FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Función real de variable real.- Una función real de variable real f es una aplicación de D en R, siendo D un subconjunto de R distinto del conjunto vacío $(D \neq \Phi)$.

Al conjunto D se le denomina dominio de la función f. Llamaremos Im f o recorrido de f al conjunto siguiente: $\{f(x) \in R;\ x \in D\}$. Evidentemente se verifica Im f $\subset$ R.

Evidentemente una función f queda determinada conociendo su dominio y su criterio de asignación de imágenes. Sin embargo, en la práctica, al referirnos a una función, en muchas ocasiones indicamos exclusivamente cual es su criterio de asignación. Cuando esto suceda, es decir cuando al referirnos a una función no se indique cual es su dominio, consideraremos que éste es el más amplio posible, de acuerdo con el criterio de asignación de imágenes indicado. Por ejemplo, si consideramos la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ y no mencionamos su dominio, éste será el más amplio posible, de acuerdo con el criterio de asignación citado. Es decir, estará formado por todos los números reales tales que sustituidos en la x hacen que $\sqrt{x^2 - 5x + 4}$ sea un número real. Por tanto el dominio de f será el siguiente conjunto: $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$.

Gráfica de una función.- Fijado un sistema de referencia, llamaremos gráfica de f, respecto de dicho sistema, al siguiente conjunto de puntos: $\{(x,f(x))\ ;\ x \in D\}$.

Funciones elementales.-

Función polinómica.- $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$. Su dominio es R.

Distinguiremos las siguientes:

Función constante: Tiene la forma f(x) = k, siendo k un número real. Su representación gráfica es una línea recta horizontal, que pasa por el punto (0,k); en particular, la ecuación del eje x es y = 0

Función lineal: Tiene la forma f(x) = mx, siendo m un número real no nulo, llamado pendiente. Su representación gráfica es una línea recta que pasa por el origen, creciente si m>0 y decreciente si m<0.

Función afín: Tiene la forma f(x) = mx+n, siendo m y n números reales llamados pendiente y ordenada en el origen respectivamente $(m,n \neq 0)$. Su representación gráfica es una línea recta que no pasa por el origen, sino por el punto (0,n), creciente si m>0 y decreciente si m<0.

Función valor absoluto: Se denota como |x| y se define $f(x) = |x| = \begin{cases} x \ si \quad x \geq 0 \\ -x \ si \quad x < 0 \end{cases}$

En definitiva es una función a trozos. Su dominio es R , y su gráfica serán dos semirrectas cuyo origen será el origen de coordenadas.

Función valor absoluto de la función g(x).

$$f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) \ si \ g(x) \geq 0 \\ -g(x) \ si \ g(x) < 0 \end{cases}$$. Su dominio será el de g(x).

Función cuadrática: Tiene la forma $f(x) = ax^2+bx+c$, siendo a, b y c números reales $(a \neq 0)$.Su representación gráfica es una parábola ($\cup$) si a>0 y ($\cap$) si a<0.

Función racional :Es el cociente de dos funciones polinómicas. Su dominio es todo R, salvo los números reales que sean raíces del denominador.

Función raíz cuadrada: Si a cada número real positivo le hacemos corresponder su raíz cuadrada obtenemos una función cuya expresión matemática es $f(x) = \sqrt{x}$. Su dominio

$D f = \{ x \in R \mid x \geq 0 \}$.

Funciones definidas a trozos: Serán las funciones tales que su criterio de asignación de imágenes varía para diferentes puntos del dominio por ejemplo : f(x) $\begin{cases} x & si \quad x < -3 \\ -3 & si \quad -3 \le x < 2 \\ -2x+1 & si \quad x \le 2 \end{cases}$.

Su dominio será :el de cada una de las funciones que la integran y los puntos que definen cada trozo.

Operaciones con funciones.- Sean f: D→R y g: D' →R.

Suma.- (f+g)(x) = f(x)+g(x). Dominio (f+g)= D ∩ D'.

Producto.- (f.g)(x) = f(x).g(x). Dominio (f.g)= D ∩ D'.

Producto por un número real k.- (k.f)(x) = k.f(x). Dominio k.f=D.

Cociente.- (f/g)(x) = f(x)/g(x). Dominio (f/g)= D∩{x∈D' / g(x) $\neq 0$}.

Composición.- (gof)(x) = g(f(x)). Dominio (gof) = {x∈ D; f(x) ∈ D'}.

Evidentemente, para poder realizar una determinada operación, el dominio de la función resultado no puede ser el conjunto vacío.

Función inversa.

Una función f: D ⟶R es inyectiva si y sólo si se cumple lo siguiente:

si f(x) = f(y) entonces x = y.

Sea una función f, de dominio D, inyectiva, llamamos función inversa de f a la siguiente:

f^{-1}: Im f →R tal que $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$.

Es inmediato que $(f^{-1} of)(x) = x$, ∀x ∈ D , que $(fof^{-1})(x) = x$ y ∀x∈ Im f.

Se verifica que las gráficas de f y de f^{-1} son simétricas respecto de la recta y = x (bisectriz de los cuadrantes primero y tercero).

Función exponencial.- f(x)= e^x. Su dominio es R. Im f = (0,+∞). Es estrictamente creciente en todo su dominio.

Función logaritmo neperiano.- f(x)= Ln x. Es la función inversa de la función exponencial. Por tanto su dominio es (0,+∞). Evidentemente y =Ln x ⇔ $e^y = x$.

Se cumple que Ln (a .b)=Ln a + Ln b ; Ln (a : b)= Ln a - Ln b ; Ln a^x = x. Ln a

Las gráficas de la función exponencial y de la función logaritmo neperiano, al ser inversas, son simétricas respecto de la recta y = x.

Función exponencial de base a>0, a$\neq$1.f(x) = a^x. Su dominio es R. Imf = (0, ∞).

Si a> l entonces la función es estrictamente creciente en todo su dominio.

Si a< l entonces la función es estrictamente decreciente en todo su dominio.

Función logarítmica de base a>0,a$\neq$1. f(x)=$Log_a x$. Es la función inversa de la función exponencial de base a. Por tanto su dominio es (0,+ ∞).

Evidentemente y = $\log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Se cumple que $Log_a(b.c) = Log_a b + Log_a c$; $Log_a(b: c) = Log_a b – Log_a c$

Las gráficas de la función exponencial y de la función logarítmica, ambas de base a, son simétricas respecto de la recta y = x.

Algunas características de las funciones:signo, paridad, crecimiento.....

Signo de una función: Determinar el signo de una función consiste en buscar para qué valores de x es $f(x)>0$ y para que valores de x es $f(x)<0$.
Geométricamente el problema se traduce en determinar para que valores de x la grafica de f(x) está por encima del eje OX ($f(x)>0$), por debajo ($f(x)<0$) o corta al eje OX ($f(x)=0$).

Funcion par: Sea f(x) una función real de variable real definida en un dominio D. Se dice que f(x) es par cuando $f(x)=f(-x)\ \forall x\in D$.

Funcion impar: Sea f(x) una función real de variable real definida en un dominio D. Se dice que f(x) es impar cuando $f(x) = - f(-x)\ \forall x\in D$.

Función monótona en un determinado intervalo

Sea $f: D \to R$, es monótona en I cuando:

$\forall x,y\in I$ se verifica que si $x<y$ entonces $f(x)<f(y)$ (monótona creciente).

$\forall x,y\in I$ se verifica que si $x<y$ entonces $f(x)>f(y)$ (monótona decreciente).

$\forall x,y \in I$ se verifica que si $x<y$ entonces $f(x)\leq f(y)$ (monótona no decreciente).

$\forall x,y \in I$ se verifica que si $x<y$ entonces $f(x)\geq f(y)$ (monótona no creciente).

Función monótona en un punto x_0.

$f: D\to R$ es monótona creciente, decreciente, no decreciente o no creciente en $x_o\in D$ cuando existe un intervalo (xo-h, xo+h) ($h>0$) en el que f(x) es, respectivamente, monótona creciente, decreciente, no decreciente o no creciente.

Sucesión.- Es un caso particular de función en el que el dominio es N. Es decir es una aplicación de N en R. A la imagen de 1 se la denomina primer término de la sucesión (a_1) , a la de 2 segundo término (a_2) , a la de 3 tercer término (a_3) , ... , a la de i término (a_i), ...

Como el dominio es siempre N, una sucesión queda perfectamente determinada indicando cuales son sus términos. Éstos suelen darse por medio de una o varias fórmulas que constituyen la expresión del llamado término general de la sucesión. Por ejemplo si decimos: consideramos la sucesión $a_n = n^2 + 1$, estamos, de ese modo, indicando cuales son todos los términos de la sucesión. Evidentemente éstos se obtendrán dando a n los valores 1,2,3, ...

Límite de una sucesión.-

Límite real.- Diremos que una sucesión a_n, tiene por límite un número real L (escribiremos $\lim a_n = L$) cuando $\forall \varepsilon > 0$ existe un término de la sucesión (dependiendo de ε) tal que todos los términos que le siguen pertenecen al intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Límite + ∞.- Diremos que una sucesión a_n, tiene por límite $+\infty$ (escribiremos $\lim a_n=+\infty$) cuando $\forall\ k > 0$ existe un término de la sucesión (dependiendo de k) tal que todos los términos que le siguen son mayores que k.

Límite - ∞ .- Diremos que una sucesión a_n, tiene por límite $-\infty$ (escribiremos $\lim a_n=-\infty$) cuando $\forall\ k < 0$ existe un término de la sucesión (dependiendo de k) tal que todos los términos que le siguen son menores que k.

Una sucesión especialmente interesante es la de término general $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Su límite es el número irracional e = 2'71828182...............

<u>Límite de una función</u>.- En la siguiente definición se incluyen, de modo abreviado, quince casos. Observa que α admite cinco posibilidades y que β admite tres. Combinando todas ellas obtenemos las quince opciones indicadas.

Sea $f:D \to R$. Se dice que $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$, con $\alpha = \begin{cases} a \\ a^{+} \\ a^{-} \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$; $\beta = \begin{cases} b \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$ (a,b∈R),

Cuando ∀ sucesión de términos x_1, x_2, x_3,…,x_n,… siendo ∀i $x_i \in D$, que

(caso a) tenga por límite a, cumpliéndose que ∀i $x_i \neq a$.

(caso a^+) tenga por límite a, cumpliéndose que ∀i $x_i > a$.

(caso a^-) tenga por límite a, cumpliéndose que ∀i $x_i < a$.

(caso $+\infty$) tenga por límite $+\infty$.

(caso $-\infty$) tenga por límite $-\infty$.

se verifica que la correspondiente sucesión de imágenes $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$,… $f(x_n)$,…… tiene por límite β.

Caso de existir $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$, el que exista $\lim_{x\to a} f(x)$ equivale a que sean iguales los dos límites laterales citados, coincidiendo su valor con el de éstos.

<u>Teorema de la unicidad del límite</u> .- Si existe $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ entonces dicho límite es único (con las posibilidades para α y β ya indicadas en la definición).

<u>Indeterminaciones : Calculo de limites.</u>

Cuando se calculan limites de suma, diferencia, producto o cociente de funciones no siempre se logra un resultado claro en primera instancia. A veces se obtienen expresiones indeterminadas del tipo 0/0, ∞/∞, 0. ∞ y ∞-∞

a) Indeterminación 0/0 :

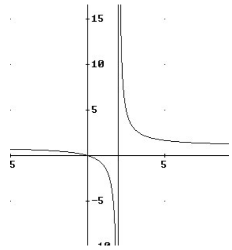
Si es una función racional, y surge la indeterminación 0/0 se descompone numerador y denominador en sus ceros o raíces y se simplifica la función racional; luego se toman limites.

Si esta indeterminación sale del cociente de funciones irracionales, se multiplica numerador y denominador por el conjugado adecuado(numerador o denominador).

b) Indeterminación ∞/∞ : se divide el numerador y el denominador entre x^m siendo m el mayor de los grados de los polinomios numerador o denominador .

c)Indeterminación ∞-∞: se realizan operaciones para llegar a las indeterminaciones anteriores.

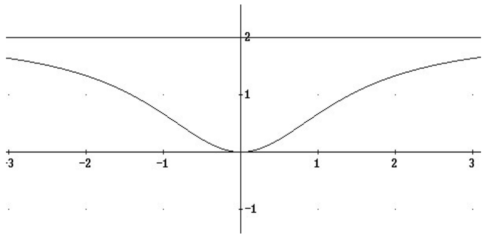
Aplicaciones de los límites. Cálculo de asíntotas.



Asíntota vertical: La recta x = a es una asíntota vertical de la función f si: $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Para calcularlas, probaremos con los puntos que anulen el denominador de la función, en el caso de una función racional. Si alguno de los límites laterales, o ambos, dan $+\infty$ o $-\infty$, entonces existe asíntota vertical.

Asíntota horizontal: La recta y = b es una asíntota horizontal de la función f si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$.



Para calcularlas, hallaremos dichos límites. Si uno de ellos, o ambos, dan como resultado un número real entonces existe asíntota horizontal.

Función continua en x = a.- Sea f : D → R una función y a ∈ D. Diremos que f(x) es una función continua en x = a cuando existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y dicho límite es f(a). Es decir, $\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Observa que la anterior definición exige lo siguiente: i) La existencia de límite real de f(x) cuando x→a . ii) La existencia de f(a), es decir, a debe pertenecer al dominio de la función D.

iii) El que f(a) y el límite citado coincidan.

Propiedades de las funciones continuas:

Si f y g son funciones continuas en x = a , entonces :
f+g es continua en x = a.
f-g es continua en x = a.
f.g es continua en x = a.
f/g es continua en x = a.
Kf es continua en x = a.
Continuidad de algunas funciones:
Las funciones constantes son continuas .
Las funciones afines son continuas .
Las funciones polinómicas son continuas.
Las funciones racionales son continuas en todos los puntos excepto en los ceros del denominador.

Una función que no sea continua en x = a se denomina discontinua en x = a.

Hay diversos modos de que una función sea discontinua en x = a. Uno de ellos, denominado discontinuidad evitable, consiste en lo siguiente:

$\exists \lim_{x\to a} f(x) = L \in R$ y L ≠ f(a) (o bien ∃ f(a) ≠ L o bien ∃ f(a)).

En el resto de los modos de discontinuidad diremos que ésta es no evitable.

A continuación se exponen algunos ejemplos, estudiándose en cada caso su continuidad en x = a.

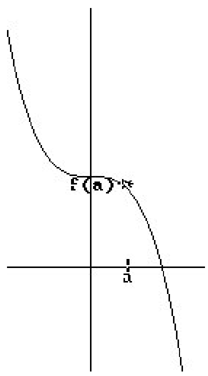
Una f(x) presenta una discontinuidad inevitable de salto finito cuando alguno de los limites laterales existen pero son distintos. La función puede estar o no definida en x = a.

Una f(x) presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito cuando uno o los dos limites laterales son infinitos .La función puede estar o no definida en x = a

Si alguno de los limites laterales no existe se dice que f(x) presenta en x = a una discontinuidad de segunda especie.

$\exists\, f(a)$

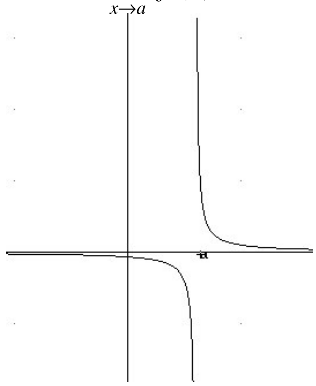
$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$



Continua en x=a

$\exists\, f(a)$

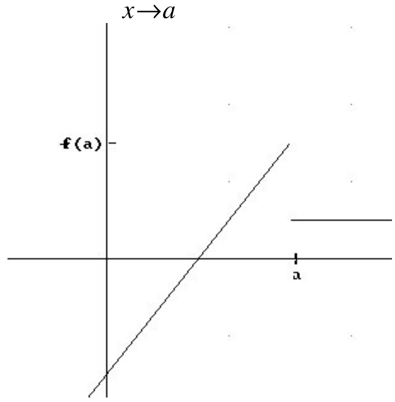
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$



Discontinua en x=a

$\exists f(a)$

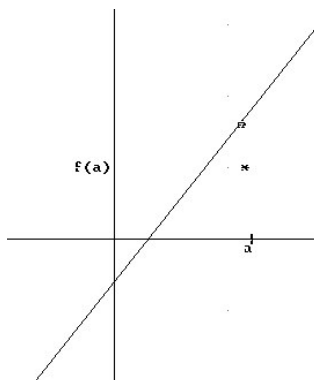
$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$



Discontinua en x=a

$\exists f(a)$

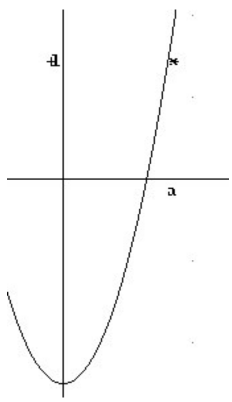
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq f(a)$



Discontinua en x=a

$\exists f(a)$

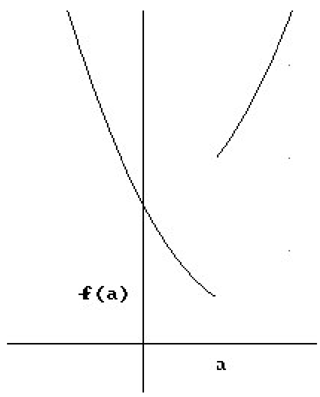
$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = l$



Discontinua en x=a

$\exists f(a)$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$



Discontinua en x=a

<u>Derivada de una función en x = a.</u>- Sea f una función $f : I \to R$, siendo I un intervalo; f es derivable en $a \in I$ si existe y es un número real el siguiente límite: $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. En el caso de que lo expuesto ocurra, al valor del límite se le llama derivada de f(x) en x = a y se simboliza como f ' (a).

Si llamamos h a x - a (h = x - a) como el que $x \to a \iff h \to 0$ podemos utilizar la siguiente definición de derivada, equivalente a la dada: $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Si a no es extremo de I entonces se cumple lo siguiente:
f es derivable en x = a <=> existen los siguientes límites, siendo ambos el mismo número real.

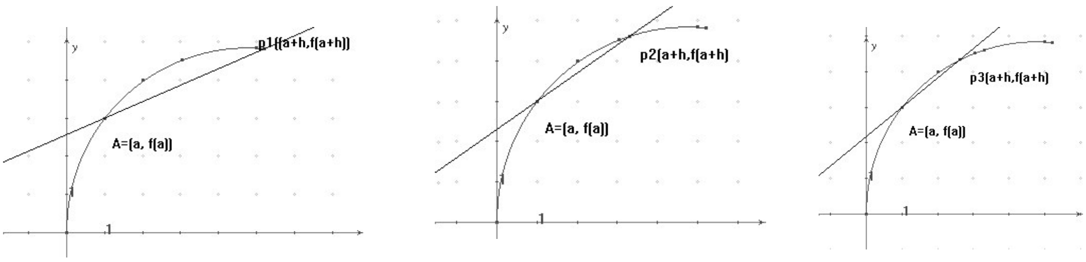
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Al primer límite se le denomina, caso de existir y de ser finito, derivada lateral por la derecha de f en x = a. Al segundo límite se le denomina, caso de existir y de ser finito, derivada por la izquierda de f en x = a.

<u>Interpretación geométrica de la derivada</u>.-

En la siguiente serie de figuras se muestra la posición de la recta secante AP cuando el incremento h de la variable independiente tiende a 0.

Se trata de definir la tangente a la curva en el punto A. Para ello, consideremos el conjunto de puntos P_1, P_2, P_3, P_4, ... , aproximándose al punto A. En las figuras se considera que dichos puntos están todos al mismo lado de A pero la aproximación puede realizarse por ambos lados, caso de estar definida la función en los dos. Observando las figuras se deduce que si los puntos P_1, P_2, P_3, P_4... se aproximan a A entonces las rectas secantes AP_1, AP_2, AP_3, AP_4,... se aproximan a una recta t que coincide con la idea intuitiva de recta tangente en el punto A. Por tanto, se puede dar la siguiente definición:



La recta tangente a una curva en el punto A es la posición límite, si existe, de las rectas secantes AP_1, AP_2, AP_3, AP_4,... cuando los puntos P_1, P_2, P_3, P_4,... se aproximan al punto A.

Las rectas secantes que pasan por el punto A quedan determinadas por su pendiente.

La pendiente de las rectas secantes que pasan por A es: $m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Cuando h tiende a 0, la pendiente de la recta tangente en el punto A será por tanto el siguiente límite: $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ es decir, la derivada de la función f(x) en x = a: f ' (a).

Por tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x) en (a , f(a)) es:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

Hasta ahora hemos estudiado cómo calcular la derivada de una función f(x) en x = a. Evidentemente si deseamos calcular la derivada de f(x) en varios valores de x será preciso repetir cada vez los correspondientes cálculos.

La forma de evitar las citadas repeticiones es determinar la expresión algebraica de la que llamaremos función derivada de f(x). Ésta nos proporcionará el valor de la derivada de f(x), en un valor cualquiera de x en el que exista, sustituyendo dicho valor en la mencionada expresión algebraica.

Función derivada.- Sea $f: I \to R$ tal que f es derivable en $D \subset I$. Llamamos función derivada de f(x) a la siguiente: $f': D \to R$

$$x \to f'(x).$$

Observemos que al ser f ' (x) una función podemos hablar también de su función derivada, que llamaremos derivada segunda de f(x) y simbolizaremos f "(x). Del mismo modo podremos hablar de derivada tercera, cuarta, ... de f(x).

Derivabilidad y continuidad.- La derivabilidad supone un progreso en relación con la simple continuidad de una función; se trata de una propiedad más restrictiva, ya que existen funciones continuas que no son derivables. La implicación de que una función derivable es continua se demuestra en el siguiente teorema:

Teorema: Si una función es derivable en un punto a entonces es continua en él.

Propiedades de las operaciones en relación con la derivabilidad.-

Sean f , g : $I \to R$ derivables en $a \in R$.

I) f + g es derivable en a y $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

II) f .g es derivable en x = a y $(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$.

III) k .f es derivable en x = a y $(k.f)'(a) = k.f'(a)$.

IV) Si $g(a) \neq 0$ entonces f /g es derivable en x = a y se cumple que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a).g(a) - f(a).g'(a)}{(g(a))^2}.$$

V) Sea J un intervalo, f la función anterior y $h : J \to R$ derivable en f(a) entonces hof es derivable en x = a y $(h \circ f)'(a) = h'(f(a)) . f'(a)$.

Tabla de las principales funciones derivadas.-

Funciones elementales

$(K)' = 0$	$(\text{sen } x)' = \cos x$
$(x^r)' = r.x^{r-1}, r \in R$	$(\cos x)' = -\text{sen } x$
$(e^x)' = e^x$	$(\text{tg } x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x$
$(a^x)' = a^x . \text{Ln } a$	$(\text{arc sen } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\text{Ln } x)' = \frac{1}{x}$	$(\text{arc cos } x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\text{Log}_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\text{arc tg } x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Derivada de la funcion compuesta

1) $\left(f(x)^r\right)' = r.(f(x)^{r-1}).f'(x)$

2) $\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}.f'(x)$

3) $\left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)}.f'(x).Ln\ a$

4) $\left(Ln\ f(x)\right)' = \frac{1}{f(x)}.f'(x)$

5) $\left(Log_a\ f(x)\right)' = \frac{1}{f(x)}.f'(x).Ln\ a$

6) $(senf(x))' = (cos(f(x)).f'(x)$

7) $(cosf(x))' = -(sen(f(x)).f'(x)$

8) $(tanf(x))' = \frac{1}{\cos^2 f(x)}.f'(x) = (1 + \tan^2 f(x)).f'(x)$

9) $(arc\ sen\ f(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}}.f'(x)$

10) $(arc\ cos\ f(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}}.f'(x)$

11) $(arc\ tan\ f(x))' = \frac{1}{1+(f(x))^2}.f'(x)$

Relaciones entre la derivada y la monotonía de una función.- Ya vimos las definiciones de función monótona creciente, monótona decreciente, monótona no decreciente y monótona no creciente en un intervalo y en un punto. (Algunos libros las designan, respectivamente, monótona estrictamente creciente, monótona estrictamente decreciente, monótona creciente y monótona decreciente).

A continuación vamos a ver unos resultados muy útiles que relacionan la monotonía de una función con el valor de la derivada.

Hay que tener en cuenta que el estudio de la monotonía de una función de la que sólo conocemos el criterio de asignación de imágenes es más complicado que el estudio de la monotonía a partir de la gráfica de la función. Los resultados siguientes nos proporcionarán una información muy valiosa.

Teorema.- Si f es una función definida en (a, b) y derivable en $c \in (a,b)$ con $f'(c)>0$, ($f'(c)<0$) entonces la función es creciente (decreciente) en x = c.
Teorema.- Si f es una función definida en (a ,b) y derivable en (a ,b) tal que $f'(x)>0$, ($f'(x)<0$), $\forall x \in (a, b)$, entonces la función es creciente (decreciente) en el intervalo.

Máximos y mínimos relativos de funciones. Relación con la derivada.-
Una función f tiene un máximo relativo en $x = x_0$, si existe un intervalo (x_0-h, x_0+h) tal que $f(x) \le f(x_0)$ para todo x perteneciente a este intervalo.

Una función f tiene un mínimo relativo en $x = x_0$ si existe un intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$ tal que $f(x) \ge f(xo)$ para todo x perteneciente a este intervalo.

Si la función es continua un máximo relativo de ella es un punto donde ésta pasa de ser no decreciente a no creciente, y un mínimo relativo es un punto en el que la función pasa de ser no creciente a ser no decreciente.

Al igual que comentamos en el estudio de la monotonía de una función, resulta más sencillo estudiar los extremos relativos (máximos y mínimos relativos) de una función cuando ésta es derivable, usando el siguiente teorema.

Teorema.-Si $f:(a,b)\to R$ tiene un extremo relativo en x = c y existe $f'(c)$ entonces $f'(c)= 0$.
Observa que el teorema anterior exige que f sea derivable. No obstante una función puede tener un máximo o un mínimo relativo en x = c sin existir $f'(c)$. Por ejemplo la función $f(x)= |x|$ no es derivable en x = 0 y posee un mínimo relativo en x = 0.

Por otro lado ten en cuenta que la condición $f'(c) = 0$ es NECESARIA para que f, siendo derivable en $x = c$, posea en $x = c$ un extremo relativo pero NO ES SUFICIENTE. Es decir puede suceder que $f'(c) = 0$ y sin embargo que f no tenga un extremo relativo en $x = c$. Por ejemplo la función $f(x) = x^3$ cumple $f'(0)=0$ y no tiene extremo relativo en $x = 0$.

Los puntos pertenecientes al intervalo (a ,b) en los cuales la derivada es cero o no está definida, se llaman <u>puntos críticos</u>. Por tanto, los posibles máximos y mínimos relativos se encuentran en el conjunto de los puntos críticos. Pero no todos los puntos críticos serán máximos o mínimos relativos. Para salir de dudas podemos utilizar lo que se expone a continuación.

Sea c un punto crítico en el que $f'(c) = 0$. Si para valores muy próximos a c por la izquierda es $f'(x)>0$ y para valores muy próximos a c por la derecha es $f'(x)<0$ (función decreciente), entonces la función tiene un máximo relativo en el punto $x = c$.

Si para valores muy próximos a c por la izquierda es $f'(x)<0$ y para valores muy próximos a c por la derecha es $f'(x)>0$ entonces la función tiene un mínimo relativo en el punto $x = c$.

Si tanto para valores muy próximos a c por la izquierda como para valores muy próximos a c por la derecha, $f'(x)$ no cambia de signo, la función no tiene ni máximo ni mínimo relativo en $x = c$.

Muy útil es, también, el teorema que se enuncia a continuación.

Teorema.- Si $f:(a, b)\rightarrow R$ es derivable en (a , b) y $f'(c) = 0$ y $f''(c) <0$ (>0) con $c\in(a, b)$ entonces f posee en $x = c$ un máximo (mínimo) relativo.

<u>Representación gráfica de funciones.</u>- Para realizar la representación gráfica de funciones, conviene estudiar de éstas lo siguiente:

a)Dominio. b)Puntos de corte con los ejes. c)Simetrías.
d)Asíntotas. e)Intervalos de crecimiento y decrecimiento. f)Extremos relativos.

<u>Optimización de funciones</u>.- En numerosos campos científicos, económicos, políticos,... y en distintos problemas matemáticos, nos interesa optimizar una función, es decir, hallar sus máximos y sus mínimos. Esto es lo que sucede, por ejemplo, si queremos minimizar el coste de producción de una fábrica sujeto a ciertas condiciones, o si queremos maximizar la producción de hortalizas en un terreno con determinadas condiciones de humedad y temperatura.

Para abordar este tipo de situaciones no existen unas normas fijas, pero sí hay unas reglas o pasos que habitualmente hay que seguir:

1.-Saber qué objetivo hay que hacer máximo o mínimo. Esto se deduce de una lectura atenta del enunciado.

2.-Expresar en forma de función el objetivo propuesto, teniendo en cuenta los datos del problema. Conviene escribir previamente los datos y las incógnitas y hacer un dibujo de la situación, si es posible.

3.-Generalmente, esta función dependerá de dos o más variables. Buscaremos en el enunciado las relaciones que ligan estas variables.Estas relaciones serán siempre igualdades que nos permitirán conseguir que la función a maximizar o minimizar dependa únicamente de una variable.

4.-Los óptimos (soluciones del. problema) se encuentran entre los puntos críticos de la función, que son las soluciones de $f'(x)=0$ (suponiendo la existencia de derivada).

5.-Determinar en cuál de los puntos hallados se da el máximo o mínimo buscado. Para ello, debemos estudiar el crecimiento y decrecimiento de dicha función.

6.-Discutir la solución hallada. Esto es, comprobar que hemos contestado a lo pedido, y que ésta cumple los requisitos del enunciado. debemos rechazar los resultados que no tengan sentido por la naturaleza del problema.