x) = (1 + x + x^2)^3$
3.  $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)^4}$
4.  $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}$
5.  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
6.  $f(x) = \sqrt[3]{2+5x^2}$
7.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3-2)^2}}$
8.  $f(x) = (5x^3+1)^3 \cdot (x^2+x+1)^4$
9.  $f(x) = (5 - 3 \cos x)^4$
10.  $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^3 x$
11.  $f(x) = \frac{1}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}$
12.  $f(x) = \operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x$
13.  $f(x) = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$
14.  $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$
15.  $f(x) = (1 + \operatorname{sen} 5x)^4$
16.  $f(x) = \sqrt{x e^x + x}$
17.  $f(x) = \sqrt[3]{2^x + x}$
18.  $f(x) = \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} x)$
19.  $f(x) = \operatorname{Arc} \cos \sqrt{x}$
20.  $f(x) = \operatorname{Arc} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2}\right)$
21.  $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$
22.  $f(x) = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{x}\right)$
23.  $f(x) = \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(e^x)$
24.  $f(x) = \operatorname{Arc} \operatorname{sen} \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$
25.  $f(x) = \operatorname{Ln}(\operatorname{sen} x)$
26.  $f(x) = \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^3 x$
27.  $f(x) = \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos^2 x}$
28.  $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3}$
29.  $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$
30.  $f(x) = \left[\frac{x^2+x+1}{x^3-6}\right]^5$
31.  $f(x) = \left[\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}\right]^3$
32.  $f(x) = x \cdot e^{-1/x^2}$
33.  $f(x) = \sec(x^2) + \operatorname{cosec}(x^2)$
34.  $f(x) = \frac{1 - \cos(x^2)}{1 + \cos(x^2)}$
35.  $f(x) = (1 + e^{\operatorname{sen} x})^3$
36.  $f(x) = \operatorname{Ln}(\sqrt{1+e^x} - 1) - \operatorname{Ln}(\sqrt{1+e^x} + 1)$
37.  $f(x) = \operatorname{Ln} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$
38.  $f(x) = \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
39.  $f(x) = \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(x^2 - 1)$
40.  $f(x) = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$
41.  $f(x) = \operatorname{Arc} \operatorname{sen}(1-x) + \sqrt{2x-x^2}$
42.  $f(x) = \frac{\operatorname{Arc} \cos x}{\sqrt{1-x^2}}$
43.  $f(x) = \operatorname{Ln} \left(\cos \frac{x-1}{x}\right)$
44.  $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \operatorname{Ln} \frac{1 + \sqrt{x^2+1}}{x}$
45.  $f(x) = \operatorname{Ln} \frac{1 + \sqrt{\operatorname{sen} x}}{1 - \sqrt{\operatorname{sen} x}}$
46.  $f(x) = \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} x)))$
47.  $f(x) = (x^2)^x$
48.  $f(x) = x^{(x^2)}$
49.  $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$
50.  $f(x) = x^{\cos x}$
51.  $f(x) = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$
52.  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

## Soluciones:

1.  $60x^3(1+3x^4)$
2.  $3(2x+1)(1+x+x^2)^2$
3.  $-8x(x^2-1)^{-5}$
4.  $-(x-1)^{-2} - 4(x-1)^{-3} - 9(x-1)^{-4}$
5.  $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$
6.  $\frac{10x}{3\sqrt{(2+5x^2)^2}}$
7.  $-2x^2(x^3-2)^{-5/3}$
8.  $45x^2(5x^3+1)^2(x^2+x+1)^4 + 4(2x+1)(5x^3+1)^3(x^2+x+1)^3$
9.  $12 \operatorname{sen} x (5-3 \cos x)^3$
10.  $\cos x (1+2 \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen}^2 x)$
11.  $\frac{-1}{(1+x^2)(\operatorname{Arctg} x)^2}$
12.  $3 \operatorname{sen} x \cos x (\operatorname{sen} x + \cos x)$
13.  $\operatorname{sen} x \left( \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right)$
14.  $2x \cos (x^2)$
15.  $20 \cos 5x (1 + \operatorname{sen} 5x)^3$
16.  $\frac{e^x + xe^x + 1}{2\sqrt{xe^x + 1}}$
17.  $\frac{2^x \operatorname{Ln} 2 + 1}{3\sqrt{(2^x + x)^2}}$
18.  $\frac{1}{x \operatorname{Ln} x}$
19.  $\frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$
20.  $\frac{-2}{x\sqrt{x^2-1}}$
21.  $\frac{-4 \operatorname{sen} 2x}{(1 - \cos 2x)^2}$
22.  $\frac{-1}{1+x^2}$
23.  $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$
24.  $\frac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}$
25.  $\cot x$
26.  $3 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$
27.  $\frac{6 \operatorname{sen} x \cos x}{(1 + \cos^2 x)^2}$
28.  $xe^{x^3}(2+3x^3)$
29.  $\frac{x e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$
30.  $5 \cdot \left( \frac{x^2+x+1}{x^3-6} \right)^4 \cdot \frac{-x^4-2x^3-3x^2-12x-6}{(x^3-6)^2}$
31.  $\frac{-6}{1-2 \operatorname{sen} x \cos x} \cdot \left( \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} \right)^2$
32.  $e^{-1/x^2} \left( 1 + \frac{2}{x^2} \right)$
33.  $2x (\operatorname{tg}(x^2) \operatorname{sec}(x^2) - \operatorname{cot}(x^2) \operatorname{cosec}(x^2))$
34.  $\frac{4x \operatorname{sen} x^2}{(1 + \cos(x^2))^2}$
35.  $3 e^{\operatorname{sen} x} \cos x (1 + e^{\operatorname{sen} x})^2$
36.  $\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$
37.  $\frac{9}{x(x^2+9)}$
38.  $\operatorname{cosec} x$
39.  $\frac{2x}{x^3-2x^2+2}$
40.  $\frac{-2x}{1+x^4}$
41.  $\frac{-x}{\sqrt{2x-x^2}}$
42.  $\frac{x \operatorname{Arc} \cos x - \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$
43.  $\frac{1}{x^2} \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{x-1}{x} \right)$
44.  $\frac{x^2+1+\sqrt{x^2+1}}{x(1+\sqrt{x^2+1})} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
45.  $\frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen} x)}}$
46.  $\frac{1}{(\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} x))) (\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} x)) (\operatorname{Ln} x)}$
45.  $2x^{2x} (\operatorname{Ln} x + 1)$
48.  $x^{x^2+1} (2 \operatorname{Ln} x + 1)$
49.  $x^{\operatorname{sen} x} \left( \cos x \operatorname{Ln} x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)$
50.  $x^{\cos x} \left( -\operatorname{sen} x \operatorname{Ln} x + \frac{\cos x}{x} \right)$
51.  $(\cos x)^{\cos x} \cdot \left( \cos x \operatorname{Ln}(\cos x) - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} \right)$
52.  $(1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \left( \frac{-\operatorname{Ln}(1+x)}{x^2} + \frac{1}{x(1+x)} \right)$

\*\*\* Las soluciones están simplificadas al máximo.

## EJERCICIO

a) Comprueba que la siguiente función es continua y derivable y halla  $f'(0)$ ,  $f'(3)$  y  $f'(1)$ :

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) ¿Cuál es su función derivada?

c) ¿En qué punto se cumple  $f'(x) = 5$ ?

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Si  $x \neq 1$ , la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.

**Continuidad en  $x = 1$ :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

**Derivabilidad en  $x = 1$ :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3 = 3 = f'(1^-) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3 = f'(1^+) \end{array} \right\} \text{Las derivadas laterales existen y coinciden.}$$

Luego,  $f(x)$  es derivable en  $x = 1$ . Además,  $f'(1) = 3$ .

Así  $f(x)$  es continua y derivable en todo  $\mathbb{R}$ .

$$f'(0) = 3$$

$$f'(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

c) Si  $f'(x) = 5$ , entonces  $x \geq 1$ . Es decir:

$$f'(x) = 2x + 1 = 5 \rightarrow x = \frac{4}{2} = 2 > 1$$

$$f'(2) = 5$$

### EJERCICIO

Comprueba que  $f(x)$  es continua pero no derivable en  $x = 2$ :

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) & \text{si } x < 2 \\ 3x-6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

• Si  $x \neq 2$ , la función es continua y derivable.

• Continuidad en  $x = 2$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-1) = \ln 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (3x-6) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array} \right\} f \text{ es continua en } x = 2.$$

• Derivabilidad en  $x = 2$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1} = 1 = f'(2^-) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 3 = f'(2^+) \end{array} \right\} \text{Las derivadas laterales existen pero no coinciden.}$$

$f(x)$  no es derivable en  $x = 2$ .

### EJERCICIO

Calcula la derivada de las siguientes funciones, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

a)  $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

b)  $y = \ln(x \operatorname{tg} x)^2$

c)  $y = \ln\left(\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2-1}\right)$

d)  $y = \ln \sqrt[3]{\frac{1}{(1+x)^2}}$

a)  $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2} [\ln(1-x) - \ln(1+x)]$

$$y' = \frac{1}{2} \left[ \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} \right] = \frac{-1}{1-x^2} = \frac{1}{x^2-1}$$

b)  $y = \ln(x \operatorname{tg} x)^2 = 2[\ln x + \ln(\operatorname{tg} x)]$

$$y' = 2 \left[ \frac{1}{x} + \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \right] = 2 \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x \right] = \frac{2}{x} + 2 \operatorname{cotg} x + 2 \operatorname{tg} x$$

c)  $y = \ln\left(\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2-1}\right) = -2 \ln x + \frac{1}{3} \ln(x^2-1)$

$$y' = \frac{-2}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{x^2-1} = \frac{-2}{x} + \frac{2x}{3x^2-3} = \frac{-6x^2+6+2x^2}{3x^3-3x} = \frac{-4x^2+6}{3x^3-3x}$$

d)  $y = \ln \sqrt[3]{\frac{1}{(1+x)^2}} = \frac{1}{3} [\ln 1 - \ln(1+x)^2] = \frac{-2}{3} \ln(1+x)$

$$y' = \frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{-2}{3+3x}$$

### EJERCICIO

Utilizando la definición de derivada, calcula:  $f'(-2)$ , siendo  $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{f(-2+b) - f(-2)}{b} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{-2+b} - \frac{1}{-2}}{b} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\frac{2-2+b}{-4+2b}}{b} = \\ &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b}{b(-4+2b)} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{-4+2b} = \frac{-1}{4} = f'(-2) \end{aligned}$$

### EJERCICIO

Halla la función derivada de  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$  aplicando la definición de derivada.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{f(x+b) - f(x)}{b} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\frac{x+b-1}{x+b+1} - \frac{x-1}{x+1}}{b} = \\ &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{(x+1)(x+b-1) - (x-1)(x+b+1)}{b(x+b+1)(x+1)} = \\ &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + \cancel{x}b - \cancel{x} + \cancel{x} + b - \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{x}b - \cancel{x} + \cancel{x} + b + \cancel{1}}{b(x+b+1)(x+1)} = \\ &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{2b}{b(x+b+1)(x+1)} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{2}{(x+b+1)(x+1)} = \frac{2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

### EJERCICIO

Comprueba que la función  $y = |x-2|$  no es derivable en  $x = 2$ .

$$y = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < 2 \\ x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad y' = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La función es continua, pues:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (-x+2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = f(2) = 0$

Las derivadas laterales son:  $f'(2^-) = -1 \neq f'(2^+) = 1$ . Por tanto, no es derivable en  $x = 2$ .



### EJERCICIO

Calcula los puntos de derivada nula de las siguientes funciones:

a)  $y = \frac{x}{(x+3)^2}$

b)  $y = \frac{16}{x^2(x-4)}$

c)  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

d)  $y = e^x(x-1)$

e)  $y = x^2 e^x$

f)  $y = \text{sen } x + \text{cos } x$

a)  $y' = \frac{(x+3)^2 - 2(x+3)x}{(x+3)^4} = \frac{(x+3) - 2x}{(x+3)^3} = \frac{3-x}{(x+3)^3}$

$y' = 0 \rightarrow 3 - x = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = \frac{1}{12}$

Se anula en el punto  $\left(3, \frac{1}{12}\right)$ .

b)  $y = \frac{16}{x^3 - 4x^2} \rightarrow y' = \frac{-16(3x^2 - 8x)}{(x^3 - 4x^2)^2}$

$y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 8x = 0 \rightarrow x(3x - 8) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ x = \frac{8}{3} \rightarrow y = \frac{-27}{16} \end{cases}$

$x = 0$  no está en el dominio.

La derivada se anula en el punto  $\left(\frac{8}{3}, \frac{-27}{16}\right)$ .

c)  $y' = \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$

$= \frac{\cancel{2x^3} + \cancel{2x^2} + \cancel{2x} - \cancel{x^2} - \cancel{x} - 1 - \cancel{2x^3} - \cancel{x^2} + \cancel{2x^2} + \cancel{x} - \cancel{2x} - 1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2+x+1)^2}$

$y' = 0 \rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = \frac{1}{3} \\ x = -1 \rightarrow y = 3 \end{cases}$

Se anula en los puntos  $(-1, 3)$  y  $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ .

d)  $y' = e^x(x-1) + e^x = e^x(x-1+1) = xe^x$

$y' = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1$

Se anula en el punto  $(0, -1)$ .

e)  $y' = 2x e^x + x^2 e^x = e^x(2x + x^2)$

$y' = 0 \rightarrow 2x + x^2 = 0 \rightarrow x(2+x) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = -2 \rightarrow y = 4e^{-2} \end{cases}$

Se anula en los puntos  $(0, 0)$  y  $(-2, 4e^{-2})$ .

$$f) y' = \cos x - \operatorname{sen} x$$

$$y' = 0 \rightarrow \cos x = \operatorname{sen} x \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \rightarrow y = \sqrt{2} \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \rightarrow y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Se anula en los puntos  $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \sqrt{2}\right), \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, -\sqrt{2}\right)$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

### EJERCICIO

Dada la función  $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ , halla:  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  y  $f'''(x)$ .

$$f'(x) = \cos x e^{\operatorname{sen} x}$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x e^{\operatorname{sen} x} + \cos^2 x e^{\operatorname{sen} x} = (\cos^2 x - \operatorname{sen} x) e^{\operatorname{sen} x}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (2\cos x(-\operatorname{sen} x) - \cos x) e^{\operatorname{sen} x} + (\cos^2 x - \operatorname{sen} x) \cos x e^{\operatorname{sen} x} = \\ &= (-2\operatorname{sen} x \cos x - \cos x + \cos^3 x - \operatorname{sen} x \cos x) e^{\operatorname{sen} x} = \\ &= (\cos^3 x - 3\operatorname{sen} x \cos x - \cos x) e^{\operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

## EJERCICIO

Considera la función:  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Calcula  $m$  y  $n$  para que  $f$  sea derivable en todo  $\mathbb{R}$ .

b) ¿En qué puntos es  $f'(x) = 0$ ?

a) Para que sea derivable, en primer lugar ha de ser continua.

• Si  $x \neq 1$ , la función es continua, pues está formada por dos polinomios.

• En  $x = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x + m) = -4 + m \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + nx) = -1 + n \\ f(1) &= -4 + m \end{aligned} \right\}$$

Para que sea continua en  $x = 1$ , ha de ser:  $-4 + m = -1 + n$ ; es decir:  $m = n + 3$ .

**Derivabilidad:**

• Si  $x \neq 1$ , la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

• En  $x = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= -3 \\ f'(1^+) &= -2 + n \end{aligned} \right\} \text{ Para que sea derivable en } x = 1, \text{ ha de ser } -3 = -2 + n, \text{ es} \\ \text{decir, } n = -1.$$

Por tanto, la función será derivable en todo  $\mathbb{R}$  si  $m = 2$  y  $n = -1$ . En este caso, la derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b)  $f'(x) = 2x - 5$  si  $x < 1$

$$2x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}; \text{ pero } \frac{5}{2} > 1$$

$f'(x) = -2x - 1$  si  $x \geq 1$

$$-2x - 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}; \text{ pero } -\frac{1}{2} < 1$$

Por tanto,  $f'(x)$  no se anula en ningún punto.

### EJERCICIO

Determina el valor de  $k$  que hace que la función  $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + k}$  tenga un único punto de tangente horizontal.

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + k) - 2xe^x}{(x^2 + k)^2} = \frac{(x^2 - 2x + k)e^x}{(x^2 + k)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 2x + k = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4k}}{2}$$

Para que haya una sola ecuación, ha de ser  $4 - 4k = 0$ ; es decir,  $k = 1$ .

### EJERCICIO

Dada la función  $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$  estudia si es continua y derivable en todo  $\mathbb{R}$ .

#### Continuidad:

• En  $x \neq 0 \rightarrow$  La función es continua, pues está formada por dos funciones continuas.

• En  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0). \text{ Por tanto, la función es continua en } x = 0.$$

La función es continua en todo  $\mathbb{R}$ .

#### Derivabilidad:

• Si  $x \neq 0 \rightarrow$  La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• En  $x = 0$ :

$$f'(0^-) = -1 = f'(0^+)$$

Por tanto,  $f(x)$  es derivable en  $x = 0$  y  $f'(0) = -1$ . La función es derivable en todo  $\mathbb{R}$ . Su derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

### EJERCICIO

Calcula  $a$  y  $b$  para que la siguiente función sea derivable en todo  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

- Si  $x \neq 2 \rightarrow$  La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- En  $x = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) &= 4a + 6 \end{aligned} \right\}$$

Para que sea continua, ha de ser  $4a + 6 = -2b$ , es decir,  $2a + 3 = b$ ; o bien  $b = -2a - 3$ .

#### Derivabilidad:

- Si  $x \neq 2 \rightarrow$  la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- En  $x = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= 4a + 3 \\ f'(2^+) &= 4 - b \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Para que sea derivable ha de ser } 4a + 3 = 4 - b, \text{ es decir,} \\ &b = -4a + 1. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las dos condiciones obtenidas:

$$\left. \begin{aligned} b &= -2a - 3 \\ b &= -4a + 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -2a - 3 &= -4a + 1 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2 \\ b &= -7 \end{aligned}$$

Por tanto, para que  $f(x)$  sea derivable en todo  $\mathbb{R}$ , ha de ser  $a = 2$  y  $b = -7$ .

### EJERCICIO

Sea la función:  $f(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Halla  $f'(x)$ .

b) Halla  $f''(x)$ .

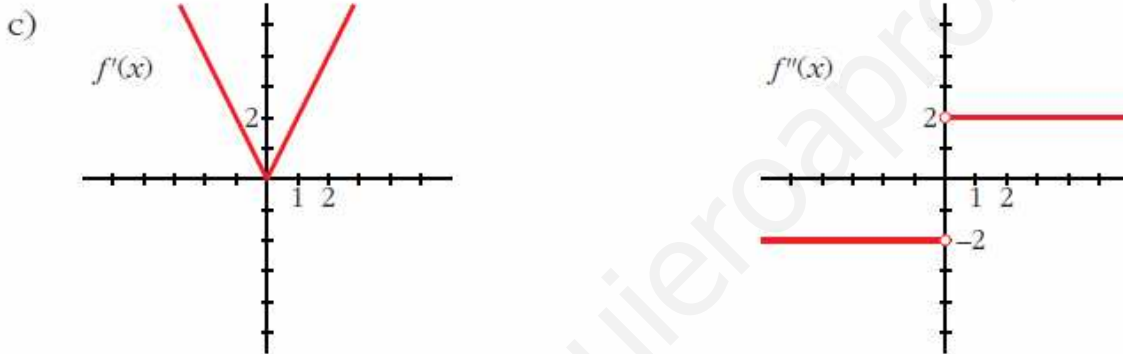
c) Representa  $f'$  y  $f''$ .

$$a) f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En  $x = 0$  existe la derivada, pues  $f(x)$  es continua, y, además,  $f'(0^-) = f'(0^+)$ .

$$b) f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En  $x = 0$  no existe la segunda derivada, pues  $f''(0^-) \neq f''(0^+)$ .



### EJERCICIO

Estudia la derivabilidad de la función:  $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$  y calcula  $f'(1)$ .

$$f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$f(x)$  es una función continua en  $\mathbb{R}$ .

$f(x)$  es derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$  (en  $x = 0$  no existe la derivada).

$$f'(1) = \frac{-2}{3}$$

### EJERCICIO

Calcula la derivada de orden  $n$  de la función  $f(x) = e^{2x}$ .

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

$$f''(x) = 4e^{2x} = 2^2 e^{2x}$$

$$f'''(x) = 8e^{2x} = 2^3 e^{2x}$$

...

$$f^n(x) = 2^n e^{2x}$$

Lo demostramos por inducción:

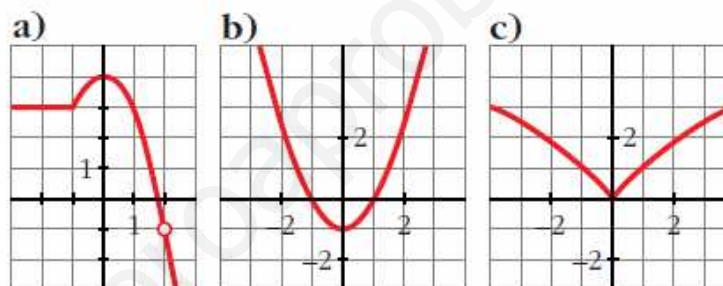
Para  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$ , vemos que se cumple.

Supongamos que es cierto para  $n - 1$ ; es decir, que  $f^{n-1}(x) = 2^{n-1} e^{2x}$ ; entonces, derivando, tenemos que:  $f^n(x) = 2 \cdot 2^{n-1} e^{2x} = 2^n e^{2x}$ . Por tanto, la expresión obtenida es cierta para todo  $n$ .

### EJERCICIO

Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables.

¿Alguna de ellas es derivable en todo  $\mathbb{R}$ ?



- a) No es derivable en  $x = -1$  (tiene un punto “anguloso”) ni en  $x = 2$  (no está definida la función).
- b) Es derivable en todo  $\mathbb{R}$ .
- c) No es derivable en  $x = 0$  (tiene un punto “anguloso”).

### EJERCICIO

La función  $f(x)$  está definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcula  $a$  y  $b$  para que  $f$  sea continua y derivable.

**Continuidad:**

- En  $x \neq 0 \rightarrow$  La función es continua, pues está formada por dos polinomios
- En  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (ax + b) = b \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \text{Para que sea continua ha de ser } b = 0$$

**Derivabilidad:**

- Si  $x \neq 0 \rightarrow$  La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = a \end{array} \right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser } a = -1.$$

Por tanto,  $f(x)$  será continua y derivable si  $a = -1$  y  $b = 0$ .

### EJERCICIO

Halla los puntos de derivada nula de la función  $y = (3x - 2x^2) e^x$ .

$$y' = (3 - 4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x = (3 - 4x + 3x - 2x^2)e^x = (-2x^2 - x + 3)e^x$$

$$y' = 0 \rightarrow -2x^2 - x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-4} = \frac{1 \pm 5}{-4} \begin{cases} x = \frac{-3}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$



## EJERCICIO

Determina, si es posible, el valor del parámetro  $a$  para que la función  $f$  sea derivable en todo su dominio de definición:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a(1 - e^{1-x}) & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Para que  $f(x)$  sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

• Si  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ : La función es continua, pues está formada por funciones continuas.

• En  $x = 1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x \ln x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [a(1 - e^{1-x})] = 0 \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

### Derivabilidad

• Si  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ : es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ ae^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

• En  $x = 1$ :

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = 1 \\ f'(1^+) = a \end{array} \right\} f(x) \text{ es derivable en } x = 1 \text{ si } a = 1.$$

Luego, para que  $f$  sea derivable en todo su dominio de definición, ha de ser  $a = 1$ .