Ejercicio 1.

Calcula el valor de las expresiones:

$$a)\ \log_4\left[\left(\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\sqrt[5]{16\cdot\sqrt[3]{4}}}\right):\sqrt[6]{\frac{1}{32}}\right] \qquad b)\ \log_{0,25}8+\log_{25}\frac{1}{\sqrt{5}}-\log(0,01)^{-1}$$

$$a)\ \log_4\left[\left(\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\sqrt[5]{16\cdot\sqrt[3]{4}}}\right):\sqrt[6]{\frac{1}{32}}\right] = \log_4\left[\left(2^{-1/2}\cdot 2^{4/10}\cdot 2^{2/30}\right):2^{-5/6}\right] = \log_4\left[2^{-1/30}:2^{-5/6}\right] =$$

$$=\log_4\left[2^{-\frac{1}{30}+\frac{5}{6}}\right] = \log_4\left[2^{4/5}\right] = \frac{4}{5}\cdot\log_4 2 = \frac{4}{5}\cdot\log_4 4^{1/2} = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{5}$$

$$b)\ \log_{0,25}8+\log_{25}\frac{1}{\sqrt{5}}-\log(0,01)^{-1} = \log_{\frac{1}{4}}2^3+\log_{25}5^{-1/2}-\log 10^2 = 3\log_{\frac{1}{4}}2-\frac{1}{2}\log_{25}5-2 =$$

$$= 3\cdot\frac{\log_2 2}{\log_2\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_5 5}{\log_5 25}-2 = 3\cdot\frac{1}{-2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-2 = -\frac{3}{2}-\frac{1}{4}-2 = -\frac{15}{4}$$

Ejercicio 2.

Resuelve:

$$a)\ \frac{5-2x}{3x-9}\le 1 \qquad b)\ 1-x=\sqrt{1-x\sqrt{4-7x^2}}$$

$$a)\ \frac{5-2x}{3x-9}\le 1 \Rightarrow \frac{5-2x}{3x-9}-1\le 0 \Rightarrow \frac{5-2x-3x+9}{3x-9}\le 0 \Rightarrow \frac{14-5x}{3x-9}\le 0 \Rightarrow \frac{14-5x}{3(x-3)}\le 0$$

$$entonces\ \ x\in\left(-\infty\ ,\ \frac{14}{5}\right]\cup(3\ ,+\infty)$$

	$\left(-\infty\ ,\ \frac{14}{5}\right)$	$\frac{14}{5}$	$\left(\frac{14}{5}\ ,\ 3\right)$	3	$(3\ ,\ \infty)$
$14-5x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{14-5x}{3(x-3)}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

$b)\ 1-x=\sqrt{1-x\sqrt{4-7x^2}} \Rightarrow (1-x)^2=1-x\sqrt{4-7x^2} \Rightarrow 1-2x+x^2=1-x\sqrt{4-7x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x^2-2x\right)^2=\left(-x\sqrt{4-7x^2}\right)^2 \Rightarrow x^4-4x^3+4x^2=x^2\left(4-7x^2\right) \Rightarrow x^4-4x^3+4x^2=4x^2-7x^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x^4-4x^3=0 \Rightarrow 4x^3(2x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ *se comprueban las soluciones y ambas son válidas*

Ejercicio 3.

Calcula:

$a)$ La siguiente suma infinita: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{\sqrt{3}}{27}+\dfrac{1}{27}+\cdots\cdots\cdots$

$b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^4-9}}{3n\sqrt{4n^2-4}}$

$a)\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{9},\dfrac{1}{9},\dfrac{\sqrt{3}}{27},\dfrac{1}{27},\cdots$ *es una progresión geométrica de razón* $\dfrac{1}{\sqrt{3}}<1 \Rightarrow S_\infty=\dfrac{a_1}{1-r}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{1}{9}+\frac{\sqrt{3}}{27}+\frac{1}{27}+\cdots=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^4-9}}{3n\sqrt{4n^2-4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9\left(n^4-1\right)}}{3n\sqrt{4\left(n^2-1\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\sqrt{n^4-1}}{6\cdot\sqrt{n^2\left(n^2-1\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{n^4-1}{n^4-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\frac{n^4-1}{n^4}}{\frac{n^4-n^2}{n^4}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1-\frac{1}{n^4}}{1-\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1-0}{1-0}}=\frac{1}{2}$$

Ejercicio 4.

Prueba que la sucesión de todos los números naturales, que divididos por 7 dan de resto 5, es una progresión aritmética. Halla la expresión del término general y la suma de todos los términos de tres cifras de dicha progresión.

Los números naturales que al dividirlos por 7 dan de resto 5 serán múltiplos de 7 más 5 o múltiplos de 7 menos 2, es decir de la forma $7n+5$ *o* $7n-2$.

La sucesión $7n+5$ *es* $12, 19, 26, 33, 40, ...$ *que deja fuera al 5, número natural de resto 5 al dividir por 7.*

Entonces $a_n = 7n-2 \Rightarrow 5, 12, 19, 26, 33, 40, ...$ *es la sucesión pedida, que es una progresión aritmética de diferencia 7.*

Ahora tenemos que sumar todos los términos de tres cifras, el primero será $a_{15} = 7\cdot 15 - 2 = 103$ *y el último será* $a_{143} = 999$.

El número de términos que sumamos es $143-15+1=129$ *y entonces la suma vale:*

$$S = \frac{(103+999)\cdot 129}{2} = 71079$$

Ejercicio 5.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a)\ 4\cdot\left(2^x + \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 33 \qquad b)\ \log(x-1) - \log\sqrt{5+x} - \log\sqrt{5-x} = 0$$

$$a)\ 4\cdot\left(2^x + \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 33 \Rightarrow 4\cdot\left(2^x + \frac{2}{2^x}\right) = 33 \Rightarrow \left(\text{llamando } 2^x = t\right) \Rightarrow 4\cdot\left(t + \frac{2}{t}\right) = 33 \Rightarrow 4t + \frac{8}{t} = 33$$

$$\text{quitando denominadores queda} \quad 4t^2 + 8 = 33t \Rightarrow 4t^2 - 33t + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 8 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{entonces} \quad si\ t = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$$

$$si\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1$$

$b)\ \log(x-1)-\log\sqrt{5+x}-\log\sqrt{5-x}=0 \Rightarrow \log(x-1)=\log\sqrt{5+x}+\log\sqrt{5-x} \Rightarrow$

$\log(x-1)=\log\left(\sqrt{5+x}\cdot\sqrt{5-x}\right) \Rightarrow \log(x-1)=\log\left(\sqrt{25-x^2}\right) \Rightarrow x-1=\sqrt{25-x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)^2=\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2 \Rightarrow x^2-2x+1=25-x^2 \Rightarrow 2x^2-2x-24=0 \Rightarrow$

$x^2-x-12=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-3 \ \ \textit{valor no válido por no verificar la ecuación inicial.} \end{cases}$

Ejercicio 6.

– En el polinomio $2x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{5}{6}x+3m$, ¿qué valor ha de tener m para que $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ sea un factor? Después de calcular m factoriza el polinomio.

– Efectúa las operaciones y simplifica el resultado: $\frac{x-1}{x+3}\cdot\frac{x^2-1}{x^2-9}:\frac{x^2-2x+1}{x^2+6x+9}+\frac{x^2+6}{x^2-9}$

Si $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ *es un factor de* $p(x)=2x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{5}{6}x+3m \Rightarrow p(x)$ *es divisible por* $\left(x-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}+3m=0 \Rightarrow \frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{5}{12}+3m=0 \Rightarrow 3m=-\frac{1}{3} \Rightarrow m=-\frac{1}{9}$

Como sabemos que $p(x)$ *es divisible por* $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ *lo aprovechamos para factorizar:*

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \hline & 2 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{6} & \boxed{0} \end{array}$$

Entonces $p(x)=2x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{5}{6}x-\frac{1}{3}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2x^2-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right) \Rightarrow$ *buscamos las raíces de* $2x^2-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}=0 \Rightarrow 6x^2-x+2=0 \Rightarrow$ *que no tiene raíces reales y por tanto es primo.*

Y la factorización es $2x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{5}{6}x-\frac{1}{3}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2x^2-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)$

$$\frac{x-1}{x+3}\cdot\frac{x^2-1}{x^2-9}:\frac{x^2-2x+1}{x^2+6x+9}+\frac{x^2+6}{x^2-9}=\frac{(x-1)\left(x^2-1\right)\left(x^2+6x+9\right)}{(x+3)\left(x^2-9\right)\left(x^2-2x+1\right)}+\frac{x^2+6}{x^2-9}=$$

$$=\frac{(x-1)(x-1)(x+1)(x+3)^2}{(x+3)(x-3)(x+3)(x-1)^2}+\frac{x^2+6}{x^2-9}=\frac{(x+1)}{(x-3)}+\frac{x^2+6}{x^2-9}=\frac{(x+1)(x+3)}{(x-3)(x+3)}+\frac{\left(x^2+6\right)}{\left(x^2-9\right)}=$$

$$=\frac{x^2+4x+3+x^2+6}{(x-3)(x+3)}=\frac{2x^2+4x+9}{x^2-9}$$

Ejercicio 7.

Tres números a, b y c, distintos de cero, están en progresión aritmética. Si se aumenta a en 1 unidad o c en dos unidades, resultan progresiones geométricas. Encontrar esos números.

Si a, b, c *es una progresión aritmética se cumple* $c-b=b-a$

Si $a+1, b, c$ *es una progresión geométrica se cumple* $\frac{c}{b}=\frac{b}{a+1}$

Si $a, b, c+2$ *es una progresión geométrica se cumple* $\frac{c+2}{b}=\frac{b}{a}$

$$\begin{cases} c-b=b-a \\ \frac{c}{b}=\frac{b}{a+1} \\ \frac{c+2}{b}=\frac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c=2b \\ (a+1)c=b^2 \\ a(c+2)=b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+c}{2}=b \\ (a+1)c=b^2 \\ a(c+2)=b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a^2+c^2+2ac}{4}=b^2 \\ (a+1)c=b^2 \\ a(c+2)=b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+1)c=\frac{a^2+c^2+2ac}{4} \\ a(c+2)=(a+1)c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(a+1)c=a^2+c^2+2ac \\ ac+2a=ac+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(a+1)2a=a^2+(2a)^2+2a2a \\ c=2a \end{cases}$$

$$8a^2+8a=a^2+4a^2+4a^2 \Rightarrow a^2-8a=0 \Rightarrow a(a-8)=0 \Rightarrow \text{como } a\neq 0 \Rightarrow a=8$$

$c=16$, $b=\frac{8+16}{2}=12$; *entonces los números en progresión aritmética son* $8, 12, 16$