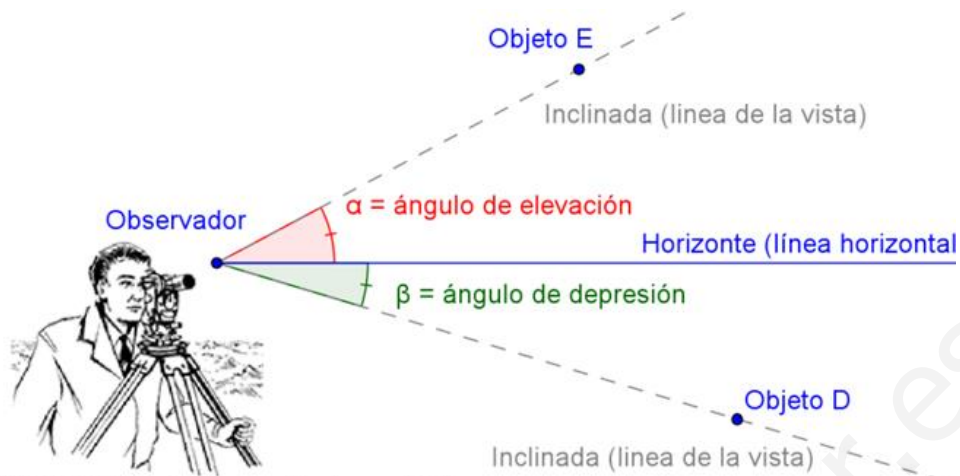


APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA: TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS



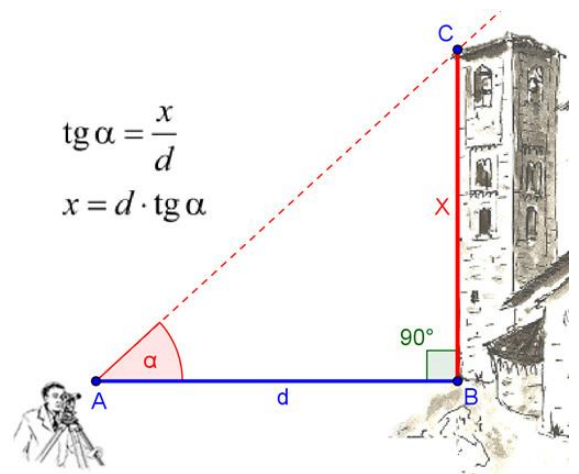
TEODOLITO: instrumento de medición mecánico-óptico que sirve para medir ángulos verticales y horizontales.

En los siguientes problemas relacionados con **TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS** utilizaremos, en ocasiones:

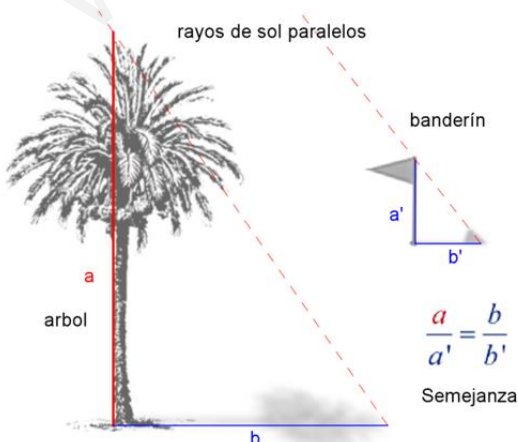
TÉCNICA DE LA OBSERVACIÓN DIRECTA

Se utiliza para calcular alturas de objetos de pie accesible como edificios, farolas, árboles, postes de luz y también para calcular distancias entre puntos, uno de ellos inaccesible como anchura de ríos, distancia de la costa a un barco, etc...

La distancia "d" se mide sobre el terreno, porque podemos llegar al pie (punto B). Para saber la amplitud del ángulo "α" utilizamos el teodolito.



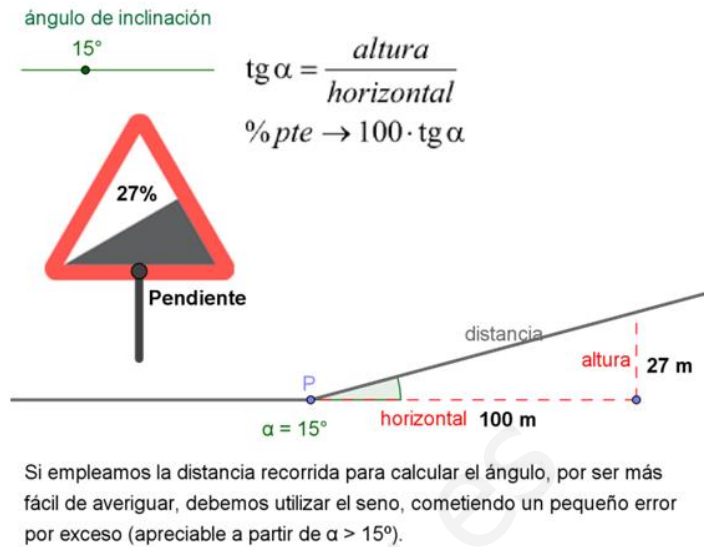
CÁLCULO DE LA ALTURA USANDO LA SOMBRA



Podemos averiguar la altura de un objeto midiendo la sombra que proyecta, por semejanza de triángulos. Colocamos un banderín o palo, de altura conocida, y medimos su sombra. A continuación medimos la sombra del objeto y, por semejanza, calculamos su altura.

PENDIENTE DE UNA CARRETERA

Esta señal de tráfico corresponde a la pendiente de una carretera y nos indica que de cada 100 m que recorremos sobre la horizontal subimos (bajamos) 27 m. Matemáticamente esta razón es la tangente del ángulo que forma la carretera con la horizontal. Como es más fácil saber la distancia recorrida, a veces, se usa el seno del ángulo en lugar de la tangente.

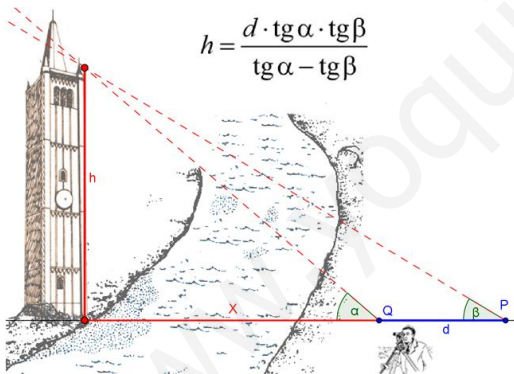


TÉCNICA DE LA DOBLE OBSERVACIÓN

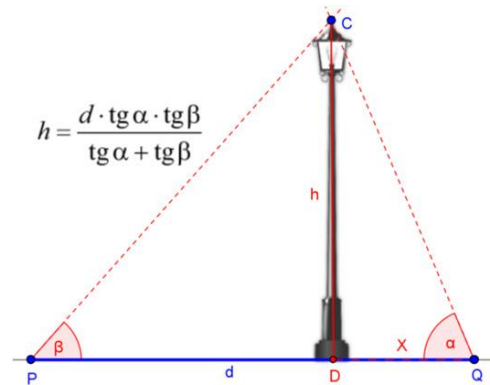
Se utiliza para calcular alturas de objetos de pie inaccesible como montañas, faros, torres eléctricas, altura de globos, objetos en la orilla opuesta de un río, etc...

Nos situamos en el punto "P" (en la horizontal del pie inaccesible) y con el teodolito medimos el ángulo " β ". Avanzamos una distancia conocida "d" hasta el punto "Q" y medimos el ángulo " α ". Con estos datos podemos averiguar la altura del objeto sin necesidad de llegar hasta el pie de éste.

En los dos casos siguientes suponemos que $\alpha > \beta$



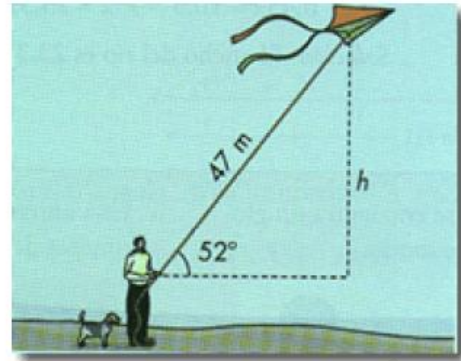
Realizando las dos observaciones desde el mismo lado



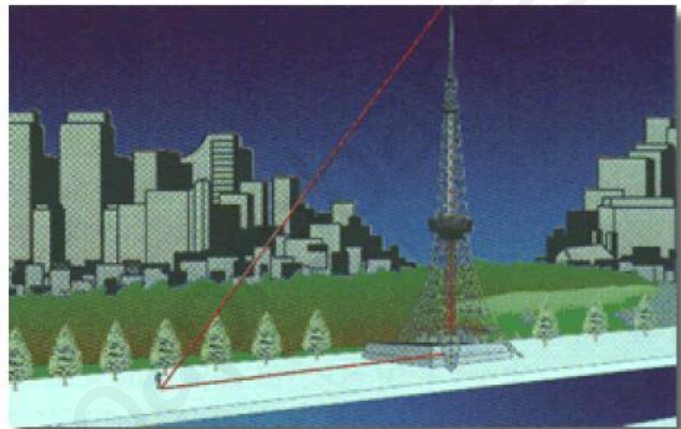
Realizando las dos observaciones desde lados opuestos

PROBLEMAS

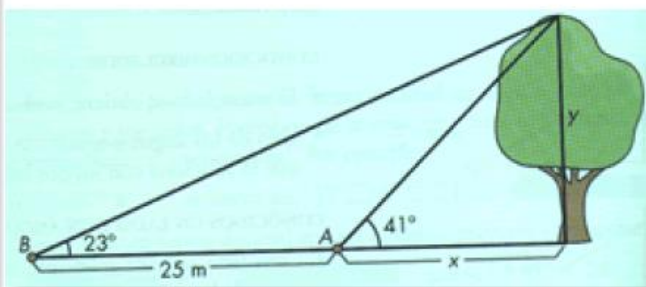
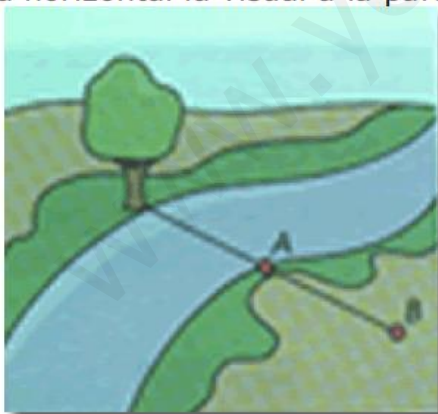
1.- Alfonso está haciendo volar su cometa. Ha soltado ya 47 metros de hilo y averigua que el ángulo que forma la cuerda de la cometa con la horizontal es de 52° . ¿A qué altura sobre la mano de Alfonso se encuentra la cometa?



2.- La Torre Eiffel está al borde del Sena. Al otro lado de la torre hay unos jardines públicos conocidos como "Los Campos de Marte". Nos situamos en un punto de esos jardines y medimos el ángulo de la horizontal con el punto más alto de la torre, mide 77° . Sabiendo que la Torre Eiffel tiene 300 m. calcula la distancia a la que nos encontramos de dicha torre.

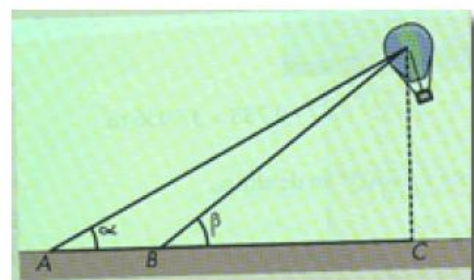


3.- Quieres conocer el ancho de un río y la altura de un árbol que está en la orilla opuesta. Para ello, te sitúas frente al árbol y mides el ángulo que forma con la horizontal la visual a la parte alta del árbol (41°). Te alejas del árbol, en dirección perpendicular a la orilla, andando 25 metros. Vuelves a medir el ángulo que forma con la horizontal la visual a la parte alta del árbol. Ahora son 23° .

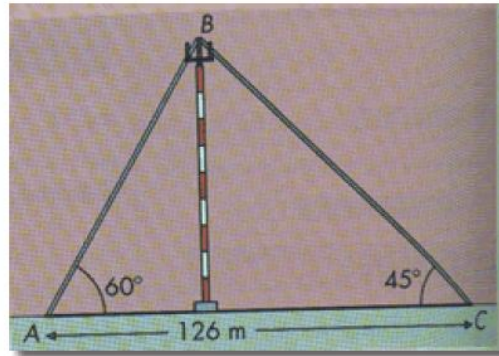


4.- Para hallar la altura a la que se encuentra un globo, procedemos del siguiente modo:

Rosa se coloca en un punto B, y yo en un punto A, a 5 metros de ella, de tal forma que los puntos A, B y C quedan alineados. Si los ángulos α y β miden 40° y 50° , respectivamente, ¿a qué altura se encuentra el globo?



5.- Una antena de radio está sujeta al suelo con dos tirantes de cable de acero, como indica la figura.

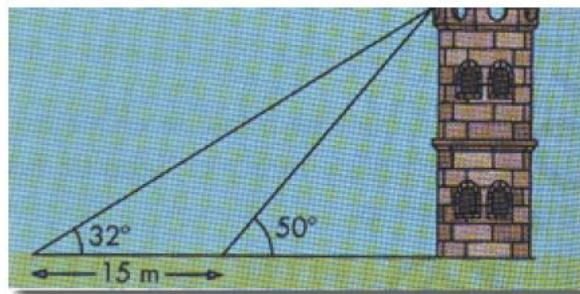


Calcula:

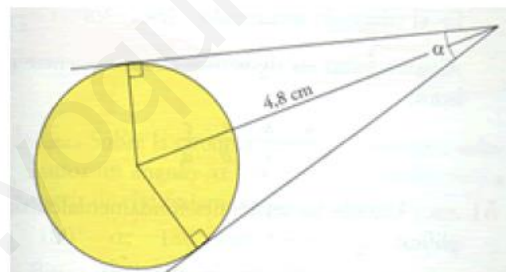
- La altura de la antena.
- La longitud de los cables.
- El valor del ángulo ABC.

6.- Desde el lugar donde me encuentro, la visual de la torre forma un ángulo de 32° con la horizontal.

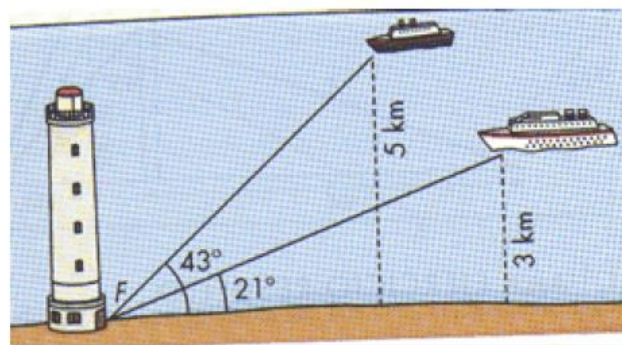
Si me acerco 15 metros, el ángulo es de 50° . ¿Cuál es la altura de la torre?



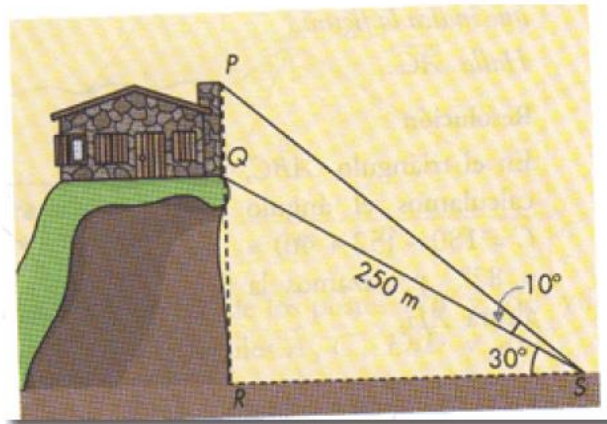
7.- El diámetro de una moneda de 2 euros mide 2,5 cm. Averigua el ángulo que forman sus tangentes trazadas desde una distancia de 4,8 cm del centro, como indica la figura.



8.- Desde el faro F se observa el barco A bajo un ángulo de 43° con respecto a la línea de la costa; y el barco B, bajo un ángulo de 21° . El barco A está a 5 km de la costa y el B a 3 km. Calcula la distancia entre los barcos.

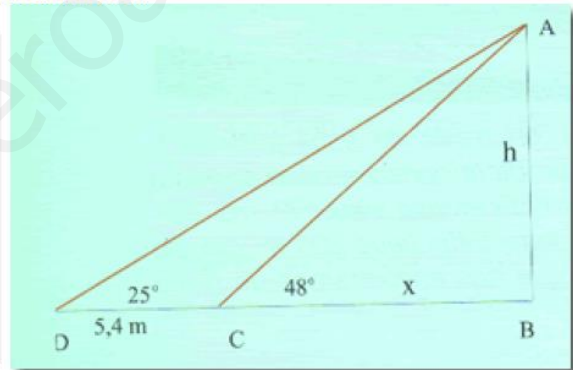
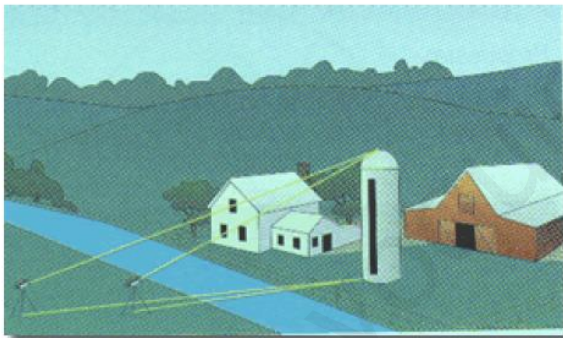


9.- Para calcular la altura del edificio, PQ, hemos medido los ángulos que indica la figura. Sabemos que hay un funicular para ir de S a Q, cuya longitud es de 250m. Halla PQ.

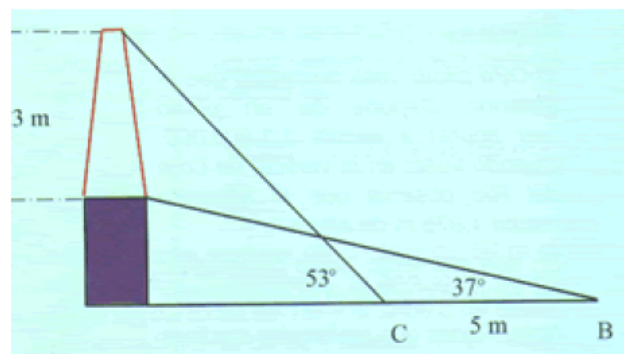


10.- Queremos calcular la altura de una torre situada al otro lado de un río. Para ello llevamos un goniómetro, aparato que sirve para medir ángulos, que está sobre un soporte de 1,30 m. de altura. Llevamos una cinta métrica. Nos situamos en un punto y medimos el ángulo de la visual con la horizontal, obteniendo 48° . Nos alejamos más de la torre siguiendo la línea recta determinada por el pie de la misma y el punto anterior. Marcamos un nuevo punto sobre el terreno. Medimos la distancia entre ambos puntos: 5,4 m. Medimos el ángulo 25° .

Con estos datos obtenidos calcular la altura de la torre.

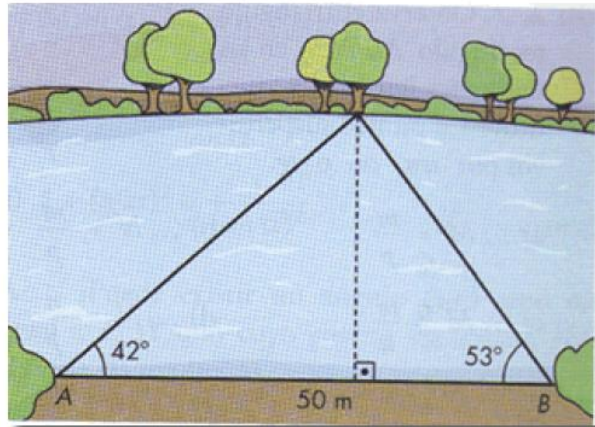


11.- Una estatua de 3 m de altura está situada sobre un pedestal cuya altura queremos calcular. Para ello nos situamos en un punto B y observamos el pedestal con un ángulo de 37° . Nos acercamos 5 m y nos situamos en otro punto C desde el que observamos ahora todo el conjunto, estatua más pedestal, con un ángulo de 53° . Calcula la altura del pedestal.



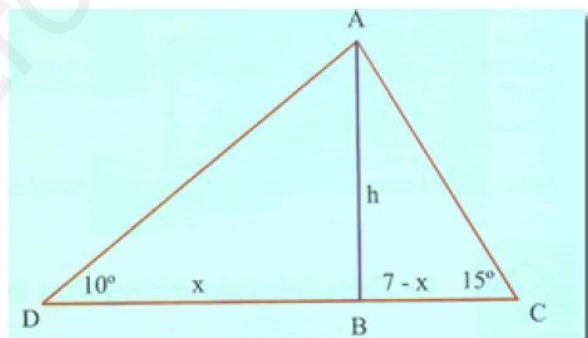
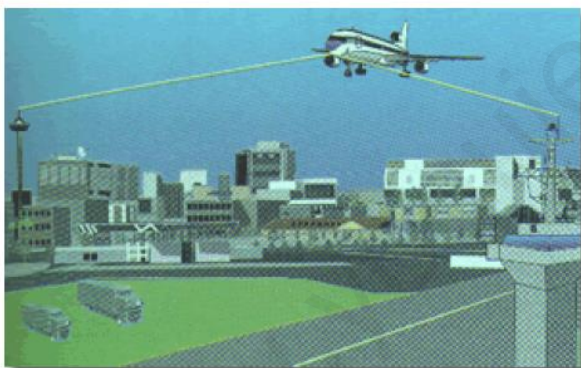
12.- Observa las medidas que ha tomado Juan para calcular la anchura del río.

Realiza los cálculos que ha de hacer Juan para hallar la anchura del río.

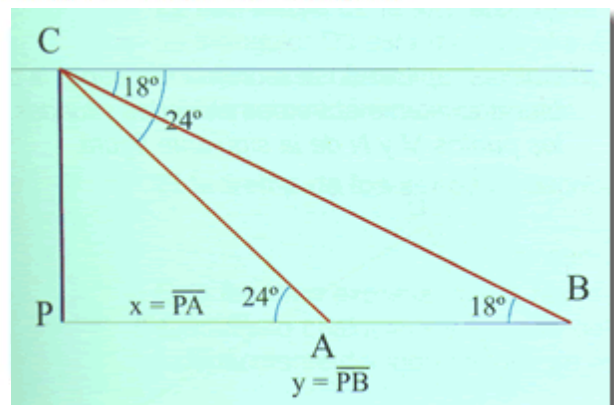
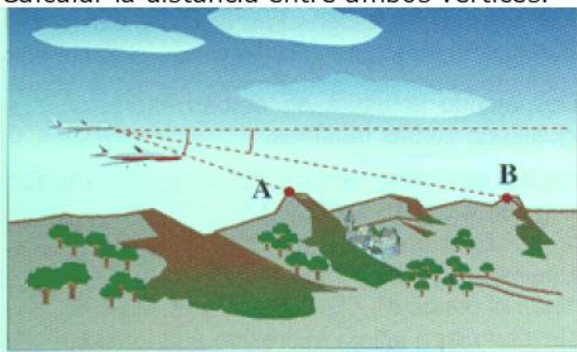


14.- Un avión quiere aterrizar en Sevilla, y en un determinado instante se encuentra sobrevolando la línea imaginaria que une "El Pirulí" de la Isla de la Cartuja, con la torre del aeropuerto, que están separadas por 7 Km. Como tiene el altímetro estropeado no puede medir la altura a la que se encuentra situado sobre la pista de aterrizaje y mide los ángulos de depresión de ambos edificios: 10° y 15° respectivamente.

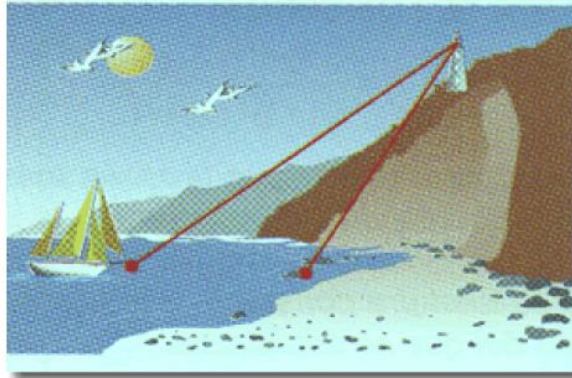
Con los datos anteriores, queremos calcular la altura a la que se encuentra el avión en ese determinado momento.



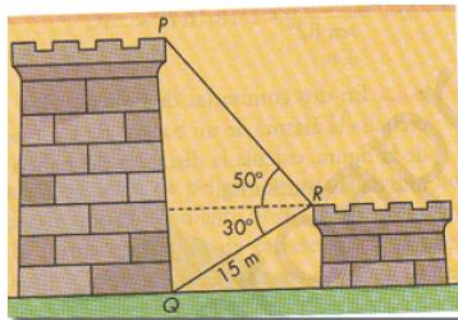
15.- Un piloto observa dos vértices geodésicos, cuando su altímetro marca 5.000 m, ambos marcados en su plano a 1.500 m, bajo ángulos de depresión de 24° (el más cercano) y 18° . Como no dispone de regla no puede medir sobre el plano. Calcular la distancia entre ambos vértices.



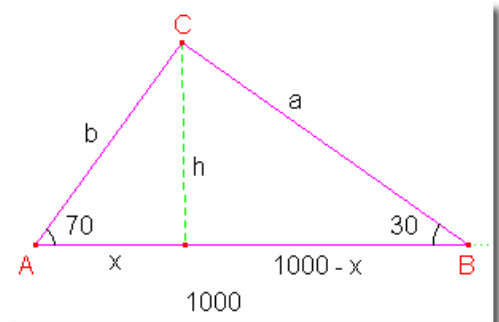
16.- Desde la parte superior de un faro de 50 m de altura sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión de un barco es de 16° y el ángulo de depresión de la playa es de 60° , medido en el mismo plano vertical con el barco. Calcula la distancia del barco a la playa.



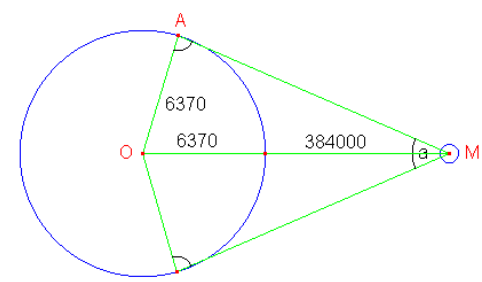
17.- Si $QR = 15$ m, ¿cuál es la altura de la torre PQ?



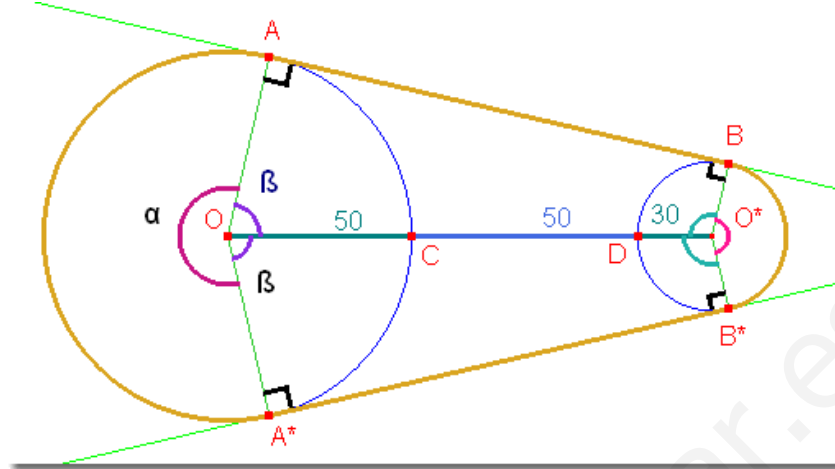
18. Dos observadores, de cara, separados 1000 m divisan una nube entre ellos bajo ángulos de elevación de 70° y 30° . Calcular las longitudes de las visuales a la nube.



19. ¿Bajo qué ángulo divisa Mortimer la tierra desde la superficie de la luna? Datos: radio de la tierra = 6370 Km y distancia de la superficie de la tierra a la luna 384000 Km.



20. Calcular la longitud de la correa transmisora directa en dos poleas de radios 30 cm y 50 cm que están separadas 50 cm
 Nota: las tangentes son exteriores



La longitud de la correa trasmisora sería: $L_T = \overline{AB} + \overline{A'B'} + \widehat{AA'} + \widehat{BB'}$

Calculamos cada uno de los sumandos:

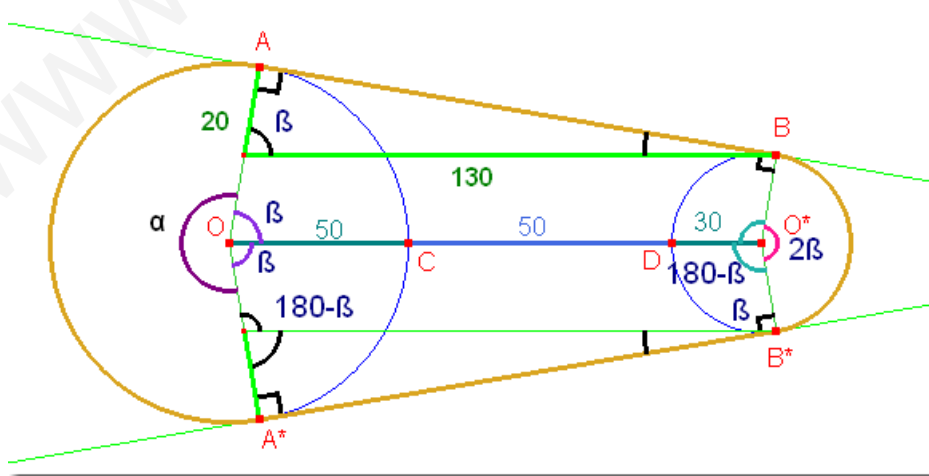
- Para calcular $AB=A'B'$ aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$130^2 = AB^2 + 20^2 \Rightarrow AB = \sqrt{130^2 - 20^2} \approx 128,45$$
- Para calcular los arcos AA' y BB' necesitamos conocer los ángulo β , α :

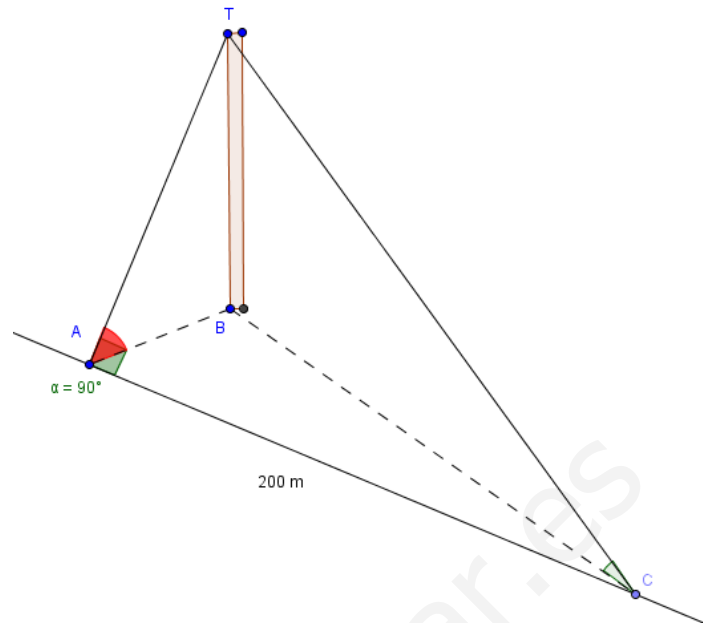
$$\cos \beta = \frac{20}{130} \Rightarrow \beta = \arccos \frac{20}{130} \approx 81,15^\circ$$

$$\alpha = 360^\circ - 2 \cdot \beta \approx 360^\circ - 2 \cdot 81,15^\circ \approx 197,7^\circ$$
- La longitud del arco AA' es: $L_{AA'} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot (2 \cdot \pi \cdot R) = \frac{197,7}{360^\circ} \cdot (2 \cdot \pi \cdot 50) \approx 172,52$
- La longitud del arco BB' es: $L_{BB'} = \frac{(2\beta)}{360^\circ} \cdot (2 \cdot \pi \cdot R) = \frac{162,30}{360^\circ} \cdot (2 \cdot \pi \cdot 30) = 84,98$

El total: $L_T = \overline{AB} + \overline{A'B'} + \widehat{AA'} + \widehat{BB'} \approx 2 \cdot 128,45 + 172,52 + 84,98 \approx 514,4 \text{ cm}$



21. Desde un punto A situado al sur de la torre BT se observa que el ángulo BAT de elevación de la parte superior T de la torre es de 45° y si se camina 200 m en dirección Este hasta un punto C se observa que el ángulo de elevación BCT del punto T es de 20° . Calcular la altura de la torre.



En el triángulo TBA. $\beta = 45^\circ$ luego $\tan 45^\circ = \frac{H}{AB} \Rightarrow 1 = \frac{H}{AB} \Rightarrow AB = H$

Por otra parte: $\operatorname{sen} 20^\circ = \frac{H}{TC} \Rightarrow TC = \frac{H}{\operatorname{sen} 20^\circ}$ $AT^2 = H^2 + H^2 \Rightarrow AT = H\sqrt{2}$

Entonces:

$$TC^2 = 200^2 + AT^2 \Rightarrow \frac{H^2}{\operatorname{sen}^2 20^\circ} = 200^2 + 2H^2 \Rightarrow H^2 = (200^2 + 2H^2)\operatorname{sen}^2 20^\circ \Rightarrow$$

$$H^2 = 200^2 \operatorname{sen}^2 20^\circ + 2H^2 \operatorname{sen}^2 20^\circ \Rightarrow H^2 - 2H^2 \operatorname{sen}^2 20^\circ = 200^2 \operatorname{sen}^2 20^\circ \Rightarrow$$

$$(1 - 2\operatorname{sen}^2 20^\circ)H^2 = 200^2 \operatorname{sen}^2 20^\circ \Rightarrow H = \sqrt{\frac{200^2 \operatorname{sen}^2 20^\circ}{(1 - 2\operatorname{sen}^2 20^\circ)}} = \sqrt{\frac{200^2 \operatorname{sen}^2 20^\circ}{(\operatorname{sen}^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ - 2\operatorname{sen}^2 20^\circ)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{200^2 \operatorname{sen}^2 20^\circ}{(\cos^2 20^\circ - \operatorname{sen}^2 20^\circ)}} = \sqrt{\frac{200^2 \operatorname{sen}^2 20^\circ}{\cos 40^\circ}} = \frac{200 \cdot \operatorname{sen} 20^\circ}{\sqrt{\cos 40^\circ}} = 78,15 \text{ m}$$

Luego la torre tiene 78,15 m aproximadamente