

EXAMEN DE TRIGONOMETRÍA RESUELTO

1. Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

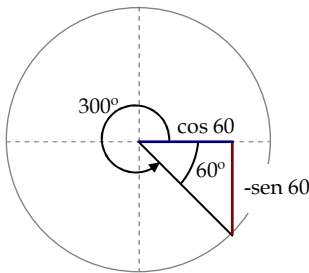
a) 1740°

Solución:

Como el ángulo es mayor que 360° lo tratamos del siguiente modo:

$$\left. \begin{array}{l} 1740 \\ 360 \end{array} \right\} \frac{360}{4} \Rightarrow 4 \text{ vueltas} \cdot 360^\circ + 300^\circ$$

El ángulo de 300° está en el 4º cuadrante y es equivalente a un ángulo de 60° para el que el seno es negativo y el coseno es positivo, tal como indica la figura adjunta:



Entonces:

- $\text{sen}(1750) = \text{sen}(300) = -\text{sen}(60) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{cos}(1750) = \text{cos}(300) = \text{cos}(60) = \frac{1}{2}$
- $\text{tg}(1750) = \frac{-\text{sen}(60)}{\text{cos}(60)} = -\sqrt{3}$
- $\text{cosec}(1750) = \frac{1}{-\text{sen}(60)} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$
- $\text{sec}(1750) = \frac{1}{\text{cos}(60)} = 2$
- $\text{cotg}(1750) = \frac{1}{-\text{tg}(60)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

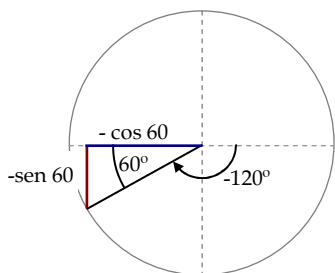
b) -840°

Solución:

Como el ángulo es mayor que 360° lo tratamos del siguiente modo:

$$\left. \begin{array}{l} -840 \\ -360 \end{array} \right\} \frac{360}{2} \Rightarrow -2 \text{ vueltas} \cdot 360^\circ - 120^\circ$$

El ángulo de -120° está en el tercer cuadrante y es equivalente a un ángulo de 60° para el que el seno y el coseno son negativos, tal como indica la figura adjunta:



Entonces:

- $\operatorname{sen}(-840) = \operatorname{sen}(-120) = -\operatorname{sen}(60) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\operatorname{cos}(-840) = \operatorname{cos}(-120) = -\operatorname{cos}(60) = -\frac{1}{2}$
- $\operatorname{tg}(-840) = \frac{-\operatorname{sen}(60)}{-\operatorname{cos}(60)} = \sqrt{3}$
- $\operatorname{cosec}(1750) = \frac{1}{-\operatorname{sen}(60)} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$
- $\operatorname{sec}(1750) = \frac{1}{-\operatorname{cos}(60)} = -2$
- $\operatorname{cotg}(1750) = \frac{1}{\operatorname{tg}(60)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2. Sabiendo que $\operatorname{cos} \alpha = \frac{1}{2}$ y que α está en el 4º cuadrante, halla las demás razones trigonométricas.

Solución:

Si α está en el 4º cuadrante entonces $\operatorname{cos} \alpha$ es positivo y $\operatorname{sen} \alpha$ es negativo.

El $\operatorname{sen} \alpha$ lo deducimos usando la relación fundamental de la trigonometría:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\text{Así: } \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

El resto de razones trigonométricas se obtiene de forma inmediata:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}; \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha} = 2; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

3. **Deduce** las dos igualdades siguientes utilizando la *fórmula fundamental de la trigonometría*.

a) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{sec}^2 x$

Solución:

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{cos}^2 x} + \frac{\operatorname{cos}^2 x}{\operatorname{cos}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \operatorname{sec}^2 x$$

b) $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

Solución:

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{\operatorname{cos}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

4. Demuestra que se cumple la siguiente igualdad:

$$\operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{cotg}(\alpha) - \frac{2\operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2(\alpha)}} = [\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)] \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{sec}(\alpha)} - \frac{1}{\operatorname{cosec}(\alpha)} \right)$$

Solución:

Vamos a manipular primeramente el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

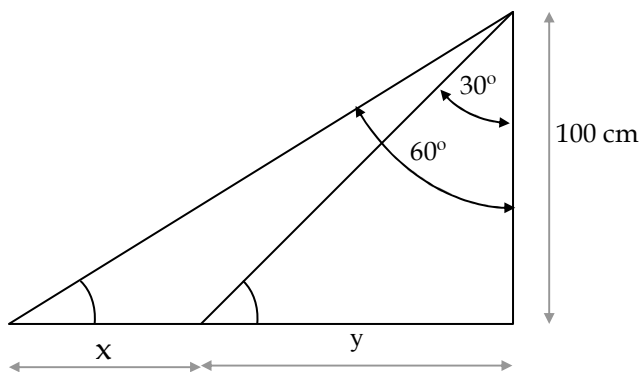
$$\begin{aligned} A &= \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{cotg}(\alpha) - \frac{2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2(\alpha)}} = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} - \frac{2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\alpha)}}} = 1 - \frac{2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2(\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}}} = \\ &= 1 - \frac{2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}}} = 1 - \frac{2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}}} = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(\alpha) \end{aligned}$$

Manipulamos el miembro de la derecha, que llamaremos B:

$$\begin{aligned} B &= [\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)] \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{sec}(\alpha)} - \frac{1}{\operatorname{cosec}(\alpha)} \right) = [\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)] \cdot [\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)] = \\ &= \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - \operatorname{sen}^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2(\alpha) \end{aligned}$$

Observamos que $A=B$, luego la identidad es cierta.

5. Calcula x e y



Solución:

Tenemos dos triángulos rectángulos. De cada uno de ellos obtendremos una ecuación trigonométrica.

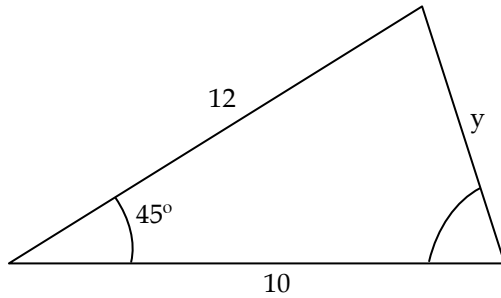
$$\operatorname{tg}30 = \frac{y}{100}$$

$$\operatorname{tg}60 = \frac{x+y}{100}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{100} \\ \sqrt{3} = \frac{x+y}{100} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{100}{\sqrt{3}} m = y \\ \sqrt{3} = \frac{x+y}{100} \end{array} \right] \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x + \frac{100}{\sqrt{3}}}{100} \Rightarrow x = \frac{200}{\sqrt{3}} m$$

6. Calcula el valor de y de este triángulo no rectángulo (las longitudes están expresadas en cm)



Solución:

Aplicamos el teorema del coseno:
 $y^2 = x^2 + z^2 - 2 \cdot x \cdot z \cdot \cos A$, en donde hemos denotado por x al lado de 10 cm y por z al lado de 12 cm.

Entonces:

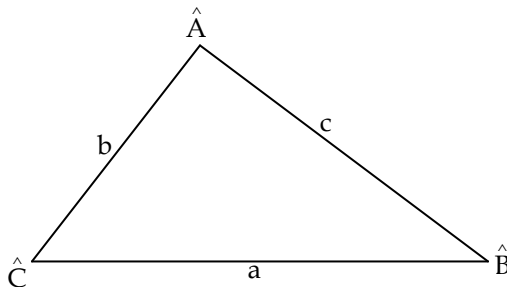
$$y^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{100 + 144 - 240 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{224 - 120 \cdot \sqrt{2}} = 7,4 \text{ m}$$

7. Resuelve el siguiente triángulo: $\hat{A} = 80^\circ$; $\hat{B} = 30^\circ$; $a = 26$ cm

Solución:

- Dibujamos un triángulo auxiliar para la resolución del problema.



- Valor del lado b:

Aplicamos el teorema del seno para obtenerlo:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} \Rightarrow \frac{26}{\text{sen}80} = \frac{b}{\text{sen}30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 26 \cdot \frac{1}{1,97} = 13,2 \text{ cm}$$

- Valor de \hat{C} :

$$\hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180 - (80 + 30) = 70$$

- Valor del lado c:

Aplicamos el teorema del coseno de forma conveniente para hallar el lado que nos interesa, la cuál es la siguiente: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$.

Despejamos c y sustituimos datos:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}} = \sqrt{26^2 + 13,2^2 - 2 \cdot 26 \cdot 13,2 \cdot \cos 70} = 24,8 \text{ cm}$$