TRIGONOMETRÍA

1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

La palabra tri-gono-metría significa "medida de las figuras con tres esquinas", es decir, de los triángulos. La trigonometría estudia las relaciones entre las longitudes de los lados de un triángulo y las medidas de sus ángulos. Por ello, las razones trigonométricas se definieron originariamente mediante triángulos rectángulos. No obstante, interesa definirlas usando la circunferencia unidad, es decir, en la llamada circunferencia goniométrica.

Unidades para medir ángulos

Las *unidades más utilizadas* para medir ángulos son:

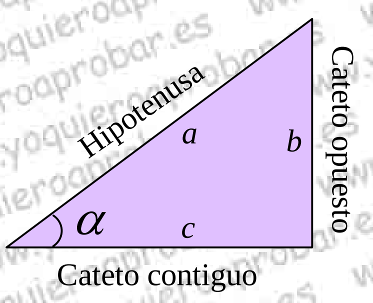
º = grado sexagesimal (un grado sexagesimal es la medida del ángulo central correspondiente a una de las 360 partes en que se divide una circunferencia)

Rad = radián (un radián es la medida del ángulo central que subtiende un arco igual al radio)

Para convertir grados sexagesimales en radianes, y viceversa, basta tener en cuenta la siguiente relación:

$$\boxed{180^\circ = \pi \text{ rad}}$$

En un triángulo rectángulo, las *razones trigonométricas* de un ángulo agudo α son las distintas razones (cocientes) que hay entre los lados.



Razones trigonométricas fundamentales:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{a} \\ \cos\alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a} \end{array}}$$

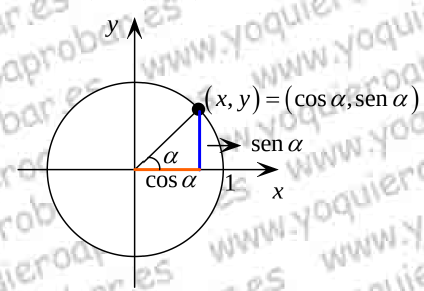
Otras razones trigonométricas:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{tg } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \\ \text{cosec } \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \\ \sec\alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{\cos\alpha} \\ \text{cotg } \alpha = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{1}{\text{tg}\alpha} \end{array}}$$

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

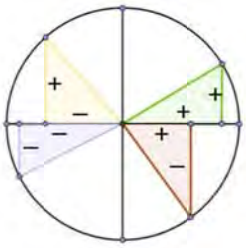
En un sistema de ejes coordenados consideremos una circunferencia de radio unidad y un ángulo α que tenga uno de sus lados sobre el eje OX. Entonces, a dicho ángulo α se le puede asociar de manera única un punto, sobre la circunferencia, de coordenadas (x, y) de manera que

$$(x, y) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$$



La circunferencia anterior se llama **circunferencia goniométrica**.

Dependiendo del cuadrante en el que se encuentre el ángulo, los **signos** de las razones trigonométricas fundamentales son:



Reducción de ángulos al primer cuadrante

Sea α el ángulo del primer cuadrante relacionado, en cada caso, con el ángulo β.

- Si β es un ángulo del segundo cuadrante, entonces
  $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\beta = -\cos\alpha$
- Si β es un ángulo del tercer cuadrante, entonces
  $\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\beta = -\cos\alpha$
- Si β es un ángulo del cuarto cuadrante, entonces
  $\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\beta = \cos\alpha$

Ángulos mayores de 360º

Si α es un ángulo mayor de 360º, entonces α y λ, donde $\lambda \in [0^\circ, 360^\circ]$ es el resto de dividir α entre 360º, tienen las mismas razones trigonométricas.

3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

	0º	30º	45º	60º	90º
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

4. RELACIONES ENTRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$ Relación fundamental (teorema de Pitágoras)

$: \text{sen}^2\alpha$ $\qquad$ $: \cos^2\alpha$

$$\boxed{1 + \text{cotg}^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha} \qquad \boxed{1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha}$$

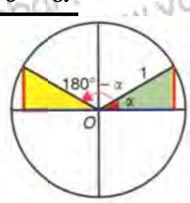
5. REDUCCIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

(i) Ángulos complementarios: α y $90^\circ - \alpha$

$$\text{sen}\,(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos\,(90^\circ - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$$

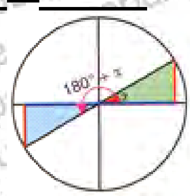
(ii) Ángulos suplementarios: α y $180^\circ - \alpha$

$$\text{sen}\,(180^\circ - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$$
$$\cos\,(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$



(iii) Ángulos que difieren en 180º: α y $180^\circ + \alpha$

$$\text{sen}\,(180^\circ + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$$
$$\cos\,(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$$



(iv) Ángulos opuestos α y $-\alpha$ o que suman 360º: α y $360^\circ - \alpha$

$$\text{sen}\,(-\alpha) = \text{sen}\,(360^\circ - \alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha$$
$$\cos\,(-\alpha) = \cos\,(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

6. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y LA DIFERENCIA, DEL ÁNGULO DOBLE Y DEL ÁNGULO MITAD

(i) Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

$$\text{sen }(\alpha \pm \beta) = \text{sen }\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \text{ sen }\beta$$
$$\cos (\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \text{sen }\alpha \text{ sen }\beta$$
$$\text{tg }(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg }\alpha \pm \text{tg }\beta}{1 \mp \text{tg }\alpha \text{ tg }\beta}$$

(ii) Razones trigonométricas del ángulo doble

$$\text{sen }(2\alpha) = 2 \text{ sen }\alpha \cos\alpha \qquad \text{tg }(2\alpha) = \frac{2 \text{ tg }\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$$
$$\cos (2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

(iii) Razones trigonométricas del ángulo mitad

$$\text{sen }\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \text{tg }\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$
$$\cos \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

El signo + o – depende del cuadrante en el que se sitúe $\frac{\alpha}{2}$.

7. TRANSFORMACIONES

$$\text{sen }\alpha + \text{sen }\beta = 2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\text{sen }\alpha + \text{sen }\beta = 2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\text{sen }\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(\alpha+\beta) - \text{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\text{sen }\alpha \cdot \text{sen }\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]$$

8. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación en la que aparecen una o varias razones trigonométricas.

Para resolverlas hay que expresar dicha ecuación en función de un mismo ángulo y de una sola razón trigonométrica, o factorizarla. Para ello se usarán las fórmulas vistas en los apartados anteriores.

En este tipo de ecuaciones **siempre hay que comprobar** que los valores obtenidos verifican la ecuación original, es decir, son solución.

9. SISTEMAS TRIGONOMÉTRICOS

Un **sistema** de ecuaciones es **trigonométrico** cuando al menos una de sus ecuaciones lo es.

Para *resolverlos*:

1) Utilizaremos lo visto en el apartado anterior correspondiente a la resolución de ecuaciones trigonométricas y
2) Los métodos que conocemos para resolver sistemas de ecuaciones.