

UNIDAD 3: CINEMÁTICA. ESTUDIO DEL MOVIMIENTO

La cinemática es la parte de la física que estudia el movimiento, aunque no se ocupa de las causas que producen dicho movimiento.

EXPLORA TUS IDEAS.

1. *Dos alumnas que viajan sentadas en el tren:*

- a) *Están en reposo.*
- b) *Están en movimiento.*
- c) *Están en reposo o en movimiento dependiendo del observador.*

2. *El movimiento de un disco L.P. cuando el tocadiscos no está arrancando ni frenando:*

- a) *Es uniforme pero tiene aceleración.*
- b) *Es uniforme y, por tanto, no tiene aceleración.*
- c) *Es variado y, por tanto, tiene aceleración.*

3. *Un automóvil pasa por el km 120 de la carretera N-IV. A partir de aquí podemos saber.*

- a) *Que ha recorrido 120 km*
- b) *Que va a 120 km/h*
- c) *Su posición en ese instante.*

4. *El autobús Sevilla-Arahal pasa por el kilómetro 40 de la carretera a la media hora de salir de la estación. Elige la respuesta correcta:*

- a) *Ha llevado una media de 80 km/h.*
- b) *Ha llevado una velocidad en cada momento de 80 km/h.*
- c) *No se puede saber qué media han hecho por no tener datos suficientes.*

5. *Un ciclista, al iniciar una contrarreloj, alcanza los 40 km/h en 30 s. el tren AVE alcanza 250 km/h en 15 minutos. ¿Cuál de los dos movimientos tiene mayor aceleración?*

- a) *El ciclista*
- b) *El AVE*
- c) *No puede saberse con los datos que nos proporciona la cuestión.*

6. *Soltamos una bola, que cae hacia el suelo. Se trata de un movimiento*

- a) *Uniforme*
- b) *Acelerado*
- c) *Natural*

7. *Dejamos caer dos bolas, la primera de doble masa que la segunda, desde la misma altura. ¿Cuál llega antes al suelo?*

- a) *La primera, por ser más pesada.*
- b) *La segunda, por ser más ligera.*
- c) *Ambas llegan al mismo tiempo.*

1. EL MOVIMIENTO.

- *Vas en un coche que circula a 80 km/h, y hay una mosca posada en el salpicadero. ¿Está la mosca en movimiento?*
Razona.

- *La mesa en la que estás. ¿Está quieta o en movimiento?*

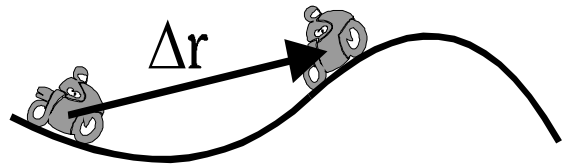
Un cuerpo se mueve cuando cambia de *posición* respecto de otro que tomamos como referencia (observador). La Tierra efectúa movimientos de rotación y traslación, entonces existen el día, la noche y las estaciones del año.

Los movimientos son siempre relativos pues para un observador en la Tierra, un edificio sería un objeto carente de movimiento, mientras que para un observador en el espacio, dicho edificio estará animado de un movimiento de rotación y de un movimiento de traslación. Por eso hablamos de movimiento relativo, dependiendo de la ubicación del sistema de referencia (centro de coordenadas).

Cuando un cuerpo se mueve ocupa sucesivamente distintas posiciones en el espacio, que unidas determinan una línea llamada *trayectoria*. El *desplazamiento* del cuerpo en dos instantes distintos es el segmento que une las posiciones correspondientes a ambos instantes.

Los movimientos se pueden clasificar de distintas maneras, siendo la más habitual hacerlo según las formas de las trayectorias que describen:

- Movimientos rectilíneos, con trayectoria recta.
- Movimientos circulares, con trayectoria circular.
- Movimientos curvilíneos, con trayectorias curvas.



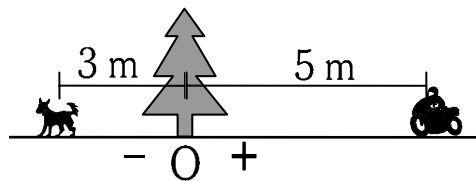
Para simplificar el estudio del movimiento de un cuerpo, trabajamos a partir de ahora con lo que conocemos como *punto material*: un ente abstracto con masa pero carente de dimensiones físicas. Al estudiar el movimiento de un automóvil, por ejemplo, consideraremos como si toda su masa estuviera concentrada en un punto (normalmente su centro).

Sistema de referencia. Posición (r) . Desplazamiento (Δr).

Para medir la posición (r) de un cuerpo, debemos hacerlo respecto a un sistema de referencia (o punto origen de coordenadas), un punto u objeto que consideraremos que está quieto. Lo indicaremos con la letra O.

Usaremos normalmente la letra r para la posición, pero a veces también se usan las letras e, s, x para referirse a la misma magnitud.

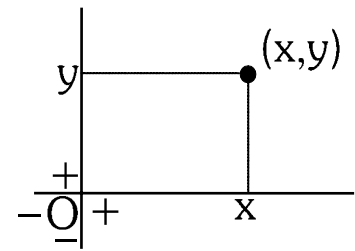
Si el movimiento es en una sola dirección, para medir la posición basta con indicar la distancia a la que se encuentra el móvil del punto O. Habrá que indicar a qué lado de O se encuentra. Para esto debemos escoger un criterio de signos (sentidos + y -). El desplazamiento (Δr) entre dos instantes 1 y 2 se calculará como $\Delta r = r_2 - r_1$



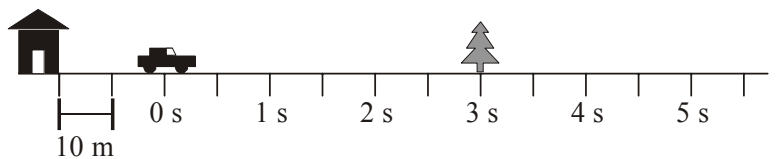
En el dibujo, tomando el árbol como punto de referencia, la posición del perro será r = - 3 m, y la de la moto r = 5 m

Si el movimiento es en dos dimensiones (una hormiga que se mueve por la pizarra), no basta con indicar una distancia, sino que habrá que dar dos coordenadas: por ej. la distancia hasta el lado izquierdo (coordenada x) y la distancia hasta el lado inferior (coordenada y). Cada una de estas coordenadas llevará el signo +/- , según el criterio de signos establecido. La posición se indicará con ambas coordenadas entre paréntesis (x , y).

El desplazamiento será el segmento o vector que une los puntos inicial y final. También se calcula restando las posiciones (final menos inicial). Para ello restamos las coordenadas x e y por separado.



Ejercicio 1.1. A partir del dibujo, que representa las diferentes posiciones seguidas por un vehículo.



a) Construye una tabla que refleje la posición en cada instante. Repite el ejercicio con tres sistemas de referencia distintos.

b) Calcula, en cada uno de los tres casos, el desplazamiento desde t = 0 s. hasta t = 3 s.

Ejercicio 1.2. Hemos medido el movimiento de cuatro móviles diferentes, obteniendo las siguientes tablas:

Calcula, para cada móvil.

a) ¿Qué desplazamiento tiene entre los instantes t = 1 s y t = 4 s ?

b) Dibuja una gráfica r / t (representa el tiempo en el eje x y la posición en el eje y).

c) ¿Existe una expresión (una fórmula) que relacione el tiempo transcurrido con la posición en cada instante? Escríbela en cada caso.

A	
t (s)	r (m)
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8

B	
t (s)	r (m)
0	2
1	4
2	6
3	8
4	10

C	
t (s)	r (m)
0	- 3
1	-2
2	-1
3	0
4	1

D	
t (s)	r (m)
0	20
1	16
2	12
3	8
4	4

Medida del movimiento: ecuación de movimiento.

Ya hemos visto que un movimiento viene marcado por un cambio de posición respecto a un sistema de referencia fijo. Por tanto, para estudiar el movimiento, necesitamos:

1º Escoger el sistema de referencia y el criterio de signos, que mantendremos durante todo el estudio.

2º Conocer la posición del móvil en cada instante.

- Si conocemos esta posición cada cierto intervalo de tiempo (cada s, por ejemplo) podremos construir una tabla de valores y una gráfica r/t , de la que podremos extraer gran cantidad de información.

- En cierto tipo de movimientos podemos conocer la posición para todo instante de tiempo, de manera que tengamos una expresión, una función, que nos permite calcular dónde está el móvil en cada instante. Bastará con sustituir el valor del tiempo.

Esta expresión se denomina *ecuación de movimiento*. En ella la posición, $r(t)$, está en función del tiempo.

Ejercicio 1.3. La ecuación del movimiento de una partícula es la siguiente: $r(t) = 10 + 4t + t^2$, donde t se mide en segundos y r en metros. Halla:

a) La posición después de los dos primeros segundos.

b) La posición en la que se encuentra el móvil a los 4 s de iniciado el movimiento.

c) El desplazamiento entre los instantes $t = 2$ s y $t = 4$ s.

2. VELOCIDAD MEDIA Y VELOCIDAD INSTANTÁNEA.

- Supongamos que dos muchachas, Ana y María, parten del mismo punto en una calle y caminan hacia la derecha durante el mismo tiempo. Al final del intervalo Ana recorrió una distancia mayor que María. De nuestra experiencia cotidiana podemos afirmar que Ana se movió con mayor rapidez que María. ¿Por qué afirmamos lo anterior?

- Dos muchachos, Juan y Carlos, caminan en la calle, partiendo del mismo punto. Ambos terminan su recorrido en el mismo punto. Sin embargo, Juan lo hace en 2 s, mientras que Fernando lo hace en 5 s. ¿Quién camina con mayor rapidez? ¿Por qué?

Los conceptos “deprisa” y “despacio” se estudian mediante una magnitud física que se denomina *velocidad*. La velocidad mide qué distancia recorre el móvil en la unidad de tiempo.

Si llamamos Δr a la distancia recorrida en el tiempo Δt , se define la **velocidad media** de un cuerpo como:

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Unidades de velocidad: En el S.I: m/s ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)

Otras: km/h , mph , nudos.

Ejercicio 2.1: Busca información y expresa las unidades km/h , mph , nudos, en unidades del S.I.

- Si en un paseo una persona desarrolla una velocidad media de 2 m/s. ¿Quiere esto decir que recorre siempre 2 m en cada segundo?

La velocidad de un móvil no tiene por qué ser constante todo el tiempo que dura el movimiento, sino que, en general, varía a cada momento. Por ello es necesario definir una nueva magnitud física: la velocidad instantánea.

Velocidad instantánea: (v) Es la velocidad real que tiene el móvil en un instante dado.

Matemáticamente se calcula mediante una operación denominada *límite*. Sin entrar en detalles, consiste en calcular la velocidad media en un intervalo de tiempo muy pequeño (infinitamente pequeño, en realidad), dejando que la velocidad apenas cambie. Con esto, la velocidad media calculada coincidirá con la velocidad en el instante estudiado.

$$v = \lim \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Si un móvil mantiene su velocidad constante, la velocidad media coincidirá con la velocidad en cada instante. Ese movimiento se denomina movimiento uniforme.

Nota: magnitudes escalares y vectoriales:

A la hora de medir algunas magnitudes físicas, basta con indicar la cantidad y las unidades correspondientes (una manzana tiene 100 g de masa, han pasado 5 minutos, hoy estamos a 22 °C de temperatura...). Se llaman **magnitudes escalares**. Son escalares: masa, volumen, densidad, tiempo, temperatura, energía...

Otras, sin embargo, necesitan además que indiquemos la dirección y sentido en que van, y a veces el punto de aplicación (por ejemplo, no es lo mismo aplicar una fuerza en una dirección u otra, o hacerlo en sentido contrario, o aplicarla en puntos diferentes del cuerpo). Son estas las **magnitudes vectoriales**. Son vectoriales: fuerza, velocidad, aceleración, posición, desplazamiento...

Una magnitud vectorial se representa mediante un vector: una flecha que contiene toda la información.

- **Módulo:** Valor de la magnitud (cantidad + unidades).

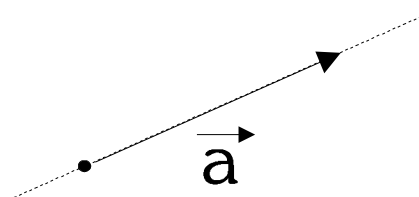
Se representa por la longitud de la flecha.

- **Dirección:** Línea recta en la que está el vector.

Se llama recta soporte.

- **Sentido:** Lo marca la flecha (extremo del vector)

- **Punto de aplicación** (origen del vector)



La velocidad es una magnitud vectorial. Por ejemplo, a la hora de indicar la velocidad de un automóvil que está cerca de Arahal, no basta con decir que va a 80 km/h (módulo). Además hay que indicar por qué carretera va (dirección) y si va hacia Arahal o si se aleja (sentido).

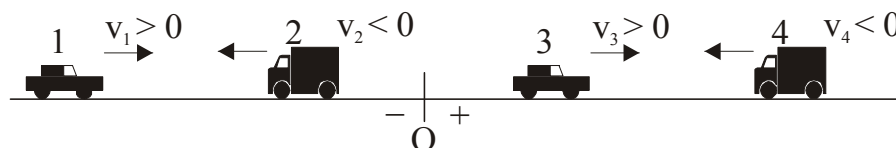
En el estudio que haremos en este curso, los movimientos serán rectilíneos (trayectoria recta).

- La dirección del movimiento será recta, coincidente con la trayectoria.

- El sentido lo indicaremos con un signo (+ ó -), según el sistema de referencia que hayamos escogido.

Si se mueve hacia el sentido positivo: signo +.

Si se mueve hacia el sentido negativo: signo -.

**Algunas velocidades típicas (en módulo):**

Hombre caminando	1,7 m/s	Corredor a pie	9 m/s
Bala de fusil	400 m/s	Sonido en aire a 15 °C	340 m/s
Rotación terrestre (ecuador)	463 m/s	Traslación terrestre	30000 m/s
Luz en el vacío	$3 \cdot 10^8$ m/s	Avión en vuelo	300 m/s

Ejercicio 2.2. Un automóvil viaja a 130 km/h. ¿A qué velocidad viaja en m/s y en millas /hora?

(Dato: 1 milla terrestre equivale a 1,609 km)

Ejercicio 2.3. Juan mide el movimiento de una bicicleta y dice que se mueve a - 10 m/s.

a) ¿Es esto posible? ¿Qué significa el signo?

b) María dice que la misma bicicleta se mueve a 10 m/s. ¿Es posible? Razona.

c) Sonia dice que se mueve a 36 km/h. ¿Es posible? Razona.

d) Andrés dice que se mueve a - 15 m/s. Suponiendo que la medida de Juan era correcta. ¿Puede ser correcta la de Andrés? Razona.

Ejercicio 2.4. Un barco que circula con velocidad constante de 4 m/s pasa cerca de un acantilado donde se encuentra un pescador. En la cubierta del barco un niño circula con una pequeña bicicleta en la misma dirección y sentido en que se mueve el barco. Su velocímetro marca 18 km/h. Su movimiento lo observan el pescador y un pasajero del barco que se encuentra sentado dentro del barco. A la pregunta de ¿Qué velocidad lleva la bicicleta? Indica la respuesta que dará cada uno de los personajes del problema. ¿Cuál será la velocidad verdadera?

3. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU).

El movimiento rectilíneo uniforme (MRU) es el movimiento que describe un cuerpo cuya trayectoria es una recta a velocidad constante o, lo que es lo mismo, con aceleración nula. Este movimiento es tan sencillo que es difícil (prácticamente imposible) observarlo en la naturaleza.

De la definición de velocidad media, deducimos la ecuación del movimiento, $r(t)$, que rige el MRU:

$$v_m = v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r - r_0}{t - t_0} \rightarrow r - r_0 = v \cdot (t - t_0) \rightarrow r = r_0 + v \cdot (t - t_0)$$

Normalmente consideraremos que el tiempo inicial es cero ($t_0 = 0$). Con lo cual, la ecuación de movimiento queda

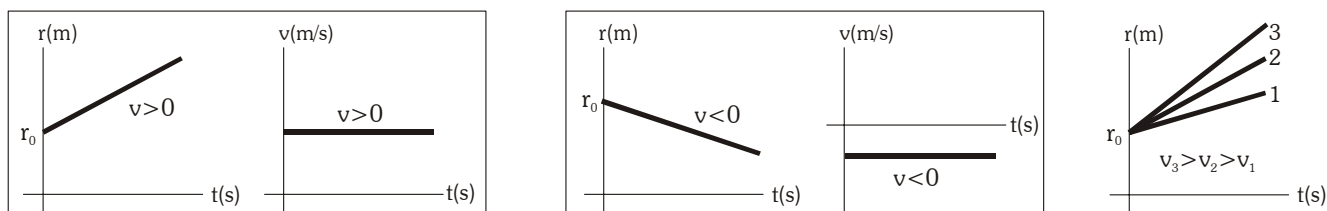
$$r(t) = r_0 + v \cdot t$$

donde $r(t)$ es la posición del móvil en el instante t , r_0 es la posición en el instante inicial (posición inicial) y v representa la velocidad.

Ya sabemos que existen otras letras para representar la posición (s , e , x , y ...). Normalmente, cuando el movimiento es horizontal se usa $x(t)$, y cuando es vertical, $y(t)$.

Gráficas del movimiento uniforme.

Teniendo en cuenta las características del movimiento uniforme (velocidad constante, se recorre la misma distancia en el mismo tiempo) y de la ecuación de movimiento resultante, es fácil saber qué forma tendrán las gráficas posición-tiempo y velocidad-tiempo.



Ejercicio 3.1. Un automóvil viaja a una velocidad de 90 km/h. Representa gráficamente $v(t)$ y $r(t)$ a partir del instante en que pasa por el punto ubicado en el observador.

Ejercicio 3.2. Las posiciones de un móvil respecto del observador en función del tiempo son las siguientes:

- Representa gráficamente la tabla anterior.
- Construye un gráfico de $v(t)$ y calcula la distancia recorrida.
- Determina la velocidad del móvil.

t (s)	0	10	20	30	40	50
x (m)	30	330	630	930	1230	1530

Ejercicio 3.3. La ecuación del movimiento de una partícula es $r = 25t$ (m). Otra partícula lleva una velocidad triple y parte de un punto situado 30 m más atrás y 4 segundos más tarde. ¿Cuál será la ecuación del movimiento de esta partícula?

Ejercicio 3.4. Laura dice que la ecuación del movimiento de un móvil es $r = 30 + 4t$ (S.I), en cambio Miguel asegura que la ecuación del movimiento es $r = 80 - 4t$ (S.I). ¿Es posible que ambos tengan razón? Explica la respuesta.

Ejercicio 3.5. Un corredor lleva una velocidad de 5 m/s. Si comenzamos a contar el tiempo cuando se encuentra a 30 m de una señal que tomamos como punto de referencia. a) Determina la ecuación del movimiento b) Halla el tiempo que tardará en llegar a la meta situada a 250 m del punto de referencia.

Ejercicio 3.6. Un automóvil se acerca a 45 km/h a un semáforo (que está en verde) que se encuentra 100 m más adelante. Suponiendo que no modifica su velocidad:

- Escribe la ecuación de movimiento del automóvil, en unidades del S.I.
- Calcula el tiempo que tarda en pasar junto al semáforo.
- ¿En qué posición se encontrará a los 30 s de que empezáramos a medir el movimiento?

Ejercicio 3.7. Se observa la explosión de un cohete de unos fuegos artificiales desde un punto situado a 1400 m del lugar de la explosión. Determina el tiempo que tarda en llegar al observador :

- La luz del fogonazo.
- El ruido de la explosión. (Busca los datos que necesites).

4. ACELERACIÓN. (a)

La aceleración es una magnitud que nos indica cómo cambia la velocidad respecto al tiempo en un movimiento. Emplearemos la palabra *aceleración* tanto para indicar un aumento como una disminución de velocidad. Es decir, el frenado también es un tipo de aceleración.

Cálculo de la aceleración: los dos factores que influyen a la hora de calcular la aceleración son el cambio de velocidad que experimenta el móvil y el tiempo que emplea en dicho cambio. Así, la expresión será.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Esto es lo que se conoce como **aceleración media**, ya que el móvil no tiene por qué acelerar de manera uniforme durante todo el intervalo. La aceleración en cada instante (**aceleración instantánea**) puede variar. Sin embargo, en este curso, consideraremos únicamente movimientos acelerados en los que la aceleración es constante (ambas coinciden)

Unidades de aceleración: $\frac{m/s}{s} = \frac{m}{s^2} = m \cdot s^{-2}$ (debe entenderse "metros por segundo en cada segundo")

Ejercicio 4.1: Un móvil lleva una aceleración de 3 m/s^2 . ¿Qué significa ese número?

Ejercicio 4.2: a) Un automóvil cambia su velocidad de 31 km/h a 49 km/h en un intervalo de 3 s. ¿Qué aceleración media experimenta?
b) Repite el ejercicio considerando el caso inverso, que pasa de 49 a 31 km/h en el mismo tiempo.

Ejercicio 4.3: Un ciclista, al iniciar una contrarreloj, alcanza los 40 km/h en 30 s. El tren AVE alcanza 250 km/h en 15 minutos. Sabiendo que ambos movimientos parten del reposo ¿Cuál de los dos movimientos tiene mayor aceleración?

Algunas aceleraciones (aproximadas):

Tren que arranca	$< 0,5 \text{ m/s}^2$	Avión despegando	12 m/s^2
Hombre que comienza a correr	$< 3 \text{ m/s}^2$	Cohete espacial	60 m/s^2
Coche que arranca	$< 5 \text{ m/s}^2$	Balón de fútbol al golpearlo	100 m/s^2
Coche que frena	$< 8 \text{ m/s}^2$	Pelota de tenis al golpearla	1000 m/s^2
Caída libre en la Tierra	$9,8 \text{ m/s}^2$	Pelota de golf al golpearla	10000 m/s^2

El signo de la aceleración y la velocidad.

Cuando la aceleración es positiva ¿el móvil va cada vez más rápido o más lento? ¿Y cuando a es negativa? Vamos a estudiarlo con un ejemplo. Supongamos cuatro movimientos. La única diferencia entre ellos será el signo de la velocidad inicial y de la aceleración. Rellena las cuatro tablas siguientes. ¿A qué conclusión llegas?

A) $v_0 = 10 \text{ m/s}$; $a = 2 \text{ m/s}^2$						
t (s)	0	1	2	3	4	5
v						

B) $v_0 = 10 \text{ m/s}$; $a = -2 \text{ m/s}^2$						
t (s)	0	1	2	3	4	5
v						

C) $v_0 = -10 \text{ m/s}$; $a = 2 \text{ m/s}^2$						
t (s)	0	1	2	3	4	5
v						

D) $v_0 = -10 \text{ m/s}$; $a = -2 \text{ m/s}^2$						
t (s)	0	1	2	3	4	5
v						

Ejercicio 4.4: Dibuja cualitativamente con vectores la velocidad y la aceleración de cada uno de los móviles siguientes:

- a) Un coche que acelera.
- b) Un coche que frena.
- c) Una piedra que se lanza verticalmente hacia arriba en el momento que abandona la mano.
- d) La piedra anterior en el punto más alto de su trayectoria.
- e) Dicha piedra cuando está cayendo.

Ejercicio 4.5: Conocida la tabla de las velocidades de una partícula en función del tiempo:

Velocidad (m/s)	3	6	9	12	15	18	21
Tiempo (s)	1	2	3	4	5	6	7

- a) Halla la aceleración media entre los instantes:
 - 1) $t = 1 \text{ s}$ y $t = 4 \text{ s}$.
 - 2) $t = 3 \text{ s}$ y $t = 7 \text{ s}$
 - 3) $t = 2 \text{ s}$ y $t = 5 \text{ s}$.
 ¿Sacas alguna conclusión?
- b) Representa las gráficas v/t y a/t .

5. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO.

El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA) es el que describe un cuerpo cuya trayectoria es una línea recta y en el que el vector aceleración es constante.

- Teniendo en cuenta que la aceleración es constante. ¿Qué podemos decir acerca de la velocidad?

Las ecuaciones que rigen el MRUA son (suponiendo que $t_0 = 0$):

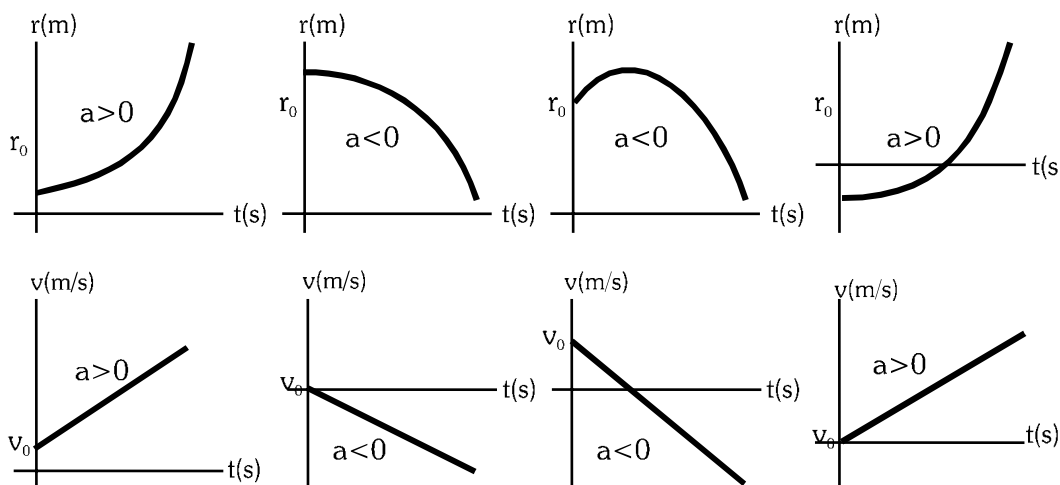
Ecuación del movimiento: $r = r_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$

Ecuación de la velocidad: $v = v_0 + a \cdot t$

Donde r es la posición del móvil al tiempo t , v es la velocidad en el instante t , r_0 es la posición a tiempo cero (posición inicial), v_0 representa la velocidad inicial y a la aceleración.

Gráficas del movimiento uniformemente acelerado:

Observando las ecuaciones de movimiento y velocidad, vemos que la gráfica x/t corresponde a una parábola, y la gráfica v/t es una línea recta. Ambas gráficas están relacionadas. Analizamos algunos ejemplos:



Resolución de problemas de cinemática:

Para estudiar un movimiento y resolver un problema se han de seguir los siguientes pasos:

1. Establecer el sistema de referencia, es decir, el origen y el eje a lo largo del cual tiene lugar el movimiento
2. El valor y signo de la aceleración
3. El valor y el signo de la velocidad inicial
4. La posición inicial del móvil
5. Escribir las ecuaciones del movimiento
6. A partir de los datos, despejar las incógnitas

Ejercicio 5.1. Un automóvil que circula por una ruta a 100 km/h acelera hasta 130 km/h en 10 segundos. ¿Cuánto vale la aceleración, en unidades del S.I.?

Ejercicio 5.2: Una moto circula a 72 km/h y frena con una aceleración de $5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Representa en un esquema los datos del problema, razona qué tipo de movimiento es y calcula:

- a) el tiempo que tarda en pararse.
- b) distancia recorrida

Ejercicio 5.3: Un automóvil parte del reposo desde el punto donde se encuentra el observador con una aceleración de 1.5 m/s^2 . Escribe las ecuaciones de este movimiento y representa gráficamente $v(t)$ y $x(t)$ para los primeros 4 segundos.

6. MOVIMIENTOS DE CAÍDA LIBRE

Un tipo especial de movimiento uniformemente acelerado es el de caída libre, en el que la aceleración que sufre el cuerpo es la de la gravedad terrestre. Aunque la atracción gravitatoria disminuya con la distancia (ya lo estudiaremos en otra unidad), para una altura inferior a 30 km sobre la superficie terrestre, podemos considerar que dicha atracción es constante.

Si en nuestro estudio del movimiento despreciamos el efecto del rozamiento del aire (cosa que no siempre puede hacerse) un movimiento sometido únicamente a la acción de la gravedad es un movimiento uniformemente acelerado (MUA), y su aceleración, constante, tiene el valor $a = g = 9,8 \text{ m/s}^2$. (En los problemas podremos redondear este valor a $g \sim 10 \text{ m/s}^2$)

El signo de la aceleración nos lo dirá el sistema de referencia que hayamos escogido para el problema, y no el hecho de que el cuerpo suba o baje.

Influencia de la masa y del rozamiento.

A primera vista, nos parece que los cuerpos más pesados caen más rápido que los más ligeros. Un martillo cae antes que una pluma, o una bola de hierro antes que una hoja de papel. Sin embargo, basta con hacer una bola con la hoja para observar que el resultado cambia. No podemos distinguir cuál llega antes, la diferencia es inapreciable. ¿Qué está ocurriendo entonces, si la masa de la bola de papel es la misma que la de la hoja sin arrugar?

Hay un factor que no hemos tenido en cuenta. ¿Qué diferencia hay entre la caída de la hoja y la de la bola de papel? La resistencia que ofrece el aire. A mayor superficie de contacto, mayor resistencia. Si no hubiera atmósfera (como ocurre en la Luna, por ejemplo) la resistencia sería nula, y una hoja de papel, o una pluma, caerían al mismo ritmo que un martillo.

Sin embargo, cuando hay rozamiento con el aire, la cosa se complica (existe toda una rama de la física, la *dinámica de fluidos*, que estudia esto). En el ritmo de caída influyen tanto la forma como la masa del cuerpo. Además, el rozamiento con el aire aumenta con la velocidad, y el cuerpo cada vez acelera menos. Si el trayecto es suficientemente largo, llega un momento en el que el cuerpo cae con velocidad constante (llamada *velocidad terminal*).

En los problemas que hagamos de caída libre, despreciaremos siempre el rozamiento con el aire.



Fotografía estroboscópica obtenida a 60 imágenes por segundo.

(Paul A. Tipler: *Física para la Ciencia y la Tecnología*. Ed. Reverté, 1999)

Ejercicio 6.1. Lanzamos hacia arriba desde el suelo un objeto con una velocidad de 20 m/s. Despreciando el rozamiento con el aire, calcula:

- Ecuaciones de movimiento.
- Tiempo que tarda en alcanzar su altura máxima.
- Altura máxima que alcanza.
- Velocidad del móvil en el momento en el que vuelve a chocar con el suelo.

Ejercicio 6.2. Desde el borde de una terraza de 45 m de altura se deja caer un objeto hasta el suelo. Calcula, despreciando el rozamiento con el aire:

- ¿Cuánto tarda en llegar al suelo y con que velocidad llega?
- ¿A qué altura se encuentra y cuál es su velocidad a los 2 segundos?

Ejercicio 6.2. Desde la misma terraza del ejercicio anterior.

- ¿Qué altura máxima alcanzaría si se lanza desde la terraza hacia arriba con una velocidad de 25 m/s?
- ¿Cuánto tardaría en llegar al suelo si se lanza a 10 m/s hacia abajo?

7. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON DOS MÓVILES.

Si en un problema aparecen dos o más móviles (por ejemplo, dos ciclistas en una carrera en la que uno alcanza al otro), debemos seguir los siguientes pasos:

- Establecer **un único sistema de referencia y criterio de signos**, que usaremos para todos los movimientos del problema.
- Esquema con los datos del problema.
- Ecuaciones de movimiento de cada móvil, indicando con subíndices a qué movimiento pertenece cada una.
- Resolver el problema, en función de qué nos pidan.

- Normalmente estos problemas se plantean para calcular en qué instante y en qué punto se encuentran dos móviles. ¿Qué condición se cumple en el momento en que se encuentran?

Ejercicio 7.1: Dos ciclistas circulan por un tramo recto de una carretera en sentido contrario el uno del otro. El primero lleva una velocidad de 36 km/h y el segundo de 45 km/h. Inicialmente están separados 1 km. Calcula cuánto tiempo tardan en cruzarse y dónde se cruzan.

Ejercicio 7.2: En una carrera de persecución, un ciclista parte de la salida con un movimiento que consideraremos uniforme y cuya velocidad es 10 m/s. Medio minuto más tarde parte otro ciclista que lleva una velocidad constante de 12 m/s. ¿Cuánto tiempo tarda el segundo ciclista en alcanzar al primero?. ¿Qué distancia han recorrido ambos?.

CUESTIONES Y PROBLEMAS

CUESTIONES:

C.1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

- Un móvil, si circula a 200 km/h lleva una gran aceleración.
- Cuando un cuerpo cae libremente aumenta constantemente su velocidad

C.2. ¿Cuál es la velocidad de un objeto en el momento en que cambia el sentido del movimiento?

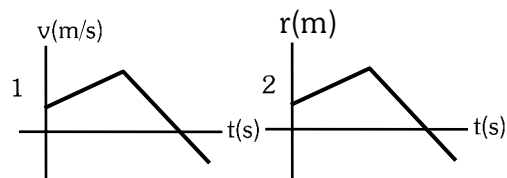
C.3. Si en una gráfica velocidad-tiempo aparece una recta, ¿cómo es el movimiento que corresponde a dicha recta?

C.4. Cuando Pablo comienza a mirar, María estaba a 100 m de él acercándose con una velocidad de 2 m/s. Si tomamos como origen del sistema de referencia la posición de Pablo, ¿cuál será la ecuación del movimiento de María?

C.5. A continuación tienes dos gráficas:

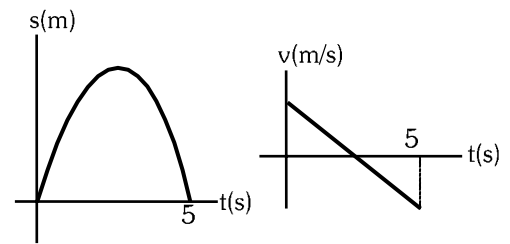
- ¿Corresponden al mismo movimiento, o son dos movimientos distintos? Razona.

- Para cada gráfica, ¿existe algún momento en el que el móvil de la vuelta y marche en sentido contrario? ¿Existe algún instante en el que



el móvil pase por el punto de referencia? Razona.

- C.6.** Dadas estas dos gráficas. ¿Pueden corresponder al mismo movimiento? Si es así, explica un movimiento que se corresponda con ambas gráficas.



PROBLEMAS

- P.1.** La ecuación del movimiento de una partícula es: $x = 3 + 2t$, donde t viene dado en segundos y x en metros.

a) Completa la tabla de valores :

Posición (m)				13		21
Tiempo (s)	0	2	4		8	

- b) Representa gráficamente $x-t$.
 c) Halla la velocidad media entre los instantes: $t = 2$ s y $t = 5$ s ; $t = 1$ s y $t = 6$ s , $t = 3$ s y $t = 8$ s.
 e) ¿De qué tipo de movimiento se trata? ¿Qué significan los coeficientes 3 y 2 de la ecuación?.

- P.2.** La ecuación del movimiento de una partícula es: $x = 40 - 2t$ (S.I)

- a) Haz su representación gráfica.
 b) Halla la posición para $t = 10$ s. Y el instante para el que la posición es de 30 m.
 c) Calcula la velocidad media entre los instantes: $t = 0$ s y $t = 5$ s ; $t = 3$ s y $t = 6$ s ; $t = 2$ s y $t = 11$ s.
 d) Describe cómo es el movimiento.

- P.3.** Pepe coge el ascensor en el sexto piso de un edificio, y se baja en el 2º sótano, donde tiene aparcado el coche. El ascensor ha ido a velocidad constante de 2 m/s. Sabiendo que entre una planta y otra del edificio hay 5 m, calcula:

- a) Ecuación de movimiento del ascensor.
 b) Tiempo que tarda en el recorrido total.
 c) Tiempo que tarda en pasar por la planta baja.
 d) ¿Por qué planta va a los 13 s?
 e) Dibuja la gráfica r/t y la gráfica v/t de este movimiento.

- P.4.** En un M.R.U. se conoce la posición de la partícula para dos instantes distintos; concretamente, $r = 6$ m para $t = 2$ s y $r = 18$ m para $t = 4$ s.

- a) Halla la velocidad y la ecuación del movimiento.
 b) Determina la nueva ecuación del movimiento si se toma el origen de coordenadas en el punto $r = 8$ m.

- P.5.** Un móvil, al cabo de 30 s de estar moviéndose con una aceleración de $0,5 \text{ m/s}^2$, tiene una velocidad de 18 m/s. ¿Con qué velocidad se movía antes de acelerar?

- P.6.** Un móvil que se desplaza a 72 km/h aplica los frenos durante 10 s. Si al final de la frenada tiene una rapidez de 5 km/h, calcula la aceleración.

- P.7.** Observa la siguiente ecuación: $x = 3 + 2t + 4t^2$ (S.I.) ¿Qué tipo de movimiento representa? ¿Cuál es la velocidad inicial del móvil? ¿Y la aceleración?

- P.8.** Se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo con velocidad inicial de 20 m/s. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar al punto más alto?. ¿Qué altura máxima alcanza? ¿Con qué velocidad llegará al punto de partida?.

- P.9.** Un coche que circula a 90 km/h ve un obstáculo en la carretera frena uniformemente, logrando detenerse a los 4,5 segundos desde que se inicia la frenada. Halla la aceleración del coche y el espacio recorrido desde que empieza a frenar hasta que se para.

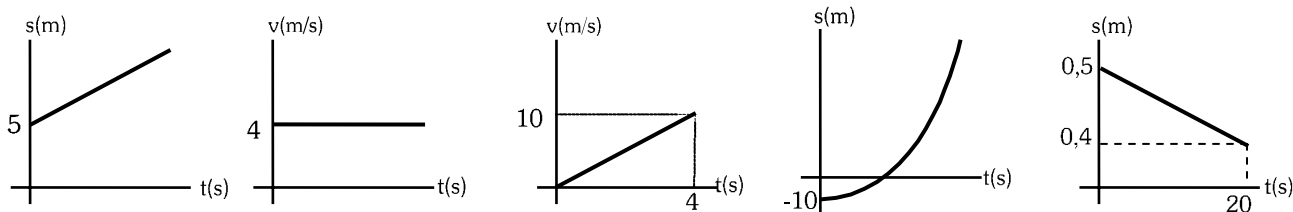
- P.10.** Un coche que circula a una velocidad constante de 36 km/h se salta un semáforo. En ese momento un motorista, que se encontraba en reposo en el semáforo, inicia su persecución con un movimiento uniformemente acelerado con una aceleración de 5 m/s^2 . Determina el instante en que alcanzará al coche y la distancia recorrida por el motorista.

- P.11.** Dos hermanos realizan una carrera con bicicletas. El hermano mayor le da 200 m de ventaja al pequeño. Los dos ciclistas salen a la vez, de modo que llevan movimientos uniformes; el primero con velocidad de 30 km/h y el segundo con 25 km/h. Si la meta se encuentra a 1 km del punto de salida del hermano mayor, ¿Quién ganará la carrera?
- P.12.** Dos amigos que viven en dos localidades distantes 12 km salen a las 16,30 horas de sus respectivas localidades ; uno de ellos camina con velocidad de 5 km/h y el otro lo hace a 6 km/h. ¿A qué hora se encontrarán y qué distancia habrá recorrido cada uno?
- P.13.** De lo alto de una torre de 30 m de longitud se suelta una pelota. Al mismo tiempo se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con velocidad de 15 m/s. Determina el instante en el que los dos objetos se encuentran a la misma altura, así como el espacio recorrido por cada uno de ellos.
- P.14.** Un coche que circula con velocidad constante de 72 km/h pasa por una señal de tráfico a las 10 horas. Medio minuto más tarde pasa por ese punto otro coche, en la misma dirección y sentido que el anterior, con velocidad de 90 km/h. Calcula el tiempo que tardará en alcanzar al primer coche, así como la posición del punto de encuentro.
- P.15.** Un coche que circula a una velocidad de 30 m/s frena logrando detenerse después de recorrer 200 m desde el inicio del frenazo. Halla la aceleración y el tiempo que tarda en pararse.
- P.16.** En una trayectoria rectilínea horizontal en la que el criterio de signos es que la posición es positiva a la derecha del origen de coordenadas, determina la ecuación del movimiento del móvil en los siguientes casos:
 a) Parte de un punto situado en un punto de la trayectoria a 30 m a la izquierda del origen de coordenadas y alejándose de él a una velocidad de 4 m/s.
 b) Parte del origen recorriendo uniformemente 54 m en 12 segundos hacia la derecha.
 c) Sale desde un punto situado a 40 m a la derecha origen acercándose a él a una velocidad de 18 km/h.
- P.17.** Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 60 m/s.
 a) Elige un sistema de referencia y completa la tabla:

Tiempo (s)	1	2	3	4	5	6
Posición (m)						

- b) Halla la altura máxima que alcanzará la partícula.
 c) Halla la posición y el espacio recorrido para $t = 10$ s.

- P.18.** Una pelota que ha caído desde el tejado lleva una velocidad de 15 m/s al pasar por tu ventana, que se encuentra a una altura del suelo de 14 m. Halla la velocidad con que llegará la pelota al suelo.
- P.19.** Una nube se encuentra a 500 m de altura. ¿Cuánto tiempo tardarían las gotas de lluvia de esa nube en llegar al suelo, sin tener en cuenta la resistencia del aire? ¿Cuál sería su velocidad en el momento de llegar al suelo?
- P.20.** Observa las siguientes gráficas e indica a qué tipo de movimiento corresponde cada una de ellas. Plantea las ecuaciones de movimiento de cada uno, incluyendo los datos que puedas extraer de las gráficas.



SOLUCIONES NUMÉRICAS A LOS PROBLEMAS :**P.1. a)**

Posición (m)	3	7	11	13	19	21
Tiempo (s)	0	2	4	5	8	9

c) 2 m/s en todos los intervalos. d) M.R.U. , Los coeficientes significan posición inicial y velocidad, respectivamente.

P.2. b) $r=20 \text{ m}$; $t=5 \text{ s}$; c) - 2 m/s en todos os intervalos ; d) M.R.U**P.3.** $r = 30 - 2 t$; con S.R. en suelo y + hacia arriba.; b) 20 s. ; c) 15 s ; d) Entre la 1ª planta y la planta baja.**P.4.** a) $v = 6 \text{ m/s}$; $r_0 = - 6 \text{ m}$; $r = - 6 + 6 t \text{ (m)}$; b) $r = - 14 + 6 t \text{ (m)}$ **P.5.** 3 m/s**P.6.** $a = - 1,861 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, considerando positivo el sentido de la velocidad**P.7.** M.R.U.A; $v_0 = 2 \cdot\text{s}^{-1}$; $a = 8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ **P.8** 2 s ; 20 m ; - 20 m/s .**P.9.** $a = - 5,56 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; $\Delta r = 56,2 \text{ m}$ **P.10.** Tarda 4 s. en alcanzarlo, y recorre 40 m.**P.11.** El mayor, tarda 360 s. en llegar. El menor tarda 402 s.**P.12.** Se encuentran a las 17:35 h; el 1º recorre 5,454 km y el 2º 6,536 km**P.13..** tardan 2 s en encontrarse ; la pelota recorre 20 m, la piedra recorre 10 m**P.14.** Tarda 150 s en alcanzarlo (desde el instante inicial), el punto de encuentro está a 3000 m de la señal de tráfico**P.15.** $t = 13,33 \text{ s.}$; $a = 2,25 \text{ m/s}^2$ **P.16.** a) $r = - 30 - 4 t \text{ (m)}$ b) $r = 4,5 t \text{ (m)}$ c) $r = 40 - 5 t \text{ (m)}$ **P.17. a)**

Tiempo (s)	1	2	3	4	5	6
Posición (m)	55	100	135	160	175	180

b). 180 m desde el suelo

c) r depende del sistema de referencia, el desplazamiento es de 100 m. en realidad recorre 180 m hacia arriba y 80 m hacia abajo

P.18. (tarda 0,75 s. en llegar, v es de 22,5 m/s)**P.19.** ($t = 10 \text{ s.}$; $v = 100 \text{ m/s}$)**P.20.**MRU
 $r = 5 + v t$ MRU
 $r = r_0 + 4 t$ MRUA
 $v = 2,5 t$
 $r = r_0 + 1,25 t^2$ MRUA
 $r = - 10 + \frac{1}{2} a t^2$
 $v = a t$ MRU
 $r = 0,5 - 0,005 t$