1.- MEDIDA DE ÁNGULOS.

El **grado sexagesimal** (º) es cada una de las 360 partes iguales en las que se divide la circunferencia (submúltiplos: el minuto y el segundo).

El **radián** (rad) es la medida del ángulo central de una circunferencia que abarca un arco de longitud igual a la del radio (unidad en el SI).

Equivalencia entre grados y radianes: **$360^\circ = 2\pi$ rad**

1 Expresa en radianes los siguientes ángulos:

a) 30º **b)** 60º **c)** 330º **d)** 200º

2 Expresa en grados los siguientes ángulos:

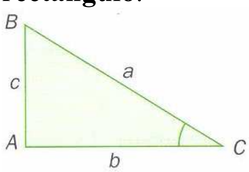
a) $\frac{7\pi}{3}$ rad **b)** $\frac{3\pi}{2}$ rad **c)** 4 rad **d)** 4π rad

2.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

Las razones trigonométricas son expresiones matemáticas que relacionan medidas de ángulos y de distancias. Se utilizan en muchas situaciones, como, por ejemplo, en el cálculo de alturas de montañas, anchuras de ríos, etc.

2.1.- Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

Sea el **triángulo rectángulo**:



El **seno** del ángulo agudo $\hat{C}$ es la razón entre la longitud del cateto opuesto al mismo y de la hipotenusa.

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

El **coseno** del ángulo agudo $\hat{C}$ es la razón entre la longitud del cateto contiguo y de la hipotenusa.

$$\cos\hat{C} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

La **tangente** del ángulo agudo $\hat{C}$ es la razón entre la longitud del cateto opuesto y del contiguo.

$$\text{tg}\,\hat{C} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{c}{b}$$

Razones trigonométricas inversas		
Cosecante de $\hat{C}$	**Secante de $\hat{C}$**	**Cotangente de $\hat{C}$**
$\text{cos ec}\,\hat{C} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\text{sen}\,\hat{C}}$	$\sec\hat{C} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\cos\hat{C}}$	$\text{cot g}\,\hat{C} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{c} = \frac{1}{\text{tg}\,\hat{C}}$

Ejemplos: - Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo: $\hat{A} = 90^\circ$, b = 10 cm y c = 12 cm.

- Calcula la altura de un edificio si el ángulo de elevación de su punto más alto, observado desde un punto del suelo situado a 20 m de su base, es de 50º.

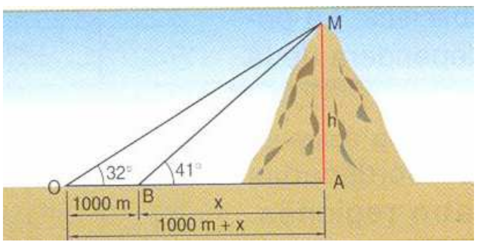
3 Calcula las razones trigonométricas de 45º.

4 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos:

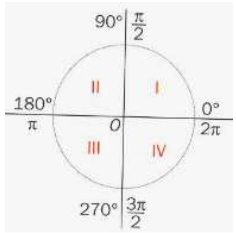
a) $\hat{A} = 90^\circ$, b = 5 cm y c = 9 cm **b)** $\hat{B} = 90^\circ$, b = 15 cm y c = 12

5 El ángulo de elevación del punto más alto de una antena, observado desde un punto del suelo situado a 50 m de su pie, es de 30º. Calcula la altura de la antena.

6 El ángulo de elevación del punto más alto de una montaña, observado desde un punto situado en tierra, es de 32º. Al aproximarse 1000 m en dirección a la montaña, el nuevo ángulo de elevación es de 41º. ¿Cuál es su altura si los dos puntos de observación están al nivel del mar?



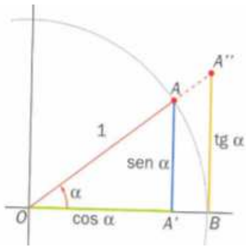
2.2.- Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.



Para representar ángulos comprendidos entre 0 y 360º, e incluso mayores de 360º o negativos, se utiliza la **circunferencia goniométrica**, es decir, la circunferencia de radio la unidad centrada en los ejes de coordenadas cartesianos.

Los **ángulos** se representan siempre desde el semieje positivo de abscisas y se consideran **positivos** si el giro se hace en el sentido contrario a las agujas del reloj y **negativos** en sentido contrario.

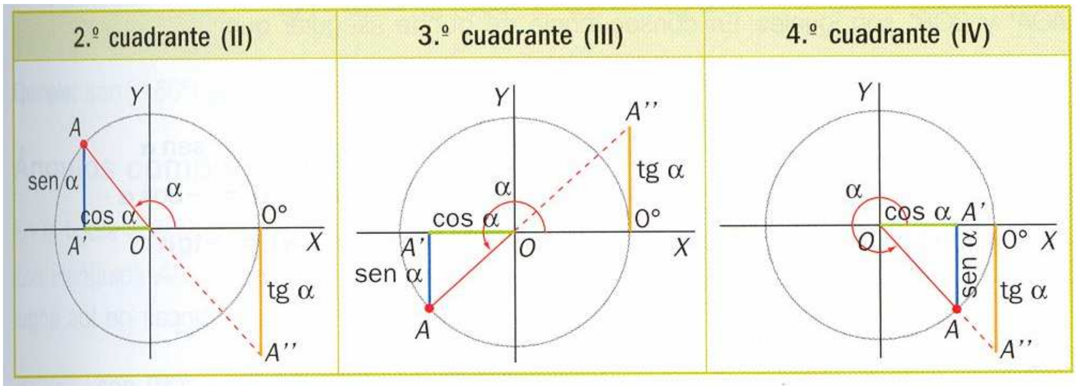
Utilizando esta representación, a todo ángulo se le puede asociar un ángulo positivo entre 0º y 360º, llamado **ángulo reducido** del primero.



Representando los ángulos en una circunferencia goniométrica, podemos determinar las razones trigonométricas en función de las coordenadas cartesianas de un punto.

En la figura hemos representado un ángulo del primer cuadrante α.
El **sen α** coincide con el valor de la **ordenada** del punto A, sen α = AA'.
El **cos α** coincide con el valor de la **abscisa** del punto A, cos α = OA'.
La tg α, por tanto coincide con el cociente entre la ordenada y la abscisa.

Por tanto, en el resto de los cuadrantes quedaría así (siendo *sen α = y* y *cos α = x*):



El signo de las razones trigonométricas dependerá del cuadrante al que pertenece el ángulo.

Cuadrante	α	sen α	cos α	tg α
I	0º < α < 90º	+	+	+
II	90º < α < 180º	+	-	-
III	180º < α < 270º	-	-	+
IV	270º < α < 360º	-	+	-

Podemos afirmar que:

$-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1$	$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$
$-\infty \prec \operatorname{tg}\alpha \prec +\infty$	

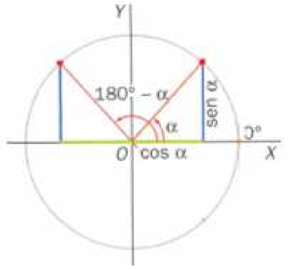
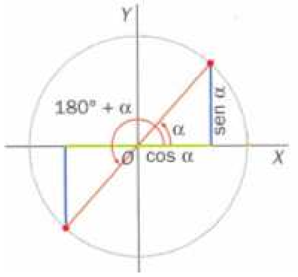
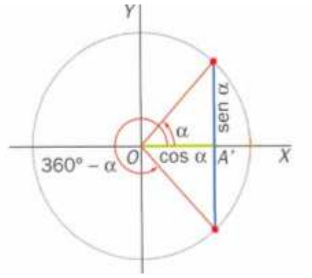
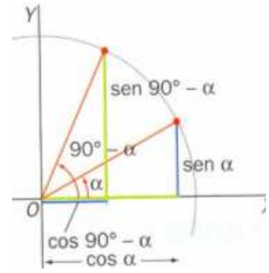
Razones trigonométricas de algunos ángulos

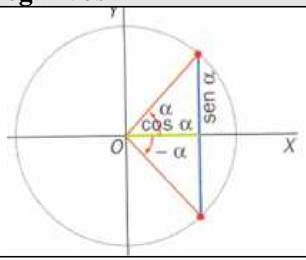
α	sen α	cos α	tg α	cotg α	sec α	cosec α
0º = 0 rad	0	1	0	No existe	1	No existe
$30º = \frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$45º = \frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60º = \frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$90^{\circ} = \frac{\pi}{2}$ rad	1	0	No existe	0	No existe	1
180º = π rad	0	- 1	0	No existe	- 1	No existe
$270º = \frac{3\pi}{2}$ rad	- 1	0	No existe	0	No existe	- 1

7 Indica el signo de las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

a) 120º **b)** 256º **c)** 315º **d)** – 70º **e)** 800º **f)** 55º **g)** 1200º **h)** – 460º

2.3.- Reducción de ángulos al 1^er^ cuadrante.

Ángulos suplementarios	Ángulos que se diferencian en 180º	Ángulos que suman 360º	Ángulos complementarios
▪ $\text{sen}(180º-\alpha)=\text{sen}\,\alpha$ ▪ $\cos(180º-\alpha)=-\cos\alpha$ ▪ $\text{tg}(180º-\alpha)=-\text{tg}\,\alpha$  	▪ $\text{sen}(180º+\alpha)=-\text{sen}\,\alpha$ ▪ $\cos(180º+\alpha)=-\cos\alpha$ ▪ $\text{tg}(180º+\alpha)=\text{tg}\,\alpha$  	▪ $\text{sen}(360º-\alpha)=-\text{sen}\,\alpha$ ▪ $\cos(360º-\alpha)=\cos\alpha$ ▪ $\text{tg}(360º-\alpha)=-\text{tg}\,\alpha$  	▪ $\text{sen}(90º-\alpha)=\cos\alpha$ ▪ $\cos(90º-\alpha)=\text{sen}\,\alpha$ ▪ $\text{tg}(90º-\alpha)=\cot g\,\alpha$ 

Ángulos negativos	Ángulos mayores que 360º	
▪ $\text{sen}(-\alpha)=-\text{sen}\,\alpha$ ▪ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ ▪ $\text{tg}(-\alpha)=-\text{tg}\,\alpha$  	Hacemos la división de β entre 360º.	870 | 360º 150 2
	Calculamos las razones trigonométricas del resto de la división.	sen 870º = sen 150º = $= \text{sen } 30º = \frac{1}{2}$

Ejemplo: Calcula las razones trigonométricas de: **a)** 120º **b)** 225º **c)** 330º **d)** 1590º **e)** – 30º

8 Halla el valor de las siguientes razones trigonométricas reduciéndolas al primer cuadrante.

a) cotag 135º **b)** tg 300º **c)** cos 150º **d)** sen 2285º **e)** sec 240º

f) sen (- 60º) **g)** cosec $\frac{11\pi}{6}$ **h)** sen $\frac{3\pi}{4}$ **i)** tg $\frac{4\pi}{3}$ **j)** cos $\frac{5\pi}{6}$

3.- RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

- $\mathbf{sen^2\alpha+cos^2\alpha=1}$, teorema fundamental de la trigonometría $\left[\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2}{a^2}=1\right]$
- $\mathbf{tg\,\alpha=\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}}$ $\left[\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\frac{b}{a}:\frac{c}{a}=\frac{b}{c}=\text{tg}\,\alpha\right]$
- $\mathbf{1+tg^2\,\alpha=\frac{1}{cos^2\alpha}}$ $\left[1+\text{tg}^2\alpha=1+\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\right]$

Ejemplo: Calcula cos α y tg α, sabiendo que sen α = - 0,5 y que α Є IV.

9 Calcula las razones trigonométricas de α, si:

a) cos α = $\frac{4}{5}$, α Є IV **b)** sen α = $\frac{1}{4}$, α Є I **c)** sec α = - 5, 90º < α < 180º

d) tg α = 0,49, α Є II **e)** cotg α = 2, л < α < $\frac{3\pi}{2}$

4.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA DE ÁNGULOS, DEL ÁNGULO DOBLE Y DEL MITAD.

Razones trigonométricas de:		
Suma de ángulos	**Ángulo doble**	**Ángulo mitad**
▪ $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$ ▪ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$ ▪ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$	▪ $\operatorname{sen}(2\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ ▪ $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$ ▪ $\operatorname{tg}(2\alpha)=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$	▪ $\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ ▪ $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ ▪ $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

10 Calcula las razones trigonométricas de: **a)** 15º **b)** 105º **c)** 75º **d)** $\dfrac{\pi}{12}$ rad **e)** $\dfrac{\pi}{8}$

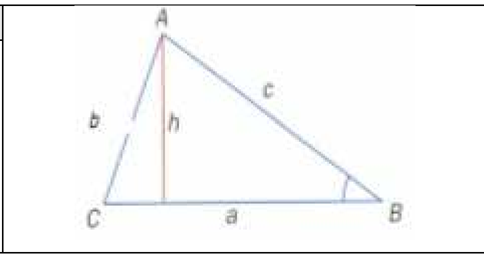
11 Demuestra que $\operatorname{sen}\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$.

12 Si α es un ángulo del 2º cuadrante y sen α = $\dfrac{3}{5}$, calcula las razones de $\dfrac{\alpha}{2}$.

13 Sabiendo que sen 14º = 0,24 y sen 42º = 0,67, calcula: sen 28º, cos 56º y tg 21º.

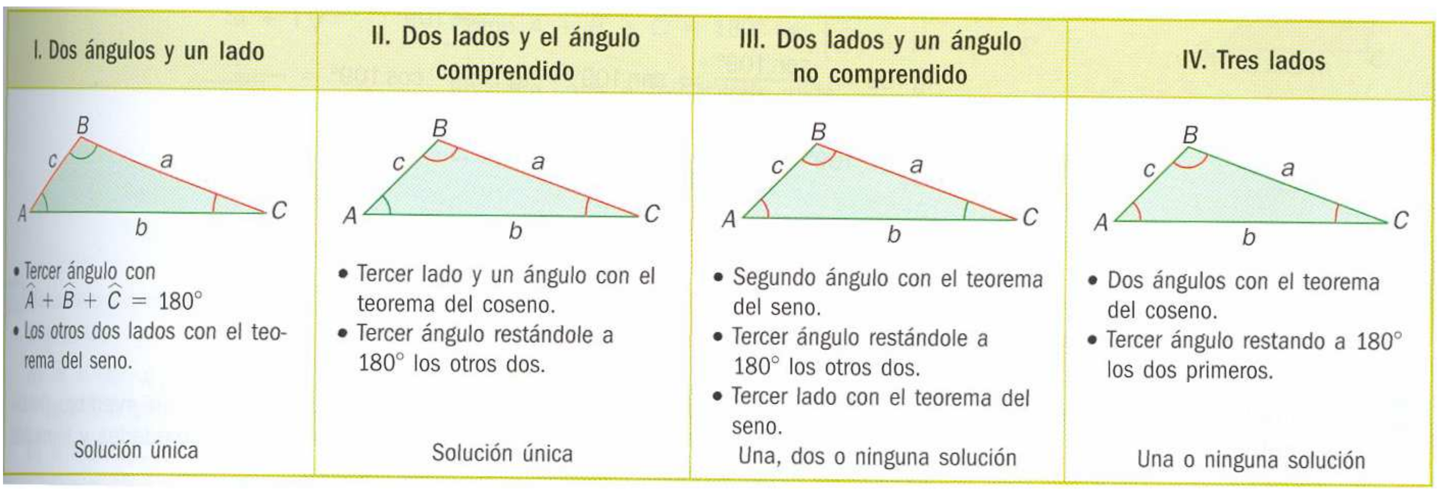
5.- RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.

Para poder determinar los seis elementos (lados y ángulos) de un triángulo es suficiente con conocer tres de ellos, siendo al menos uno de ellos un lado. Resolver un triángulo es calcular los tres elementos desconocidos. Para ello utilizaremos las razones trigonométricas, las relaciones entre ángulos y lados y los siguientes teoremas.

Teorema del seno		**Teorema del coseno**
En cualquier triángulo ABC, se verifica que: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}=\dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$		En cualquier triángulo ABC, se verifica que: $a^2=b^2+c^2-2b\cdot c\cdot\cos\hat{A}$ $b^2=a^2+c^2-2a\cdot c\cdot\cos\hat{B}$ $c^2=a^2+b^2-2a\cdot b\cdot\cos\hat{C}$

Ejemplos: - Halla el lado a de un triángulo ABC sabiendo que b = 12 cm, $\hat{A}$ = 60º y $\hat{B}$ = 40º.
- Calcula la amplitud del ángulo $\hat{B}$ de un triángulo ABC sabiendo que a = 14 cm, b = 12 cm y c = 10 cm.

En la tabla siguiente se recogen los diferentes casos que pueden darse en función de los datos que se conocen.



I. Dos ángulos y un lado	II. Dos lados y el ángulo comprendido	III. Dos lados y un ángulo no comprendido	IV. Tres lados
• Tercer ángulo con $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$ • Los otros dos lados con el teorema del seno.	• Tercer lado y un ángulo con el teorema del coseno. • Tercer ángulo restándole a 180° los otros dos.	• Segundo ángulo con el teorema del seno. • Tercer ángulo restándole a 180° los otros dos. • Tercer lado con el teorema del seno.	• Dos ángulos con el teorema del coseno. • Tercer ángulo restando a 180° los dos primeros.
Solución única	Solución única	Una, dos o ninguna solución	Una o ninguna solución

14 Resuelve los siguientes triángulos:

a) $\hat{A} = 90º$, b = 15 cm, a = 20 cm **b)** $\hat{A} = 80º$, $\hat{B} = 40º$, a = 8 dm **c)** $\hat{A} = 80º$, a = 10 cm, b = 5 m
d) a = 10 cm, b = 15 cm, c = 20 cm **e)** $\hat{A} = 75º$, b = 8 cm, c = 12 mm

15 Dos amigos parten de un mismo punto A y siguen direcciones que forman entre sí un ángulo de 35º. Tras caminar 50 m y 75 m, respectivamente, se sitúan en dos puntos B y C. Calcula la distancia que les separa.

16 El entrenador de un equipo de fútbol indica a tres jugadores que se sitúen en el campo formando un triángulo. ¿Bajo qué ángulo observa cada jugador a los otros dos?

17 Desde dos puntos, separados por una distancia de 100 m, dos observadores encarados contemplan un globo situado en su mismo plano vertical con ángulos de elevación de 40º y 43º. ¿A qué distancia se encuentra el globo de cada observador?

18 Un barco mercante se encuentra a 450 m de un faro y a 300 m de una lancha pesquera. Si ambos son observados desde dicho faro bajo un ángulo de 32º, ¿a qué distancia se encuentra la lancha del faro?

E J E R C I C I O S Y P R O B L E M A S

19 Calcula, de forma exacta, el valor de las siguientes razones trigonométricas:

a) sen 240º **b)** cos 135º **c)** cosec$\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ **d)** tg 300º **e)** cos (- 600º) **f)** sec $\left(\frac{5\pi}{3}\right)$
g) cosec 330º **h)** cotag 225º **i)** sen 1215º **j)** sec 120º **k)** cotag 1830º

20 Halla todos los ángulos comprendidos entre 0º y 360º que verifiquen: **a)** sen $\alpha = \frac{-1}{2}$, **b)** cos $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, **c)** tg $\alpha = \sqrt{3}$.

21 Calcula todas las razones del ángulo α sabiendo que:

a) Ángulo del I cuadrante y cos $\alpha = \frac{2}{3}$ **b)** Pertenece al 2º cuadrante y sen α = 0,25 **c)** 180º < α < 270º y tg $\alpha = \sqrt{2}$
d) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ y $\sec\alpha = \sqrt{2}$ **e)** 90º < α < 180º y cotag α = - 3 **f)** 180º < α < 270º y $\text{cosec}\alpha = -\frac{5}{2}$

22 Sabemos que cos α = - 0,75 y que tg α >0. Indica a qué cuadrante pertenece el ángulo y halla sen α y tg α.

24 Sabiendo que sen α = 0,25 y cos β = 0,5, y que α y β son ángulos del primer cuadrante, calcula:

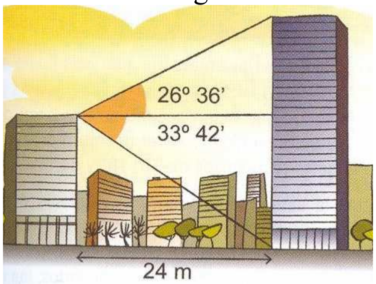
a) sen (α + β) **b)** cos (α - β) **c)** sec (α + β) **d)** cotg (α – β)

25 Si sen α = 0,4 y cos β = - 0,5, siendo 90º <α< 180º y 180º <β< 270º, calcula: **a)** sen (α - β), **b)** cos (α + β), **c)** tg (α + β).

26 Si cos $\alpha = -\frac{2}{3}$ y 90º < α < 180º, calcula las razones trigonométricas de $\frac{\alpha}{2}$.

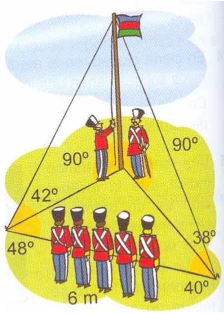
27 Resuelve los siguientes triángulos: **a)** a = 10 cm, $\hat{A} = 45º$, $\hat{B} = 100º$ **b)** a = 12 cm, b = 15 cm, $\hat{C} = 35º$

28 Calcula la altura de los dos edificios de la figura.



29 Un globo está sujeto a una cuerda de 10 m de longitud. Por la acción del viento, el globo se encuentra a una altura de 8 m. Calcula la inclinación de la cuerda respecto de la línea de tierra.

30 Se ha colocado un poste sujeto al suelo mediante dos anclajes como aparece en la figura. Determina si las medidas son correctas.



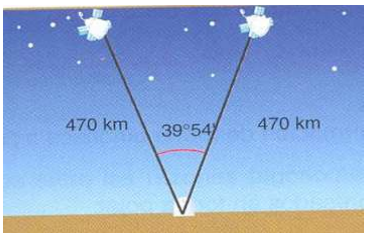
31 Desde un punto del suelo se ve la copa de un pino bajo un ángulo de 42º. Si nos alejamos 2,5 m hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie del pino, vemos la copa bajo un ángulo de 24º. Calcula la altura del pino.

32 Una señal de tráfico indica que la inclinación de un tramo de carretera es del 8 %, lo cual quiere decir que en un desplazamiento horizontal de 100 m se realiza un ascenso de 8 m de altura. ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal? ¿Cuántos metros hay que recorrer para ascender 125 m?

33 En cierta ciudad, en el mediodía del solsticio de verano, los rayos solares tienen una inclinación de 73º 3´. Calcula la longitud de la sombra de un edificio de 52 m de altura.

34 Dos coches, con velocidades constantes respectivas de 90 y 80 km/h, toman dos carreteras que se bifurcan con un ángulo de 82º. ¿Qué distancia habrá entre ellos cuando lleven 15 minutos de viaje?

35 Dos satélites se encuentran a una distancia de 470 km de un observatorio. Si el ángulo que forman las visuales desde el observatorio a los satélites es de 40º, ¿qué distancia separa a los satélites?



36 Dos coches parten a la vez de un cruce del que salen dos carreteras: una en dirección norte y otra en dirección nornordeste. Uno de los coches toma la primera de ellas con una velocidad uniforme de 70 km/h, y el otro la segunda con una velocidad constante de 90 km/h. ¿A qué distancia se encontrarán al cabo de 30 minutos?

37 El ángulo de elevación del punto más alto de un acantilado, observado desde un barco, es de 18º. Al aproximarse 150 m en dirección a la costa, el nuevo ángulo es de 36º. ¿Cuál es la altura del acantilado?

38 Un avión vuela entre dos ciudades, A y B, que distan entre sí 75 km. Las visuales desde A y B hasta el avión forman con la horizontal ángulos de 36º y 12º respectivamente. Calcula la altura a la que vuela el avión y las distancias a las que se encuentra de A y de B, suponiendo que el avión y las ciudades están sobre el mismo plano vertical.

39 Un barco se encuentra a una distancia de 3,5 km del espigón del puerto en el instante en que otro barco se encuentra a 3 km del primero. Si ambos son observados desde el espigón bajo un ángulo de 43º. ¿A qué distancia se encuentra el segundo barco del puerto?