

EJERCICIOS PROPUESTOS

2.1 Calcula el valor numérico pedido para las siguientes expresiones algebraicas.

a) $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 4}; x = 2$

b) $g(a, b) = 3a^2 + 5ab; a = -1, b = 4$

c) $h(x, y) = x(y - 3) + xy^2; x = 2, y = 0$

a) $f(2) = \frac{3 \cdot 2^2}{2^2 + 4} = \frac{3 \cdot 4}{4 + 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

b) $g(-1, 4) = 3 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) \cdot 4 = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 4 = 3 - 20 = -17$

c) $h(2, 0) = 2 \cdot (0 - 3) + 2 \cdot 0^2 = 2 \cdot (-3) + 0 = -6$

2.2 Identifica los coeficientes y los grados parciales y total de los siguientes monomios.

a) $-3x^3yz^2$

b) ab^2c^4

a) Monomio: $-3x^3yz^2$

Coeficiente: -3

Grado respecto a x : 3

Grado respecto a y : 1

Grado respecto a z : 2

Grado total: 6

b) Monomio: ab^2c^4

Coeficiente: 1

Grado respecto a a : 1

Grado respecto a b : 2

Grado respecto a c : 4

Grado total: 7

c) $\frac{4x^2yz^2}{5}$

d) $-\frac{1}{2}p^4q^2r$

c) Monomio: $\frac{4x^2yz^2}{5}$

Coeficiente: $\frac{4}{5}$

Grado respecto a x : 2

Grado respecto a y : 1

Grado respecto a z : 2

Grado total: 5

d) Monomio: $-\frac{1}{2}p^4q^2r$

Coeficiente: $-\frac{1}{2}$

Grado respecto a p : 4

Grado respecto a q : 2

Grado respecto a r : 1

Grado total: 7

2.3 Escribe las expresiones algebraicas que corresponden al volumen de un cono y de una esfera.

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

2.4 Realiza las siguientes operaciones.

a) $(x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x) + (4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x)$

b) $(-2x^3 + x - 6) - (x^3 + 3x^2 + 2x - 7)$

a) $(x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x) + (4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x) = 5x^4 + x^3 - 7x$

b) $(-2x^3 + x - 6) - (x^3 + 3x^2 + 2x - 7) = -2x^3 + x - 6 - x^3 - 3x^2 - 2x + 7 = -3x^3 - 3x^2 - x + 1$

2.5 Efectúa estos productos de polinomios.

a) $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x - 2) \cdot (x^3 + 3)$

b) $(-5x^3 - 6x + 3) \cdot (x^2 - 2x + 1)$

c) $2x \cdot (5x^2 + 2x - 1) \cdot (-x^3 + 4)$

a) $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x - 2) \cdot (x^3 + 3) = x^7 - 2x^6 + 3x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 3x - 6 = x^7 - 2x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 3x - 6$

b) $(-5x^3 - 6x + 3) \cdot (x^2 - 2x + 1) = -5x^5 + 10x^4 - 5x^3 - 6x^3 + 12x^2 - 6x + 3x^2 - 6x + 3 = -5x^5 + 10x^4 - 11x^3 + 15x^2 - 12x + 3$

c) $2x \cdot (5x^2 + 2x - 1) \cdot (-x^3 + 4) = (10x^3 + 4x^2 - 2x) \cdot (-x^3 + 4) = -10x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 40x^3 + 16x^2 - 8x$

2.6 Calcula el cociente y el resto de la división $(2x^5 + 7x^4 + x^2 - 4x + 1) : (x^2 + 3x - 2)$ y comprueba que $D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x)$.

$$\begin{array}{r} 2x^5 + 7x^4 \quad + x^2 - 4x + 1 \quad | \quad x^2 + 3x - 2 \\ \underline{-2x^5 - 6x^4 + 4x^3} \quad \quad \quad 2x^3 + x^2 + x \\ x^4 + 4x^3 \\ \underline{-x^4 - 3x^3 + 2x^2} \\ x^3 + 3x^2 \\ \underline{-x^3 - 3x^2 + 2x} \\ -2x + 1 \end{array}$$

Cociente: $2x^3 + x^2 + x$

Resto: $-2x + 1$

$d(x) \cdot C(x) + R(x) = (x^2 + 3x - 2) \cdot (2x^3 + x^2 + x) + (-2x + 1) = 2x^5 + x^4 + x^3 + 6x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x^3 - 2x^2 - 2x - 2x + 1 = 2x^5 + 7x^4 + x^3 - 4x^3 - 2x^2 - 2x - 2x + 1 = 2x^5 + 7x^4 + x^2 - 4x + 1 = D(x)$

2.7 Dados los polinomios $P(x) = (3x^3 + 3x^2 - 1)$, $Q(x) = (2x^4 - 5x^2)$ y $R(x) = (-x^3 + x - 2)$, efectúa estas operaciones.

a) $P(x) - Q(x) + R(x)$

c) $[Q(x)]^3$

b) $P(x) + Q(x) \cdot R(x)$

d) $Q(x) : R(x)$

a) $P(x) - Q(x) + R(x) = 3x^3 + 3x^2 - 1 - 2x^4 + 5x^2 - x^3 + x - 2 = -2x^4 + 2x^3 + 8x^2 + x - 3$

b) $P(x) + Q(x) \cdot R(x) = 3x^3 + 3x^2 - 1 - 2x^7 + 2x^5 - 4x^4 + 5x^5 - 5x^3 + 10x^2 = -2x^7 + 7x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 13x^2 - 1$

c) $[Q(x)]^3 = (2x^4 - 5x^2) \cdot (2x^4 - 5x^2) \cdot (2x^4 - 5x^2) = (4x^8 - 10x^6 - 10x^6 + 25x^4) \cdot (2x^4 - 5x^2) = (4x^8 - 20x^6 + 25x^4) \cdot (2x^4 - 5x^2) = 8x^{12} - 20x^{10} - 40x^{10} + 100x^8 + 50x^8 - 125x^6 = 8x^{12} - 60x^{10} + 150x^8 - 125x^6$

d) $\begin{array}{r} 2x^4 - 5x^2 \quad | \quad -x^3 + x - 2 \\ \underline{-2x^4 + 2x^2 - 4x} \quad \quad \quad -2x \\ -3x^2 - 4x \end{array}$

2.8 Resuelve las siguientes operaciones.

a) $(m + 2n)^2$

d) $\left(-4x + \frac{2}{3}y\right)^2$

b) $(-5 - 9b)^2$

e) $(-3x + y)^3$

c) $(2a - 3b)^2$

f) $(4a + 5)^3$

a) $(m + 2n)^2 = m^2 + 4n^2 + 4mn$

d) $\left(-4x + \frac{2}{3}y\right)^2 = 16x^2 + \frac{4}{9}y^2 - \frac{16}{3}xy$

b) $(-5 - 9b)^2 = 25 + 81b^2 + 90b$

e) $(-3x + y)^3 = -27x^3 + y^3 + 27x^2y - 9xy^2$

c) $(2a - 3b)^2 = 4a^2 + 9b^2 - 12ab$

f) $(4a + 5)^3 = 64a^3 + 125 + 240a^2 + 300a$

2.9 Descompón en factores estas expresiones.

a) $y^2 - 16$

c) $(3x + 2)^2 - (3x - 2)^2$

b) $9z^2 + 6zy + y^2$

d) $27x^3 + 8 + 54x^2 + 36x$

a) $y^2 - 16 = (y + 4) \cdot (y - 4)$

b) $9z^2 + 6zy + y^2 = (3z + y)^2$

c) $(3x + 2)^2 - (3x - 2)^2 = (3x + 2 + 3x - 2) \cdot (3x + 2 - 3x + 2) = 6x \cdot 4 = 24x$

d) $27x^3 + 8 + 54x^2 + 36x = (3x + 2)^3$

2.10 Completa en tu cuaderno estas expresiones para que correspondan al cuadrado de un binomio.

a) $a^2 + 4ab + \square$

c) $4x^2 - \square + 9$

b) $x^2 + \frac{2}{3}xy + \square$

d) $\square - 6zyx^3 + 9z^2$

a) $a^2 + 4ab + 4b^2$ Desarrollo de $(a + 2b)^2$

b) $x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{1}{9}y^2$ Desarrollo de $(x + \frac{1}{3}y)^2$

c) $4x^2 - 12x + 9$ Desarrollo de $(2x - 3)^2$

d) $y^2x^6 - 6zyx^3 + 9z^2$ Desarrollo de $(yx^3 - 3z)^2$

2.11 Utiliza la fórmula $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ para calcular mentalmente las siguientes operaciones.

a) $15^2 - 5^2$

c) $125^2 - 25^2$

b) $55^2 - 45^2$

d) $700^2 - 300^2$

a) $15^2 - 5^2 = (15 + 5) \cdot (15 - 5) = 20 \cdot 10 = 200$

b) $55^2 - 45^2 = (55 + 45) \cdot (55 - 45) = 100 \cdot 10 = 1000$

c) $125^2 - 25^2 = (125 + 25) \cdot (125 - 25) = 150 \cdot 100 = 15000$

d) $700^2 - 300^2 = (700 + 300) \cdot (700 - 300) = 1000 \cdot 400 = 400000$

2.12 Realiza estas divisiones.

a) $(x^3 - 3x^2 + 5x - 10) : (x - 3)$

b) $(x^4 - 2x^2 + 6x + 7) : (x + 1)$

a)	$\begin{array}{r} 1 \quad -3 \quad 5 \quad -10 \\ 3 \overline{) \quad \quad 3 \quad 0 \quad 15} \\ \hline 1 \quad \quad 0 \quad 5 \quad 5 \end{array}$	Cociente: $x^2 + 5$ Resto: 5
----	--	---------------------------------

b)	$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -2 \quad 6 \quad 7 \\ -1 \overline{) \quad \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -7} \\ \hline 1 \quad -1 \quad -1 \quad 7 \quad 0 \end{array}$	Cociente: $x^3 - x^2 - x + 7$ Resto: 0
----	--	---

2.13 Utiliza la regla de Ruffini para hallar el número k que hay que añadir al polinomio $x^3 + 2x^2$ para que, al dividirlo entre $x + 4$, el resto sea 0.

El polinomio será de la forma $x^3 + 2x^2 + k$, procedemos a dividir para calcular el resto.

$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 0 \quad k \\ -4 \overline{) \quad \quad -4 \quad 8 \quad -32} \\ \hline 1 \quad -2 \quad 8 \quad k - 32 \end{array}$	El resto, $k - 32$, tiene que ser 0; entonces:
--	---

$k - 32 = 0 \Rightarrow k = 32$

2.14 Calcula el valor de k que hace que el resto de la división de $x^3 + 2x + 6k$ entre $x - 2$ sea 0.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 2 & 6k \\ 2 & & 2 & 4 & 12 \\ \hline & 1 & 2 & 6 & 6k + 12 \end{array}$$

El resto: $6k + 12$ tiene que ser 0; entonces:

$$6k + 12 = 0 \Rightarrow k = -2$$

2.15 Indica en notación ordinaria el dividendo, el divisor, el cociente y el resto de esta división.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

$$D(x) = x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

$$c(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$$

$$d(x) = x - 1$$

$$R = 2$$

2.16 Resuelve esta división usando la regla de Ruffini.

$$(x^3 - 2x^2 - 7x + 14) : (x - 2)$$

¿Cuánto vale el resto? ¿Coincide con el valor numérico del dividendo para $x = 2$?

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -7 & 14 \\ 2 & & 2 & 0 & -14 \\ \hline & 1 & 0 & -7 & 0 \end{array}$$

Resto: 0

$$P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 14 = 8 - 8 - 14 + 14 = 0$$

Coinciden $P(2)$ y el resto.

2.17 Halla el resto de estas divisiones sin efectuarlas.

a) $(x^{25} - 3x^2 - 4) : (x - 1)$

b) $(x^{33} - 1) : (x + 1)$

Vamos a utilizar el teorema del resto, calculando $P(1)$ en el primer polinomio y $P(-1)$ en el segundo:

a) $P(1) = 1^{25} - 3 \cdot 1^2 - 4 = 1 - 3 - 4 = -6$

Resto = -6

b) $P(-1) = (-1)^{33} - 1 = -1 - 1 = -2$

Resto = -2

2.18 Indica, sin realizar las divisiones, si estas afirmaciones son ciertas.

a) $(x - 1)$ es un factor de $(x^5 + x^3 + 4x^2 + 6x + 2)$.

b) $(2x^4 - 4x^3 + x^2 - 3x + 2)$ es divisible entre $(x - 2)$.

a) Vamos a utilizar el teorema del factor. Calculamos $P(1)$:

$$P(1) = 1^5 + 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 2 = 1 + 1 + 4 + 6 + 2 = 14 \neq 0$$

Por tanto, deducimos que $(x - 1)$ no es un factor de $(x^5 + x^3 + 4x^2 + 6x + 2)$.

b) Calculamos $P(2)$:

$$P(2) = 2 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 32 - 32 + 4 - 6 + 2 = 0, \text{ por lo que deducimos que}$$

$$(2x^4 - 4x^3 + x^2 - 3x + 2) \text{ es divisible entre } (x - 2).$$

2.19 Si se divide el polinomio $3x^3 - 2x^2 + kx + 1$ entre $x - 1$, el resto es 2. ¿Cuánto vale k ?

Según el teorema del resto, el resto será: $P(1) = 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + k \cdot 1 + 1 = 3 - 2 + k + 1 = 2 + k$

Igualamos el resto a dos como indica el enunciado: $2 + k = 2 \Rightarrow k = 0$

2.20 Dado el polinomio $x^3 - 4x^2 - 5x + 8$:

a) ¿Cuántas raíces reales puede tener como máximo?

b) ¿Pueden ser $x = 1$ y $x = 3$ raíces del polinomio? Escribe el conjunto de todos los enteros que podrían ser raíz de este polinomio.

c) ¿Es $x = -2$ raíz del polinomio?

a) El polinomio tiene grado 3; por tanto, como máximo puede tener 3 raíces.

b) $x = 1$ podría ser raíz del polinomio, ya que 1 es divisor de 8.

$x = 3$ no podría ser raíz del polinomio, ya que 3 no es divisor de 8.

El conjunto de todos los enteros que podrían ser raíz de este polinomio será: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$.

c) Calculamos $P(-2)$:

$$P(-2) = (-2)^3 - 4 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 8 = -8 - 16 + 10 + 8 = -6 \neq 0$$

Como $P(-2) \neq 0 \Rightarrow -2$ no es raíz del polinomio.

2.21 Indica cuáles de los siguientes números son raíces del polinomio $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$.

$$0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 3 \quad -\frac{1}{2}$$

Calculamos $P(x)$ para estos números:

$$P(0) = 2 \cdot 0^4 + 5 \cdot 0^3 - 5 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 3 = 3 \neq 0 \Rightarrow 0 \text{ no es raíz de este polinomio.}$$

$$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 5 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0 \Rightarrow 1 \text{ es raíz de este polinomio.}$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{2}{16} + \frac{5}{8} - \frac{5}{4} - \frac{5}{2} + 3 = \frac{2 + 10 - 20 - 40 + 48}{16} = 0$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)$ es raíz de este polinomio.

$$P(3) = 2 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 3 = 2 \cdot 81 + 5 \cdot 27 - 5 \cdot 9 - 15 + 3 = 162 + 135 - 45 - 15 + 3 = 240 \neq 0 \Rightarrow 3 \text{ no es raíz de este polinomio.}$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{2}{16} - \frac{5}{8} - \frac{5}{4} + \frac{5}{2} + 3 = \frac{2 - 10 - 20 + 40 + 48}{16} = \frac{60}{16} = \frac{15}{4} \neq 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right) \text{ no es raíz de este polinomio.}$$

2.22 Calcula las raíces enteras de estos polinomios.

a) $x^3 + 3x^2 - x - 3$

b) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$

a) $x^3 + 3x^2 - x - 3$. Posibles raíces enteras: $\pm 1, \pm 3$. Probamos con cada una de ellas:

$$P(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 - 3 = 0 \Rightarrow 1 \text{ es raíz.}$$

$$P(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 1 - 3 = 0 \Rightarrow -1 \text{ es raíz.}$$

$$P(3) = 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 3 - 3 = 48 \Rightarrow 3 \text{ no es raíz.}$$

$$P(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 + 3 - 3 = 0 \Rightarrow -3 \text{ es raíz.}$$

Por tanto, las raíces enteras de este polinomio son 1, -1 y -3.

b) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$. Posibles raíces enteras: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Probamos con cada una de ellas:

$$P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 4 = -3 \Rightarrow 1 \text{ no es raíz.}$$

$$P(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 4 = -9 \Rightarrow -1 \text{ no es raíz.}$$

$$P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 4 = 0 \Rightarrow 2 \text{ es raíz.}$$

$$P(-2) = (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 4 = -24 \Rightarrow -2 \text{ no es raíz.}$$

$$P(4) = 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 4 = 64 - 32 + 8 - 4 = 36 \Rightarrow 4 \text{ no es raíz.}$$

$$P(-4) = (-4)^3 - 2 \cdot (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 4 = -64 - 32 - 8 - 4 = -108 \Rightarrow -4 \text{ no es raíz.}$$

Por tanto, la única raíz entera de este polinomio es 2.

2.23 Factoriza estos polinomios sabiendo que todas sus raíces son divisores del término independiente.

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $2x^2 - 12x + 18$

a) Las posibles raíces enteras serán los divisores de 2; es decir, ± 1 y ± 2 .

$$P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 - 2 = 0 \Rightarrow 1 \text{ es raíz de este polinomio.}$$

$$P(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow -1 \text{ es raíz de este polinomio.}$$

$$P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 - 2 = 12 \neq 0 \Rightarrow 2 \text{ no es raíz de este polinomio.}$$

$$P(-2) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 2 - 2 = 0 \Rightarrow -2 \text{ es raíz de este polinomio.}$$

Por tanto, las raíces de este polinomio son 1, -1 y -2, y la factorización correspondiente es:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$$

b) El polinomio es de grado 2; por tanto, resolvemos la ecuación: $2x^2 - 12x + 18 = 0$.

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18}}{2 \cdot 2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{4} = \frac{3}{2}$$

Teniendo en cuenta que el coeficiente director de este polinomio es 2 y que 3 es raíz doble, la factorización será:

$$2x^2 - 12x + 18 = 2 \cdot (x - 3) \cdot (x - 3) = 2 \cdot (x - 3)^2$$

2.24 Halla el valor numérico de $P(x) = x^2 - 7x + 10$ para $x = 1, 2, 3, 5$.

a) ¿Para cuáles de estos valores se anula?

b) Factoriza el polinomio $P(x)$.

$$P(1) = 1^2 - 7 \cdot 1 + 10 = 4$$

$$P(2) = 2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 0$$

$$P(3) = 3^2 - 7 \cdot 3 + 10 = -2$$

$$P(5) = 5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 0$$

a) El polinomio se anula en 2 y 5.

b) Como el polinomio es de grado dos y hemos encontrado dos números que lo anulan, ya podemos factorizarlo:

$$P(x) = (x - 2) \cdot (x - 5)$$

2.25 Descompón en factores estos polinomios.

a) $x^3 - x^2 - 2x$

c) $x^3 - x^2 + 5x - 5$

b) $x^3 + x^2 - 8x - 12$

d) $x^3 + 2x^2 - 5x - 10$

a) Sacamos factor común: $P(x) = x^3 - x^2 - 2x = x \cdot (x^2 - x - 2)$

Resolvemos la ecuación de segundo grado: $x^2 - x - 2 = 0$ $\frac{x = 1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$

Por tanto: $P(x) = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)$

b) $P(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$

Utilizamos Ruffini, vamos probando con los divisores de 12 hasta que obtengamos resto 0:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -8 & -12 \\ 3 & & 3 & 12 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

$D(x) = d(x) \cdot c(x) \Rightarrow P(x) = (x - 3) \cdot (x^2 + 4x + 4)$

Para factorizar el cociente utilizamos las identidades notables: $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.

Por tanto, la factorización queda: $P(x) = (x - 3) \cdot (x + 2)^2$.

c) $P(x) = x^3 - x^2 + 5x - 5$

Empezamos por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 5 & -5 \\ 1 & & 1 & 0 & 5 \\ \hline & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 5)$

Ahora resolvemos la ecuación $x^2 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 = -5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-5} \Rightarrow$ No posee raíces reales.

Por tanto, la factorización resulta: $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 5)$

d) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 10$

Utilizamos Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -5 & -10 \\ -2 & & -2 & 0 & 10 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x + 2) \cdot (x^2 - 5)$

Para factorizar el cociente utilizamos las identidades notables: $x^2 - 5 = (x + \sqrt{5}) \cdot (x - \sqrt{5})$

Por tanto, la factorización queda: $P(x) = (x + 2) \cdot (x + \sqrt{5}) \cdot (x - \sqrt{5})$

2.26 Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^2 - 25$

c) $x^3 - x$

b) $x^3 - x^5$

d) $x^2 - x^4$

Factorizaremos los polinomios extrayendo factor común cuando sea posible y utilizando las identidades notables:

a) $x^2 - 25 = (x + 5) \cdot (x - 5)$

b) $x^3 - x^5 = x^3 \cdot (1 - x^2) = x^3 \cdot (1 + x) \cdot (1 - x)$

c) $x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

d) $x^2 - x^4 = x^2 \cdot (1 - x^2) = x^2 \cdot (1 + x) \cdot (1 - x)$

2.27 El polinomio $P(x)$ se ha factorizado y se ha obtenido la expresión $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 6)$. ¿Para qué valores de x se anula este polinomio?

Para $x = 1$, $x = 2$ y $x = -6$ que son los valores que anulan cada uno de los factores.

2.28 ¿Qué valor debe tener m para que $(x + 3)$ sea un factor del polinomio $P(x) = x^3 - 2x + 3m$?

Para que $(x + 3)$ sea factor de $P(x)$, $P(-3)$ tiene que ser 0.

$$P(-3) = (-3)^3 - 2 \cdot (-3) + 3m = -27 + 6 + 3m. \text{ Igualamos a 0: } -21 + 3m = 0 \Rightarrow m = 7$$

2.29 Escribe cuatro polinomios que sean irreducibles.

Respuesta libre.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

2.30 Calcula los valores enteros de n que hacen que $\frac{3n^3 - 10n^2 - 23n}{n + 1}$ sea un número entero.

Hacemos la división, obteniendo:

$$\frac{3n^3 - 10n^2 - 23n}{n + 1} = 3n^2 - 13n - 10 + \frac{10}{n + 1}$$

Buscamos los valores de n para los que $n + 1$ es divisor de 10.

$$n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0$$

$$n + 1 = -1 \Rightarrow n = -2$$

$$n + 1 = 2 \Rightarrow n = 1$$

$$n + 1 = -2 \Rightarrow n = -3$$

$$n + 1 = 5 \Rightarrow n = 4$$

$$n + 1 = -5 \Rightarrow n = -6$$

$$n + 1 = 10 \Rightarrow n = 9$$

$$n + 1 = -10 \Rightarrow n = -11$$

2.31 ¿Para qué valores enteros de x se cumple que $\frac{x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 5x + 2}{x - 2}$ es un entero positivo?

Hacemos la división, obteniendo:

$$\frac{x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 5x + 2}{x - 2} = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 + \frac{4}{x - 2}$$

A diferencia de los ejercicios anteriores, ahora nos dicen que el resultado debe ser entero y positivo. Por comodidad a la hora de sustituir, nos interesa descomponer totalmente el cociente:

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 + \frac{4}{x - 2} = (x^2 + 1)(x - 1)^2 + \frac{4}{x - 2}$$

La primera parte nunca puede ser negativa. Solo habrá que vigilar si para alguno de los valores que hacen que $\frac{4}{x - 2}$ sea entero el resultado total puede ser negativo.

Posibles valores de x :

$$x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$$

$$x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1$$

$$x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4$$

$$x - 2 = -2 \Rightarrow x = 0$$

$$x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6$$

$$x - 2 = -4 \Rightarrow x = -2$$

Para $x = 3$, $x = 4$, $x = 6$ y $x = -2$, el resultado total es positivo, luego son soluciones válidas.

Para $x = 1$ y $x = 0$, el total es negativo, por lo que no se cumple la condición pedida.

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

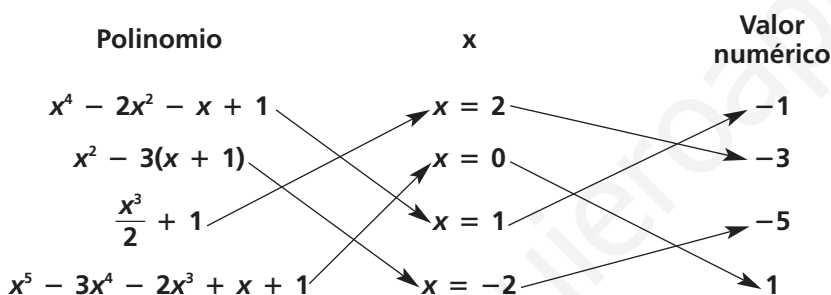
Lenguaje algebraico. Operaciones con monomios

2.32 Expresa las siguientes cantidades en el lenguaje algebraico.

- El espacio recorrido en un tiempo t por un móvil que lleva velocidad constante v .
- El volumen de un cubo de arista x .
- El volumen de un cilindro de radio de la base r y altura h .
- El perímetro de un triángulo isósceles de lados iguales x y lado desigual y .

- $E = v \cdot t$
- $V = x^3$
- $V = \pi r^2 h$
- $p = 2x + y$

2.33 En estas columnas están, desordenados, cuatro polinomios y sus respectivos valores numéricos para ciertos valores de x .



Relaciona en tu cuaderno cada polinomio con su valor numérico para el valor de x correspondiente.

2.34 Dados los monomios $A = 6x^2$, $B = 3x^4$, $C = \frac{1}{2}x^4$ y $D = -2x$, realiza las siguientes operaciones.

- | | | | |
|------------|----------------|----------------|------------------------|
| a) $A + D$ | c) $A - B + C$ | e) $B : C$ | g) $A \cdot B \cdot C$ |
| b) $B - C$ | d) $A \cdot D$ | f) $D \cdot B$ | h) $A : D \cdot B$ |

a) $A + D = 6x^2 + (-2x) = 6x^2 - 2x$

b) $B - C = 3x^4 - \frac{1}{2}x^4 = \frac{5}{2}x^4$

c) $A - B + C = 6x^2 - 3x^4 + \frac{1}{2}x^4 = 6x^2 - \frac{5}{2}x^4$

d) $A \cdot D = 6x^2 \cdot (-2x) = -12x^3$

e) $B : C = 3x^4 : \frac{1}{2}x^4 = 6$

f) $D \cdot B = -2x \cdot 3x^4 = -6x^5$

g) $A \cdot B \cdot C = 6x^2 \cdot 3x^4 \cdot \frac{1}{2}x^4 = 9x^{10}$

h) $A : D \cdot B = 6x^2 : (-2x) \cdot 3x^4 = -3x \cdot 3x^4 = -9x^5$

2.35 Realiza las siguientes operaciones

a) $(-2x^2 + x) \cdot (3x^2)$

b) $(x^3 - 2x + 1) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)$

a) $(-2x^2 + x) \cdot (3x^2) = -6x^4 + 3x^3$

b) $(x^3 - 2x + 1) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + \frac{1}{2}x$

c) $(-3x^4 + 2x^3 - 5x) : (4x)$

d) $(4x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2) : (2x^2)$

c) $(-3x^4 + 2x^3 - 5x) : (4x) = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}$

d) $(4x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2) : (2x^2) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$

Operaciones con polinomios

2.36 Dados los polinomios $P(x) = 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$, $Q(x) = 3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2$ y $R(x) = -4x^4 + x^2 - 4$, realiza las siguientes operaciones.

a) $P(x) + Q(x)$

c) $R(x) - Q(x) + P(x)$

b) $Q(x) - R(x)$

d) $P(x) + Q(x) + R(x)$

a) $P(x) + Q(x) = 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 + 3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2 = 2x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{3}x + 3$

b) $Q(x) - R(x) = \left(3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2\right) - (-4x^4 + x^2 - 4) = 4x^4 + 3x^3 - \frac{2}{3}x + 6$

c) $R(x) - Q(x) + P(x) = -4x^4 + x^2 - 4 - \left(3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2\right) + 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 =$
 $= -4x^4 + x^2 - 4 - 3x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x - 2 + 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 =$
 $= -4x^4 - 3x^3 + \frac{2}{3}x - 6 + 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 = -2x^4 - 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{3}x - 5$

d) $P(x) + Q(x) + R(x) = \left(2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1\right) + \left(3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2\right) + (-4x^4 + x^2 - 4) = -2x^4 + 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{11}{3}x - 1$

2.37 Rellena en tu cuaderno cada recuadro con el coeficiente adecuado.

a) $(2x^2 + \square x - 1) - (-3x^2 - 5x + \square) = 5x^2 + 2x + 4$

b) $(3x^4 - x + 2) - (\square x^4 + \square x + \square) = 4x^4 + 3x + 3$

c) $(5x^3 + \square x^2 + \square) + (\square x^3 + x^2 - 2) = 2x^3 - 3x^2 - 3$

a) $(2x^2 + (-3)x - 1) - (-3x^2 - 5x + (-5)) = 5x^2 + 2x + 4$

b) $(3x^4 - x + 2) - ((-1)x^4 + (-4)x + (-1)) = 4x^4 + 3x + 3$

c) $(5x^3 + (-4)x^2 + (-1)) + ((-3)x^3 + x^2 - 2) = 2x^3 - 3x^2 - 3$

2.38 Realiza las siguientes operaciones con los polinomios

$P(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1$, $Q(x) = 3x^3 - 4x - 2$ y $R(x) = 4x^2 - 5x + 3$.

a) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$

b) $Q(x) \cdot [R(x) - P(x)]$

c) $R(x) \cdot [P(x) + Q(x)]$

¿Qué propiedad puedes aplicar para efectuarlas?

a) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = \left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right) \cdot [(3x^3 - 4x - 2) + (4x^2 - 5x + 3)] = \left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right) \cdot (3x^3 + 4x^2 - 9x + 1) =$
 $= \frac{3}{2}x^7 + 2x^6 - \frac{9}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 6x^6 + 8x^5 - 18x^4 + 2x^3 + 3x^3 + 4x^2 - 9x + 1 =$
 $= \frac{3}{2}x^7 + 8x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{35}{2}x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 9x + 1$

b) $Q(x) \cdot [R(x) - P(x)] = (3x^3 - 4x - 2) \cdot \left[(4x^2 - 5x + 3) - \left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right)\right] =$
 $= (3x^3 - 4x - 2) \cdot \left(4x^2 - 5x + 3 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 1\right) =$
 $= (3x^3 - 4x - 2) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x + 2\right) =$
 $= -\frac{3}{2}x^7 - 6x^6 + 12x^5 - 15x^4 + 6x^3 + 2x^5 + 8x^4 - 16x^3 + 20x^2 - 8x + x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 10x - 4 =$
 $= -\frac{3}{2}x^7 - 6x^6 + 14x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 2x - 4$

c) $R(x) \cdot [P(x) + Q(x)] = (4x^2 - 5x + 3) \cdot \left[\left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1\right) + (3x^3 - 4x - 2)\right] = (4x^2 - 5x + 3) \cdot \left(\frac{1}{2}x^4 + 5x^3 - 4x - 1\right) =$
 $= 2x^6 + 20x^5 - 16x^3 - 4x^2 - \frac{5}{2}x^5 - 25x^4 + 20x^2 + 5x + \frac{3}{2}x^4 + 15x^3 - 12x - 3 =$
 $= 2x^6 + \frac{35}{2}x^5 - \frac{47}{2}x^4 - x^3 + 16x^2 - 7x - 3$

Podríamos haber utilizado la propiedad distributiva.

2.39 Calcula estas potencias.

a) $(x + y - 2z)^2$

b) $(3a - 2b + c)^2$

a) $(x + y - 2z)^2 = (x + y - 2z) \cdot (x + y - 2z) = x^2 + xy - 2zx + xy + y^2 - 2yz - 2xz - 2yz + 4z^2 =$
 $= x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz$

b) $(3a - 2b + c)^2 = (3a - 2b + c) \cdot (3a - 2b + c) = 9a^2 - 6ab + 3ac - 6ab + 4b^2 - 2bc + 3ac - 2bc + c^2 =$
 $= 9a^2 + 4b^2 + c^2 - 12ab + 6ac - 4bc$

Identidades notables

2.40 Efectúa estas operaciones.

a) $(2x^2 - 3y)^2$

d) $(2x^4 + x^2)^2$

b) $(3x - 2y)^3$

e) $(5a + 3b) \cdot (5a - 3b)$

c) $(3x^3 - \sqrt{x})^2$

f) $(2xy + 4zt) \cdot (2xy - 4zt)$

a) $(2x^2 - 3y)^2 = 4x^4 + 9y^2 - 12x^2y$

b) $(3x - 2y)^3 = 27x^3 - 8y^3 - 54x^2y + 36xy^2$

c) $(3x^3 - \sqrt{x})^2 = 9x^6 + x - 6x^3\sqrt{x}$

d) $(2x^4 + x^2)^2 = 4x^8 + 4x^6 + x^4$

e) $(5a + 3b) \cdot (5a - 3b) = 25a^2 - 9b^2$

f) $(2xy + 4zt) \cdot (2xy - 4zt) = 4x^2y^2 - 16z^2t^2$

División de polinomios. Regla de Ruffini

2.41 Realiza las siguientes divisiones de polinomios.

a) $(6x^3 - 2x^2 - 1) : (x^2 + x + 2)$

b) $(-3x^4 + x^2 - 2x + 3) : (3x^2 - 2x + 1)$

c) $(x^6 - 2x^3 + 3x - 3) : (-2x^3 + x - 2)$

a)
$$\begin{array}{r} 6x^3 - 2x^2 - 1 \quad -1 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + x + 2 \\ 6x - 8 \end{array} \right. \\ \underline{-6x^3 - 6x^2 - 12x} \\ -8x^2 - 12x - 1 \\ \underline{8x^2 + 8x + 16} \\ -4x + 15 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} -3x^4 \quad + x^2 \quad - 2x + 3 \quad \left| \begin{array}{l} 3x^2 - 2x + 1 \\ -x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} \end{array} \right. \\ \underline{3x^4 - 2x^3 + x^2} \\ -2x^3 + 2x^2 \\ \underline{2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x} \\ \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 3 \\ \underline{-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{2}{9}} \\ -\frac{8}{9}x + \frac{25}{9} \end{array}$$

2.45 Halla el valor de k en los siguientes polinomios teniendo en cuenta los datos indicados.

- a) $x^3 + (k + 2)x + 1$ es divisible entre $(x + 1)$.
 b) $(x^4 + kx^2 + 2x + 1) : (x - 1)$ tiene -4 de resto.
 c) $x^4 + 3x^3 + kx^2 + x - 6$ tiene por factor $(x + 3)$.

a) Igualamos el valor del polinomio en -1 a cero:

$$P(-1) = (-1)^3 + (k + 2) \cdot (-1) + 1 = -1 - k - 2 + 1 = -k - 2 = 0 \Rightarrow k = -2$$

b) Igualamos el valor del polinomio en 1 a -4 :

$$P(1) = 1^4 + k \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + k + 2 + 1 = 4 + k = -4 \Rightarrow k = -8$$

c) Igualamos el valor del polinomio en -3 a 0 :

$$P(-3) = (-3)^4 + 3 \cdot (-3)^3 + k \cdot (-3)^2 + (-3) - 6 = 81 - 81 + 9k - 3 - 6 = 9k - 9 = 0 \Rightarrow k = 1$$

Factorización de polinomios

2.46 Calcula las raíces enteras de los siguientes polinomios.

- a) $P(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2x - 6$
 b) $Q(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$
 c) $R(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x - 9$

a) Posibles raíces enteras: $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ y ± 6

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 6 = 2 + 6 - 2 - 6 = 0$$

$$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 6 = -2 + 6 + 2 - 6 = 0$$

$$P(-3) = 2 \cdot (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 6 = -54 + 54 + 6 - 6 = 0$$

Raíces enteras de $P(x)$: $1, -1$ y -3

b) Posibles raíces enteras: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$ y ± 12

$$Q(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 12 = 1 + 2 - 7 - 8 + 12 = 0$$

$$Q(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 12 = 16 - 16 - 28 + 16 + 12 = 0$$

$$Q(-2) = (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^3 - 7 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 12 = 16 + 16 - 28 - 16 + 12 = 0$$

$$Q(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 + 12 = 81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 0$$

Raíces enteras de $Q(x)$: $-1, 2, -2$ y 3

c) Posibles raíces enteras: $\pm 1, \pm 3$ y ± 9

$$R(3) = 3^4 + 3^3 - 8 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 - 9 = 81 + 27 - 72 - 27 - 9 = 0$$

$$R(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 - 8 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 9 = 81 - 27 - 72 + 27 - 9 = 0$$

Raíces enteras de $R(x)$: 3 y -3

2.47 Escribe un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean $x_1 = -1, x_2 = 2$ y $x_3 = -4$.

¿Existen más polinomios que verifiquen esas condiciones? ¿Por qué?

Se tiene que anular en los tres puntos, por ejemplo:

$$P(x) = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 4) = (x^2 - x - 2) \cdot (x + 4) = x^3 + 4x^2 - x^2 - 4x - 2x - 8 = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$$

Tendrá las mismas soluciones cualquier polinomio que sea el resultado de multiplicar este por una constante.

2.48 Factoriza los siguientes polinomios.

- a) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x$
 b) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$
 c) $R(x) = x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2$
 d) $S(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3x - 2$
 e) $T(x) = 2x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 3x$

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \in \{-3, 2\}$$

b) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x - 2) \cdot (x^2 + 5x + 6) = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{1 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \in \{-2, -3\}$$

2	1	3	-4	-12
	2	10	12	
	1	5	6	0

c) $R(x) = x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2 = x^2(x^3 - x^2 - x - 2) = x^2 \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + x + 1)$

$$2 \begin{array}{c|cccc} 1 & -1 & -1 & -2 & \\ \hline & 2 & 2 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array} \quad x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{1 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

No tiene solución, el polinomio $x^2 + x + 1$ es irreducible.

d) $S(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = (x + 1) \cdot (6x^2 - x - 2) = 6(x + 1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)$

$$-1 \begin{array}{c|cccc} 6 & 5 & -3 & -2 & \\ \hline & -6 & 1 & 2 & \\ \hline 6 & -1 & -2 & 0 & \end{array} \quad 6x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12}$$

$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
 $\frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$

e) $T(x) = 2x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 3x = x \cdot (2x^3 + 7x^2 + 8x + 3) = x \cdot (x + 1) \cdot (2x^2 + 5x + 3) = 2x \cdot (x + 1) \cdot (x + 1) \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) = 2x \cdot (x + 1)^2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)$

$$-1 \begin{array}{c|cccc} 2 & 7 & 8 & 3 & \\ \hline & -2 & -5 & -3 & \\ \hline 2 & 5 & 3 & 0 & \end{array} \quad 2x^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{-5 \pm 1}{4}$$

$\frac{-4}{4} = -1$
 $\frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$

2.49 Observa el siguiente esquema y escribe el polinomio inicial y su expresión factorizada.



Al dividir el polinomio entre $(x - 1)$, el resto es 0. Dividimos el nuevo cociente otra vez entre $(x - 1)$ y el resto vuelve a ser 0. El cociente resultante lo dividimos entre $(x - 3)$ y la división es exacta, quedando como cociente $(x + 2)$. Por tanto, la factorización será:

$$(x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2) = (x - 1)^2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)$$

2.50 Factoriza el polinomio $P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 3x - 18$ sabiendo que verifica las siguientes condiciones.

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = 0, P(-2) = 0 \text{ y } P(-3) = 0$$

Como conocemos las raíces del polinomio, por el teorema del factor sólo nos falta conocer el coeficiente:

$$P(x) = k \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) = k \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right) \cdot (x + 3) = k \cdot \left(x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 9\right) = k \cdot x^3 + \frac{7}{2}k \cdot x^2 - \frac{3}{2}k \cdot x - 9k$$

Igualando coeficientes resulta $k = 2$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

2.51 ¿Cuál de estas expresiones algebraicas es un monomio?

a) $\sqrt{12} x$

b) $\frac{4}{x}$

c) $3x^{-2}$

d) $x^2\sqrt{3}$

Para ser un monomio, el exponente debe ser natural. Vamos a ver el exponente de cada expresión:

a) Exponente 1

b) Exponente -1

c) Exponente -2

d) Exponente 2

Por tanto, los únicos monomios son los del apartado a y d.

2.52 ¿Puedes realizar la división $(x^3 - x^2 - x + 1) : (x^2 - 1)$ utilizando la regla de Ruffini?

Para poder dividir un polinomio entre un binomio usando Ruffini, el divisor ha de tener grado 1, y en este caso tiene grado 2; por tanto, no podremos usar Ruffini directamente.

2.53 Un polinomio es de grado 7, y otro, de grado 6. Indica el grado de los polinomios que resultan de estas operaciones entre ellos.

- a) La suma c) El cociente
b) El producto d) El cubo del segundo

- a) La suma tendrá grado 7, ya que es el mayor de los grados de los dos polinomios.
b) El producto tendrá grado $7 + 6 = 13$.
c) El cociente tendrá grado $7 - 6 = 1$.
d) El cubo del segundo tendrá grado $3 \cdot 6 = 18$.

2.54 Tenemos dos polinomios de grado 3. ¿Puede el polinomio suma ser de grado 2? Pon un ejemplo.

La suma será de grado 2 si los coeficientes de los términos de grado 3 son opuestos y los de grado dos no lo son.
Ejemplo: $(-4x^3 + 2x^2 + 3x - 1) + (4x^3 + 5x - 3) = 2x^2 + 8x - 4$

2.55 Si $P(0) = -7$, ¿puede ser $P(x) = ax^2 + bx + 8$? Razona la respuesta.

Si $P(x) = ax^2 + bx + 8$ entonces $P(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + 8 = 8$ para cualquier valor de a y b por lo tanto $P(0) \neq -7$

2.56 Indica razonadamente cuáles son las raíces del polinomio $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$.

Este polinomio lo anulan los valores 1, -2 y 3.

2.57 Si $P(8) = 0$, ¿puede $P(x)$ ser irreducible? ¿Por qué?

Si $P(8) = 0$, por el teorema del factor sabemos que $P(x) = (x - 8) \cdot Q(x)$, donde $Q(x)$ es otro polinomio de un grado menor que $P(x)$. Por tanto, $P(x)$ no será irreducible.

2.58 El polinomio $Q(x)$ es de grado 3 y sabemos que $Q(-1) = Q(2) = Q(0) = 0$. ¿Cuál es la posible expresión del polinomio $Q(x)$?

Y si además sabemos que $Q(-2) = 16$, ¿cuál es entonces su expresión exacta?

Conociendo las raíces podemos expresar el polinomio como: $Q(x) = k \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot x = kx^3 - kx^2 - 2kx$.

Calculamos $Q(-2)$ y lo igualamos a 16:

$$Q(-2) = k \cdot (-2 + 1) \cdot (-2 - 2) \cdot (-2) = k \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot (-2) = -8k \Rightarrow -8k = 16 \Rightarrow k = -2$$

$$Q(x) = -2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot x = -2x^3 + 2x^2 + 4x$$

2.59 Calcula el resto de la división $M(x) : (x - 6)$ sabiendo que $M(6) = 3$.

Si $M(6) = 3$, aplicando el teorema del resto sabemos que el resto será 3.

2.60 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) Si $(x + 6)$ divide a $L(x)$, entonces 6 es una raíz de $L(x)$.
b) Si $G(-5) = 0$, $(x + 5)$ es un factor de $G(x)$.
c) Si $B(x)$ es irreducible, existe al menos un valor $x = a$ para el que $B(a) = 0$.
d) Un polinomio de grado 5 no puede disponer de 6 raíces.
e) Un polinomio con término independiente 0 posee al menos una raíz.
f) $x^n + 1$ es irreducible o tiene como única raíz -1 .

a) Falso, ya que si $(x + 6)$ divide a $L(x)$, entonces -6 es una raíz de $L(x)$.

b) Verdadero, por el teorema del factor.

c) Falso, ya que si existiese un valor tal que $B(a) = 0$, entonces $(x - a)$ dividiría a $B(x)$, y este no sería irreducible.

d) Verdadero, el teorema fundamental del álgebra nos indica que como mucho tendrá 5 raíces.

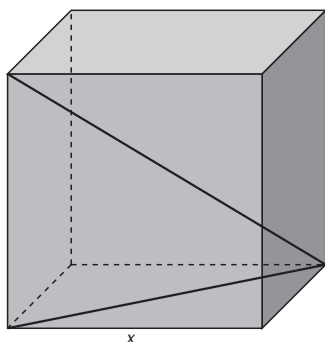
e) Verdadero, ya que $x = 0$ será una raíz.

f) Verdadero, ya que:

Si n es par, $x^n + 1 = 0 \Rightarrow x^n = -1$ no tiene solución; por tanto, el polinomio será irreducible.

Si n es impar, $x^n + 1 = 0 \Rightarrow x^n = -1 \Rightarrow x = -1$.

2.70 ¿Qué monomio expresa la diagonal de un cubo de lado x ?



Calculamos primero la diagonal de la base usando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow d^2 = 2x^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}x$$

Esta diagonal, una arista y la diagonal del cubo forman un triángulo rectángulo, por lo que podemos volver a utilizar el teorema de Pitágoras:

$$D^2 = (\sqrt{2}x)^2 + x^2 \Rightarrow D^2 = 2x^2 + x^2 \Rightarrow D^2 = 3x^2 \Rightarrow D = \sqrt{3}x$$

Por tanto, el monomio que expresa la diagonal del cubo es $\sqrt{3}x$.

2.71 Sean los polinomios $E(x) = 4\pi x^2$, $F(x) = \frac{5}{3}\pi x^2$ y $G(x) = 2\pi x^2 + 10\pi x$, asociados a distintas figuras geométricas. Relaciona en tu cuaderno las cantidades de estas tres columnas.

Volumen de un cono de radio 3 y altura 5.

$G(3)$ 36π

Área de un cilindro de altura 5 y radio 3.

$E(3)$ 15π

Volumen de una esfera de radio 3.

$F(3)$ 48π

Calculamos el valor de los tres polinomios en $x = 3$.

$$E(3) = 4\pi 3^2 = 36\pi$$

$$F(3) = \frac{5}{3}\pi 3^2 = 15\pi$$

$$G(3) = 2\pi 3^2 + 10\pi 3 = 18\pi + 30\pi = 48\pi$$

Calculamos las áreas y los volúmenes:

$$\text{Volumen de un cono de radio 3 y altura 5} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 3^2 \cdot 5 = 15\pi$$

$$\text{Área de un cilindro de altura 5 y radio 3} = 2 \cdot \pi r^2 + 2 \pi r h = 2 \cdot \pi 3^2 + 2 \pi 3 \cdot 5 = 18\pi + 30\pi = 48\pi$$

$$\text{Volumen de una esfera de radio 3} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi$$

Por tanto, la relación queda:

Volumen de un cono de radio 3 y altura 5.

$F(3)$ 15π

Área de un cilindro de altura 5 y radio 3.

$G(3)$ 48π

Volumen de una esfera de radio 3.

$E(3)$ 36π

2.72 Calcula a , b y c sabiendo que $x^3 - 6x^2 + ax + b$ es el cubo del binomio $x + c$.

$$(x + c)^3 = x^3 + 3x^2c + 3xc^2 + c^3$$

Igualamos los coeficientes correspondientes a los términos de igual grado:

$$-6 = 3c \Rightarrow c = -2$$

$$a = 3c^2 \Rightarrow a = 3 \cdot (-2)^2 \Rightarrow a = 12$$

$$b = c^3 \Rightarrow b = (-2)^3 \Rightarrow b = -8$$

2.73 Halla los valores de a y b para que los restos de las divisiones del producto $(ax^2 + bx) \cdot (x - 3)$ entre $(x - 1)$ y $(x + 1)$ sean, respectivamente, -6 y -2 .

Utilizamos el teorema del resto, calculando el valor del polinomio en 1 y -1 e igualándolos a los valores del resto que nos da el enunciado.

$$P(1) = (a \cdot 1^2 + b \cdot 1) \cdot (1 - 3) = (-2) \cdot (a + b) = -6 \Rightarrow a + b = 3 \quad \text{Sumando } 2a = 3 + \frac{1}{2} \quad 2a = \frac{7}{2} \Rightarrow a = \frac{7}{4}$$

$$P(-1) = [a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1)] \cdot (-1 - 3) = (-4) \cdot (a - b) = -2 \Rightarrow a - b = \frac{1}{2} \quad \text{Restando } 2b = 3 - \frac{1}{2} \quad 2b = \frac{5}{2} \Rightarrow b = \frac{5}{4}$$

2.74 Simplifica los siguientes polinomios.

a) $(x - 2)(x + 2) - (x - 3)(x + 3) - x(2x + 1) - 4$

b) $(x^2 + 2x + 1)(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1) - x^6 + 2x^3$

a) $(x - 2)(x + 2) - (x - 3)(x + 3) - x(2x + 1) - 4 = x^2 - 4 - x^2 + 9 - 2x^2 - x - 4 = -2x^2 - x + 1$

b) $(x^2 + 2x + 1)(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1) - x^6 + 2x^3 = x^6 - 2x^5 + 3x^4 + x^2 + 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 2x + x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1 - x^6 + 2x^3 = 6x^3 + 4x^2 + 2x + 1$

2.75 Calcula los valores de a y b necesarios para que se cumplan estas igualdades.

a) $x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x + 1)$

b) $x^6 - x^5 - 2x^4 - 4x^2 + 4x + 8 = (x^2 - x - 2)(x^4 + ax^3 + bx - 4)$

Multiplicamos e igualamos los coeficientes:

a) $(x - 2)(x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x + 1) = x^5 + ax^4 + bx^3 + 2x^2 + x - 2x^4 - 2ax^3 - 2bx^2 - 4x - 2 = x^5 + (a - 2)x^4 + (b - 2a)x^3 + (2 - 2b)x^2 - 3x - 2$

$$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$b - 2a = -5 \Rightarrow b - 2 \cdot 2 = -5 \Rightarrow b = -1$$

$2 - 2b = 4$. Vemos que es correcta con los valores que habíamos obtenido.

b) $(x^2 - x - 2)(x^4 + ax^3 + bx - 4) = x^6 + ax^5 + bx^3 - 4x^2 - x^5 - ax^4 - bx^2 + 4x - 2x^4 - 2ax^3 - 2bx + 8 = x^6 + (a - 1)x^5 - (a + 2)x^4 + (b - 2a)x^3 - (4 + b)x^2 + (4 - 2b)x + 8$

$$a - 1 = -1 \Rightarrow a = 0$$

$-a - 2 = -2$ sirve de comprobación.

$$b - 2a = 0 \Rightarrow b = 2a \Rightarrow b = 0$$

$-4 - b = -4$ sirve de comprobación.

$4 - 2b = 4$ sirve de comprobación.

2.76 Halla un polinomio de segundo grado, $R(x)$, que cumpla $R(1) = 5$, $R(-1) = 9$ y $R(0) = 4$.

$R(x)$ será de la forma $R(x) = ax^2 + bx + c$; veamos qué valores toma en cada punto:

$$R(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c = 5$$

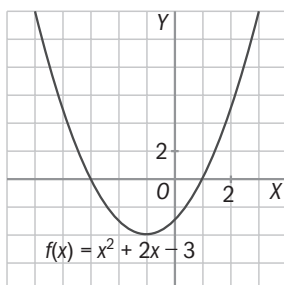
$$R(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = a - b + c = 9$$

$$R(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sumamos } 2a + 2c = 14 \Rightarrow 2a + 2 \cdot 4 = 14 \Rightarrow 2a = 14 - 8 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \\ \text{Resto: } 2b = -4 \Rightarrow b = -2 \\ c = 4 \end{array} \right\}$$

El polinomio resultante es: $R(x) = 3x^2 - 2x + 4$

2.77 Observa la gráfica de $y = f(x)$ y halla las raíces del polinomio $f(x) = x^2 + 2x - 3$.



Las raíces de este polinomio coinciden con los puntos de corte de la gráfica con el eje OX , es decir, $x = 1$ y $x = -3$.

2.78 Estudia el signo de este polinomio por el procedimiento que se indica a continuación.

$$Q(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

- a) Encuentra sus ceros.
 b) Divide la recta real en los intervalos que tienen por extremos esos ceros.
 c) Elige un punto en cada uno de esos intervalos y calcula el valor numérico de $Q(x)$ en ese punto. El signo de este valor numérico es el signo de $Q(x)$ en todo el intervalo.

a) Ceros en $x = -2, x = 1$ y $x = 3$

b) Intervalos $x \leq -2, -2 < x \leq 1, 1 < x \leq 3, x > 3$ (la respuesta no es única, ya que el valor "=" se puede considerar en un intervalo o en el siguiente)

c) Aunque el punto elegido y el valor obtenido en cada intervalo no tienen por qué coincidir, el signo sí.

$$x = -3 \quad Q(-3) = (-3 + 2)(-3 - 1)(-3 - 3) = (-1) \cdot (-4) \cdot (-6) < 0 \Rightarrow \text{para } x \leq -2 \text{ } Q(x) \text{ es negativo.}$$

$$x = 0 \quad Q(0) = (0 + 2)(0 - 1)(0 - 3) = 2 \cdot (-1) \cdot (-3) > 0 \Rightarrow \text{para } -2 < x \leq 1 \text{ } Q(x) \text{ es positivo.}$$

$$x = 2 \quad Q(2) = (2 + 2)(2 - 1)(2 - 3) = 4 \cdot 1 \cdot (-1) < 0 \Rightarrow \text{para } 1 < x \leq 3 \text{ } Q(x) \text{ es negativo.}$$

$$x = 4 \quad Q(4) = (4 + 2)(4 - 1)(4 - 3) = 6 \cdot 3 \cdot 1 > 0 \Rightarrow \text{para } x > 3 \text{ } Q(x) \text{ es positivo.}$$

2.79 La expresión que nos da la posición, s , de un objeto que sigue un movimiento uniformemente acelerado es: $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$

Donde a es la aceleración; v_0 , la velocidad inicial; s_0 , la posición inicial, y t , el tiempo.

a) ¿Puede el polinomio $M(t) = 5t^2 + 6t + 3$ describir un movimiento uniformemente acelerado? Identifica en, caso afirmativo, los valores de a , v_0 y s_0 .

b) ¿Puede el monomio $T(t) = 4,9t^2$ corresponder a un cuerpo que se deja caer en el vacío? ¿Por qué? ¿Cuál es el valor de a en este caso?

a) $M(t)$ puede identificar un movimiento uniformemente acelerado donde

$$\frac{1}{2}a = 5 \Rightarrow a = 10; v_0 = 6; s_0 = 3$$

b) Vamos a identificar los valores.

$$\frac{1}{2}a = 4,9 \Rightarrow a = 9,8 \text{ (valor correspondiente a la gravedad)}$$

$$v_0 = 0 \text{ (parte de velocidad inicial nula)}$$

$$s_0 = 0 \text{ (cuando comienza a caer no ha recorrido ningún espacio)}$$

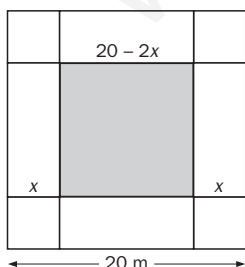
2.80 Un Ayuntamiento quiere construir un depósito metálico de agua.

Disponen de una pieza cuadrada de metal de 20 x 20 metros de la que cortan cuatro cuadrados de lado x en las cuatro esquinas, y levantan los cuatro rectángulos resultantes para formar los laterales del depósito, soldando las esquinas.

a) ¿Qué polinomio $V(x)$ expresa el volumen que puede acumular el depósito?

b) Halla los valores numéricos de V en $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 , y después dibuja los puntos $[x, V(x)]$.

c) ¿Podrías averiguar para qué valor de x el depósito tiene el máximo volumen?



a) Área de la base: $(20 - 2x) \cdot (20 - 2x)$; altura: $x \Rightarrow V(x) = (20 - 2x)^2 \cdot x$

b) $x = 0 \Rightarrow V(0) = (20 - 2 \cdot 0)^2 \cdot 0 = 0$

$$x = 1 \Rightarrow V(1) = (20 - 2 \cdot 1)^2 \cdot 1 = 324$$

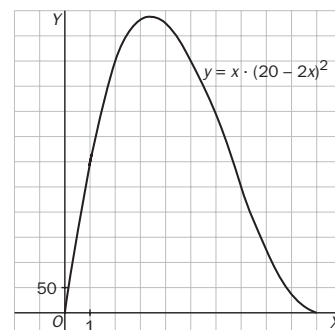
$$x = 2 \Rightarrow V(2) = (20 - 2 \cdot 2)^2 \cdot 2 = 512$$

$$x = 3 \Rightarrow V(3) = (20 - 2 \cdot 3)^2 \cdot 3 = 588$$

$$x = 4 \Rightarrow V(4) = (20 - 2 \cdot 4)^2 \cdot 4 = 576$$

$$x = 5 \Rightarrow V(5) = (20 - 2 \cdot 5)^2 \cdot 5 = 500$$

$$x = 6 \Rightarrow V(6) = (20 - 2 \cdot 6)^2 \cdot 6 = 384$$



c) En la gráfica podemos apreciar que cerca de $x = 3$ el volumen del depósito es máximo.

Operaciones con polinomios

2.81 Dados los polinomios $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 10x - 5$, $Q(x) = 6x^4 - 5x^3 + 8x - 5$ y $R(x) = -x^2 - 3x + 8$, aplica la propiedad distributiva y calcula estos productos.

a) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$

b) $Q(x) \cdot [R(x) - P(x)]$

a) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x) = (3x^3 - 4x^2 + 10x - 5) \cdot (6x^4 - 5x^3 + 8x - 5) + (3x^3 - 4x^2 + 10x - 5) \cdot (-x^2 - 3x + 8) = 18x^7 - 15x^6 + 24x^4 - 15x^3 - 24x^6 + 20x^5 - 32x^3 + 20 + 60x^5 - 50x^4 + 80x^2 - 50x - 30x^4 + 25x^3 - 40x + 25 - 3x^5 - 9x^4 + 24x^3 + 4x^4 + 12x^3 - 32x^2 - 10x^3 - 30x^2 + 80x + 5x^2 + 15x - 40 = 18x^7 - 39x^6 + 77x^5 - 61x^4 + 4x^3 + 43x^2 + 5x - 15$

b) $Q(x) \cdot [R(x) - P(x)] = Q(x) \cdot R(x) - Q(x) \cdot P(x) = (6x^4 - 5x^3 + 8x - 5) \cdot (-x^2 - 3x + 8) - (6x^4 - 5x^3 + 8x - 5) \cdot (3x^3 - 4x^2 + 10x - 5) = (-6x^6 - 18x^5 + 48x^4 + 5x^5 + 15x^4 - 40x^3 - 8x^3 - 24x^2 + 64x + 5x^2 + 15x - 40) - (18x^7 - 24x^6 + 60x^5 - 30x^4 - 15x^6 + 20x^5 - 50x^4 + 25x^3 + 24x^4 - 32x^3 + 80x^2 - 40x - 15x^3 + 20x^2 - 50x + 25) = (-6x^6 - 13x^5 + 63x^4 - 48x^3 - 19x^2 + 79x - 40) - (18x^7 - 39x^6 + 80x^5 - 56x^4 - 22x^3 + 100x^2 - 90x + 25) = -6x^6 - 13x^5 + 63x^4 - 48x^3 - 19x^2 + 79x - 40 - 18x^7 + 39x^6 - 80x^5 + 56x^4 + 22x^3 - 100x^2 + 90x - 25 = -18x^7 + 33x^6 - 93x^5 + 119x^4 - 26x^3 - 119x^2 + 169x - 65$

2.82 Completa la siguiente división de polinomios en tu cuaderno rellenando los coeficientes que faltan.

$$\begin{array}{r} 2x^4 + \square x^3 + \square x^2 - 4x + 1 \\ -\square x^4 + \square x^3 + \square x^2 \\ \hline x^3 - x^2 - 4x + 1 \\ -\square x^3 + \square x^2 + \square x \\ \hline + \square x^2 + \square x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 - x + 2 \\ \square x^2 + \square x \end{array}$$

Aplica la prueba de la división para comprobar que la has realizado correctamente.

$$\begin{array}{r} 2x^4 + (-1)x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \\ -2x^4 + 2x^3 - 4x^2 \\ \hline + x^3 - x^2 - 4x + 1 \\ - x^3 + x^2 - 2x \\ \hline - 6x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 - x + 2 \\ 2x^2 + x \end{array}$$

$d(x) \cdot c(x) + r(x) = (x^2 - x + 2) \cdot (2x^2 + x) + (-6x + 1) = 2x^4 + x^3 - 2x^3 - x^2 + 4x^2 + 2x - 6x + 1 = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = D(x)$

2.83 Utilizando la regla de Ruffini, averigua si $(x - 3)$ es factor del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 15$. ¿Tiene más factores dicho polinomio? ¿Por qué?

$\begin{array}{r rrrr} 1 & 1 & -4 & 8 & -15 \\ 3 & & 3 & -3 & 15 \\ \hline & 1 & -1 & 5 & 0 \end{array}$	<p>Obtenemos resto 0, es decir, $(x - 3)$ es factor de $P(x)$</p> <p>El cociente queda: $x^2 - x + 5$.</p> <p>Resolvemos: $x^2 - x + 5 = 0$.</p>
--	--

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-19}}{2}$. No existe solución; por tanto, $P(x)$ solo tiene un factor de primer grado.

Identidades notables

2.84 Desarrolla estas expresiones.

a) $(4x^2y^3 - 5y^2t)^2$

b) $(-3 + 6b^3c^4)^2$

c) $(2x - 3y)^3$

d) $(5x^3z + 7y^2t) \cdot (5x^3z - 7y^2t)$

a) $(4x^2y^3 - 5y^2t)^2 = 16x^4y^6 + 25y^4t^2 - 40x^2y^5t$

b) $(-3 + 6b^3c^4)^2 = 9 + 36b^6c^8 - 36b^3c^4$

c) $(2x - 3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

d) $(5x^3z + 7y^2t) \cdot (5x^3z - 7y^2t) = 25x^6z^2 - 49y^4t^2$

Raíces y factorización de polinomios

2.85 Indica si los valores $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$ son raíces del polinomio $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 + 7x - 6$.

$$P(2) = 2^5 + 2^4 - 7 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2 - 6 = 32 + 16 - 56 + 14 - 6 = 0; x_1 = 2 \text{ es raíz de este polinomio.}$$

$$P(1) = 1^5 + 1^4 - 7 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1 - 6 = 1 + 1 - 7 + 7 - 6 = -4; x_2 = 1 \text{ no es raíz de este polinomio.}$$

2.86 Halla el polinomio de cuarto grado cuyo coeficiente principal es 3 y que tiene por raíces $x_1 = 1$ (raíz doble), $x_2 = -2$ y $x_3 = 4$. Desarróllalo.

$$\begin{aligned} 3(x-1)^2(x+2)(x-4) &= 3(x^2-2x+1)(x^2-2x-8) = 3(x^4-2x^3-8x^2-2x^3+4x^2+16x+x^2-2x-8) = \\ &= 3(x^4-4x^3-3x^2+14x-8) = 3x^4-12x^3-9x^2+42x-24 \end{aligned}$$

2.87 Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^3 - x^2 - 5x - 3$

b) $3x^4 - 5x^3 - 33x^2 + 23x - 12$

a) $P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x+1) \cdot (x^2 - 2x - 3) = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x-3) = (x+1)^2 \cdot (x-3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -5 & -3 \\ -1 & & -1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array} \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} < \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$$

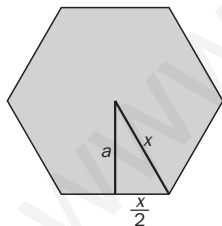
b) $Q(x) = 3x^4 - 5x^3 - 33x^2 + 23x - 12 = (x+3) \cdot (3x^3 - 14x^2 + 9x - 4) = (x+3) \cdot (x-4) \cdot (3x^2 - 2x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & -5 & -33 & 23 & -12 \\ -3 & & -9 & 42 & -27 & 12 \\ \hline & 3 & -14 & 9 & -4 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & -14 & 9 & -4 \\ 4 & & 12 & -8 & 4 \\ \hline & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$3x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{6} \Rightarrow \text{No tiene solución.}$$

AMPLIACIÓN

2.88 En un hexágono regular de lado x , ¿qué polinomio determina la expresión de su área?



En un hexágono regular, el radio y el lado coinciden. Con estos dos datos y sabiendo que la apotema corta el lado en su punto medio, podemos aplicar el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = a^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow a^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$A = \frac{6x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

2.89 Halla el polinomio de tercer grado que cumple estas tres condiciones.

- Su coeficiente principal es 8.
- Es divisible por $2x^2 + 1$.
- El resto de su división entre $(x + 2)$ es 56.

En este polinomio, un factor es $(2x^2 + 1)$; para que su coeficiente principal sea 8, multiplicamos el factor por 4. Por último, para que tenga grado 3 deberemos multiplicarlo por un binomio de grado 1 de la forma $(x + b)$, quedando:

$$P(x) = 4(2x^2 + 1)(x + b).$$

Aplicamos por último el teorema del resto para calcular b :

$$P(-2) = 4(2 \cdot (-2)^2 + 1)(-2 + b) = 4 \cdot 9(-2 + b) = 36(-2 + b) = 56 \Rightarrow -2 + b = \frac{56}{36} = \frac{14}{9} \Rightarrow b = \frac{14}{9} + 2 \Rightarrow b = \frac{32}{9}$$

Entonces, $P(x) = 4(2x^2 + 1)\left(x + \frac{32}{9}\right)$

2.90 Demuestra que el polinomio $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ no toma valores numéricos negativos para ningún valor de x .

Factorizamos el polinomio usando Ruffini y observando que aparece el cubo de un binomio:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ -1 & & -1 & -3 & -3 & -1 \\ \hline & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x + 1) \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = (x + 1) \cdot (x + 1)^3 = (x + 1)^4$$

Un número elevado a cuatro nunca puede ser negativo.

2.91 Si $N(x) = 8x^3 + ax^2 + 54x + b$, calcula a y b para que $N(x)$ sea un cubo perfecto. En ese caso, ¿qué polinomio al cubo da como resultado $N(x)$?

$$8x^3 + ax^2 + 54x + b = (2x + c)^3; (2x + c)^3 = 8x^3 + 12cx^2 + 6c^2x + c^3$$

Igualando coeficientes:

$$6c^2 = 54 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = \pm 3$$

$$12c = a \Rightarrow 12 \cdot 3 = a \Rightarrow a = 36 \text{ ó } 12 \cdot (-3) = a \Rightarrow a = -36$$

$$b = c^3 \Rightarrow b = 27 \text{ ó } b = -27$$

$$N(x) = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 = (2x + 3)^3 \quad \text{o} \quad N(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = (2x - 3)^3$$

2.92 Demuestra que la suma de la unidad más la suma de los cuadrados de tres números consecutivos es divisible entre tres.

$$1 + x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 3x^2 + 6x + 6 = 3(x^2 + 2x + 2) \Rightarrow \text{Es múltiplo de 3.}$$

2.93 Halla a y b para que $T(x)$ sea divisible entre $A(x)$ en estos dos casos.

a) $T(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 9$ y $A(x) = x^2 - 9$

b) $T(x) = 2x^4 + ax^3 - x^2 + bx - 1$ y $A(x) = x^2 - 1$

a) $A(x) = x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$; tendrá que ser divisible entre $(x + 3)$ y entre $(x - 3)$.

$$\left. \begin{array}{l} T(3) = 3 \cdot 3^3 + a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 9 = 81 + 9a + 3b + 9 = 9a + 3b + 90 = 0 \\ T(-3) = 3 \cdot (-3)^3 + a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + 9 = -81 + 9a - 3b + 9 = 9a - 3b - 72 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Sumamos } 18a + 18 = 0; a = -1 \\ \text{Resto: } 6b + 162 = 0; b = -27 \end{array}$$

b) $A(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$; tendrá que ser divisible entre $(x + 1)$ y entre $(x - 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} T(1) = 2 \cdot 1^4 + a \cdot 1^3 - 1^2 + b \cdot 1 - 1 = 2 + a - 1 + b - 1 = a + b = 0 \\ T(-1) = 2 \cdot (-1)^4 + a \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + b \cdot (-1) - 1 = 2 - a - 1 - b - 1 = -a - b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Tiene infinitas soluciones, la única condición será: } a = -b$$

2.94 Completa en tu cuaderno esta división.

$$\begin{array}{r|rrrr} \square & -1 & \square & 1 & \square \\ & & \square & \square & \square \\ \hline & \square & 2 & -3 & -4 \end{array}$$

Llamamos $(x - a)$ al divisor y completaremos las cantidades que nos sea posible.

$$\begin{array}{r|rrrr} a & -1 & \square & 1 & \square \\ & & -a & 2a & -3a \\ \hline & -1 & 2 & -3 & -4 \end{array}$$

Obtenemos la ecuación $1 + 2a = -3$ Entonces, $a = -2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 2 & -2 & 1 & -4 & -6 \\ -2 & & & 2 & -4 & 6 & \\ \hline & -1 & 2 & -3 & -4 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 1 & -10 \\ -2 & & & 2 & -4 & 6 \\ \hline & -1 & 2 & -3 & -4 & & \end{array}$$

2.95 Factoriza el numerador y el denominador para encontrar una expresión simplificada de la fracción

algebraica $\frac{L(x)}{R(x)}$, si $L(x) = 3x^3 - 16x^2 + 17x - 4$ y $R(x) = 2x^3 - 13x^2 + 23x - 12$.

$$L(x) = 3x^3 - 16x^2 + 17x - 4 = 3(x-1)(x-4)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

$$1 \begin{array}{ccc|ccc} 3 & -16 & 17 & -4 & & & \\ & 3 & -13 & 4 & & & \\ \hline 3 & -13 & 4 & 0 & & & \end{array} \quad 3x^2 - 13x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 48}}{6} = \frac{13 \pm 11}{6} < \frac{4}{\frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$$

$$R(x) = 2x^3 - 13x^2 + 23x - 12 = 2(x-1)(x-4)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$1 \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -13 & 23 & -12 & & & \\ & 2 & -11 & 12 & & & \\ \hline 2 & -11 & 12 & 0 & & & \end{array} \quad 2x^2 - 11x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{4} = \frac{11 \pm 5}{4} < \frac{4}{\frac{6}{4} = \frac{3}{2}}$$

$$\frac{L(x)}{R(x)} = \frac{3(x-1)(x-4)\left(x - \frac{1}{3}\right)}{2(x-1)(x-4)\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)}{2\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{3x - 1}{2x - 3}$$

2.96 Estudia el signo del polinomio $P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$ según el proceso de la actividad número 78.

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x = x(x^2 + 3x - 10) = x(x-2)(x+5)$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} < \frac{2}{-5}$$

Si $x < -5 \Rightarrow$ Por ejemplo $x = -6 \Rightarrow P(-6) = (-6) \cdot (-6 - 2) \cdot (-6 + 5) = (-6) \cdot (-8) \cdot (-1) < 0 \Rightarrow P(x)$ es negativo.

Si $-5 \leq x < 0 \Rightarrow$ Por ejemplo $x = -1 \Rightarrow P(-1) = (-1) \cdot (-1 - 2) \cdot (-1 + 5) = (-1) \cdot (-3) \cdot (4) > 0 \Rightarrow P(x)$ es positivo.

Si $0 \leq x < 2 \Rightarrow$ Por ejemplo $x = 1 \Rightarrow P(1) = (1) \cdot (1 - 2) \cdot (1 + 5) = (1) \cdot (-1) \cdot (6) < 0 \Rightarrow P(x)$ es negativo.

Si $x \geq 2 \Rightarrow$ Por ejemplo $x = 3 \Rightarrow P(3) = (3) \cdot (3 - 2) \cdot (3 + 5) = (3) \cdot (1) \cdot (8) > 0 \Rightarrow P(x)$ es positivo.

2.97 La gráfica de la función polinómica $y = f(x)$ es la siguiente.

¿Cuál de los siguientes puede ser $f(x)$?

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

b) $f(x) = x^3 - 4x$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

La gráfica corta el eje OX en $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

a) $f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 + 6 = 1 - 4 + 1 + 6 = 4 \neq 0$.

No corresponde.

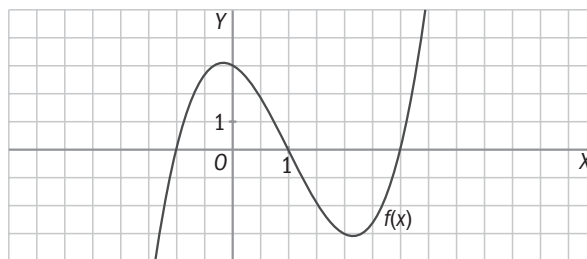
b) $f(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1) = -1 + 4 \neq 0$. No corresponde.

c) $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 1 + 3 = -1 - 3 + 1 + 3 = 0$

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 1 - 3 - 1 + 3 = 0$

$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 3 + 3 = 27 - 27 - 3 + 3 = 0$

Corresponde con la gráfica.



2.98 La suma de las raíces de un polinomio de grado 2 es 2, y su producto, -3 . ¿Cuál es el polinomio sabiendo que su coeficiente de grado 2 es 1?

Será de la forma $(x - a) \cdot (x - b) = x^2 - ax - bx + ab = x^2 - (a + b)x + ab$.

Sabemos que $a + b = 2$, y $a \cdot b = -3$.

Sustituimos: $x^2 - 2x - 3$.

2.99 Si $M(-1) = 5$, $M\left(\frac{1}{2}\right) = 5$, $M(-4) = 5$ y $M(12) = 5$, y el grado de $M(x)$ cuatro, ¿cuál es su expresión?

Buscamos un polinomio de grado 4, que se anule en -1 , $\frac{1}{2}$, -4 , 12 , y le sumamos 5 para que en esos valores su valor sea 5:

$$M(x) = (x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 4)(x - 12) + 5$$

2.100 Transformaciones en una fracción

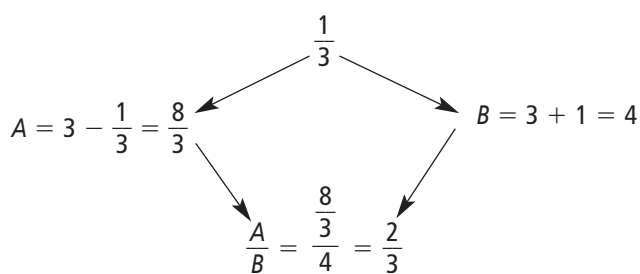
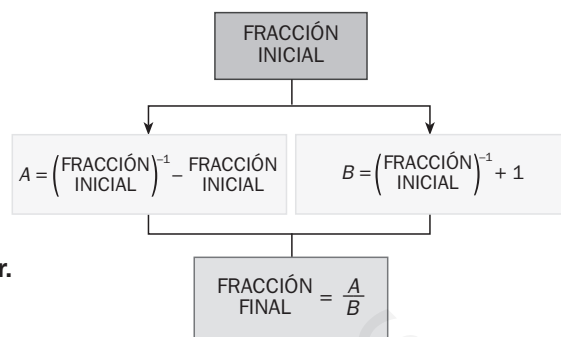
Dada una fracción inicial cualquiera, realizamos las siguientes transformaciones sucesivas.

a) Aplica las transformaciones a las fracciones:

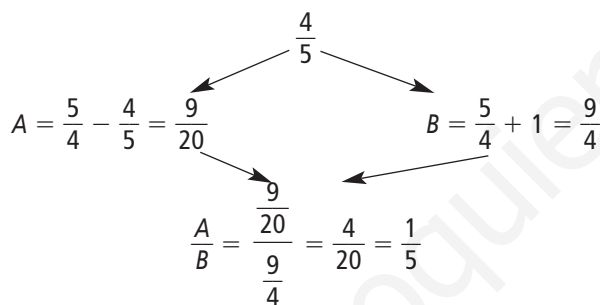
$$\frac{1}{3}, \frac{4}{5} \text{ y } \frac{7}{10}$$

b) ¿Qué relación verifican las fracciones inicial y final?

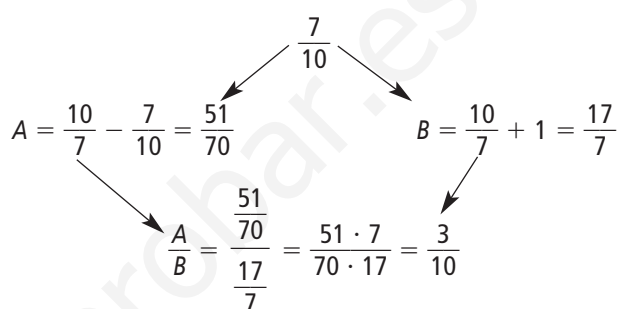
Demuestra, a partir de una fracción genérica $\frac{a}{b}$, la conjetura que has obtenido en el apartado anterior.



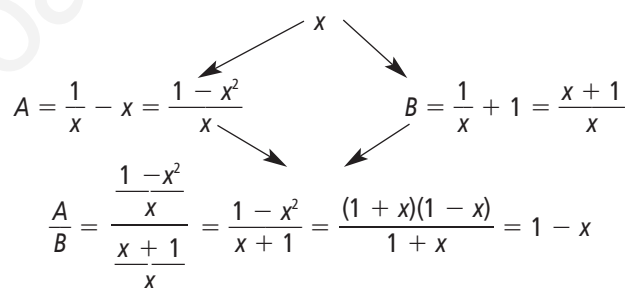
$$\text{Relación: } 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



$$\text{Relación: } 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$



$$\text{Relación: } 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$



Vemos que se cumple la relación.

2.101 Cambio de dimensiones

Esther, Elvira y Emilia han heredado de su abuelo el terreno que aparece en la figura, que tiene forma cuadrada de lado a .

A Esther le corresponde la franja vertical de x metros; a Elvira, la franja horizontal de y metros, y a Emilia, el resto.

Escribe mediante polinomios las siguientes medidas.

- La superficie de terreno correspondiente a Emilia.
- El área que heredan Esther y Elvira. Calcula la relación entre estas dos áreas si el terreno inicial tiene de lado 100 metros, y las anchuras de las franjas son de 30 y 40 metros, respectivamente.



- Esther: ax
Elvira: $y \cdot (a - x)$
Emilia: $(a - x) \cdot (a - y)$
- Esther = $100 \cdot 30 = 3000 \text{ m}^2$
Elvira = $40 \cdot (100 - 30) = 2800 \text{ m}^2$
Emilia = $(100 - 30) \cdot (100 - 40) = 4200 \text{ m}^2$

AUTOEVALUACIÓN

2.A1 Transcribe las dos siguientes expresiones verbales al lenguaje algebraico.

- a) La multiplicación de tres números consecutivos.
 b) El perímetro de un rectángulo de base b y altura h .

a) $x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$

b) $2b + 2h$

2.A2 Calcula el valor numérico del siguiente polinomio para $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$. $P(x) = \frac{x^3}{2} - 2(x^2 - 1)$

$$P(2) = \frac{2^3}{2} - 2(2^2 - 1) = 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$P(-1) = \frac{(-1)^3}{2} - 2((-1)^2 - 1) = \frac{-1}{2}$$

2.A3 Si $P(x) = 3x^2 - 2x + 4$, $Q(x) = -2x^3 - x^2 + 5x - 1$ y $R(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2$, calcula estas operaciones.

a) $P(x) - Q(x) + R(x)$

b) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$

¿Qué grado tienen los polinomios resultantes?

a) $P(x) - Q(x) + R(x) = (3x^2 - 2x + 4) - (-2x^3 - x^2 + 5x - 1) + (x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2) = 3x^2 - 2x + 4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 1 + x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = x^4 + x^3 + 8x^2 - 4x + 3 \Rightarrow$ Grado 4

b) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = (3x^2 - 2x + 4) \cdot [(-2x^3 - x^2 + 5x - 1) + (x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2)] = (3x^2 - 2x + 4) \cdot (x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 8x - 3) = 3x^6 - 9x^5 + 9x^4 + 24x^3 - 9x^2 - 2x^5 + 6x^4 - 6x^3 - 16x^2 + 6x + 4x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 32x - 12 = 3x^6 - 11x^5 + 19x^4 + 6x^3 - 13x^2 + 38x - 12 \Rightarrow$ Grado 6

2.A4 Realiza las siguientes divisiones de polinomios.

a) $(5x^4 - 3x^2 + x - 1) : (x^3 - x - 1)$

b) $(4x^3 - 2x + 2) : (x^2 + x + 1)$

¿Podrías aplicar la regla de Ruffini? ¿Por qué?

$$\begin{array}{r|l} 5x^4 - 3x^2 + x - 1 & x^3 - x - 1 \\ -5x^4 + 5x^2 + 5x & 5x \\ \hline 2x^2 + 6x - 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 2x + 2 & x^2 + x + 1 \\ -4x^3 - 4x^2 - 4x & 4x - 4 \\ \hline -4x^2 - 6x + 2 & \\ 4x^2 + 4x + 4 & \\ \hline -2x + 6 & \end{array}$$

No se puede aplicar Ruffini porque los divisores no tienen grado 1.

2.A5 Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a) $(2x^3 + 4x^2 - 5x - 3) : (x - 2)$

b) $(x^4 - 3x^2 + 4x - 2) : (x + 3)$

Indica los polinomios cociente y resto.

$$\begin{array}{r|rrrr} a) & 2 & 4 & -5 & -3 \\ 2 & & 4 & 16 & 22 \\ \hline & 2 & 8 & 11 & 19 \end{array}$$

Cociente: $2x^2 + 8x + 11$

Resto: 19

$$\begin{array}{r|rrrrr} b) & 1 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ -3 & & -3 & 9 & -18 & 42 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & -14 & 40 \end{array}$$

Cociente: $x^3 - 3x^2 + 6x - 14$

Resto: 40

