

Vectores

Vector fijo y vector libre

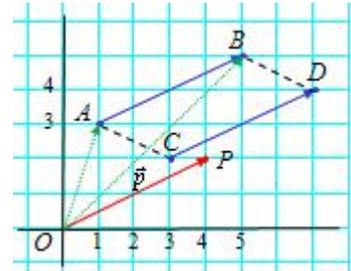
El vector que tiene por origen el punto A y por extremo el punto B , se llama vector fijo \overrightarrow{AB} .

- Módulo del vector \overrightarrow{AB} es la longitud del segmento AB . Se denota $|\overrightarrow{AB}|$. Se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras.

- Dirección de \overrightarrow{AB} es la de la recta que contiene a los puntos A y B .

- Sentido de \overrightarrow{AB} es el que indica el traslado de A a B .

- Dos vectores fijos son equipolentes si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Si \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} son equipolentes, entonces el polígono de vértices A, B, D y C (en ese orden) es un paralelogramo.



- Se llama vector libre a un vector y a todos los equipolentes a él. Así, en la figura los vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} y \overrightarrow{OP} son el mismo libre. El vector $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, con origen en O y extremo en P puede ser el representante de todos ellos. La ventaja de este último consiste en que para determinarlo basta con dar sólo las coordenadas del punto P , extremo del vector.

Ejemplo:

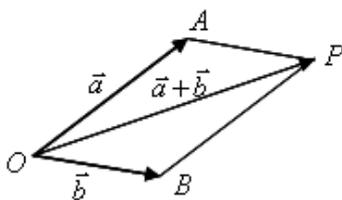
El vector \overrightarrow{AB} de extremos $A(1, 3)$ y $B(5, 5)$ es equipolente al vector \overrightarrow{CD} , de extremos $C(3, 2)$ y $D(7, 4)$; y ambos equipolentes al vector \overrightarrow{OP} con origen en $O(0, 0)$ y extremo en $P(4, 2)$. Todos ellos definen al vector $\vec{p} = (4, 2)$.

Puede observarse que las coordenadas de $\vec{p} = (4, 2)$ se obtienen restando las de los puntos $B(5, 5)$ y $A(1, 3)$, o las de los puntos $D(7, 4)$ y $C(3, 2)$. Esto es: $\overrightarrow{AB} = (5, 5) - (1, 3) = (4, 2)$; o también, $\overrightarrow{CD} = (7, 4) - (3, 2) = (4, 2)$.

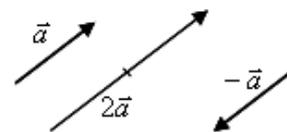
Nota: Como regla mnemotécnica puede servir: $\overrightarrow{AB} = \text{punto } B(5, 5) - \text{punto } A(1, 3)$.

Operaciones con vectores libres: suma, resta y multiplicación de un vector por un número

- Interpretación geométrica de las operaciones con vectores libres



Suma y resta de vectores



Multiplicación de un vector por un número

- Coordenadas de los vectores suma, resta o del producto:

Si: $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$, entonces:

- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

- $\vec{a} - \vec{b} = (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

- $\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2)$. Si $\lambda > 0$, $\lambda \vec{a}$ tiene el mismo sentido que \vec{a} ; si $\lambda < 0$, sentido contrario.

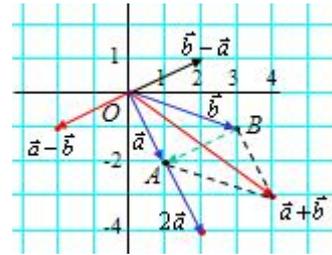
Ejemplo:

Si $A = (1, -2)$ y $B = (3, -1)$, se tendrá: $\vec{a} = (1, -2)$; $\vec{b} = (3, -1)$;

- $\vec{a} + \vec{b} = (1, -2) + (3, -1) = (4, -3)$.
- $\vec{a} - \vec{b} = (1, -2) - (3, -1) = (-2, -1)$.
- $2\vec{a} = 2(1, -2) = (2, -4)$

Puede observarse que:

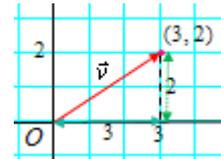
- $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b} = (1, -2) - (3, -1) = (-2, -1)$;
- $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (3, -1) - (1, -2) = (2, 1)$



Módulo de un vector

Es su longitud. Se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras.

- El módulo de un vector $\vec{v} = (a_1, b_1)$, se define como: $|\vec{v}| = +\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$.



Ejemplo:

a) Si $\vec{v} = (3, 2)$, $|\vec{v}| = +\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. b) Si $\vec{v} = (2, -1)$, $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos A y B , $d(A, B)$, es igual al módulo del vector \overrightarrow{AB} . Si las coordenadas de esos puntos fuesen $A = (a_1, b_1)$ y $B = (a_2, b_2)$, entonces

$$\overrightarrow{AB} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1) \Rightarrow d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

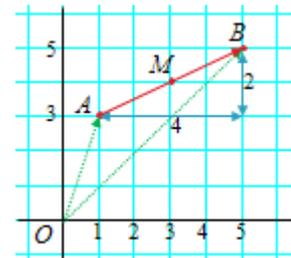
Ejemplo:

Si $A = (1, 3)$ y $B = (5, 5)$, la distancia, $d(A, B)$ es:

$$d(A, B) = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{5}$$

Observa que coincide con el módulo del vector \overrightarrow{AB} y del vector \overrightarrow{BA} :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (3, -1) - (1, -2) = (2, 1).$$



Punto medio de un segmento de extremos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$:

$$M = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right).$$

Ejemplo:

Para los puntos $A = (1, 3)$ y $B = (5, 5)$ el punto medio es $M = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+5}{2} \right) = (3, 4)$.