Ejercicios resueltos de trigonometría

1) Convierte las siguientes medidas de grados en radianes:

a) 45º
b) 60º
c) 180º
d) 270º
e) 30º
f) 225º
g) 150º
h) 135º
i) -90º
j) 720º

2) Expresa las siguientes razones trigonométricas en función de ángulos del primer cuadrante:

a) sen 150º
b) cos 210º
c) sen -60º
d) tg 200º
e) cos 240º
f) tg 800º

3) Sabiendo que sen 80º = 0,98, calcula el resto de las razones trigonométricas sin usar la calculadora.

4) Sabiendo que cos 20º = 0,94, calcula estas razones trigonométricas sin usar la calculadora.

a) sen 110º
b) cos 160º
c) sen 250º
d) cos -20º
e) tg 200º

5) Sabiendo que tg 40º = 0,84, calcula el resto de las razones trigonométricas sin usar la calculadora.

6) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $sen^2x - cos^2x = 0$
b) $senx \cdot (cosx + sen^2x) = senx$

Soluciones

1) *Convierte las siguientes medidas de grados en radianes:*

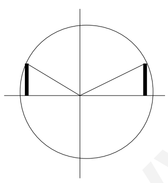
Recuerda que para convertir grados en radianes o viceversa sólo tienes que hacer una regla de tres: "si 360º son 2π radianes, *n* grados son *x* radianes". O lo que es lo mismo, en este ejercicio, multiplicar la cantidad de grados por 2π y dividir entre 360º (normalmente el π se deja como letra, no se opera).

a) 45º = $\pi/4$ rad
b) 60º = $\pi/3$ rad
c) 180º = π rad
d) 270º = $3\pi/2$ rad
e) 30º = $\pi/6$ rad
f) 225º = $5\pi/4$ rad
g) 150º = $5\pi/6$ rad
h) 135º = $3\pi/4$ rad
i) -90º = $-\pi/2$ rad
j) 720º = 4π rad

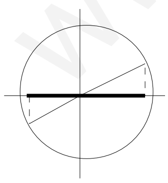
2) *Expresa las siguientes razones trigonométricas en función de ángulos del primer cuadrante:*

En estos ejercicios conviene que dibujes la circunferencia con los ejes de coordenadas y representes un ángulo del primer cuadrante y el otro que se te pide, para poder comparar los senos (proyecciones verticales del ángulo) y los cosenos (proyecciones horizontales), con sus respectivos signos.

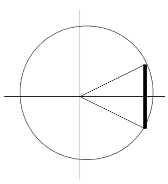
a) sen 150º = sen (180º – 30º) = sen 30º



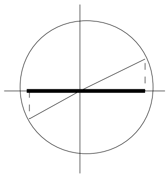
b) cos 210º = cos (180º + 30º) = - cos 30º



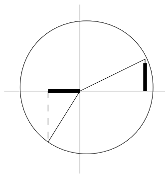
c) sen -60º = - sen (60º)



d) tg 200º = sen200º/cos200º = sen (180º+20º)/ cos (180º+20º) = -sen20º /-cos20º = tg20º



e) cos 240º = cos (270º – 30º) = -sen 30º



f) tg 800º = tg (80º) (dos vueltas enteras más 80º)

3) *Sabiendo que sen 80º = 0,98, calcula el resto de las razones trigonométricas sin usar la calculadora.*

Partimos de la relación fundamental en trigonometría:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Como sabemos cuánto vale el seno, calculamos el coseno:

$$sen^2 80 + cos^2 80 = 1$$
$$0{,}89^2 + cos^2 80 = 1$$
$$cos^2 80 = 1 – 0{,}97 = 0{,}03$$
$$cos80 = 0{,}17$$

La tangente es sen/cos. Por lo tanto,

$$tg80 = 0{,}89/0{,}17 = 5{,}24$$

(No coincide con la tangente hecha con calculadora, simplemente porque hemos perdido unos cuantos decimales por el camino)

Pregunta si el resto de las razones (secante, cosecante y cotangente) debes calcularlas. Si también te las pidieran, lo único que tienes que calcular son los inversos de los resultados anteriores.

4) *Sabiendo que cos 20º = 0,94, calcula estas razones trigonométricas sin usar la calculadora.*

Recuerda del ejercicio 2 cómo transformar en ángulos del primer cuadrante, y del ejercicio 3, cómo sacar el coseno cuando sabemos el seno o viceversa.

a) sen 110º = cos 20º = 0,94
b) cos 160º = - cos 20º = -0,94
c) sen 250º = - cos 20º = -0,94
d) cos -20º = cos 20º = 0,94
e) tg 200º = sen200º/cos200º = -sen20º/-cos20º = -0,34/-0,94 = 0,36

5) *Sabiendo que tg 40º = 0,84, calcula el resto de las razones trigonométricas sin usar la calculadora.*

Este ejercicio se parece al número 3, pero no puede resolverse de la misma manera, porque no conocemos ni el seno ni el coseno. Tenemos que hacer unos cuantos cálculos más. Empezamos con:

$$tg\alpha = sen\alpha/cos\alpha$$
$$tg40 = sen40/cos40$$
$$0{,}84 \cdot cos40 = sen40$$

Y esto lo llevamos a la otra relación fundamental:

$$sen^2 40 + cos^2 40 = 1$$
$$(0{,}84 \cdot cos40)^2 + cos^2 40 = 1$$

Resolviendo esta ecuación llegamos a 0,77. Una vez sabido el coseno, calculamos el seno en la ecuación:

$$0{,}84 \cdot cos40 = sen40$$

O en

$$sen^2 40 + cos^2 40 = 1$$

Donde más te guste. También hay otra relación fundamental, que es $\mathbf{sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha}$ con la que podemos calcular directamente la secante (que es la inversa del coseno), pero no aparece en todos los libros de texto.

__6)__ Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

La clave para resolver ecuaciones trigonométricas es convertir todas las razones a un mismo tipo (todos cosenos, por ejemplo), basándote en la relación fundamental $\mathbf{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$.

a) $sen^2x - cos^2x = 0$

$$sen^2x - (1 - sen^2x) = 0$$
$$2sen^2x - 1 = 0$$
$$sen^2x = 1/2$$
$$senx = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$$

Aquí es donde mucha gente se equivoca, porque si bien es cierto que el seno de 45º es ese valor, también el seno de 225º vale $\sqrt{2}/2$. Por lo tanto, nuestra solución debe ser

$$x = 45º + k180º$$

Es decir, 45º, más *k* veces 180º.

b) $senx \cdot (cosx + sen^2x) = senx$

$$senx \cdot cosx + sen^3x = senx$$

(dividiendo entre senx ambos términos)

$$cosx + sen^2x = 1$$

(cambiamos sen^2x por $1-cos^2x$)

$$cosx + (1-cos^2x) = 1$$
$$cosx + 1 - cos^2x = 1$$
$$-cos^2x + cosx = 0$$

Si cambiamos cosx por otra variable (cosx = t), tendremos una ecuación de segundo grado bastante fácil:

$$-t^2 + t = 0$$
$$t (-t + 1) = 0$$
$$t_1 = 0$$
$$t_2 = 1$$

Deshacemos el cambio de variable, y calculamos los ángulos correspondientes que cumplen las igualdades:

$$cosx = 0 \rightarrow x \text{ vale } 90º \text{ o } 270º\text{; por lo tanto, } x_1 = 90º + k \cdot 180º$$

$$cosx = 1 \rightarrow x \text{ vale } 0º \text{ o } 360º\text{; por lo tanto, } x_2 = 0º + k \cdot 360º$$