

SOLUCIONES: PROBLEMAS CON ECUACIONES E INECUACIONES

1. Los lados de un rectángulo se diferencian en 2 m. Si aumentáramos 2 m cada lado, el área se incrementaría en 40 m². Halla las dimensiones del polígono.

Sean x = lado menor del polígono $\rightarrow x + 2$ = lado mayor

y = área del polígono

$$\left. \begin{array}{l} x(x+2) = y \\ (x+2)(x+4) = y+40 \end{array} \right\} \rightarrow (x+2)(x+4) = x(x+2) + 40 \rightarrow x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x + 40$$

$$4x = 32 \rightarrow x = 8 \rightarrow y = 8 \cdot 10 = 80$$

Los lados del polígono miden 8 y 10 m, respectivamente

2. Calcula un número, sabiendo que la suma de sus cifras es 14, y que si se invierte el orden en que están colocadas, el número disminuye en 18 unidades.

Sean x = la cifra de las decenas

y = cifra de la unidades

Número: $10x + y$

Invirtiendo las cifras, el número es: $10y + x$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 14 \\ 10y + x + 18 = 10x + y \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 14 \\ -9x + 9y = -18 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 14 \\ -x + y = -2 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{2y = 12}{2y = 12} \rightarrow y = 6 \rightarrow x = 8$$

El número es 68

3. El alquiler de una tienda de campaña cuesta 80 € al día. Inés está preparando una excursión con sus amigos y hace la siguiente reflexión: «Si fuéramos tres amigos más, tendríamos que pagar 6 € menos cada uno». ¿Cuántos amigos van de excursión?

Sean x = número de amigos

y = dinero que paga cada uno

$$\left. \begin{array}{l} xy = 80 \\ (x+3)(y-6) = 80 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} xy = 80 \\ \cancel{xy} + 3y - 6x - 18 = 80 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} xy = 80 \\ y - 2x = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} xy = 80 \\ y = 2x + 6 \end{array} \right\}$$

$$(2x+6)x = 80 \rightarrow 2x^2 + 6x - 80 = 0 \rightarrow x^2 + 3x - 40 = 0 \rightarrow (x+8)(x-5) = 0 \rightarrow x = 5, x = -8$$

Solución válida: $x = 5 \rightarrow y = 10 + 6 = 16$

Van de excursión 5 amigos.

4. Jacinto está cercado un terreno de forma rectangular. Cuando lleva puesto alambre a dos lados consecutivos de la tierra, se da cuenta que ha gastado 170 m de alambre. Si sabe que la diagonal del rectángulo mide 130 m, ¿cuáles son las dimensiones y el área del terreno?

Sean x , y las dimensiones del terreno

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 170 \\ x^2 + y^2 = 130^2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 170 - x \\ x^2 + y^2 = 130^2 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 + (170 - x)^2 = 130^2$$

$$x^2 + 28900 - 340x + x^2 = 16900 \rightarrow 2x^2 - 340x + 12000 = 0 \rightarrow x^2 - 170x + 6000 = 0$$

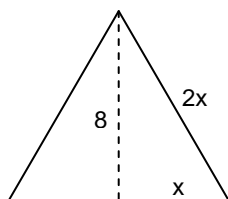
$$x = \frac{170 \pm 70}{2} = \begin{cases} x = 120 \rightarrow y = 50 \\ x = 50 \rightarrow y = 120 \end{cases}$$

Las dimensiones del terreno son 120 x 50

5. La apotema de un hexágono regular mide 8 cm. Determina la medida de su lado y de su área.

El hexágono regular se divide en 6 triángulos equiláteros, donde la apotema del hexágono es una de las alturas del triángulo.

Sea $2x$ = la medida del lado.

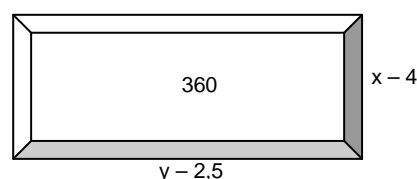
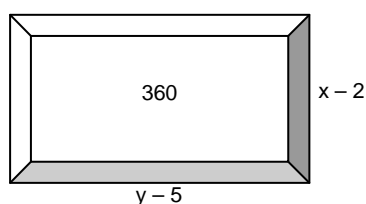


Aplicando el teorema de Pitágoras: $4x^2 = 64 + x^2$

$$3x^2 = 64 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Luego, la medida del lado es: $2x = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm

6. Averigua las dimensiones que tiene un pliego rectangular de papel, sabiendo que si dejamos los márgenes laterales de 1 cm y los verticales de 2,5 cm, el área es 360 cm^2 , y que si los márgenes laterales son de 2 cm y los verticales son de 1,25 cm, el área es la misma.



Sean x = lado vertical del pliego

y = lado horizontal del pliego

$$\left. \begin{array}{l} (x-2)(y-5) = 360 \\ (x-4)(y-2,5) = 360 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} xy - 2y - 5x = 350 \\ xy - 2,5x - 4y = 350 \end{array} \right\} E2 = E2 - E1 \rightarrow \begin{cases} xy - 2y - 5x = 350 \\ 2,5x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow y = 1,25x$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$1,25x^2 - 2,5x - 5x = 350 \rightarrow 1,25x^2 - 7,5x - 350 = 0 \rightarrow 125x^2 - 750x - 35000 = 0 \rightarrow x^2 - 6x - 280 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm 34}{2} = \begin{cases} x = 20 \rightarrow y = 25 \\ x = -14 \text{ No válida} \end{cases} \rightarrow \text{las dimensiones son 20 y 25 cm}$$

7. Calcula un número entero, sabiendo que si al cuadrado del siguiente número le restamos ocho veces su inverso obtenemos 23.

Sea x = número buscado $\rightarrow x + 1 =$ su siguiente ; $\frac{1}{x} =$ su inverso

$$(x+1)^2 - \frac{8}{x} = 23 \rightarrow x(x^2 + 2x + 1) - 8 = 23x \rightarrow x^3 + 2x^2 + x - 23x - 8 = 0 \rightarrow x^3 + 2x^2 - 22x - 8 = 0$$

4	1	2	-22	-8
		4	24	8
	1	6	2	0

$$(x-4)(x^2 + 6x + 2) = 0$$

$$x^2 + 6x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -3 \pm \sqrt{7}$$

El número entero es 4.

8. Si aumentáramos en 4 cm la arista de un cubo, su volumen se multiplicaría por 8. Halla la medida de la arista.

Sea x = arista del cubo \rightarrow Volumen: x^3

$$(x+4)^3 = 8x^3 \rightarrow x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = 8x^3 \rightarrow -7x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = 0$$

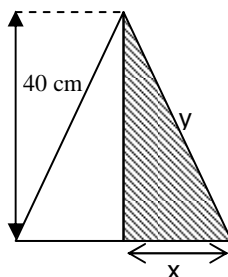
4	-7	12	48	64
		-28	-64	-64
	-7	-16	-16	0

$$(x-4)(7x^2 + 16x + 16) = 0$$

$$7x^2 + 16x + 16 = 0 \rightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{-192}}{14} \rightarrow \text{No tiene solución}$$

La arista mide 4 cm

9. Un triángulo isósceles tiene 160 cm de perímetro y la altura correspondiente al lado desigual mide 40 cm. Calcula los lados del triángulo y el área.



Sea x = la mitad de la medida del lado desigual

y = medida del lado igual

Perímetro es 160: $2x + 2y = 160 \Rightarrow 80 = x + y \Rightarrow y = 80 - x$

Altura es 40: $y^2 = 40^2 + x^2$

Planteamos la ecuación: $(80 - x)^2 = 40^2 + x^2$

$$6400 + x^2 - 160x = 1600 + x^2 \Rightarrow 160x = 4800 \Rightarrow x = 30 \text{ cm}$$

Los lados miden 60 cm y 50 cm

$$\text{Área} = \frac{40 \cdot 60}{2} = 1200 \text{ cm}^2$$

10. Hallar una fracción tal que si se le añade 1 al numerador se convierte en un tercio y añadiendo 1 a su denominador sea igual a un cuarto.

Sea x = numerador de la fracción
 y = denominador de la fracción

Si se añade 1 al numerador la fracción es un tercio: $\frac{x+1}{y} = \frac{1}{3} \rightarrow 3x + 3 = y$

Si se añade 1 al denominador la fracción es un cuarto: $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{4} \rightarrow 4x = y + 1 \rightarrow y = 4x - 1$

Planteamos la ecuación: $3x + 3 = 4x - 1 \rightarrow 4x - 3x = 3 + 1 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 12 + 3 = 15$

La fracción es $\frac{4}{15}$.

11. Dos vacas y tres terneros valen lo mismo que dieciséis ovejas. Una vaca y cuatro ovejas valen igual que tres terneros. Tres terneros y ocho ovejas cuestan lo mismo que cuatro vacas. Averigua el precio de cada animal.

Sea x = precio de las vacas
 y = precio de los terneros
 z = precio de las ovejas

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 16z \\ x + 4z = 3y \\ 3y + 8z = 4x \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} E1: 2x + 3y - 16z = 0 \\ E2: x - 3y + 4z = 0 \\ E3: -4x + 3y + 8z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left[\begin{array}{l} E1 = E2 + E1 \\ E3 = E3 + E2 \end{array} \right] \rightarrow \left. \begin{array}{l} E1: 3x - 12z = 0 \\ E2: x - 3y + 4z = 0 \\ E3: -3x + 12z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E1: x = 4z \\ E2: 8z - 3y = 0 \rightarrow 3y = 8z \end{array} \right.$$

Una vaca cuesta igual que 4 ovejas y tres terneros cuesta igual que 8 ovejas.

12. Hallar un número de tres cifras, sabiendo: que la cifra de las unidades es igual al producto de las otras dos, que la cifra de las decenas es media proporcional entre las otras dos y que la inversa de la cifra de las centenas es igual a la inversa de la cifra de las decenas más el doble de la inversa de la cifra de las unidades.

Sea x = cifra de las centenas
 y = cifra de las decenas
 z = cifra de las unidades

Se llama media proporcional de dos números a y b a otro número c que verifique: $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$

$$\left. \begin{array}{l} xy = z \\ \frac{y}{x} = \frac{z}{y} \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} E1: xy = z \\ E2: y^2 = xz \\ E3: yz = xz + 2yx \end{array} \right\} \rightarrow \text{Sustituyendo } z \text{ de E1 en E3 y E2: } \left\{ \begin{array}{l} E1: xy = z \\ E2: y^2 = x^2y \\ E3: y^2x = x^2y + 2yx \end{array} \right.$$

Como hablamos de las inversas de las tres cifras, éstas son distintas de cero:

$$\begin{cases} E1: xy = z \\ E2: y^2 = x^2y \xrightarrow{:y} y = x^2 \\ E3: y^2x = x^2y + 2yx \xrightarrow{:yx} y = x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \rightarrow x^2 = x + 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = 2, x = -1.$$

Sólo es válida: $x = 2 \rightarrow y = 2^2 = 4$; $z = 2 \cdot 4 = 8$

Luego el número es 248.

13. El triple de un número menos su mitad es siempre mayor que 3. ¿Qué números cumplen esta propiedad?

Sea $x =$ número buscado

$$3x - \frac{x}{2} > 3 \rightarrow 6x - x > 6 \rightarrow 5x > 6 \rightarrow x > \frac{6}{5} \rightarrow \left(\frac{6}{5}, +\infty\right)$$

14. De un número se sabe que si a su cuadrado le restamos su mitad, se obtiene un número menor que 1. ¿Qué número puede ser?

$$x^2 - \frac{x}{2} < 1 \rightarrow 2x^2 - x - 2 < 0$$

$$\text{Resolvemos la ecuación } 2x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

La recta queda dividida en tres intervalos:

$$I_1 = \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right) ; I_2 = \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right) ; I_3 = \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$$

En cada intervalo la expresión $2x^2 - x - 2$ tiene el mismo signo, tomando un valor en cada intervalo estudiamos la solución:

$$x = -10 \rightarrow 2 \cdot (-10)^2 - (-10) - 2 > 0 \rightarrow \text{No es solución.}$$

$$x = 0 \rightarrow -2 < 0 \rightarrow \text{Es solución.}$$

$$x = 10 \rightarrow 2 \cdot 10^2 - 10 - 2 > 0 \rightarrow \text{No es solución.}$$

$$\text{Por tanto, la solución es } \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right)$$

15. a) ¿Es cierto que la suma de un número y de su cuadrado es siempre positiva?

b) ¿Qué números cumplen esa condición?

$$x + x^2 > 0 \rightarrow x(x + 1) > 0$$

$$\text{Resolvemos la ecuación } x + x^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = -1.$$

	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x	-	-	+	+
x + 1	-	+	+	+
x(x + 1)	+	-	+	+

La solución es $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

16. Determina para qué valores de x es posible realizar las operaciones indicadas:

a) $\sqrt{5-3x}$

Imponemos que $5-3x \geq 0 \rightarrow 5 \geq 3x \rightarrow x \leq \frac{5}{3} \rightarrow \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$

b) $\sqrt{4-3x-x^2}$

Imponemos que $4-3x-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2+3x-4 \leq 0 \rightarrow (x+4)(x-1) \leq 0$

	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	+	
$x+4$	-	+	+	
$(x-1)(x+4)$	+	-	+	

La solución es $[-4, 1]$

c) $\log(x^2-2x+1)$

Imponemos que $x^2-2x+1 > 0 \rightarrow (x-1)^2 > 0$

Se verifica para cualquier número real salvo para $x = 1$

d) $\log(6-x-x^2)$

Imponemos que $6-x-x^2 > 0 \rightarrow x^2+x-6 < 0 \rightarrow (x-2)(x+3) < 0$

	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	+	
$x+3$	-	+	+	
$(x-2)(x+3)$	+	-	+	

La solución es $(-3, 2)$