POLINOMIOS. OPERACIONES. RUFFINI

Expresión algebraica: Expresión en la que se operan números conocidos y desconocidos, representados por letras, a, b, c, x, y, z,..., que se denominan indeterminadas. Cada sumando es un término de la expresión.

Ejemplo 1.: $3x^2y^3 + 2xy + 3$ es una expresión algebraica de tres términos y dos indeterminadas.

Términos: $3x^2y^3$, $2xy$, 3 Indeterminadas: x, y

Valor numérico de una expresión algebraica: Es el que se obtiene al sustituir las letras por números y calcular la operación resultante.

Ejemplo 2.: el valor numérico de $3xy + 4x$ para x = 2 e y = 5 es 30, ya que: $3·2·5 + 4·2 = 30 + 8 = 38$

MONOMIOS

Monomio: Es la expresión algebraica que resulta de multiplicar un número por una o varias indeterminadas. El número se denomina **coeficiente**, y el producto de las indeterminadas, **parte literal**.

Dos monomios son ***semejantes*** si tienen la misma parte literal.

Ejemplo 3.:

a) $3x^2yz$ es un monomio de coeficiente 3 y parte literal x^2yz

b) $-x^3$ es un monomio de coeficiente (– 1) y parte literal x^3

c) Los monomios $7x^3y^2$, $4x^3y^2$ son semejantes (la parte literal x^3y^2 es igual)

Grado de un monomio: Es la suma de los exponentes de su parte literal.

Ejemplo 4.:

a) El grado del monomio $8ab^3z^2$ es 6, (1+3+2 =6)

b) El grado del monomio $-x^3$ es 3

c) El grado del monomio constante 7 es cero, ya que la parte literal tendría grado 0 $(7x^0 \text{ y } x^0 = 1)$

Suma y resta de monomios semejantes: Se suman o restan sus coeficientes, manteniéndose la misma parte literal.

Ejemplo 5.:

a) $7x^3y^2 + 4x^3y^2 = (7+4)\,x^3y^2 = 11\,x^3y^2$

b) $7x^3y^2 - 4x^3y^2 = (7-4)\,x^3y^2 = 3\,x^3y^2$

Multiplicación de un monomio por un número: Se multiplica el coeficiente por dicho número, manteniéndose la misma parte literal.

Ejemplo 6.: $(-4)·3ab^3z^2 = ((-4)·3)\,ab^3z^2 = -12\,ab^3z^2$

Multiplicación de monomios: No es necesario que sean semejantes. Se multiplican los coeficientes y las potencias de las partes literales se van multiplicando, agrupando las que tengan la misma base, sumando los grados como se indica en las propiedades de las potencias.

Ejemplo 7.:

a) $(3xy).(4x^2y^3) = 12x^3y^4$ (no sería necesario expresar los monomios entre paréntesis, sólo se han utilizado para indicar cada uno de ellos, bastaría escribir $3xy{\cdot}4x^2y^3 = 12x^3y^4$)

b) $3ab^3z^2 \cdot (-5a^4z^6) = -15a^5b^3z^8$

Cociente de monomios: Se dividen los coeficientes, y las potencias de las partes literales se van dividiendo, agrupando las que tengan la misma base, restando los grados como se indica en las propiedades de las potencias.

Ejemplo 8.:

a) $(4x^2y^3) : (2xy) = \dfrac{4x^2y^3}{2xy} = 2xy^2$

b) $3ab^3z^2 : 9a^4z^6 = \dfrac{3ab^3z^2}{9a^4z^6} = \dfrac{b^3}{3a^3z^4}$ $\boxed{\dfrac{1}{3}a^{1-4}b^3z^{2-6} = \dfrac{1}{3}a^{-3}b^3z^{-4}}$

POLINOMIOS

Polinomio: Expresión formada por sumas y/o restas de monomios de diferentes grados.

Ejemplo 9.:

a) $Q(x,y) = 2xy^3 + 3x^2y - 2$ es un polinomio en dos indeterminadas x e y.

b) $P(x) = 2x^5 - x^3 + x - 1$ es un polinomio en una indeterminada, x.

Grado de un polinomio: Es el de su monomio de mayor grado. Cuando el polinomio sea función de una única indeterminada, el grado coincidirá con el mayor de los exponentes de dicha indeterminada.

Ejemplo 10.:

a) $P(x,y) = 2xy^3 + 3x^2y - 2x + 5$ es de grado 4, ya que:

Grado del monomio $2xy^3$: 1+3=4

Grado del monomio $3x^2y$: 2+1=3

Grado del monomio $-2x$: 1+0=1

Grado del monomio 5 : 0

b) $P(x) = 2x^5 - x^3 + x - 1$ es de grado 5

c) $P(x) = 2x^3 + 3x^7 - 2x^2 + 9$ es grado 7

→ → De aquí en adelante, nos centraremos en polinomios con una indeterminada ← ←

Ordenar un polinomio: Consiste en reorganizar los términos de manera que aparezcan escritos los grados de mayor a menor (descendente) o de menor a mayor (ascendente); generalmente se ordenan de la primera forma.

Ejemplo 11.: $P(x) = 5 + 4x^3 - x^2 - 3x^8 + 2x^6$

ordenado de mayor a menor queda: $P(x) = -3x^8 + 2x^6 + 4x^3 - x^2 + 5$

ordenado de menor a mayor queda: $P(x) = 5 - x^2 + 4x^3 + 2x^6 - 3x^8$

Expresión general de un polinomio en una indeterminada: un polinomio en una indeterminada, x, es de la forma

$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0} \quad \text{con } a_i \in \Re, \forall i = 1,\ldots,n \text{ y } a_n \neq 0$$

Los coeficientes a_i pueden ser cualquier número real y el coeficiente de x^n tiene que ser no nulo, ya que es el término que nos da el grado del polinomio.

$\boxed{a_0}$: Se llama ***término independiente*** del polinomio. Es el coeficiente del término de grado 0, es decir, el término que aparece como a_0 es en realidad el $a_0 x^0$.

Observación: Cuando no aparece alguna potencia x^i, se dice que el polinomio no es completo y significa que el coeficiente correspondiente a dicha potencia es nulo, es decir, $a_i = 0$.

Por ejemplo, el polinomio del apartado b del ejemplo 24 es incompleto, faltan los términos de grado 4 y de grado 2, sería: $P(x) = 2x^5 + 0 \cdot x^4 - x^3 + 0 \cdot x^2 + x - 1$

OPERACIONES CON POLINOMIOS:

Suma y resta: Se realizará sumando los términos por monomios semejantes.

Ejemplo 12.:

a) $(x^2 - 3x + 2) + (2x^2 + 1) = x^2 - 3x + 2 + 2x^2 + 1 = 3x^2 - 3x + 3$

b) $(x^2 - 3x + 2) - (2x^2 + 1) = x^2 - 3x + 2 - 2x^2 - 1 = -x^2 - 3x + 1$

Multiplicación de polinomios:

1. **Producto de un número por un polinomio:** Se multiplica el número por cada uno de los monomios que forman el polinomio.

   Ejemplo 13.:

   a) $4(x^2 - 3x + 2) = 4x^2 - 12x + 8$

   b) $-6(-x^3 + 5x^2 - 3) = 6x^3 - 30x^2 + 18$

2. **Producto de un monomio por un polinomio:** Se multiplica el monomio por cada uno de los monomios que forman el polinomio.

   Ejemplo 14.:

   a) $4x^3 \cdot (x^2 - 3x + 2) = 4x^5 - 12x^4 + 8x^3$

   b) $-6x^4 \cdot (-x^3 + 5x^2 - 3) = 6x^7 - 30x^6 + 18x^4$

3. **Producto de dos polinomios:** Se multiplica cada monomio del primer polinomio por cada uno de los monomios del segundo polinomio y después se agrupan los monomios semejantes.

Ejemplo 15.:

a) $(2 - 6x) \cdot (-x^3 - 3) = -2x^3 - 6 + 6x^4 + 18x$

b) $(4x^3 + 5x) \cdot (x^2 - 3x + 2) = 4x^5 - 12x^4 + 8x^3 + 5x^3 - 15x^2 + 10x = 4x^5 - 12x^4 + 13x^3 - 15x^2 + 10x$

Cociente de polinomios:

Ordenamos los polinomios dividendo y divisor de forma descendente. Los colocamos como las divisiones de números, el dividendo a la izquierda y el divisor a la derecha. Si el dividendo es incompleto, dejamos los huecos correspondientes. La división se realizará de forma similar a como se procede con los números.

Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor; vamos multiplicando este resultado por cada término del divisor y se lo restamos al dividendo (para que resulte más sencillo y no cometamos errores con los signos, podemos ir cambiando el signo de cada producto resultante, colocarlo debajo de su correspondiente grado en el dividendo y sumar con el dividendo) ; repetimos el proceso hasta que el grado del polinomio resto sea menor que el del divisor (análogo a las divisiones entre números).

Observación: En el caso de que el resto de P(x):Q(x) resulte ser 0, diremos que la división es exacta y que el polinomio P(x) es divisible por el polinomio Q(x).

Ejemplo 16.: Realiza la división P(x):Q(x), siendo $P(x) = x^4 + 2x^3 - x + 5$ y $Q(x) = x^2 - 2x + 3$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +2x^3 & & -x & +5 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +2x^3 & -3x^2 & & & x^2 + 4x + 5 \\ \cline{1-3}
 & 4x^3 & -3x^2 & -x & & \\
 & -4x^3 & +8x^2 & -12x & & \\ \cline{2-4}
 & & 5x^2 & -13x & +5 & \\
 & & -5x^2 & +10x & -15 & \\ \cline{3-5}
 & & & -3x & -10 &
\end{array}
$$

Polinomio cociente, C(x)

Polinomio resto, R(x)

Se verifica la misma relación que con números, D = d·c + r, pero con polinomios: P(x) = Q(x)·C(x) + R(x)

REGLA DE RUFFINI

Para dividir un polinomio entre un binomio de la forma x – a, podemos aplicar el método anterior, o bien utilizar un algoritmo que permite obtener de forma rápida y sencilla el cociente y el resto de dicha división. Este algoritmo es lo que se conoce como la **Regla de Ruffini**.

Veamos cómo funciona con un ejemplo.

Ejemplo 17.: Consideramos el cociente P(x):Q(x) con $P(x) = 2x^3 - x + 5 + x^4$ y $Q(x) = x - 1$
Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Ordenamos de forma decreciente, si no lo está ya, el dividendo P(x) $\Rightarrow$
$P(x) = x^4 + 2x^3 - x + 5$

2. Colocamos los coeficientes de todos los términos, incluidos los que son 0. A la izquierda escribimos el número que se resta a x en el divisor Q(x), en este caso 1 y bajamos el primer coeficiente de la izquierda, es decir, el coeficiente del término de mayor grado.

Número que se resta a x $\searrow$	coef. de x^4 $\downarrow$	coef. de x^3 $\downarrow$	coef. de x^2 $\downarrow$	coef. de x $\downarrow$	término indep. $\downarrow$
	1	2	0	– 1	5
1					
	1				
	$\uparrow$ coef. bajado				

3. Multiplicamos el coeficiente bajado por el número de la izquierda y colocamos el resultado debajo del coeficiente del término siguiente y sumamos

	1	2	0	– 1	5
1		1			
	1	3			

2+1=3

4. Repetimos el paso anterior con las cantidades que vamos obteniendo, hasta llegar al último término.

	1	2	0	– 1	5
1		1	3	3	2
	1	3	3	2	7

5. Último número obtenido, el 7 de la casilla sombreada, se corresponde con el resto de la división y los números anteriores, 1 3 3 2, son los coeficientes del cociente.
Por tanto, resto R(x) = 7 y cociente $C(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

Observaciones:

- Si el dividendo hubiese sido un binomio de la forma x + 1, pondríamos a la izquierda -1, puesto que es el número que estaríamos restando a x, pues escrito en forma de resta x + 1 = x – (– 1).

- Como se divide entre un polinomio de grado 1, se tiene que:
  - El cociente será de, exactamente, un grado menor que el dividendo.
  - El resto será de grado cero, ya que tiene que ser de grado menor que el divisor.

Ejemplo 18.: Calcula P(x):Q(x)

a) $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ y $Q(x) = x + 2$

	1	2	-1	– 2
-2		-2	0	2
	1	0	-1	0

Resto R(x)=0; Cociente $C(x) = x^2 + 0x - 1 \Rightarrow C(x) = x^2 - 1$

b) $P(x) = 4x^3 + 2x + 6$ y $Q(x) = x + 4$

	4	0	2	6
-4		-16	64	-264

	4	-16	66	-258

Resto R(x)= - 258 ; Cociente $C(x) = 4x^2 - 16x + 66$

c) $P(x) = x^5 - 32$ y $Q(x) = x - 2$

	1	0	0	0	0	-32
2		2	4	8	16	32
	1	2	4	8	16	0

Resto R(x)=0; Cociente $C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$

TEOREMA DEL RESTO:

El resto de la división de un polinomio P(x), entre un polinomio de la forma (x - a) es el valor numérico de dicho polinomio para el valor x = a. Es decir, P(a) = R

Ejemplo 19.: Para los apartados del ejemplo 32

a) $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$; P(-2) = 0 (ya que el resto era 0)

b) $P(x) = 4x^3 + 2x + 6$; P(-4) = - 258

c) $P(x) = x^5 - 32$; P(2) = 0

Observación: Sabemos que cuando el resto de la división de un polinomio entre un binomio x-a es 0, el polinomio es divisible por dicho binomio. Con este teorema, podemos decir que si el valor de un polinomio en x = a es 0, entonces dicho polinomio será divisible por el binomio x – a.

Por ejemplo, para $P(x) = x^3 + 3x - 4$, se tiene que su valor numérico en el 1 es: P(1) = 1 + 3 – 4 = 0 , entonces, como éste sería el resto de dividir P(x) entre x – 1, podemos decir que el polinomio P(x) es divisible por x – 1.

FACTORIZACIÓN

RAÍCES DE UN POLINOMIO:

Se dice que un valor **x = a** es **raíz de un polinomio** P(x), cuando al sustituir dicho valor en el polinomio, el resultado es 0; es decir, cuando P(a) = 0.

Por ejemplo, en el apartado a) del ejemplo 33, x = – 2 es una raíz del polinomio dado y en el apartado c), x = 2 es raíz del P(x). Sin embargo, x = – 4 no es una raíz del polinomio del apartado b).

Las raíces de un polinomio, también se llaman **ceros del polinomio**.

Observaciones:

- Si considerásemos el conjunto de los llamados números complejos ℂ, en el cual está contenido ℝ, podríamos asegurar que un polinomio de grado n tiene siempre n raíces, es decir, tantas raíces como indica su grado. *Trabajando sólo con los números reales, esto no se cumple siempre, pero sí podemos afirmar* que:
  - El número de raíces reales es menor o igual que el grado del polinomio.
  - Un polinomio de grado impar tiene siempre, al menos, una raíz real. (Esto se debe a que en ℂ, las raíces complejas no reales van por parejas)

- Un polinomio cuyo término independiente sea 0, es decir, no aparece término independiente, siempre admite como raíz x = 0. Como se trata de una expresión en la que todos los términos contienen el factor x, al sustituir ésta por 0, se anulan todos y el resultado es 0. Por ejemplo, para el polinomio $P(x)=4x^6+2x^5-3x^3+x$, se tiene que $P(0)=4\cdot 0^6+2\cdot 0^5-3\cdot 0^3+0=0$.

MÉTODOS PARA CALCULAR LAS RAÍCES DE UN POLINOMIO:

El primer paso será igualar el polinomio a cero, y después resolver la ecuación que nos queda.

1. **Si es de Grado 1:** Bastará con despejar la incógnita, x.

Ejemplo 20.: Halla la raíz del polinomio P(x) = 2x+3

$$2x+3=0 \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x=\frac{-3}{2} \quad \text{(Raíz única)}$$

2. **Si es de Grado 2:** Resolveremos la ecuación de segundo grado resultante.

Recordamos que la fórmula para resolver $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$ es $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y que cuando la ecuación es incompleta, puede resolverse sin utilizarla.

Ejemplo 21.: Busca las raíces de los polinomios siguientes

a) $P(x)=2x^2+5x+3$ (a=2; b=5; c=3)

$$2x^2+5x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\frac{-5\pm 1}{4}=\begin{cases}\dfrac{-5+1}{4}=\dfrac{-4}{4}=-1\\[2ex] \dfrac{-5-1}{4}=\dfrac{-6}{4}=\dfrac{-3}{2}\end{cases} \rightarrow \text{Dos raíces}$$

b) $P(x)=5x^2-45$ (incompleta con b=0; a=5; c=– 45)

$$5x^2-45=0 \Rightarrow 5x^2=45 \Rightarrow x^2=\frac{45}{5} \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm 3 \quad \rightarrow \text{Dos raíces}$$

c) $P(x)=3x^2-21x$ (incompleta con c=0; a=3; b=– 21)

$$3x^2-21x=0 \Rightarrow x\cdot(3x-21)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ 3x-21=0 \Rightarrow 3x=21 \Rightarrow x=\dfrac{21}{3}=7\end{cases} \rightarrow \text{Dos raíces}$$

d) $P(x) = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$ → Una sola solución y parece que sólo tiene una raíz, pero en realidad, es un mismo valor que aparece dos veces:

$$x = ... = \frac{2 \pm 0}{2} = \begin{cases} \frac{2+0}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{2-0}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Se dice que es una **raíz doble**

e) $P(x) = x^2 - x + 1$

$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Rightarrow \nexists$ raíces reales (porque no existe, entre los números reales, la raíz cuadrada de negativos) → No tiene raíces reales

f) $P(x) = x^2 + 4$

$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4}$ → No tiene raíces reales

3. **Si es Bicuadrada:** Se trata de un polinomio de grado 4 incompleto, con sólo los términos de los grados 4, 2 y 0. Es decir, tiene la forma: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ con $a \neq 0$. Esta ecuación se puede transformar en una de segundo grado mediante el cambio de variable $x^2 = y$. Resolveremos la de 2º grado resultante y desharemos el cambio para encontrar las soluciones de la variable inicial.

Ejemplo 22.: Encuentra las raíces de los polinomios siguientes

a) $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, hacemos el cambio: $x^2 = y \Rightarrow y^2 - 13y + 36 = 0$

$$y^2 - 13y + 36 = 0 \Rightarrow y = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{13+5}{2} = \frac{18}{2} = 9 \\ \frac{13-5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

Buscamos ahora los valores que corresponden a la variable original para cada una de las soluciones obtenidas:

- $y = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$
- $y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$

Las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$ son: x = -3, x = 3, x = -2 y x = 2.

b) $P(x) = x^4 + 14x^2 - 32$

$x^4 + 14x^2 - 32 = 0$, hacemos el cambio: $x^2 = y \Rightarrow y^2 + 14y - 32 = 0$

$$y^2 + 14y - 32 = 0 \Rightarrow y = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 128}}{2} = \frac{-14 \pm 18}{2} = \begin{cases} \frac{-14+18}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{-14-18}{2} = \frac{-32}{2} = -16 \end{cases}$$

- $y=2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$
- $y=-16 \Rightarrow x^2=-16 \Rightarrow$ no hay raíces reales con este valor (porque $x^2=-16 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-16}$)

Las raíces del polinomio $P(x)=x^4+14x^2-32$ son: $x=-\sqrt{2}$ y $x=\sqrt{2}$.

4. **Si es de Grado mayor que 2, no bicuadrada:** En este caso, la regla de Ruffini será útil para encontrar las raíces ***enteras*** del polinomio. Las posibles raíces las buscaremos entre los divisores del término independiente. Iremos probando cada uno de ellos para ver si el resto da 0, en cuyo caso, se tratará de una raíz. El número candidato a raíz es el que colocaremos a la izquierda al aplicar Ruffini.

Veámoslo con algunos ejemplos.

Ejemplo 23.: Halla las raíces de los siguientes polinomios

a) $P(x)=x^3-4x^2+x+6$

$x^3-4x^2+x+6=0$ Las posibles raíces enteras estarán entre los divisores del término independiente 6, que son: ±1, ±2, ±3, ±6. Empezamos a comprobar:

- Con el 1:

	1	-4	1	6
1	0	1	-3	-2
	1	-3	-2	**4**

Resto $\neq 0 \Rightarrow$ No es raíz

Como el resto es distinto de cero, es 4, x = 1 no es raíz del polinomio dado.

- Con el -1:

	1	-4	1	6
-1	0	-1	5	-6
	1	-5	6	**0**

Resto 0 $\Rightarrow$ Es raíz

- Con el 2:

	1	-4	1	6
2	0	2	-4	-6
	1	-2	-3	**0**

Resto 0 $\Rightarrow$ Es raíz

- Con el 3:

	1	-4	1	6
3	0	3	-3	-6
	1	-1	-2	**0**

Resto 0 $\Rightarrow$ Es raíz

Ya no es necesario seguir probando con el resto de los divisores, ya que, un polinomio tiene, como mucho, tantas raíces reales como indica su grado. Como es de grado 3 y hemos encontrado 3 raíces, ya no puede haber más. Por tanto, los ceros de este polinomio son: x = -1, x = 2 y x = 3.

Generalmente, no se aplicará Ruffini por separado para cada valor, sino que se hará de forma continua, es decir, aplicaremos el nuevo valor a tantear a los últimos coeficientes obtenidos. Si el resto es cero, continuamos y si no lo es, probamos con otro de los divisores. Sólo escribiremos en la tabla continua los que sean raíces del polinomio. En cada aplicación, el siguiente número a probar se elegirá entre los divisores del nuevo término independiente obtenido en los coeficientes del polinomio cociente (ver punto 5 de la regla de Ruffini, pág.12). No se tendrán en cuenta los ya probados y que no han sido raíz, pero sí puede volver a serlo alguno de los anteriores, es decir las raíces se pueden repetir.

Este tanteo puede hacerse mentalmente o borrar los cálculos realizados cuando el resto no sea cero.

Aplicado a este ejemplo:

	1	-4	1	6
-1	0	-1	5	-6
	1	-5	6	**0**
2	0	2	-6	
	1	-3	**0**	
3	0	3		
	1	**0**		

Nuevo término independiente

Nuevo término independiente; los divisores a probar serán los de -3, que son: ±3 y ±1.

Esta forma de emplear la regla de Ruffini, nos ayudará más adelante en la factorización de polinomios.

b) $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$ (La bicuadrada del apartado a) del ejemplo 36)

Los divisores de 36 son: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±18, ±36

	1	0	-13	0	36
-2	0	-2	4	18	-36
	1	-2	-9	18	**0**
2	0	2	0	-18	
	1	0	-9	**0**	
3	0	3	9		
	1	3	**0**		
-3	0	-3			
	1	**0**			

Buscamos la siguiente raíz entre los divisores de 18: ±1, ±2, ±3, ±6, ±9

Buscamos la siguiente raíz entre los divisores de 9: ±1, ±3, ±9

Buscamos la siguiente raíz entre los divisores de 3: ±1, ±3

Como es de grado 4 y hemos conseguido 4 raíces, no es necesario buscar más. Los ceros de este polinomio son: x = -2, x = 2, x = -3 y x = 3.

c) $P(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 5$

	1	4	-6	-4	5
-1	0	-1	-3	9	-5
	1	3	-9	5	**0**
1	0	1	4	-5	
	1	4	-5	**0**	

-5	0	-5	5
	1	-1	**0**
1	0	1	
	1	**0**	

Raíces: -1, 1 (es doble) y -5

d) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 9$ (divisores del término independiente 9: ±1, ±3, ±9)

	1	-5	4	3	9
3	0	3	-6	-6	-9
	1	-2	-2	-3	**0**
3	0	3	3	3	
	1	1	1	**0**	

Si continuamos probando con 1 y -1, que serían los divisores de 1 (el último término independiente), no obtendríamos ningún resto 0. Entonces, no hay más raíces *enteras*. Tendríamos que ver si existen otras raíces.

Para ello trabajaremos con el último polinomio cociente obtenido, que es de grado 2 y podemos aplicar la fórmula para ecuaciones de segundo grado.

Último polinomio cociente: $C(x) = x^2 + x + 1$

$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ $\rightarrow$ No tiene raíces reales, ya que no existe la raíz cuadrada de un número negativo.

Por tanto, el polinomio inicial P(x) tiene sólo una raíz real, x = 3, que es doble.

e) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ (divisores del término independiente -2: ±1, ±2)

	2	3	-3	-2
1	0	2	5	2
	2	5	2	**0**
-2	0	-4	-2	
	2	1	**0**	

Para los divisores 1 y -1 del término independiente del último polinomio cociente, C(x) = 2x+1, no sale el resto cero, entonces no hay más raíces enteras; pero como sólo hemos encontrado dos raíces reales, buscamos la tercera con este

C(x): $2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{-1}{2}$

Las raíces de este polinomio P(x) son: x = 1, x = -2 y $x = \dfrac{-1}{2}$.

5. **Si tenemos un producto de varios polinomios:** No es necesario realizar el producto de ellos para ver el polinomio final del que se trata y calcular después sus raíces. Sólo hay que tener en cuenta lo siguiente: *Para que un producto sea 0, alguno de los factores debe ser cero*.

Esto significa que igualando cada uno de los factores a cero, encontraremos todas las raíces.

Ejemplo 24.: Encuentra las raíces de los siguientes polinomios

a) $P(x) = (x-3)\cdot(x+4)\cdot x$

$(x-3)\cdot(x+4)\cdot x = 0 \Rightarrow$
- $\boxed{x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3}$
- $\boxed{x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4}$
- $\boxed{x = 0}$

$\Rightarrow$ Las raíces son: x = 0, x = 3 y x = - 4

b) $P(x)=(x+1)\cdot(x-5)\cdot(x^2-5x+6)$

$$(x+1)\cdot(x-5)\cdot(x^2-5x+6)=0\Rightarrow\begin{cases}x+1=0\Rightarrow x=-1\\[2ex] x-5=0\Rightarrow x=5\\[2ex] x^2-5x+6=0\Rightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\dfrac{5\pm1}{2}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{5+1}{2}=\dfrac{5+1}{2}=3\\ \dfrac{5-1}{2}=\dfrac{5-1}{2}=2\end{array}\right.\end{cases}$$

Las raíces son -1, 5, 2 y 3

c) $P(x)=x\cdot(3x+4)\cdot(-2x^2+3x-2)$

$$x\cdot(3x+4)\cdot(-2x^2+3x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ 3x+4=0\Rightarrow 3x=-4\Rightarrow x=\dfrac{-4}{3}\\[2ex] -2x^2+3x-2=0\Rightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-16}}{-4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{-7}}{-4}\Rightarrow \text{No hay raíces reales}\end{cases}$$

Las raíces son x = 0 y $x=\dfrac{-4}{3}$

d) $P(x)=(x-1)^3$

$(x-1)^3=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$ Raíz triple

$$\left(\begin{array}{l}(x-1)^3=0\Leftrightarrow(x-1)(x-1)(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x-1=0\Rightarrow x=1\\ x-1=0\Rightarrow x=1\\ x-1=0\Rightarrow x=1\end{cases}\\ \quad\text{la raíz x=1 aparece tres veces}\end{array}\right)$$

e) $P(x)=-5\cdot(x-21)\cdot(x+8)^2\cdot(x+3)\cdot(x-5)\cdot(x-11)\cdot(x+1)$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{no puede}\\ \text{igualarse a 0}}}{-5}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ x=21}}{(x-21)}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ x=-8\\ \text{doble}}}{(x+8)^2}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ x=-3}}{(x+3)}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ x=5}}{(x-5)}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ x=11}}{(x-11)}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ x=-1}}{(x+1)}=0$$ ⇒ Las raíces son: 21, -8 doble, -3, 5, 11 y -1

DESCOMPOSICIÓN DE UN POLINOMIO EN FACTORES:

Factorizar un polinomio consiste en descomponerlo en producto de polinomios del menor grado posible, de forma que ninguno de ellos pueda descomponerse a su vez.

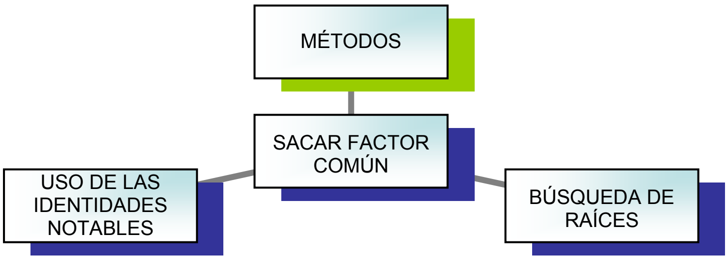
Cada uno de los polinomios de la descomposición es un **divisor** del polinomio inicial. Es decir, el polinomio es divisible por cada uno de los factores de la descomposición.

(Es análogo a la descomposición en factores primos de un número)

Polinomio Irreducible: Cuando no tiene ningún divisor de grado inferior al suyo. Por ejemplo, todos los polinomios de grado 1 son irreducibles.

Métodos de factorización:

Los 3 recursos siguientes, por separado o combinados, nos ayudarán en la descomposición en factores de un polinomio.



Observaciones:

- Independientemente del método utilizado para la búsqueda de los factores, la expresión final de la descomposición debe ser la misma.

- Si realizamos el producto de los factores encontrados, el resultado debe ser el polinomio inicial.

1. **Sacar factor común:** Cuando en la expresión del polinomio dado aparezcan uno o varios factores que se repiten en todos los términos, podremos sacar factor común. Si los factores obtenidos son irreducibles, el polinomio queda descompuesto; en caso contrario, para los factores que aún admitan descomposición, utilizaremos alguna de las técnicas que se comentan en los puntos siguientes.

Ejemplo 25.: Factoriza los siguientes polinomios

a) $P(x) = 3x^2 - x \Rightarrow 3x^2 - x = x \cdot (3x - 1) \rightarrow$ Ya no se puede descomponer más

El factor x se repite en todos los términos

b) $P(x) = x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow x^3 - 2x^2 + x = x \cdot (x^2 - 2x + 1) \rightarrow$ Ahora tendríamos que comprobar si se puede seguir descomponiendo el factor $x^2 - 2x + 1$ (lo haremos con los apartados 1 y 2)

c) $P(x) = x \cdot (x+1) + x^2 \cdot (x+1) + x^3 \cdot (x+1) = x \cdot (x+1) \cdot (1 + x + x^2) \rightarrow$ Habría que estudiar $1 + x + x^2$

El factor x·(x+1) aparece en todos los términos

2. **Identificación con las Identidades Notables:** Una forma rápida de descomponer un polinomio es reconociéndolo como alguna de las llamadas Identidades Notables que apuntamos a continuación.

i) *Cuadrado de una suma:* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ii) *Cuadrado de una diferencia:* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

iii) *Suma por diferencia:* $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ *(diferencia de cuadrados)*

Ejemplo 26.: Factoriza los siguientes polinomios

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow x^3 - 2x^2 + x = x \cdot (x^2 - 2x + 1) = x \cdot (x-1)^2$

Ej. 39 b)

Comenzamos sacando factor común x

$\underset{\text{cuadrado del 1º}}{x^2} - \underset{\text{doble del 1º por el 2º}}{2x} + \underset{\text{cuadrado del 2º}}{1}$

b) $P(x) = x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

$$\underset{\text{cuadrado del 1º}}{\underset{\downarrow}{x^2}} - \underset{\text{cuadrado del 2º}}{\underset{\downarrow}{9}} = x^2 - 3^2$$

c) $P(x) = 4x^2 - 7 = (2x+\sqrt{7})(2x-\sqrt{7})$

$$\underset{\text{cuadrado del 1º}}{\underset{\downarrow}{4x^2}} - \underset{\text{cuadrado del 2º}}{\underset{\downarrow}{7}} = (2x)^2 - (\sqrt{7})^2$$

d) $P(x) = 27x^4 + 36x^3 + 12x^2 = 3x^2(9x^2 + 12x + 4) = 3x^2(3x+2)^2$

En cada término aparecen los factores 3 y x^2

$$9x^2 + 12x + 4 = \underset{\text{cuadrado del 1º}}{\underset{\downarrow}{(3x)^2}} + \underset{\text{doble del 1º por el 2º}}{\underset{\downarrow}{2 \cdot 3x \cdot 2}} + \underset{\text{cuadrado del 2º}}{\underset{\downarrow}{2^2}}$$

3. **Búsqueda de raíces:** Hallaremos las raíces del polinomio y por cada raíz real x = a, aparece un factor del tipo (x – a) en la descomposición.

Observaciones:

- Si una raíz es doble, triple, etc., aparecerá elevado al cuadrado, al cubo, etc., su binomio correspondiente.
- Si no tiene raíces reales, se tratará de un polinomio irreducible.
- La raíz x = 0 origina el factor x. Un polinomio sin término independiente, siempre admite esta raíz.
- Utilizaremos Ruffini cuando sea posible, pero sólo sirve para raíces enteras.
- No importa el orden en que se vayan encontrando las raíces.

Ejemplo 27.: Descompondremos los polinomios de los apartados a) y b) del ejemplo 40 a través del cálculo de sus raíces, en lugar de identificarlos con una identidad notable.

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow x^3 - 2x^2 + x = x\cdot(x^2 - 2x + 1)$

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \dfrac{2 \pm 0}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \rightarrow$ Raíz doble (ver ejemplo 35 d),

entonces, la descomposición final queda: $x^3 - 2x^2 + x = x\cdot(x^2 - 2x + 1) = x\cdot(x-1)^2$

b) $P(x) = x^2 - 9$

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

Ejemplo 28.:

a) Ejemplo 39 c) $P(x) = x\cdot(x+1) + x^2\cdot(x+1) + x^3\cdot(x+1) = x\cdot(x+1)\cdot(1+x+x^2)$

$x^2+x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \Rightarrow$ No tiene raíces reales, no se puede descomponer más, entonces la factorización de P(x) queda como estaba:

$P(x)=x\cdot(x+1)\cdot(1+x+x^2)$

b) Ejemplo 37 a) $P(x)=x^3-4x^2+x+6$

$x^3-4x^2+x+6=0 \to$ Utilizando Ruffini podemos encontrar las raíces enteras y, por tanto, sus factores correspondientes en la descomposición.

Como cada raíz origina un factor de la forma x – a, cuando en la división por Ruffini el resto para un x = a sale 0, estamos diciendo que el polinomio de partida es divisible por el binomio x – a, y por tanto, este binomio junto con el cociente obtenido nos dará una factorización del polinomio (recuerda que si R(x) = 0, entonces, D(x) =d(x)·C(x)). Habrá que ir comprobando si los cocientes que vamos obteniendo se pueden descomponer, puesto que se trata de conseguir factores irreducibles.

	1	-4	1	6
-1	0	-1	5	-6
	1	-5	6	**0**
2	0	2	-6	
	1	-3	**0**	

Obtenemos una primera factorización: $x^3-4x^2+x+6=(x+1)\cdot(x^2-5x+6)$

Tenemos ahora una segunda factorización, descomponiendo el factor de segundo grado que aparecía: $x^3-4x^2+x+6=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$

Ya tenemos la descomposición del polinomio; no es necesario buscar la otra raíz (x=3) ya que aparece en el último término.

En el caso de que aplicásemos de nuevo Ruffini para la última raíz, en la descomposición final habrá que tener en cuenta el último número que se obtiene, pues se trataría de un polinomio cociente de grado 0 y además, correspondería al coeficiente del término de mayor grado del polinomio inicial:

	1	-4	1	6
-1	0	-1	5	-6
	1	-5	6	**0**
2	0	2	-6	
	1	-3	**0**	
3	0	3		
	1	**0**		

La descomposición final quedaría:

$x^3-4x^2+x+6=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot 1=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$

Observación: Para el polinomio de segundo grado que se obtiene en la 1ª factorización, no es necesario continuar con Ruffini, se podía resolver con la fórmula conocida para las ecuaciones de 2º grado. Dicha fórmula habrá que utilizarla obligatoriamente cuando no encontremos raíces enteras por Ruffini.

c) $P(x)=2x^3-10x^2-4x+48$

	2	-10	-4	48
-2	0	-4	28	-48
	2	-14	24	**0**
3	0	6	-24	
	2	-8	**0**	

La descomposición quedaría:

$2x^3-10x^2-4x+48=(x+2)\cdot(x-3)\cdot(2x-8)$

Si hubiésemos continuado para encontrar la última raíz:

	2	-10	-4	48
2	0	-4	28	-48
	2	-14	24	**0**
3	0	6	-24	
	2	-8	**0**	
4	0	8		
	2	**0**		

Tendríamos: $2x^3 - 10x^2 - 4x + 48 = (x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot 2$

Esta factorización es la misma que la anterior, sólo habría que sacar factor común 2 en (2x - 8).

d) $P(x) = x^4 - 3x^3 + x - 3$

	1	-3	0	1	-3
-1	0	-1	4	-4	3
	1	-4	4	-3	**0**
3	0	3	-3	3	
	1	-1	1	**0**	

Se tiene: $x^4 - 3x^3 + x - 3 = (x+1)\cdot(x-3)\cdot(x^2 - x + 1)$

Si probamos con los divisores 1 y -1 del término independiente del último cociente, los restos son distintos de cero, por tanto no tiene raíces enteras.

Habrá que comprobar si tiene otras raíces utilizando la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado:

$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Rightarrow$ No tiene raíces reales, no podemos descomponer más.

4. **Caso de raíces conocidas:** En el caso en el que conozcamos un polinomio de grado n y sus n raíces reales, la descomposición contendrá un factor de la forma (x-a) por cada raíz y además, habrá que añadir como factor el coeficiente del término de mayor grado, siempre que dicho coeficiente sea distinto de 1.

Ejemplo 29.: Escribe la descomposición en factores del polinomio $P(x)$ conocidas sus raíces

a) $P(x) = 3x^3 + 12x^2 + 3x - 18$ raíces: x = 1, x = -2 y x = -3

$3x^3 + 12x^2 + 3x - 18 = 3\cdot(x-1)(x+2)(x+3)$

b) $P(x) = x^2 - 7x + 12$ raíces: x = 3 y x = 4

$x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$

c) $P(x) = 5x^2 + 14x - 3$ raíces: x = 1/5 y x = -3

$5x^2 + 14x - 3 = 5\cdot\left(x - \frac{1}{5}\right)\cdot(x+3) = (5x-1)\cdot(x+3)$