

**EJERCICIOS MATEMÁTICAS 1**  
**BACHILLERATO DE CIENCIAS DE LA NATURALEZA Y DE LA**  
**SALUD Y TECNOLÓGICO**

**ÍNDICE**

<b>2 BLOQUE I :ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA</b> .....	<b>2</b>
SOLUCIONES DEL BLOQUE I.....	5
<b>BLOQUE II: GEOMETRÍA</b> .....	<b>6</b>
SOLUCIONES DEL BLOQUE II.....	12
<b>BLOQUE III :FUNCIONES</b> .....	<b>14</b>
TEMA 1: FUNCIONES .....	14
TEMA 2 : LIMITE DE UNA FUNCIÓN .....	15
TEMA 3 : CONTINUIDAD.....	17
TEMA 4 : CÁLCULO DE DERIVADAS .....	18
<b>TABLA DE DERIVADAS</b> .....	<b>18</b>
TEMA 5 : REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES.....	20
SOLUCIONES DEL BLOQUE III.....	<b>21</b>
SOLUCIONES AL TEMA 1.....	21
SOLUCIONES AL TEMA 2.....	21
SOLUCIONES AL TEMA 3.....	22
SOLUCIONES AL TEMA 4.....	22
SOLUCIONES AL TEMA 5.....	<b>24</b>
TEMA 6: INTEGRALES .....	30
Cálculo de áreas: Método de Barrow .....	30

# 1º BACHILLERATO DE CIENCIAS DE LA NATURALEZA Y DE LA SALUD

## BLOQUE I :ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

### NÚMEROS REALES

- 1) ¿Qué errores absoluto y relativo se cometen al elegir como valor de  $1/11$  la expresión decimal  $0,09$ ?
- 2) Si tomas como valor de  $\sqrt{11}$  la aproximación  $3,316$ , ¿qué errores absoluto y relativo has cometido?
- 3) Encuentra aproximaciones sucesivas de  $\sqrt{7}$ , de forma que en la primera el error absoluto cometido sea menor que una décima y en la última sea menor que una centésima.
- 4) Calcula el valor de "x" en las siguientes expresiones:  
a)  $\log_2 \frac{1}{16} = x$ ;    b)  $\log_x 125 = 3$ ;    c)  $\log_3 x = 4$
- 5) Sabiendo que  $\log a = 3$  y  $\log b = 5$ . Calcula:  
a)  $\log a \cdot b$     b)  $\log a/b$     c)  $\log a^b$     d)  $\log \sqrt{a}$     e)  $\log_a b$     f)  $\log \sqrt{\frac{a^2 \cdot b^3}{100}}$
- 6) Define mediante conjuntos y representa :  
a)  $E^*\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$     b)  $\left[-1, \frac{5}{2}\right)$     c)  $E^*\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$     d)  $E^-\left(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$
- 7) Representa mediante un intervalo los puntos x tales que:  
a)  $0 < x + 8 < 4$     b)  $0 < \frac{x}{2} \leq 3$     c)  $1 \leq 2x < \infty$     d)  $-\infty < \frac{x+3}{2} < \infty$
- 8) Indica si los conjuntos del ejercicio anterior están acotados y halla cuando existan, el ínfimo, el supremo, sus máximos y mínimos.

### ECUACIONES - SISTEMAS - INECUACIONES

- 9) Resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas:  
a) 
$$\left. \begin{array}{l} x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{array} \right\}$$
    b) 
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 3 \\ x + y - 2z = -5 \\ 2x + y + 3z = 16 \end{array} \right\}$$
    c) 
$$\left. \begin{array}{l} x - 2y - 3z = 3 \\ 2x - y - 4z = 7 \\ 3x - 3y - 5z = 8 \end{array} \right\}$$
- 10) Se dispone de un recipiente de 24 l. de capacidad y de tres medidas a, b y c. Se sabe que el volumen de a es el doble que el de b, que las tres medidas llenan el depósito y que las dos primeras lo llenan hasta la mitad. ¿Qué capacidad tiene cada medida?

11) Hallar un número de tres cifras , sabiendo que suman 9, que si al número buscado se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198; y que además la cifra de las decenas es media aritmética de las otras dos.

12) Una madre y sus dos hijos tienen en total 60 años; el hijo mayor tiene tres veces la edad del menor, y la madre tiene el doble de la suma de las edades de sus hijos. Calcula las edades de cada uno de ellos.

13) Los perímetros de las caras de un ortoedro son 54, 80 y 98 cm. respectivamente, calcula el área total y el volumen.

14) Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a)  $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$     b)  $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960$

c)  $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$     d)  $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

e)  $3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$     f)  $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

15) Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a)  $\log x + \log 50 = \log 100$

b)  $\log x = 1 + \log (22-x)$

c)  $2\log x - \log(x-16) = 2$

d)  $\log x^3 = \log 6 + 2\log x$

e)  $3\log x - \log 30 = \log (x^2/5)$

f)  $\log 5x + \log x^2 = \log (x^4/2)$

16) Resuelve los siguientes sistemas:

a)  $\begin{cases} x - y = 21 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$     b)  $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2^{x+1} - 3^{y+1} = -1 \end{cases}$     c)  $\begin{cases} \log x + \log y = 2 + 2\log 2 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - 2\log y = -1 \end{cases}$     e)  $\begin{cases} \log x + 3\log y = 5 \\ \log \frac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$     f)  $\begin{cases} \log(x \cdot y) = 5 \\ \log \frac{x}{y} = 1 \end{cases}$

17) Resuelve las siguientes inecuaciones:

a)  $\frac{2x - 4}{3} + \frac{3x + 1}{3} < \frac{2x - 5}{12}$     b)  $\frac{x}{2} + \frac{x + 1}{7} - x + 2 < 0$

c)  $(x - 1)^2 - (x + 2)^2 + 3x^2 \leq -7x + 1$     d)  $\frac{x + 3}{x + 1} \geq 2$     e)  $\frac{x^2 + 8x + 12}{x^2 - 10x + 25} \geq 0$

f)  $\frac{x(x - 3)}{(x + 1)(x + 2)} \geq 0$

## NÚMEROS COMPLEJOS

- 18) Calcula las siguientes operaciones con números complejos:  
a)  $(1+i)^2 : (4+i)$       b)  $(i^5 + i^{-12})^3$       c)  $i^{544}$
- 19) Halla el valor de x para que el cociente  $(x+3i) : (3+2i)$  sea un número imaginario puro.
- 20) Determina un número complejo cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.
- 21) Encuentra un complejo tal que sumándolo con  $1/2$  de otro complejo de módulo  $\sqrt{3}$  y argumento  $60^\circ$ .
- 22) La suma de dos números complejos es 6, el módulo del primero es  $\sqrt{13}$  y el del segundo 5. Halla estos complejos su producto y su cociente.
- 23) El complejo de argumento  $80^\circ$  y módulo 12 es el producto de dos complejos; uno de ellos tiene de módulo 3 y argumento  $50^\circ$ ; escribe en forma binómica el otro complejo.
- 24) Halla los complejos cuyo cubo coincida con su conjugado.
- 25) Calcula con el Fórmula de Moivre  $\cos 2x$  y  $\sin 2x$ .
- 26) Escribe de todas las formas posibles los siguientes complejos:  
a)  $4 + 4\sqrt{3}i$     b)  $i$     c)  $6_{225^\circ}$
- 27) Calcula las siguientes raíces :  
a)  $\sqrt[3]{-1}$     b)  $\sqrt[4]{1+i}$     c)  $\sqrt{-36}$     d)  $\sqrt[3]{-27}$     e)  $\sqrt[6]{729i}$     f)  $\sqrt[4]{16(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)}$   
Si representas las n raíces de un número complejo y unes los afijos de cada una de las raíces ¿qué figura obtienes?.
- 28) Halla todas las soluciones reales e imaginarias de las ecuaciones siguientes:  
a)  $z^2 - 2z + 2 = 0$     b)  $z^3 + 1 = 0$     c)  $z^3 - 2z^2 + 4z - 8 = 0$
- 29) Encuentra las ecuaciones de segundo grado cuyas raíces son:  
a)  $i$  y  $-i$     b)  $1+i$  y  $1-i$     c)  $3+2i$  y  $3-2i$     d)  $\sqrt{2}_{45^\circ}$  y  $\sqrt{2}_{315^\circ}$
- 30) ¿Qué significación geométrica tiene la multiplicación de un número complejo por  $i$ ? Razona la respuesta multiplicando el número complejo  $1+i$ , por  $i$  y representándolos después

## SOLUCIONES DEL BLOQUE I

- 1) Error absoluto=1/1100 ; Error relativo=1/1000.  
 2) Error absoluto<0,001; Error relativo< 1/3316.  
 3)  $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$  //  $2,64 < \sqrt{7} < 2,65$  //  $2,645 < \sqrt{7} < 2,646$  //  $2,6457 < \sqrt{7} < 2,6458$  //  $2,64575 < \sqrt{7} < 2,64576$ .  
 4) a)  $x = -4$  b)  $x = 5$  c)  $x = 81$   
 5) a) 8 b) -2 c) 21 d) 3/2 e) 5/3 f) 12/2.  
 6) a)  $\{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 2\}$  b)  $\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 5/2\}$  c)  $\{x \in \mathbb{R} / -10/3 < x < 8/3\} - \{-1/3\}$   
 d)  $\{x \in \mathbb{R} / -3\sqrt{2} < x < -\sqrt{2}\}$   
 7) a) (-8,-4) b) (0,6] c)  $[1/2, \infty)$  d)  $(\infty, \infty)$   
 8) a) Está acotado superior e inferiormente. Ínfimo:  $x=-8$ , supremo:  $x=-4$ . No tiene máximo ni mínimo. b) Está acotado superior e inferiormente. Ínfimo:  $x=0$ , supremo:  $x=6$ . No tiene mínimo, máximo:  $x=6$ . c) Esta acotado inferiormente. Ínfimo y mínimo:  $x=1/2$ . No tiene supremo ni máximo. d) No está acotado ni inferior ni superiormente.  
 9) a)  $(x,y,z) = (2,0,-1)$  b)  $(x,y,z) = (1,2,4)$  c)  $(x,y,z) = (2,1,-1)$   
 10) 4, 8 y 12 litros. 11) El número 432. 12) 40, 15 y 5 años. 13) Lados: 9, 18 y 31 cm. Área = 1998 cm<sup>2</sup>. Volumen = 5022 cm<sup>3</sup>.  
 14) a)  $x = 5$  b)  $x = 10$  c)  $x = 2$  ;  $x = 1$  d)  $x = 1$  ;  $x = 0$  e)  $x = 1$  ;  $x = -2$  f)  $x = 2$  ;  $x = 0$ .  
 15) a)  $x = 20$  b)  $x = 20$  c)  $x = 20$  ;  $x = 80$  d)  $x = 6$  e)  $x = 6$  f)  $x = 10$ .  
 16) a)  $x = 25$ ,  $y = 4$  b)  $x = 2$ ,  $y = 1$  c)  $x = 25$ ,  $y = 16$  d)  $x = 10^{5/4}$ ,  $y = 10^{7/4}$   
 e)  $x = 100$ ,  $y = 10$  f)  $x = 10^3$ ,  $y = 10^2$ .  
 17) a)  $(-\infty, 7/18)$  b)  $(6, \infty)$  c)  $[-4/3, 1]$  d)  $(-1, 1]$  e)  $(-\infty, 6] \cup [-2, \infty)$   
 f)  $(-\infty, -2) \cup (-1, 0] \cup [3, \infty)$   
 18) a)  $z = 2/17 + 8/17 i$  b)  $z = -2 + 2i$  c)  $z = 1$  19)  $x = -2$  20)  $z = -1/2 \pm \sqrt{3}/2i$   
 21)  $z = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{3}{2}i$  22)  $z_1 = 2+3i$ ,  $z_2 = 4-3i$ ;  $z_1 \cdot z_2 = 17+6i$ ;  $z_1/z_2 = -1/25 + 18/25i$   
 23)  $z = 2\sqrt{3} + 2i$  24)  $1+0i$ ;  $-1+0i$ ;  $0+0i$ ;  $0-i$ . 25)  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ;  $\sin 2x = 2\sin x \cos x$   
 26) a)  $4 + 4\sqrt{3}i = 8[\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ] = 8_{60^\circ}$  b)  $i = 1[\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ] = 1_{90^\circ}$   
 c)  $6_{225^\circ} = 6[\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ] = -3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$   
 27) a)  $z_1 = 1_{60^\circ}$ ,  $z_2 = 1_{180^\circ}$ ,  $z_3 = 1_{240^\circ}$  b)  $z = \sqrt[8]{2}_{45/4^\circ}$ ,  $z_2 = \sqrt[8]{2}_{405/4^\circ}$ ,  $z_3 = \sqrt[8]{2}_{765/4^\circ}$   $z_4 = \sqrt[8]{2}_{1125/4^\circ}$   
 c)  $z_1 = 6i$   $z_2 = -6i$  d)  $z_1 = 3_{60^\circ}$ ,  $z_2 = 3_{120^\circ}$ ,  $z_3 = 3_{240^\circ}$  e)  $z_1 = 3_{15^\circ}$ ,  $z_2 = 3_{75^\circ}$ ,  $z_3 = 3_{135^\circ}$   $z_4 = 3_{195^\circ}$ ,  
 $z_5 = 3_{255^\circ}$ ,  $z_6 = 3_{315^\circ}$  f)  $z_1 = 2_{45^\circ}$ ,  $z_2 = 2_{135^\circ}$ ,  $z_3 = 2_{225^\circ}$   $z_4 = 2_{315^\circ}$ . Se obtiene un polígono regular de n lados.  
 28) a)  $z_1 = 1+i$ ,  $z_2 = 1-i$  b)  $z_1 = 1/2 + \sqrt{3}/2i$ ,  $z_2 = -1$ ,  $z_3 = 1/2 - \sqrt{3}/2i$   
 c)  $z_1 = 2$ ,  $z_2 = -2i$ ,  $z_3 = 2i$   
 29) a)  $x^2+1=0$  b)  $x^2-2x+2=0$  c)  $x^2-6x+13=0$  d)  $x^2-2x+2=0$   
 30) Un giro de 90°.

## BLOQUE II: GEOMETRÍA

### TRIGONOMETRÍA

- 1) Expresa en radianes los siguientes ángulos dados en grados sexagesimales:  
a)  $45^\circ$    b)  $75^\circ$    c)  $105^\circ$    d)  $230^\circ$
- 2) Expresa en grados los siguientes ángulos expresados en radianes:  
a)  $3\pi/4$    b)  $5\pi/3$    c)  $3\pi/2$    d)  $9\pi/10$    e)  $4\pi/3$
- 3) Halla, sin utilizar calculadora, las siguientes razones trigonométricas:  
a)  $\sin 1500^\circ$    b)  $\sin 150^\circ$    c)  $\operatorname{cosec} 120^\circ$    d)  $\operatorname{tg}(-45^\circ)$    e)  $\operatorname{tg}(-495^\circ)$    f)  $\operatorname{cosec} 720^\circ$
- 4) Razona cuáles de las siguientes igualdades son ciertas y cuáles son falsas:  
a)  $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$    b)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$    c)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = c \operatorname{tg} \alpha$   
d)  $\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$    e)  $\sin(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$    f)  $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
- 5) Verificar que se cumplen las siguientes igualdades:  
a)  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cot} \alpha = \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha$    b)  $c \operatorname{tg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = c \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$   
c)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{c \operatorname{tg} \alpha + c \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$    d)  $\operatorname{cot} g \alpha - \frac{c \operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{c \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$   
e)  $1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$   
f)  $\frac{\sec \alpha - \cos \alpha}{\operatorname{cosec} \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg}^3 \alpha$    g)  $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$
- 6) Simplificar las siguientes expresiones:  
a)  $\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$    b)  $\cos^3 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha$   
c)  $\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}$    d)  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)$
- 7) Calcular las razones trigonométricas restantes conocidas:  
a)  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$     $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$    b)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$     $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$   
c)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$     $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$    c)  $\operatorname{cot} g \alpha = -2$     $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$   
d)  $\sec \alpha = 1$     $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$    e)  $\operatorname{cosec} \alpha = -2$     $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$
- 8) Si  $\sin 12^\circ = 0,2$  y  $\sin 54^\circ = 0,8$ . Calula  $\sin 66^\circ$ ,  $\cos 66^\circ$  y  $\operatorname{tg} 66^\circ$ .
- 9) Determina las razones trigonométricas del ángulo  $2a$  en los siguientes casos:  
a)  $\sin a = 1/4$    b)  $\cos a = 0,7$    c)  $\operatorname{tg} a = 1/8$    d)  $\sec a = 5/4$

10) Expresa  $\sin 3a$  en función de  $\sin a$ .

11) Sabiendo que  $\operatorname{tg} x = 2$ , calcula el valor de  $\sin 4x$ .

12) Si  $\operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{3}$ , sabiendo que  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ , halla  $\sin \alpha$  y  $\cos \alpha$ .

13) Demuestra que se verifican las siguientes igualdades:

a)  $\operatorname{tg}(45^\circ + a) - \operatorname{tg}(45^\circ - a) = 2 \operatorname{tg} 2a$

b)  $\frac{2 \sin a}{\operatorname{tg} 2a} = \cos a - \frac{\sin^2 a}{\cos a}$

c)  $\sec(a+b) = \frac{\sec a \cdot \sec b \cdot \cos ec a \cdot \cos ec b}{\cos ec a \cdot \cos ec b - \sec a \cdot \sec b}$

14) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $\sin 3x = 1$       b)  $\cos 4x = -1$       c)  $\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 2x} + 2 = 0$

15) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $\sin x \cdot \cos x = 1/2$       b)  $\cos x \cdot \operatorname{tg} x = 1/2$       c)  $\sin 2x = \cos x$

d)  $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$       e)  $\cos 2\pi + 5 \cos x + 3 = 0$       f)  $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

g)  $\cos 4x - \sin 2x = 0$       h)  $(-3)\sin x + \cos^2 x = 3$       i)  $\cos 2x + \sin x = 0$

16) Resuelve los siguientes sistemas dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante:

a)  $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4} \\ \cos^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{4} \end{cases}$       b)  $\begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{2} \\ \sin(x-y) = \frac{1}{2} \end{cases}$       c)  $\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \\ \cos x - \cos y = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{cases}$       e)  $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \end{cases}$       f)  $\begin{cases} \sin x + \cos y = \sqrt{2} \\ x - y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

17) Encuentra las soluciones de los siguientes sistemas en el intervalo  $[0, 2\pi]$ .

a)  $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ 2x + 2y = 180^\circ \end{cases}$       b)  $\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sin x - \sin y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$       c)  $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4} \\ \sin^2 x - \cos^2 y = \frac{1}{4} \end{cases}$

## VECTORES EN EL PLANO.

- 18) Halla  $x$  e  $y$  para que se cumplan las siguientes igualdades:  
a)  $3 \cdot (x, 2y) = (-1, 5)$     b)  $-2 \cdot (-1, y) = 6 \cdot (x, x-y)$
- 19) Dí cuáles de las siguientes cuestiones son verdaderas o falsas, razonando la respuesta:
- Dos vectores fijos que tienen el mismo módulo y la misma dirección pertenecen al mismo vector libre.
  - Si tenemos dos vectores fijos y al unir sus orígenes y extremos formamos un paralelogramo entonces pertenecen al mismo vector libre.
  - ¿Existe alguna base de  $V^2$  formada por tres vectores?
  - Dos vectores cualesquiera forman siempre una base de  $V^2$ .
  - Si el producto escalar de dos vectores es cero se cumple que dichos vectores forman una base de  $V^2$ .
  - Si el producto escalar de dos vectores es distinto de cero se cumple que dichos vectores forman una base de  $V^2$ .
- 20) Si  $\vec{v}$  es un vector de coordenadas  $(1, 3)$  respecto de la base canónica, halla las coordenadas de  $\vec{v}$  respecto de las bases:  
a)  $B = \{(1, -1), (2, 1)\}$     b)  $B = \{(3, 0), (-2, -1)\}$
- 21) Estudia la dependencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores, e indica si forman base:  
a)  $\{(2, 1), (3, 2), (1, 0)\}$     b)  $\{(1, -2), (3/2, -3)\}$     c)  $\{(3, 4), (4, 3)\}$
- 22) Dados los vectores  $\vec{u}$  de coordenadas  $(1, 3)$  y  $\vec{v}$  de coordenadas  $(-2, 4)$  halla el producto escalar y el ángulo que forman.
- 23) Calcula el valor del número real  $x$  para que los vectores  $\vec{u} = (1, 2)$  y  $\vec{v} = (x, 1)$ :  
a) Sean ortogonales.    b) Formen un ángulo de  $60^\circ$ .    c) Sean paralelos.
- 24) Calcula el valor de  $m$  y  $n$  para que los vectores  $\vec{u} = (1/2, m)$  y  $\vec{v} = (\sqrt{2}/2, n)$ :  
a) Sean unitarios.    b) Sean ortogonales.
- 25) Dado el vector  $\vec{u} = (3, -4)$  encontrar dos vectores que tengan la misma dirección que  $\vec{u}$  y sean unitarios.
- 26) Dados los vectores  $\vec{OA} = (2, 1)$ ,  $\vec{OB} = (5, 5)$ ,  $\vec{OC} = (-3, -1)$  y  $\vec{OD} = (-6, -5)$ .  
Demuestra que la figura  $ABCD$  es un paralelogramo y calcula su perímetro.
- 27) Halla la proyección del vector  $\vec{u} = (-3, 5)$  sobre el vector  $\vec{v} = (-7, -1)$ .
- 28) Dados los vectores  $\vec{u} = (1/\sqrt{2}, x)$  y  $\vec{v} = (1/4, 3)$  halla los valores de  $x$  para que:  
a) Los vectores sean ortogonales    b) Sean linealmente dependientes    c) Sean unitarios.

- 29) Sea  $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$  una base de  $V^2$  que cumple que  $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 1$  y  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$ , y sean  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  dos vectores de coordenadas respectivas (1,2) y (3,-4) respecto de la base B. Calcula el producto escalar de  $\vec{a}$  por  $\vec{b}$ .
- 30) Sea  $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$  una base ortogonal de  $V^2$  que cumple que  $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 3$ , y sean  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  dos vectores de coordenadas respectivas (1,-2) y (-1,3) respecto de la base B. Calcula el producto escalar de  $\vec{a}$  por  $\vec{b}$ .

### LA RECTA EN EL PLANO.

- 31) Hallar la ecuación de la recta  $r$ , en todas las formas posibles, que pasa por el punto A(3,5) y lleva la dirección del vector  $\vec{v} = (2, -4)$ .
- 32) Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(3,2) y B(-1,4) de todas las formas posibles.
- 33) Calcula las pendientes de las siguientes rectas:  
 a)  $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-1}$       b)  $5x + 3y = 0$       c)  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 - 3t \end{cases}$
- 34) Determinar si los puntos A(3,1), B(5,2) y C(1,0) están alineados.
- 35) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-2, 1/3) y tiene igual pendiente que la recta que pasa por los puntos P(2,1) y Q(3,4).
- 36) Dado el triángulo de vértices A(2,-2), B(0,4) y C(4,2) hallar:  
 a) Baricentro. (Punto donde se cortan las medianas).  
 b) Circuncentro. (Punto donde se cortan las mediatrices).  
 c) Incentro. (Punto donde se cortan las bisectrices).  
 d) Ortocentro. (Punto donde se cortan las alturas).
- 37) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2,1) y forma un ángulo de  $120^\circ$  con la parte positiva del eje X.
- 38) Halla el área limitada por la recta  $5x + y - 5 = 0$ , el eje de abscisas y el eje de ordenadas.
- 39) Comprobar si los siguientes pares de rectas son secantes, paralelas o coincidentes:  
 a)  $\begin{cases} r: 3x + 2y - 5 = 0 \\ s: 3x + 2y + 7 = 0 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} r: x + 3y - 4 = 0 \\ s: x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$       c)  $\begin{cases} r: x + y - 3 = 0 \\ s: 2x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$
- 40) Dadas las rectas:  $r$  determinada por el punto A(2,1) y el vector  $\vec{u} = (a,4)$  y  $s$  determinada por el punto B(-1,4) y el vector  $\vec{v} = (5,3)$  hallar  $a$  para que  $r$  y  $s$  sean paralelas. ¿Para qué valores de  $a$  las rectas  $r$  y  $s$  son secantes?.

- 41) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,3) y es :  
 a) Paralela al eje X      b) Paralela al eje Y  
 c) Paralela a la bisectriz del 1<sup>er</sup> cuadrante      d) Paralela a la bisectriz del 2<sup>o</sup> cuadrante  
 e) Paralela a la recta  $5x + 2y = 0$
- 42) Dado el segmento de extremos A(3,5) y B(6,15) calcular las coordenadas de los puntos C, D y E que dividen al segmento AB en cuatro partes iguales.
- 43) Un paralelogramo tiene de vértices A (-1,-3), B(6,0) y C(8,2). Determinar el cuarto vértice sabiendo que hay 3 soluciones.

**LA RECTA EN EL PLANO.(Problemas métricos)**

- 44) Calcula el ángulo que forman las rectas:  
 a)  $x - 2y + 4 = 0$       y       $3x - y - 1 = 0$   
 b)  $x - 3 = \frac{y - 3}{2}$       y       $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}$
- 45) Calcula la ecuación de la recta que tiene la misma ordenada en el origen que la recta  $2x - 3y + 6 = 0$  y cuyo vector normal es  $\vec{n} = (1,2)$
- 46) Determina el valor de a para que las rectas:  
 $ax + (a-1)y - 2(a+2) = 0$       y       $3ax - (3a+1)y - (5a+4) = 0$   
 Sean a) Paralelas      b) Perpendiculares
- 47) Averigua el valor de m para que las rectas  $mx + y = 12$  y  $4x - 3y = m+1$  sean paralelas, y halla su distancia.
- 48) Halla la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos A(1,-2) y B(3,0), la pendiente y el ángulo que forma con la dirección positiva del eje X.
- 49) Halla la distancia del punto (-1,1) a la recta que corta a los ejes OX y OY en los puntos (3,0) y (0,4) respectivamente.
- 50) Calcula las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas:  
 $3x - 4y + 1 = 0$       Y       $5x + 12y - 7 = 0$
- 51) Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas (las bisectrices):  
 $5x + 12y - 60 = 0$  y el eje de ordenadas.
- 52) Halla la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por los puntos:  
 A(-2,1) y B(3,-2)
- 53) Dada la recta de ecuación  $ax + by = 1$ , determina a y b sabiendo que la recta dada es perpendicular a la recta de ecuación  $2x + 4y = 11$  y que pasa por el punto P ( 1, 3/2)
- 54) Las rectas de ecuaciones  $ax - y = 4$ ;  $x + by = y$ , son perpendiculares y cortan al eje de abscisas en dos puntos distantes 5 unidades. Halla a y b.

- 55) Halla las coordenadas del punto simétrico del origen respecto de la recta:  
 $4x + 3y = 50$
- 56) La recta  $4x - 3y = 12$  es la mediatriz del segmento AB. Sabiendo que las coordenadas de A son (1,0), halla las de B.
- 57) Determina las ecuaciones de los lados AB y BC y el área del paralelogramo OABC sabiendo que OA es la recta de ecuación  $x - 2y = 0$  y OC tiene de ecuación  $3x + y = 0$  y las coordenadas de B son (3,5).
- 58) Dados los puntos A(2,1), B(-3,5) y C(4,m), calcula m para que el triángulo ABC tenga de área 6.
- 59) Halla un punto de la recta  $2x - y + 5 = 0$  que equidiste de A(3,5) y B(2,1).
- 60) Los puntos B(-1,3) y C(3,-3) son los vértices de un triángulo isósceles que tiene el tercer vértice A en la recta  $x + 2y - 15 = 0$ , siendo AB y AC los lados iguales. Calcula las coordenadas de A y las tres alturas del triángulo.

## SOLUCIONES DEL BLOQUE II

- 1)  $\pi/4$  rad;  $5\pi/12$  rad;  $7\pi/12$  rad;  $23\pi/18$  rad.
- 2)  $135^\circ$ ;  $300^\circ$ ;  $270^\circ$ ;  $162^\circ$ ;  $240^\circ$ ;
- 3) a)  $\text{sen}60^\circ = \sqrt{3}/2$     b)  $\text{sen}30^\circ = 1/2$     c)  $\text{cosec } 60^\circ = 2\sqrt{3}/3$     d)  $-\text{tg } 45^\circ = -1$   
 e)  $\text{tg } 45^\circ = 1$     f) no existe
- 4) a) F    b) V    c) V    d) V    e) F    f) V
- 6) a)  $\text{sen } \alpha$     b)  $\cos \alpha + \text{sen } \alpha$     c)  $+1$     d)  $+1$
- 7) a)  $\text{sen } \alpha = 3/5$      $\cos \alpha = 4/5$      $\text{tg } \alpha = 3/4$      $\text{cosec } \alpha = 5/3$      $\sec \alpha = 5/4$      $\text{cotg } \alpha = 4/3$   
 b)  $\text{sen } \alpha = -3/5$      $\cos \alpha = -4/5$      $\text{tg } \alpha = 3/4$      $\text{cosec } \alpha = -5/3$      $\sec \alpha = -5/4$      $\text{cotg } \alpha = 4/3$   
 c)  $\text{sen } \alpha = 1/2$      $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$      $\text{tg } \alpha = \sqrt{3}/3$      $\text{cosec } \alpha = 2$      $\sec \alpha = 2/\sqrt{3}$      $\text{cotg } \alpha = \sqrt{3}$   
 d)  $\text{sen } \alpha = \sqrt{5}/5$      $\cos \alpha = -2\sqrt{5}/5$      $\text{tg } \alpha = -1/2$      $\text{cosec } \alpha = \sqrt{5}$      $\sec \alpha = -\sqrt{5}/2$      $\text{cotg } \alpha = -2$   
 e)  $\text{sen } \alpha = 0$      $\cos \alpha = 1$      $\text{tg } \alpha = 0$      $\text{cosec } \alpha = \text{no existe}$      $\sec \alpha = 1$      $\text{cotg } \alpha = \text{no existe}$   
 f)  $\text{sen } \alpha = -1/2$      $\cos \alpha = -\sqrt{3}/2$      $\text{tg } \alpha = \sqrt{3}/3$      $\text{cosec } \alpha = -2$      $\sec \alpha = -2/\sqrt{3}$      $\text{cotg } \alpha = \sqrt{3}$
- 8)  $\text{sen } 66^\circ = 0,904$  /  $\cos 66^\circ = 0,428$  /  $\text{tg } 66^\circ = 2,11$
- 9) a)  $\text{sen } 2a = 2\sqrt{7}$     b)  $\cos 2a = -0,019$     c)  $\text{tg } 2a = 16/63$     d)  $\sec 2a = 25/7$
- 10)  $\text{sen } 3a = 3\text{sen} a - 4\text{sen}^3 a$
- 11)  $\text{sen } 4x = -0,96$
- 12)  $\text{sen } \alpha = 1/2$  /  $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$
- 14) a)  $x = 30^\circ + 120^\circ K$     b)  $x = 45^\circ + 90^\circ K$     c)  $x = 60^\circ + 180^\circ k$
- 15) a)  $x = \pi/4 + 2K\pi$  //  $x = 7\pi/4 + 2K\pi$     b)  $x = \pi/6 + 2K\pi$  //  $x = 5\pi/6 + 2K\pi$   
 c)  $x = \pi/2 + K\pi$  //  $x = \pi/6 + 2K\pi$  //  $x = \pi/6 + 2K\pi$     d)  $x = 0^\circ + 2K\pi$   
 e)  $x = 143^\circ 7' 48'' + 360^\circ k$  //  $x = 216^\circ 52' 11'' + 360^\circ k$   
 f)  $x = \pi/24 + K\pi$  //  $x = 5\pi/24 + K\pi$   
 g)  $x = 15^\circ + 180^\circ K$  //  $x = 75^\circ + 180^\circ K$  //  $x = 135^\circ + 180^\circ K$     h)  $x = 270^\circ + 360^\circ K$   
 i)  $x = 90^\circ$  //  $x = 210^\circ$  //  $x = 330^\circ$
- 16) a)  $y=0$      $x=60^\circ$     b)  $x=45^\circ$      $y=15^\circ$     c)  $x=y=45^\circ$     d)  $x=45^\circ$      $y=60^\circ$     e)  $x=y=30^\circ$     f)  $x=y=45^\circ$
- 17) a)  $x=0^\circ$      $y=90^\circ$  //  $x=90^\circ$      $y=0^\circ$   
 b)  $x=60^\circ$      $y=30^\circ$  //  $x=60^\circ$      $y=150^\circ$  //  $x=120^\circ$      $y=30^\circ$  //  $x=120^\circ$      $y=30^\circ$   
 c)  $x=45^\circ, 135^\circ, 225^\circ$  o  $315^\circ$      $y=60^\circ, 120^\circ, 240^\circ$  o  $300^\circ$ .
- 18) a)  $x=-1/3$      $y=5/6$     b)  $x=1/3$      $y=1/2$
- 19) a) F, tienen que tener también el mismo sentido.  
 b) V, sí porque tendrán el mismo módulo dirección y sentido.  
 c) No, porque tres vectores en el plano son linealmente dependientes.  
 d) No, tienen que ser linealmente independientes.  
 e) Si, porque los vectores son ortogonales y portanto linealmente independientes.  
 f) No, por ejemplo (1,2) y (2,0) forman base y su producto escalar es distinto de cero.
- 20) a)  $(-5/3, 4/3)$     b)  $(-5/3, -3)$
- 21) a) Tres vectores en el plano siempre son linealmente dependientes, luego no forman base  
 b) Son L.D, luego no forman base.  
 c) Son L.I. Dos vectores L.I. en  $V^2$  forman base.
- 22)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$ ,  $\alpha = 45^\circ$     23) a)  $x=-2$     b)  $x_1=8 + \sqrt{53}$      $x_2=8 - \sqrt{53}$     c)  $x=1/2$
- 24) a)  $m = \pm\sqrt{3}/2$      $n = \pm\sqrt{2}/2$     b)  $m \cdot n = -\sqrt{2}/4$
- 25)  $\vec{u}_1 = (3/5, -4/5)$     y     $\vec{u}_2 = (-3/5, 4/5)$
- 26)  $AB = DC$  y  $BC=AD$  luego el plígono ABCD es un paralelogramo, ya que los lados son paralelos dos a dos. Perímetro= 15 u.l.

27) Proyección de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v} = 8/\sqrt{2}$ .

28) a)  $x = -\sqrt{2}/24$  b)  $x = 6\sqrt{2}$  c)  $x = \pm\sqrt{2}/2$  29)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$  30)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -58$

### La recta en el plano

31)  $\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-4}$  (continua);  $2x+y-11=0$  (general o implícita);  $y=-2x+11$  (explícita);

$$\frac{x}{11/2} + \frac{y}{11} = 1 \text{ (segmentaria); } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 4t \end{cases} t \in \mathbb{R} \text{ ( paramétricas);}$$

$$(x,y) = (3,5) + (2,-4)t \text{ (vectorial)}$$

32)  $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-6}$  (continua);  $3x-y-7=0$  (general o implícita);  $y=-3x-7$  (explícita);

$$\frac{x}{7/3} + \frac{y}{-7} = 1 \text{ (segmentaria); } \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - 6t \end{cases} t \in \mathbb{R} \text{ ( paramétricas);}$$

$$(x,y) = (3,2) + (-2,-6)t \text{ (vectorial)}$$

33) a)  $m = -1/2$ ; b)  $m = -5/3$  c)  $m = -3$

34) Los puntos A,B y C están alineados, si las coordenadas de los vectores AB y AC son proporcionales, como  $\vec{AB} = -\vec{AC}$  entonces A,B y C están alineados.

35)  $y = 3x + 19/3$

36) Baricentro (2,4/3), Circuncentro (1,1), Incentro (2',1'4) y Ortocentro (4,2).

37)  $\sqrt{3}x + y - 1 - 2\sqrt{3} = 0$

38) área = 5/2 u.cuadradas.

39) a) paralelas  $\frac{3}{3} = \frac{2}{2} \neq \frac{-5}{7}$  b) secantes  $\frac{1}{1} \neq \frac{3}{2}$  c) coincidentes  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{-3}{-6}$

40) secantes  $a \neq 20/3$  // paralelas  $a = 20/3$

41) a)  $y=3$  b)  $x=2$  c)  $y=x+1$  d)  $y = -x+5$  e)  $5x+2y-16=0$

42) C (15/4, 15/2) D(9/2,10) E (21/4, 25/2)

43) D(1,-1) // D(-3,-5) // D(15,5)

44) a)  $45^\circ$  b)  $53^\circ 7' 48,3''$

45)  $y = -1/2 x + 2$

46) a)  $a=0$  o  $a=1/3$  b)  $a = -1/2$

47)  $m = -4/3$  d = 107/15

48)  $x+y-1=0$ ;  $135^\circ$

49)  $d(P,r) = 13/5$

50) Ecuaciones de las bisectrices:  $7x-56y+24=0$  y  $32x+4y-11=0$

51)  $3x+2y-10=0$  y  $-2x+3y-15=0$

52)  $d(O,r) = 1/\sqrt{34}$

53)  $a=4$   $b=-2$

54)  $a=-1$  y  $b=9$  ó  $b=-1$

55) O' (16,12)

56) B = ( 84/25, -48/25)

57) AB:  $3x+y-14=0$  BC:  $x-2y+7=0$  S=14 u. Cuadradas.

58)  $m = 9/5$  o  $m = -3$

59) P(-11/18, 34/9)

60) A(7,4)  $h_1 = 2\sqrt{3}$   $h_2 = h_3 = 52/\sqrt{65}$

## BLOQUE III :FUNCIONES

### TEMA 1: FUNCIONES

Idea intuitiva de función. Dominios.

RECUERDA: Dominio de una función,  $f$ , es el conjunto de los valores reales que puede tomar la variable independiente,  $x$ , para que exista la función. (Para que la variable dependiente,  $y$ , tome un valor real).

Para calcular el dominio de una función, debes saber que operaciones no están definidas:

- la división por cero
- las raíces cuadradas de números negativos
- el logaritmo de cero y los logaritmos de números negativos

1.- Indica si las siguientes funciones son polinómicas, racionales, irracionales, logarítmicas o exponenciales y determina su Dominio:

a)  $f(x) = x$    b)  $f(x) = x^2$    c)  $f(x) = x^2 + 3x - 32$    d)  $f(x) = x^5 - 3x$

e)  $f(x) = \frac{1}{x}$    f)  $f(x) = \frac{2x + 2}{x^2 - 5}$    g)  $f(x) = \frac{2x - 5}{5x^2 - 3x}$    h)  $f(x) = \frac{x}{6x^3 + x^2 - 2x}$

i)  $f(x) = \sqrt{2x + 7}$    j)  $f(x) = \sqrt{5 - x}$    k)  $f(x) = \sqrt{\frac{x + 7}{4 - x}}$    l)  $f(x) = \sqrt{\frac{x - 3}{-x}}$

ll)  $f(x) = \log x$    m)  $f(x) = 2^x$    n)  $f(x) = e^x$    o)  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 36}$

2.-Dadas las siguientes funciones, efectúa las siguientes operaciones:

$f+g$ ,  $f/g$ ,  $f \circ g$  y  $g \circ f$  e indica su dominio:

a)  $f(x) = \ln x$  y  $g(x) = x^2$

b)  $f(x) = \sqrt{x}$  y  $g(x) = x - 8$

c)  $f(x) = x^2 + x$  y  $g(x) = x + 2$

## TEMA 2 : LIMITE DE UNA FUNCIÓN

Idea intuitiva. Definición de límite de una función,  $f$ , en un punto,  $x_0$ . Propiedades de los límites. Cálculo de límites de funciones polinómicas, racionales e irracionales. asíntotas horizontales y verticales.

### Recuerda:

Definición: Una función,  $f(x)$ , tiene por límite  $L$  en el punto  $x_0$ , cuando para toda sucesión de valores de  $x$  que tenga por límite  $x_0$ , la sucesión de los valores correspondientes de  $f(x)$  tiene por límite  $L$ . NOTACIÓN:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

1.- Basándote en la definición de límite, construye una sucesión de valores de  $x$ , que verifique los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3 & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 1) = 3 & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2 + 2) = -\infty \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2}{-x} = -3 & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 20}{-x^2} = -1 & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3}{x + 1} = +\infty \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3}{x + 1} = -\infty & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 + 7}{x^3} = 0 \end{array}$$

2.- Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 + 2x^2 - 7) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x + 3)^2 & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x)^3 \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} (-4x^2 + 30x + 1) & \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} (-x + 1)^3 & \text{f) } \lim_{x \rightarrow \infty} (-5x^3 - x)^3 \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 7x + 1) & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - x)^4 & \text{i) } \lim_{x \rightarrow \infty} 7 \end{array}$$

3.- Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 5}{x - 1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{7}{x - 2} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} \\ \text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)^2 - 9}{x - 1} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^6 - 1} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 4}{6x^2 + 12x - 8} \\ \text{m) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 5)^3}{x - 1} & \text{n) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 6x + 9}{(5x - 3)^2} & \text{ñ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^7 + 1}{x^3 - 2} & \text{o) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + 4}{x^2} \end{array}$$

4.-Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \quad b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{3-3x} - 3}{x + 2} \quad c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{2x^2 + x + 1}}{x - 3x + 2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5}}{\sqrt{2x} - 2} \quad e) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3} - 4x \quad f) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{5x}$$

5.- Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^3 + 2)^2}{2x^3} \quad b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x - 1} \quad c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x+7} - 3x) \quad e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 5x - 2} \quad f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x+4}}{3 - \sqrt{x+9}}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + x)^3 \quad h) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}{x - 2} \quad i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^2}{(3x+5)^2}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 4} \quad k) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{2x^2 - 18} \quad l) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{x})$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3x+1}} \quad n) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{2x+3}}{x^2 - 8x + 15} \quad o) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+3}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

6.- Determina las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones y estudia el acercamiento de la función a las mismas:

$$a) f(x) = \frac{6}{x-1} \quad b) f(x) = \frac{x+3}{x^2+1} \quad c) f(x) = \frac{2x+1}{x+5}$$

$$d) f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-6x+9} \quad e) f(x) = \frac{7}{2x^2-8} \quad f) f(x) = \frac{4x+3}{6x-12}$$

7) Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{3n} \quad c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{2x} \quad d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{2x} \quad e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{\frac{2n+1}{n}} \quad g) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+2}{5x}\right)^{2x} \quad h) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10n+2}{5n}\right)^{\frac{2n^2-5n+1}{3n^2-7}} \quad i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+2}{n}\right)^{2n}$$

### TEMA 3 : CONTINUIDAD

Idea intuitiva de continuidad. Definición de continuidad de una función en un punto. Estudio de la continuidad en funciones elementales y en funciones definidas a trozos. Tipos de discontinuidad.

#### RECUERDA:

**Definición:** Una función,  $f$ , es continua en un punto,  $x_0$ , perteneciente al dominio de la función, si el límite de la función en el punto,  $x_0$ , existe y es igual al valor de la función en dicho punto. Es decir:

$$f \text{ es continua en un punto } x_0 \in D \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

#### Tipos de Discontinuidad en un punto:

Discontinuidad **evitable** : si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \neq f(x_0)$  ;  $L \in \mathbb{R}$

$L$ : verdadero valor de la función en el punto  $x_0$ .

Discontinuidad **inevitable**: si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

**inevitable de salto finito**: si la diferencia entre los límites laterales es un número real.

**inevitable de salto infinito**: si la diferencia entre los límites laterales es infinito

1.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones, indicando los tipos de discontinuidad, si los hay:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 0 \\ x+5 & \text{si } x = 0 \\ 1-x & \text{si } x > 0 \end{cases} & d) f(x) = \begin{cases} -7-5x & \text{si } x < -3 \\ x^2-1 & \text{si } -3 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 4 \end{cases} \\ b) f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 3 \\ x & \text{si } x \geq 3 \end{cases} & e) f(x) = \begin{cases} x^2-2x+1 & \text{si } x < 3 \\ 3x-5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \\ c) f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x < -3 \\ 1-2x & \text{si } x \geq -3 \end{cases} & f) f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{array}$$

2.- Determina los valores de  $a$  y  $b$  para que las siguientes funciones sean continuas en los puntos indicados:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \begin{cases} ax+2 & \text{si } x < 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \\ b-x & \text{si } x > 1 \end{cases} & b) f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{si } x < -2 \\ bx+5 & \text{si } x = -2 \\ 1-x & \text{si } x > -2 \end{cases} \end{array}$$

## TEMA 4 : CÁLCULO DE DERIVADAS

### TABLA DE DERIVADAS

#### REGLAS DE DERIVACIÓN

SUMA  $y = u + v - w$

$$y' = u' + v' - w'$$

PRODUCTO  $y = u \cdot v$

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y = k \cdot u$$

$$y' = k \cdot u'$$

COCIENTE  $y = \frac{u}{v}$

$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

#### FUNCIONES

#### DERIVADAS

#### CASOS PARTICULARES

$$y = k$$

$$y' = 0$$

$$y = x$$

$$y' = 1$$

$$y = u^n$$

$$y' = nu^{n-1} \cdot u'$$

$$y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$$

$$y = \sqrt[n]{u}$$

$$y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

$$y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$y = \log_a u \quad y' = \frac{u'}{u} \log_a e$$

$$y = \log x \rightarrow y' = \frac{1}{x} \log e$$

$$y = \ln u \quad y' = \frac{u'}{u}$$

$$y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y = a^u \quad y' = u' a^u \ln a$$

$$y = a^x \rightarrow y' = a^x \ln a$$

$$y = u^v \quad y' = v' u^v \ln u + vu^{v-1} u'$$

$$y = e^x \rightarrow y' = e^x$$

$$y = \operatorname{sen} u \quad y' = u' \cos u$$

$$y = \operatorname{cos} u \quad y' = -u' \operatorname{sen} u$$

$$y = \operatorname{tg} u \quad y' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' \sec^2 u = u' (1 + \operatorname{tg}^2 u)$$

Observaciones :  $u = u(x) \quad v = v(x) \quad w = w(x)$

$$n \in \mathbb{N}, \quad n \neq 0$$

$$a \in \mathbb{R}, \quad a > 0 \quad \text{y} \quad a \neq 1$$

$$k \in \mathbb{R}$$

**CALCULA LAS DERIVADAS DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES:**

- 1)  $y = (x^3 + 1) \cdot (x^3 - 1)$       2)  $y = x^4 \cdot e^x$       3)  $y = x \cdot \ln x$   
 4)  $y = e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x$       5)  $y = \operatorname{sen} 2x \cdot \cos x$       6)  $y = \frac{1}{x-1}$   
 7)  $y = \frac{-2x}{x+1}$       8)  $y = \frac{3}{x^2-1}$       9)  $y = \frac{x^2-3}{x^2+3}$   
 10)  $y = \frac{\ln x}{x}$       11)  $y = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}$       12)  $y = \ln(2x+1)$   
 13)  $y = \ln \sqrt{1-x}$       14)  $y = e^{4x}$       15)  $y = 2^x$   
 16)  $y = 2^{\cos x}$       17)  $y = \operatorname{sen}^2 x$       18)  $y = \sqrt{\cos x}$   
 19)  $y = 5 \operatorname{sen}^3(3x^2 + 1)$       20)  $y = 7e^{x^2+3x}$       21)  $y = \sqrt{3^{x^2+1}}$   
 22)  $y = (2x+1)^3$       23)  $y = x^2 \ln x$       24)  $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$   
 25)  $y = \operatorname{sen}^5 x$       26)  $y = e^x \operatorname{sen}^2 x$       27)  $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$   
 28)  $y = \ln(\cos 2x)$       29)  $y = \frac{1}{\cos x}$       30)  $y = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$   
 31)  $y = 4x^2 - 7x + 1$       32)  $y = 4 + e^x$       33)  $y = (3x-2) \cdot (2x+3)$   
 34)  $y = 7x^3 - 2x^2 + 5 - Lx$       35)  $y = 6x + e^x + 2$       36)  $y = \sqrt{x}$   
 37)  $y = 2x \cdot Lx$       38)  $y = \sqrt[3]{x^2}$       39)  $y = \frac{1}{x^3}$   
 40)  $y = \frac{1}{x^2}$       41)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$       42)  $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$   
 43)  $y = \sqrt{x^3}$       44)  $y = 3\sqrt{x^3} - 2x$       45)  $y = x\sqrt{x}$   
 46)  $y = \pi\sqrt{x} - 2x$       47)  $y = xLx + x^2 e^x$       48)  $y = 3x - 5Lx$       49)  $y = \frac{2x}{Lx}$   
 50)  $y = x \operatorname{arcsen} x - 2 \operatorname{tg} x$       51)  $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$       52)  $y = x^2 \operatorname{sen} x - 2x \cos x$   
 53)  $y = \sqrt{x^3 \sqrt{x^2}}$       54)  $y = \frac{4}{x} - 3x^{-2} + 2x \operatorname{tg} x$       55)  $y = \frac{8x+3}{3x^2-5}$

**FUNCIONES COMPUESTAS**

- 56)  $y = \operatorname{sen} 3x$       57)  $y = 4 \cos 5x$       58)  $y = \operatorname{sen} 2x^2$       59)  $y = \operatorname{tg} x^3$   
 60)  $y = \operatorname{tg}^3 x$       61)  $y = \sqrt[3]{2x^2 - 3}$       62)  $y = 6 \operatorname{sen}^2(2x+1)$       63)  $y = \operatorname{sen}^4(5x-2)$   
 64)  $y = \sqrt{2x^2 + 7}$       65)  $y = L(2x+3)$       66)  $y = \cos^3 5x$       67)  $y = \cos^3 L(2x+3)$   
 68)  $y = Le^x$       69)  $y = \cos(\operatorname{sen}(2x))$       70)  $y = \sqrt{\operatorname{sen} 3x + (2x+1)^3}$       71)  $y = (4x^2 - 5x + 1)^3$

$$72) y = \sqrt{3x^2 - 5x + 1} \quad 73) y = \operatorname{sen} L(3x + 5) \quad 74) y = L \operatorname{sen}(2x + 1) \quad 75) y = \operatorname{tg}^2(\operatorname{sen} e^x)$$

$$76) y = \operatorname{tg}\left[2x - L(x + 3)^2\right] \quad 77) y = \frac{(2x + 1)^3}{\sqrt{4x - 3}} \quad 78) y = L \frac{(2x + 1)^3}{\sqrt{4x - 3}} \quad 79)$$

$$y = \sqrt{\operatorname{sen}(\sqrt{\operatorname{sen} x})}$$

$$80) y = \operatorname{costg} \sqrt{Lx}$$

## TEMA 5 : REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

### DEFINICIÓN DE DERIVADA

RECUERDA: la derivada de  $f(x)$  en un punto  $x_0$  es:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

1.-Calcula utilizando , la definición de derivada, la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a)  $f(x) = x^2 + 6$  en  $x_0 = -2$

b)  $f(x) = -2x^2 + x$  en  $x_0 = -1$

### MÁXIMOS, MÍNIMOS Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

RECUERDA:

$$(x_0, f(x_0)) \text{ es un MÁXIMO} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$$

$$(x_0, f(x_0)) \text{ es un MÍNIMO} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$$

$$(x_0, f(x_0)) \text{ es un punto de INFLEXIÓN} \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

En la práctica, para hallar los máximos y los mínimos, se hallan los valores de  $x$  que anulan la primera derivada , y se sustituyen en la segunda. Para hallar los puntos de inflexión, se hallan los valores de  $x$  que anulan la derivada segunda, y se sustituyen en la derivada tercera

2.- Calcula los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las funciones siguientes utilizando las condiciones anteriores :

a)  $f(x) = x^3 - 12x^2$

b)  $f(x) = x^2 + 2x$

### APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

RECUERDA:

Para hallar los intervalos de CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO , se hallan los valores de  $x$  que anulan  $f'(x)$ , es decir se resuelve la ecuación:  $f'(x)=0$ . Se sitúan dichos valores en el dominio de la función, y en los intervalos formados, se estudia el signo de  $f'(x)$ , aplicando lo siguiente:

$f(x)$  es CRECIENTE en un intervalo  $(a,b)$  si  $f'(x)>0$  en dicho intervalo.

$f(x)$  es DECRECIENTE en un intervalo  $(a,b)$  si  $f'(x) < 0$  en dicho intervalo.

Para hallar los intervalos de CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD, se procede como en el caso anterior, pero con la derivada segunda,  $f''(x)$ , aplicando lo siguiente:  
 $f(x)$  es CÓNCAVA HACIA ARRIBA en un intervalo  $(a,b)$  si  $f''(x) > 0$   
 $f(x)$  es CÓNCAVA HACIA ABAJO en un intervalo  $(a,b)$  si  $f''(x) < 0$

Si previamente se han estudiado éstos intervalos, se pueden determinar los MÁXIMOS, MÍNIMOS y PUNTOS DE INFLEXIÓN, aplicando la definición de los mismos

**Representa gráficamente** las siguientes funciones estudiando previamente el dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento (máximos y mínimos), intervalos de concavidad y convexidad (puntos de inflexión):

- |                                       |                                |                                     |
|---------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| 3) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$            | 4) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$     |                                     |
| 5) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$        | 6) $f(x) = x^4 - 4x^2$         |                                     |
| 7) $f(x) = x^3 - x$                   | 8) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$    |                                     |
| 9) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 10x + 25}$  | 10) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$ | 11) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 4}$ |
| 12) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 6x + 5}$ | 13) $f(x) = \frac{1}{x+1}$     | 14) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$        |
| 15) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$          | 16) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ | 17) $f(x) = \frac{x}{1+x}$          |
| 18) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 16}$       | 19) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$   | 20) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ |

### SOLUCIONES DEL BLOQUE III

#### SOLUCIONES AL TEMA 1

- 1.- a), b), c) y d)  $D = \mathbb{R}$  e)  $D = \mathbb{R} - \{0\}$  f)  $D = \mathbb{R} - \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$   
g)  $D = \mathbb{R} - \{0, 3/5\}$  h)  $D = \mathbb{R} - \{0, 1/2, -2/3\}$  i)  $D = [-7/2, \infty)$  j)  $D = (-\infty, 5]$   
k)  $D = [-7, 4)$  l)  $D = (0, 3]$  ll)  $D = (0, \infty)$  m)  $D = \mathbb{R}$  n)  $D = \mathbb{R}$  o)  $D = [-6, 6]$
- 2.- a)  $(f+g)(x) = \ln x + x^2$   $D = (0, \infty)$ ;  $(f/g)(x) = \ln x / x^2$   $D = (0, \infty)$ ;  
 $(f \circ g)(x) = \ln x^2$   $D = \mathbb{R} - \{0\}$ ;  $(g \circ f)(x) = (\ln x)^2$   $D = (0, \infty)$   
b)  $(f+g)(x) = \sqrt{x} + x - 8$   $D = [0, \infty)$ ;  $(f/g)(x) = \sqrt{x} / (x-8)$   $D = [0, \infty) - \{8\}$   
 $(f \circ g)(x) = \sqrt{x-8}$   $D = [8, \infty)$   $(g \circ f)(x) = \sqrt{x} - 8$   $D = [0, \infty)$   
c)  $(f+g)(x) = x^2 + 2x + 2$   $D = \mathbb{R}$   $(f/g)(x) = (x^2 + x) / (x+2)$   $D = \mathbb{R} - \{2\}$   
 $(f \circ g)(x) = (x+2)^2 + x + 2$   $D = \mathbb{R}$   $(g \circ f)(x) = x^2 + x + 2$   $D = \mathbb{R}$

#### SOLUCIONES AL TEMA 2

- 2) a)  $-8$  b)  $\infty$  c)  $\infty$  d)  $\infty$  e)  $-\infty$  f)  $-\infty$  g)  $\infty$  h)  $\infty$  i)  $7$ .  
3) a)  $7$  b)  $0$  c)  $\infty$  d)  $-1/4$  e)  $7$  f)  $27$  g)  $1$  h)  $-1/4$  i)  $6$  j)  $2/3$  k)  $-\infty$  l)  $1/6$  m)  $\infty$   
n)  $1/25$  ñ)  $\infty$  o)  $0$ .  
4) a)  $\infty$  b)  $-1/2$  c)  $5/8$  d)  $0$  e)  $-\infty$  f)  $\infty$ .  
5) a)  $\infty$  b)  $3/4$  c)  $1/2$  d)  $-\infty$  e)  $2/7$  f)  $3/2$  g)  $-\infty$  h)  $\sqrt{3}/6$  i)  $4/9$  j)  $\infty$  k)  $1/4$

l)  $\infty$  m)  $\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{5}}$  n)  $-1/12$  o)  $\infty$ .

6) a) AH:  $y = 0$ ; AV:  $x = 1$ ; b) AH:  $y = 0$ ; AV: No tiene; c) AH:  $y = 2$ ; AV:  $x = -5$  ;  
 d) AH:  $y = 1$ ; AV:  $x = 3$ ; f) AH:  $y = 0$ ; AV:  $x = 2, x = -2$ ; g) aH:  $y = 2/3$ ; AV:  $x = 2$ .

7) a)  $e$  b)  $e^{-1}$  c)  $e^{2/3}$  d)  $e^{2/5}$  e)  $e^{-2}$  f)  $1$  g)  $e^{4/5}$  h)  $2^{2/3}$  i)  $\infty$

### SOLUCIONES AL TEMA 3

1) a)  $f(x)$  es discontinua evitable en  $x=0$  b)  $f(x)$  es discontinua inevitable de salto finito en  $x=3$  c)  $f(x)$  es discontinua inevitable de salto finito en  $x=3$  d)  $f(x)$  es continua en su Dominio,  $\mathbb{R}$  e)  $f(x)$  es continua en su dominio,  $\mathbb{R}$  f)  $f(x)$  es discontinua inevitable de salto infinito.

2) a)  $a=3$   $b=6$  b)  $a=7$   $b=1$

### SOLUCIONES AL TEMA 4

1)  $y' = 6x^5$  2)  $y' = x^3 e^x (4+x)$  3)  $y' = 1 + \ln x$  4)  $y' = e^{2x} (2 \operatorname{sen} x + \cos x)$

5)  $y' = 2 \cos 2x \cos x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x$  6)  $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$  7)  $y' = \frac{-2}{(x+1)^2}$

8)  $y' = \frac{-6x}{(x^2-1)^2}$  9)  $y' = \frac{12x}{(x^2+3)^2}$  10)  $y' = \frac{1-\ln x}{x^2}$  11)  $y' = \frac{-4x}{1-x^4}$

12)  $y' = \frac{2}{2x-1}$  13)  $y' = \frac{-1}{2(1-x)}$  14)  $y' = 4e^{4x}$  15)  $y' = 2^x \ln 2$

16)  $y' = -2^{\cos x} \operatorname{sen} x \ln 2$  17)  $y' = 2 \operatorname{sen} x \cos x$  18)  $y' = \frac{-\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}}$

19)  $y' = 90x \operatorname{sen}^2 (3x^2 + 1) \cos (3x^2 + 1)$  20)  $y' = (14x + 21)e^{x^2+3x}$

21)  $y' = \frac{x \cdot 3^{x^2+1} \ln 3}{\sqrt{3^{x^2+1}}}$  22)  $y' = 6(2x+1)^2$  23)  $y' = x(2 \ln x + 1)$  24)  $y' = \frac{-1}{1-x^2}$

25)  $y' = 5 \operatorname{sen}^4 x \cos x$  26)  $y' = e^x \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x + 2 \cos x)$

27)  $y' = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -c \operatorname{tg} x \cdot \cos ecx$  28)  $y' = \frac{-2 \operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = -2 \operatorname{tg} 2x$

29)  $y' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$  30)  $y' = \frac{-(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$

31)  $y' = 8x - 7$  32)  $y' = e^x$  33)  $y' = 12x + 5$  34)  $y' = 21x^2 - 4x - \frac{1}{x}$

35)  $y' = 6 + e^x$  36)  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  37)  $y' = 2(Lx + 1)$  38)  $y' = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$

39)  $y' = \frac{-3}{x^4}$  40)  $y' = \frac{-2}{2x^3}$  41)  $y' = -\frac{3}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$  42)  $y' = \frac{-1}{2\sqrt[6]{x^7}}$

43)  $y' = \frac{11}{2\sqrt{x}}$  44)  $y' = \frac{9}{2} \sqrt{x} - 2$  45)  $y' = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$  46)  $y' = \frac{\pi}{4\sqrt{x}} - 2$

47)  $y' = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$  48)  $y' = 3 - \frac{5}{x}$  49)  $y' = \frac{2(Lx-1)}{(Lx)^2}$

$$50) y' = \arcsen x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\cos^2 x}$$

$$51) y' = -\sen x$$

$$52) y' = 4x \sen x + (x^2 - 2) \cos x$$

$$53) y' = \frac{5}{6 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

$$54) y' = -\frac{4}{x^2} + \frac{6}{x^3} + 2 \operatorname{tg} x + \frac{2x}{\cos^2 x}$$

$$55) y' = \frac{8(3x^2 - 5) - (8x + 3)6x}{(3x^2 - 5)^2}$$

$$56) y' = 3 \cos(3x)$$

$$57) y' = -20 \sen(5x)$$

$$58) y' = 4x \cos(2x^2)$$

$$59) y' = \frac{3x^2}{\cos x^3}$$

$$60) y' = \frac{3 \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$61) y' = \frac{4x}{\sqrt[3]{(2x^2 - 3)^2}}$$

$$62) y' = 24 \sen(2x+1) \cos(2x+1)$$

$$63) y' = 20 \sen^3(5x-2)$$

$$64) y' = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 7}}$$

$$65) y' = \frac{2}{2x+3}$$

$$66) y' = -15 \cos^2(5x) \cdot \sen(5x)$$

$$67) y' = \frac{-6 \cos^2[L(2x+3)] \cdot \sen[L(2x+3)]}{2x+3}$$

$$68) y' = 1$$

$$69) y' = -2 \sen(\sen(2x))$$

$$70) y' = \frac{3 \cos(3x) + 6(2x+1)}{\sqrt{\sen(3x) + (2x+1)^3}}$$

$$71) y' = 3(4x^2 - 5x + 1)^2$$

$$72) y' = \frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2 - 5x + 1}}$$

$$73) y' = \frac{3 \cos[L(3x+5)]}{3x+5}$$

$$74) y' = x$$

$$75) y' = 2 \operatorname{tg}(\sen e^x) \cdot (\cos e^x) \cdot e^x$$

$$76) y' = \frac{2\left(1 - \frac{1}{x+3}\right)}{\cos^2[2x - L(x+3)^2]}$$

$$77) y' = \frac{6(2x+1)^2 \cdot \sqrt{4x-3} - (2x+1)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{4x-3}}}{4x-3}$$

$$78) y' = \frac{6}{2x+1} - \frac{4}{4x-3}$$

$$79) y' = \frac{\cos(\sqrt{\sen x}) \cdot \cos x}{4\sqrt{\sen(\sqrt{\sen x})}}$$

$$80) y' = \frac{\cos[\operatorname{tg}(\sqrt{Lx})]}{2x\sqrt{Lx} \cdot \cos^2(\sqrt{Lx})}$$

## SOLUCIONES AL TEMA 5

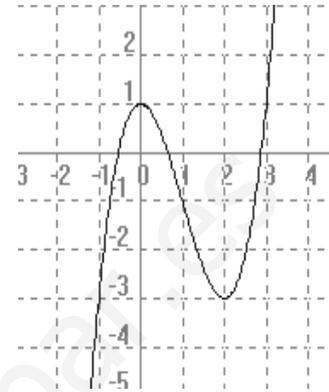
- 1) a)  $f'(-2) = -6$     b)  $f'(-1) = 5$   
 2) a) M(0,0) m(8,-256) P.I (4,-128)  
 m(-1,-1) No tiene máximos ni puntos de inflexión.

• 3)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Dominio:  $\mathbb{R}$

Puntos de corte: (0,1)

$$f''(x) = 6x - 6 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Cóncava hacia arriba : } (1, \infty) \\ \text{Cóncava hacia abajo : } (-\infty, 1) \\ \text{Puntos de Inflexión : } (1, -1) \end{array} \right.$$



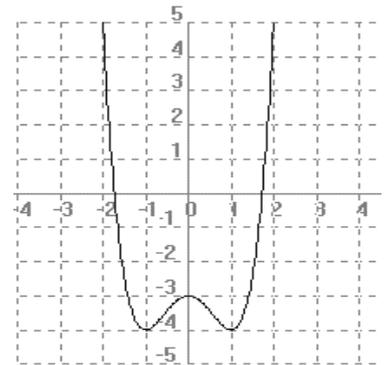
4)  $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

Dominio:  $\mathbb{R}$

Puntos de corte: (0,-3),  $(\sqrt{3}, 0)$ ,  $(-\sqrt{3}, 0)$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Creciente : } (-1, 0) \cup (1, \infty) \\ \text{Decreciente : } (-\infty, -1) \cup (0, 1) \\ \text{Máximos : } (0, -3) \\ \text{Mínimos : } (-1, -4) \text{ y } (1, -4) \end{array} \right.$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Cóncava hacia arriba : } (-\infty, -0.6) \cup (0.6, \infty) \\ \text{Cóncava hacia abajo : } (-0.6, 0.6) \\ \text{Puntos de Inflexión : } (-0.6, -3.6) \text{ y } (0.6, -3.6) \end{array} \right.$$



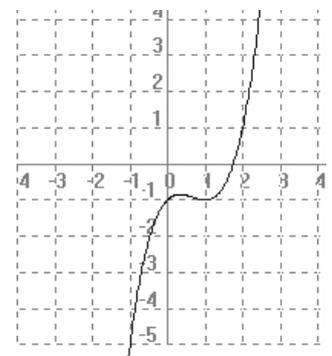
• 5)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

Dominio:  $\mathbb{R}$

Puntos de corte: (0,-1)

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Creciente : } (-\infty, 1/3) \cup (1, \infty) \\ \text{Decreciente : } (1/3, 1) \\ \text{Máximos : } (1/3, -0.8) \\ \text{Mínimos : } (1, -1) \end{array} \right.$$

$$f''(x) = 6x - 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Cóncava hacia arriba : } (2/3, \infty) \\ \text{Cóncava hacia abajo : } (-\infty, 2/3) \\ \text{Puntos de Inflexión : } (2/3, -0.9) \end{array} \right.$$



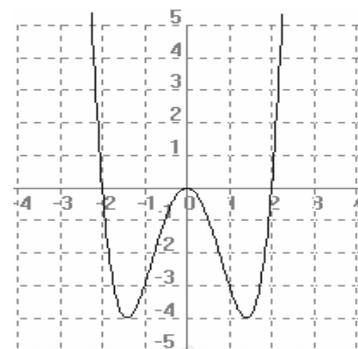
• 6)  $f(x)=x^4-4x^2$

Dominio:R

Puntos de corte: (0,0) (-2,0) (2,0)

$$f'(x) = 4x^3 - 8x \left\{ \begin{array}{l} \text{Creciente: } (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, \infty) \\ \text{Decreciente: } (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2}) \\ \text{Máximos: } (0, 0) \\ \text{Mínimos: } (-\sqrt{2}, -4) \text{ y } (\sqrt{2}, 0) \end{array} \right.$$

$$f''(x) = 12x^2 - 8 \left\{ \begin{array}{l} \text{Cóncava hacia arriba: } (-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty) \\ \text{Cóncava hacia abajo: } (-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}) \\ \text{Puntos de Inflexión: } (-\sqrt{\frac{2}{3}}, 2\sqrt{\frac{2}{3}}) \text{ y } (\sqrt{\frac{2}{3}}, 2\sqrt{\frac{2}{3}}) \end{array} \right.$$



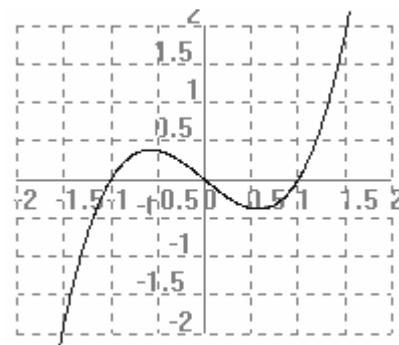
7)  $f(x)=x^3-x$

Dominio:R

Puntos de corte: (0,0) (-1,0) (1,0)

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Creciente: } (-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, \infty) \\ \text{Decreciente: } (-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3) \\ \text{Máximos: } (-\sqrt{3}/3, 0.4) \\ \text{Mínimos: } (\sqrt{3}/3, -0.4) \end{array} \right.$$

$$f''(x) = 6x \left\{ \begin{array}{l} \text{Cóncava hacia arriba: } (0, \infty) \\ \text{Cóncava hacia abajo: } (-\infty, 0) \\ \text{Puntos de Inflexión: } (0, 0) \end{array} \right.$$



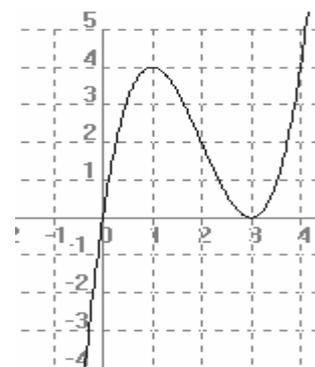
• 8)  $f(x)=x^3-6x^2+9x$

Dominio:R

Puntos de corte: (0,0) (3,0)

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \left\{ \begin{array}{l} \text{Creciente: } (-\infty, 1) \cup (3, \infty) \\ \text{Decreciente: } (2, 3) \\ \text{Máximos: } (1, 4) \\ \text{Mínimos: } (3, 0) \end{array} \right.$$

$$f''(x) = 6x - 12 \left\{ \begin{array}{l} \text{Cóncava hacia arriba: } (2, \infty) \\ \text{Cóncava hacia abajo: } (-\infty, 2) \\ \text{Puntos de Inflexión: } (2, 2) \end{array} \right.$$



• 9)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 10x + 25}$

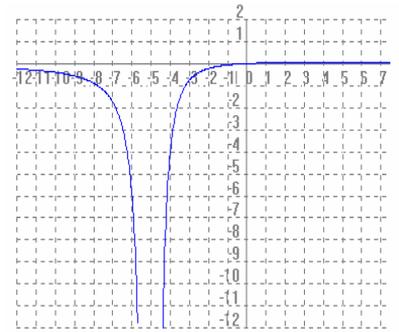
Dominio :  $\mathbb{R} - \{-5\}$

Puntos de corte: (0,0)

Asíntotas:  $Y=0$   $X=-5$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 25}{(x+5)^4} \left\{ \begin{array}{l} \text{Creciente : } (-5, 5) \\ \text{Decreciente : } (-\infty, -5) \cup (5, \infty) \\ \text{Máximos : } (5, 0,05) \\ \text{Mínimos : no tiene} \end{array} \right.$$

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 10x - 100}{(x+5)^5} \left\{ \begin{array}{l} \text{Cóncava hacia arriba : } (10, \infty) \\ \text{Cóncava hacia abajo : } (-\infty, -5) \cup (-5, 10) \\ \text{Puntos de inflexión : } (10, 0,04) \end{array} \right.$$



• 10)  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

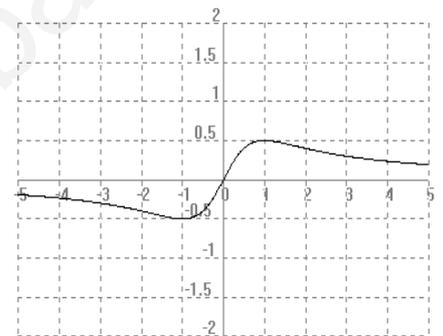
Dominio :  $\mathbb{R}$

Puntos de corte: (0,0)

Asíntotas:  $Y=0$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Creciente : } (-1, 1) \\ \text{Decreciente : } (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \text{Máximos : } (1, 1/2) \\ \text{Mínimos : } (-1, -1/2) \end{array} \right.$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3} \left\{ \begin{array}{l} \text{Cóncava hacia arriba : } (10, \infty) \\ \text{Cóncava hacia abajo : } (-\infty, -5) \cup (-5, 10) \\ \text{Puntos de inflexión : } (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/4) \\ \quad (\sqrt{3}, \sqrt{3}/4) \end{array} \right.$$



• 11)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 4}$

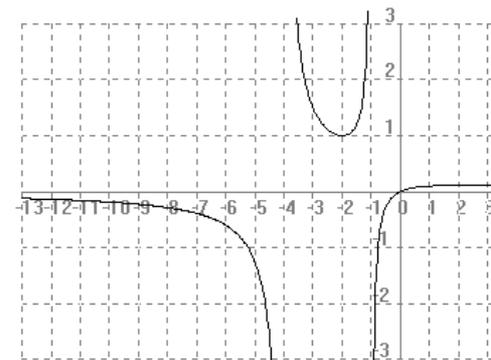
Dominio :  $\mathbb{R} - \{-4, -1\}$

Puntos de corte: (0,0)

Asíntotas:  $Y=0$   $X=-1$   $X=-4$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 5x + 4)^2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Creciente : } (-2, -1) \cup (-1, 2) \\ \text{Decreciente : } (-\infty, -4) \cup (-4, -2) \cup (2, \infty) \\ \text{Máximos : } (2, 2/18) \\ \text{Mínimos : } (-2, 1) \end{array} \right.$$

$$f''(x) = \frac{-2x^3 - 2x^2 + 12x}{(x^2 + 5x + 4)^3} \left\{ \begin{array}{l} \text{Cóncava hacia arriba : } (-4, -1) \cup (-3, \infty) \\ \text{Cóncava hacia abajo : } (-\infty, -4) \cup (-1, 3) \\ \text{Puntos de inflexión : } (3, 3/28) \end{array} \right.$$



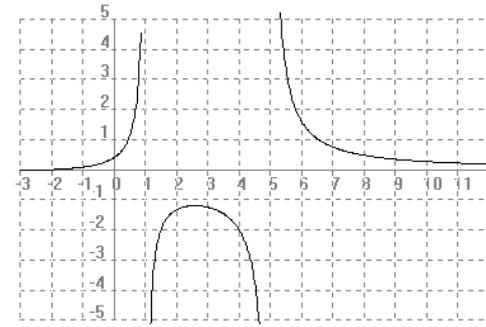
• **12)**  $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 6x + 5}$

Dominio :  $\mathbb{R} - \{1, 5\}$

Puntos de corte:  $(0, 2/5)$

Asíntotas:  $Y=0$   $X=1$   $X=5$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x + 17}{(x^2 + 6x + 5)^2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Creciente : } (-6,5,1) \cup (1,2,5) \\ \text{Decreciente : } (-\infty, -6,5) \cup (2,5,5) \cup (5, \infty) \\ \text{Máximos : } (2,5, -11) \\ \text{Mínimos : } (-6,5, -0,05) \end{array} \right.$$



• **13)**  $f(x) = \frac{1}{x+1}$

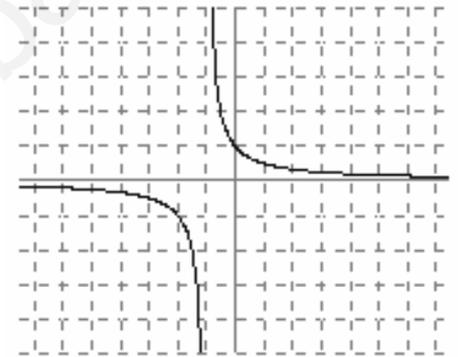
Dominio :  $\mathbb{R} - \{-1\}$

Puntos de corte:  $(0,0)$

Asíntotas:  $Y=0$   $X=-1$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Decreciente : } (-\infty, -1) \cup (-1, \infty) \\ \text{Máximos : no tiene} \\ \text{Mínimos : no tiene} \end{array} \right.$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \left\{ \begin{array}{l} \text{Cóncava hacia abajo : } (-\infty, -1) \\ \text{Cóncava hacia arriba : } (-1, \infty) \\ \text{Puntos de inflexión : no tiene} \end{array} \right.$$



• **14)**  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

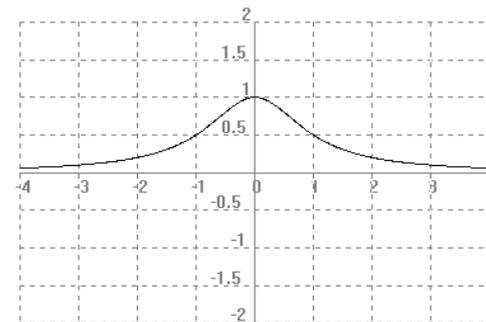
Dominio :  $\mathbb{R}$

Puntos de corte:  $(0,1)$

Asíntotas:  $Y=0$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Creciente : } (-\infty, 0) \\ \text{Decreciente : } (0, \infty) \\ \text{Máximos : no tiene} \\ \text{Mínimos : } (0, 1) \end{array} \right.$$

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \left\{ \begin{array}{l} \text{Cóncava hacia arriba : } (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty) \\ \text{Cóncava hacia abajo : } (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \\ \text{Puntos de inflexión : } (-\sqrt{3}/3, 3/4) \\ \quad \quad \quad (\sqrt{3}/3, 3/4) \end{array} \right.$$



$$15) f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

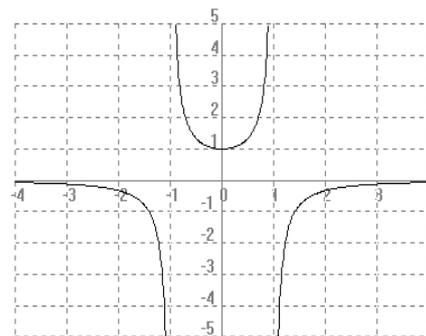
Dominio :  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Puntos de corte: (0,1)

Asíntotas:  $Y=0$   $X=-1$   $X=1$

$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \begin{cases} \text{Creciente : } (0, \infty) - \{1\} \\ \text{Decreciente : } (-\infty, 0) - \{-1\} \\ \text{Máximos : no tiene} \\ \text{Mínimos : } (0, 1) \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(1-x^2)^3} \begin{cases} \text{Cóncava hacia arriba : } (-1, 1) \\ \text{Cóncava hacia abajo : } (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \text{Puntos de inflexión : no tiene} \end{cases}$$



• 16)  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

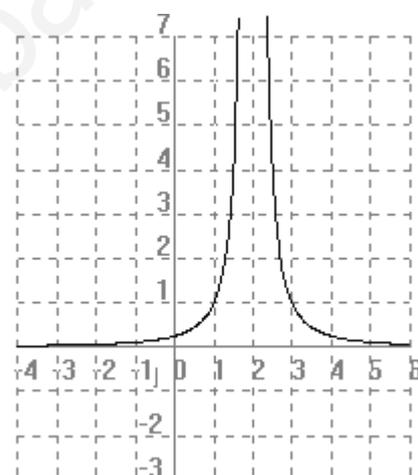
Dominio :  $\mathbb{R} - \{2\}$

Puntos de corte: (0, 1/4)

Asíntotas:  $Y=0$   $X=2$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-2)^3} \begin{cases} \text{Creciente : } (-\infty, 2) \\ \text{Decreciente : } (2, \infty) \\ \text{Máximos : no tiene} \\ \text{Mínimos : no tiene} \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x-2)^4} \begin{cases} \text{Cóncava hacia arriba : } (-\infty, 2) \\ \text{Cóncava hacia abajo : } (2, \infty) \\ \text{Puntos de inflexión : no tiene} \end{cases}$$



• 17)  $f(x) = \frac{x}{1+x}$

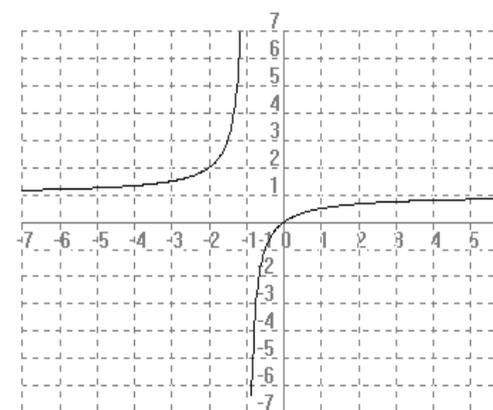
Dominio :  $\mathbb{R} - \{-1\}$

Puntos de corte: (0,0)

Asíntotas:  $Y=0$   $X=-1$

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \begin{cases} \text{Creciente : } (-\infty, -1) \\ \text{Decreciente : } (-1, \infty) \\ \text{Máximos : no tiene} \\ \text{Mínimos : no tiene} \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{-2}{(1+x)^3} \begin{cases} \text{Cóncava hacia arriba : } (-\infty, -1) \\ \text{Cóncava hacia abajo : } (-1, \infty) \\ \text{Puntos de inflexión : no tiene} \end{cases}$$



• 18)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 16}$

Dominio :  $\mathbb{R} - \{4, -4\}$

Puntos de corte: (0,0)

Asíntotas:  $Y=0$   $X=4$   $X=-4$

$$f'(x) = \frac{-(x^2 + 16)}{(x^2 - 16)^2} \begin{cases} \text{es _decreciente _en} \\ \text{su _dominio : } \mathbb{R} - \{4, -4\} \\ \text{Máximos : no _tiene} \\ \text{Mínimos : no tiene} \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 + 96x}{(x^2 - 16)^3} \begin{cases} \text{Cóncava hacia arriba : } (-4, 0) \cup (4, \infty) \\ \text{Cóncava hacia abajo : } (-\infty, -4) \cup (0, 4) \\ \text{Puntos de inflexión : } (0, 0) \end{cases}$$

• 19)  $f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$

Dominio :  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Puntos de corte: (0,0)

Asíntotas:  $Y=0$   $X=-1$   $X=1$

$$f'(x) = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2} \begin{cases} \text{Es _creciente _en} \\ \text{todo _su _dominio : } \mathbb{R} - \{-1, 1\} \\ \text{Máximos : no _tiene} \\ \text{Mínimos : no tiene} \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{2x(1 + x^2)}{(1 - x^2)^3} \begin{cases} \text{Cóncava hacia arriba : } (-\infty, -1) \cup (0, \infty) \\ \text{Cóncava hacia abajo : } (-1, 0) \cup (1, \infty) \\ \text{Puntos de inflexión : } (0, 0) \end{cases}$$

• 20)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

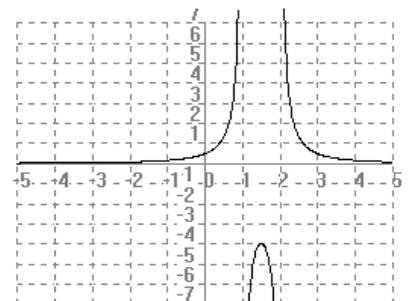
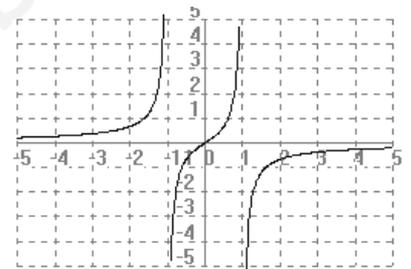
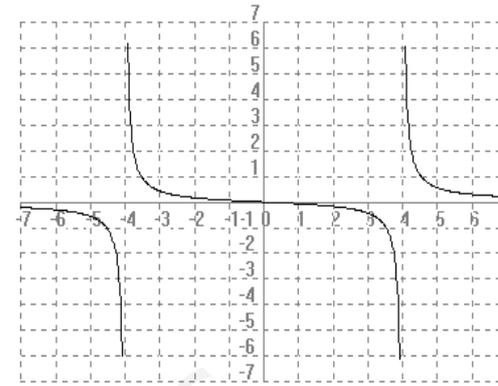
Dominio :  $\mathbb{R} - \{1, 2\}$

Puntos de corte: (0, 1/2)

Asíntotas:  $Y=0$   $X=1$   $X=2$

$$f'(x) = \frac{-2x + 3}{(x^2 - 3x + 2)^2} \begin{cases} \text{Creciente : } (-\infty, 3/2) - \{1\} \\ \text{Decreciente : } (3/2, \infty) - \{2\} \\ \text{Máximos : } (3/2, -4) \\ \text{Mínimos : no tiene} \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 18x + 14}{(x^2 - 3x + 2)^3} \begin{cases} \text{Cóncava hacia arriba : } (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \\ \text{Cóncava hacia abajo : } (1, 2) \\ \text{Puntos de inflexión : no _tiene} \end{cases}$$



## Tema 6: Integrales

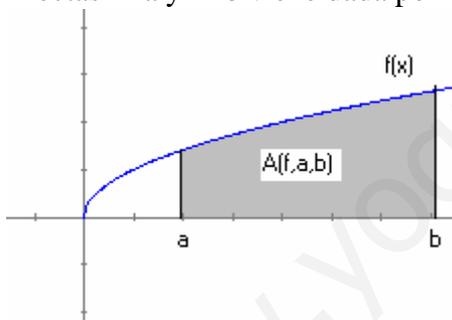
### INTEGRALES INMEDIATAS

- 1)  $\int u' \cdot u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$  (Tipo potencial)
- 2)  $\int \frac{u'}{u} dx = \ln|x| + C$  (Tipo logarítmico)
- 3)  $\int u' \cdot e^u dx = e^u + C$  (Tipo exponencial)
- 4)  $\int u' \cdot a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$  (Tipo exponencial)
- 5)  $\int u' \cdot \cos u dx = \text{sen } u + C$  (Tipo seno)
- 6)  $\int u' \cdot \text{sen } u dx = -\text{cos } u + C$  (Tipo coseno)
- 7)  $\int u' \cdot \sec^2 u dx = \int u' \cdot (1 + \text{tg}^2 u) dx = \int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \text{tg } u + C$  (Tipo tangente)

### Cálculo de áreas: Método de Barrow

#### Teorema de Barrow

Si  $f(x)$  es una función continua y positiva en  $[a,b]$  y  $F(x)$  una primitiva de  $f(x)$  en ese intervalo, entonces el área del recinto limitado por la función  $f(x)$  el eje  $x$  y las rectas  $x=a$  y  $x=b$  viene dada por



$$A(f,a,b) = F(b) - F(a)$$

Este valor recibe el nombre de integral de finida y se designa por:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

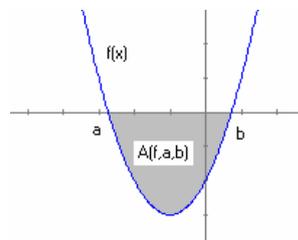
- Los números  $a$  y  $b$  se llaman límite inferior y superior de integración, respectivamente.

- Al área limitada por  $f(x)$ , el eje de abscisas, y las rectas  $x=a$  y  $x=b$ , se le denomina área del recinto limitado por la función  $f(x)$  en el intervalo  $[a,b]$

Si  $f(x) < 0$  en  $[a,b]$

$$\int_a^b f(x) dx$$

El área del recinto es el valor opuesto de la integral definida



$$A(f,a,b) = -$$

Si  $f(x)$  es positiva y negativa en  $[a,b]$

El área del recinto debe calcularse descomponiendo en subintervalos según el signo de la función:

$$A(f,a,b) = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

